

Ю. И. Бельченко, Е. А. Гилёв, З. К. Силагадзе

Механика частиц и тел в задачах

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением по
классическому университетскому образованию РФ в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 010701.65 — Физика
и направлению 010700.62 — Физика*



Москва ♦ Ижевск

2008

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3
К 59

Интернет-магазин

MAFFESIS

<http://shop.rsd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

Бельченко Ю. И., Гилёв Е. А., Силагалзе З. К.
Механика частиц и тел в задачах. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. — 248 с.

Сборник содержит задачи по механике и теории относительности, используемые при изучении курса общей физики на младших курсах физических факультетов университетов. Основу пособия составляют оригинальные задачи, предложенные преподавателями Новосибирского государственного университета — сотрудниками физических институтов Сибирского отделения РАН — для семинаров, самостоятельной работы студентов, письменных работ. Задачи сгруппированы в соответствии с программой семинаров по механике, принятой в НГУ. Наряду с формулировками приведены ответы и решения задач, что может быть полезно для обучающихся самостоятельно.

ISBN 978-5-93972-675-7

ББК 22.3

© Ю. И. Бельченко, Е. А. Гилёв, З. К. Силагалзе, 2008
© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008

<http://shop.rsd.ru>
<http://rsd.org.ru>

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
Принятые обозначения.....	6
Справочные материалы.....	7
1. Кинематика	Задачи Ответы
1.1. Пространство и время.....	8 94
1.2. Системы координат. Скорость, ускорение.....	9 95
1.3. Векторы.....	12 98
1.4. Системы отсчета.....	12 100
1.5. Кинематика вращения.....	13 103
2. Релятивистская кинематика	
2.1. Скорость света.....	16 108
2.2. События. Преобразования Лоренца.....	17 110
2.3. Сложение скоростей.....	21 125
2.4. Направление движения. Преобразование углов.....	23 129
3. Энергия-импульс	
3.1. Масса, энергия и импульс релятивистских частиц.....	26 133
3.2. Преобразование энергии-импульса. Эффект Доплера.....	27 133
4. Законы сохранения энергии и импульса	
4.1. Растад частиц.....	31 140
4.2. Неупругие столкновения. Пороги рождения частиц.....	35 148
4.3. Упругие столкновения.....	38 152

5. Простейшая релятивистская динамика		
5.1. Движение в магнитном поле. Сила Лоренца.....	41	158
5.2. Движение в электрическом поле. Релятивистская ракета.....	44	161
6. Динамика одномерного движения		
6.1. Законы движения. Фазовая плоскость.....	48	169
6.2. Движение с трением.....	50	171
6.3. Движение с переменной массой.....	52	174
7. Колебания		
7.1. Свободные колебания.....	55	180
7.2. Колебания с трением.....	57	183
7.3. Вынужденные колебания. Резонанс.....	58	184
7.4. Адиабатические инварианты.....	60	187
8. Движение в центральном поле		
8.1. Потенциал поля.....	63	191
8.2. Момент импульса. Центробежный потенциал.....	65	195
8.3. Кулоновское поле. Законы Кеплера.....	67	199
8.4. Задача двух тел.....	71	207
8.5. Рассеяние частиц.....	74	210
9. Движение твердого тела		
9.1. Равновесие тел.....	77	220
9.2. Вращение с неизменной ориентацией оси. Момент инерции, момент импульса.....	79	223
9.3. Физический маятник.....	81	225
9.4. Плоское движение тел.....	84	229
9.5. Вращение с изменением ориентации оси. Гироскоп.....	88	235
10. Ненерциальные системы отсчета		
Литература.....	90	238
		245

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник содержит более 500 задач по курсу механики и теории относительности, представленных в течение многих лет студентам I-го курса физического факультета Новосибирского государственного университета. Курс был разработан основателем и первым директором Института ядерной физики Сибирского отделения РАН академиком Г. И. Бурдуром. Особенностью данного курса является изменение «классического» порядка изложения и введение современных представлений о свойствах пространства-времени и релятивистских законах движения с самого начала обучения, в рамках курса общей физики.

Основу сборника составляют оригинальные задачи, предложенные в разные годы коллективом преподавателей физики – научными сотрудниками физических институтов Сибирского отделения РАН и кафедр Новосибирского государственного университета для семинарских занятий, для контрольных заданий, для письменных и экзаменационных работ. Также включены классические задачи, взятые из учебников и учебных пособий, применяемых в курсе общей физики НГУ.

Сборник выпускался в виде учебных пособий в 1978, 1992, 2000 и 2006 гг. Настоящее издание дополнено и переработано. Приведены ответы и решения задач, что может быть полезно для обучающихся самостоятельно или заочно. Задачи сформулированы по основным разделам курса в соответствии с программой семинаров, принятой в НГУ.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Б. В. Чирикова, Б. Н. Брейзмана, В. Г. Дудникова, П. А. Ватрянского, В. Г. Соколова, Г. В. Федотовича и других физиков-преподавателей НГУ, внесших большой вклад в составление задач и подготовку предыдущих изданий сборника.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

c	скорость света = $3 \cdot 10^8$ м/с
Л-система	лабораторная система отсчета
Ц-система	система центра инерции
x, y, z, t	координаты в лабораторной системе отсчета
x', y', z', t'	координаты в движущейся системе отсчета
v, V, u	скорость тела, системы отсчета
β, γ, γ_v	релятивистские факторы
τ	собственное время
T	интервал или период движения
d, L	расстояние, длина
a'	ускорение в сопутствующей системе отсчета
r, R, ρ	радиус
α, θ, φ	угол
Ω	угловой угол
ω, Ω	угловая скорость
ν, f	частота колебаний
m, M	масса
E	энергия
T	кинетическая энергия
p, P	импульс
L	момент импульса
F	сила
G	гравитационная постоянная, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м ² · кг ⁻²
q, Q, e	электрический заряд
\mathcal{E}	напряженность электрического поля
U	потенциал
B	индукция магнитного поля

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1 астрономическая единица (а. е.)	$1,5 \cdot 10^8$ км		
1 световой год (св. г.)	$9,46 \cdot 10^{12}$ км		
1 парсек (пк)	$3,26$ св. г = $3,1 \cdot 10^{13}$ км		
Постоянная Хаббла	71 (км/с)/Мпк		
Гравитационная постоянная	$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м ² · кг ⁻²		
Радиус Солнца	$7 \cdot 10^5$ км		
Земля			
Период обращения вокруг Солнца	1 год = $\pi \cdot 10^7$ с		
Средний радиус орбиты	$1,5 \cdot 10^8$ км = 500 св. с		
Орбитальная скорость	30 км/с		
Угловая скорость вращения вокруг оси	$7,3 \cdot 10^{-5}$ рад/с		
Угол наклона экватора к эклиптике	23°		
Луна			
Орбитальная скорость	1 км/с		
Расстояние до Земли	$3,8 \cdot 10^5$ км		
Период обращения	27 сут		
Масса	1/81 массы Земли		
Радиус	1738 км		
Планеты			
	Марс	Венера	Юпитер
Радиус орбиты, а. е.	1,52	0,72	5,2
Период обращения, год	1,9	0,6	12
Орбитальная скорость, км/с	24	35	13
Масса элементарных частиц			
Электрон e^-	511 кэВ	Протон p	938 МэВ
Позитрон e^+	511 кэВ	Нейтрон n	940 МэВ
Мюоны μ^-, μ^+	105 МэВ	ϕ -мезон	1 ГэВ
π -мезоны π^-, π^+	140 МэВ	Δ -гиперон	1,1 ГэВ
π^0	135 МэВ	Λ/Σ -мезон	3,1 ГэВ
Каоны K^-, K^+, K^0	500 МэВ	V -мезон	5,28 ГэВ

1. КИНЕМАТИКА

1.1. Пространство и время

1.1. Линейные размеры молекулы O_2 0,3 нм, длина волны оранжевой линии криптона 605,8 нм, радиус Земли 6400 км, расстояние Земля – Луна 384 тыс. км, расстояние до α -Центавра 4,2 св. года. Указать метод измерения этих величин и физические ограничения на точность измерения.

1.2. Скорость пули на начальном участке 715 м/с, скорость электрона в кинескопе $4 \cdot 10^7$ м/с, скорость света в вакууме $3 \cdot 10^8$ м/с. Указать способы измерения этих скоростей и физические ограничения на точность измерения.

1.3. Вычислить расстояние до звезды α -Центавра по ее годичному параллаксу $\pi = 0,756''$ (в парсеках, световых годах и метрах).

1.4. Оценить радиус орбиты Венеры, если ее наибольшее угловое удаление от Солнца составляет 46° .

1.5. Определить максимальное время наблюдения Венеры после захода Солнца. Радиус орбиты Венеры 0,72 а. е.

1.6. Оценить максимальную продолжительность наблюдения полного лунного затмения. Видимый с Земли угловой размер Луны и Солнца имеет одинаковую величину 10^{-2} рад.

1.7. Оценить минимальную скорость движения лунной тени по поверхности Земли при солнечном затмении. Скорость Луны 1 км/с.

1.8. Как должна быть ориентирована спутниковая антенна НГУ для приема сигнала с геостационарного спутника? Найти максимальный угол наклона антенны к горизонту. Широта Новосибирска 55° .

1.9. Нарисуйте траекторию конца тени от вертикально стоящей палочки в солнечный день 22 июня в Новосибирске. Оцените длину дня. Проследите эволюцию траектории со временем. Что будет на других широтах?

1.2. Системы координат. Скорость, ускорение

1.10. Зависимость скоростей двух автомобилей от времени задается следующими выражениями:

$$V_1 = \begin{cases} V \frac{t}{\tau} & t \leq \tau \\ V \left(\frac{\tau}{t} \right)^2 & t > \tau \end{cases}; \quad V_2 = \begin{cases} V \left(1 - \cos \frac{\pi t}{\tau} \right) & 0 < t \leq \tau \\ 2V \frac{\tau_2 - t}{\tau_2 - \tau_1} & \tau_1 < t \leq \tau_2 \end{cases}$$

Найти зависимость ускорения и пройденного пути от времени. Нарисовать синхронные графики ускорения, скорости и пройденного пути.

1.11. График зависимости скорости объекта от времени имеет вид половинки окружности, занимающей на оси времени 20 с (в системе СИ), начальная скорость равна нулю. Какой путь пройден объектом за время движения? Нарисовать зависимость ускорения и пройденного пути от времени. Каким будет результат для половинки эллипса высотой 5 м/с?

1.12. Нарисовать синхронные графики зависимости от времени координаты x , скорости \dot{x} и ускорения центра тяжести упругого шарика, подпрыгивающего в поле тяжести над упругой плитой без потерь энергии. Рассмотреть случай, когда деформация шарика существенна. За какое время шарик остановится, если при каждом ударе будет теряться 1 % энергии? Изобразите это движение на плоскости x, \dot{x} .

1.13. Упругий шарик подпрыгивает в поле тяжести над горизонтальной плитой, которая движется вниз с постоянной скоростью. Нарисовать синхронные графики зависимости от времени смещения x

шарика из начального положения, скорости \dot{x} и ускорения \ddot{x} в лабораторной системе отсчета. Изобразите это движение на плоскости x, \dot{x} .

1.14. Точка описывает фигуру Лиссажу по уравнениям

$$x = \cos(t/\tau), \quad y = 2 \cos(2t/\tau),$$

где x, y заданы в м, $t -$ в с, $\tau = 1$ с. Определить скорость и ускорение точки, когда она пересекает ось OY . Нарисовать траекторию.

1.15. Движение точки выражается уравнениями

$$x = \cos(t/\tau), \quad y = 2 \sin(2t/\tau),$$

где x, y заданы в м, $t -$ в с, $\tau = 1$ с. Определить зависимость проекций силы, действующей на точку, от координат. Масса точки 10^{-3} кг.

1.16. Нарисовать зависимость от времени угла поворота, угловой скорости и углового ускорения антенны радиолокатора, следящего за самолетом, летящим по прямой с постоянной скоростью.

1.17. Зависимость скорости точки массой m от времени имеет вид:

$$V_x = V_0 \sin(\omega t + \varphi) + V_1, \quad V_y = 0, \quad V_z = 0.$$

Нарисовать зависимость пути, пройденного точкой, от времени. Определить силу, действующую на точку.

1.18. Напряженность однородного электрического поля изменяется по закону $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Нарисуйте траекторию движения электрона в таком поле, если в начальный момент $t = 0$ скорость движения электрона V_0 была направлена перпендикулярно полю.

1.19. Исследовать зависимость между напряжением $U(t)$ на пластинках осциллографа и смещением пятна на экране $y(t)$. Как изобразится на экране прямоугольный импульс напряжения? Найти уравнение кривой, на которой в момент времени t_0 находятся электроны луча.

1.20. На вертикальные пластины осциллографа подается напряжение $U_1(t)$, на горизонтальные — $U_2(t)$. Чувствительность осциллографа α_1 и α_2 V/m соответственно. Нарисовать траекторию светового пятна на экране, найти его скорость и ускорение в различные моменты времени для двух случаев:

- 1) $U_1 = at \cos \omega t, U_2 = at \sin \omega t;$
- 2) $U_1 = a \cos \omega t, U_2 = b \sin(\omega t + \varphi).$

1.21. Точка движется по закону

$$x = a \cdot ch(\gamma t), \quad y = a \cdot sh(\gamma t),$$

где $a, \gamma -$ константы. Найти уравнение траектории в декартовых и полярных координатах, выразить скорость и ускорение точки как функции ее радиус-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.22. Нарисовать траекторию точки, движущейся по закону

$$r = \frac{b}{t}, \quad \varphi = \gamma t \quad (b > 0).$$

Найти закон движения и уравнение траектории в декартовых координатах.

1.23. Получить выражение для компонент радиус-вектора, скорости и ускорения точки в цилиндрической системе координат.

1.24. Точка движется по закону

$$\rho = a e^{kt}, \quad \varphi = kt.$$

Найти траекторию, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории в зависимости от радиус-вектора точки.

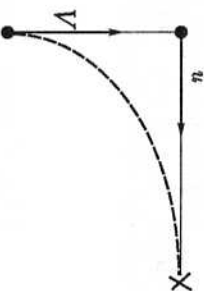
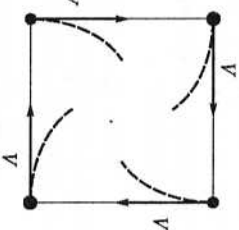
1.25. Точка движется по закону $x = 2t, y = t^2$ ($x, y -$ в м, $t -$ в с). Определить радиус кривизны траектории в начале движения и через 2 с.

1.26. Установить связь между декартовыми, цилиндрическими и сферическими координатами. Записать выражения для дифференциала длины дуги, площади, объема и, используя их, вычислить прямым интегрированием длину окружности, площадь сферы, объем цилиндра, конуса, шара.

1.27. Четыре собаки преследуют друг друга, так что скорость догоняющей собаки \vec{V} всегда направлена на убегающую собаку (см. рисунок). Через какое время собаки догонят друг друга, если сначала они находились в углах квадрата со стороной a ? Какова траектория собак? Какими будут время и траектория для N собак?

1.28. Корабль движется равномерно, сохраняя постоянный угол пеленга на маяк (угол между вектором скорости и направлением на маяк). Нарисовать возможные траектории корабля.

1.29. Заяц бежит по прямой линии со скоростью u . В начальный момент времени из положения, показанного на рисунке, его начинает преследовать собака со скоростью V . В ходе погони собака всегда бежит в направлении зайца. Через какое время собака настигнет зайца? Начальное расстояние между ними L .



1.30. Имеется однородный шнур из взрывчатого вещества. Скорость распространения реакции взрыва вдоль шнура V , скорость распространения взрывной волны по воздуху c . Найдите форму линии, по которой надо расположить шнур, чтобы волна от всех точек шнура пришла в заданную точку одновременно. Можно ли сделать то же самое для поверхности со взрывчаткой и получить сходящуюся сферическую волну с большой концентрацией энергии?

1.3. Векторы

1.31. Сферические координаты векторов

$$\vec{r}_1 = (r_1, \theta_1, \varphi_1) \text{ и } \vec{r}_2 = (r_2, \theta_2, \varphi_2).$$

Определите угол между векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 .

1.32. Найдите кратчайшее расстояние при полете из Новосибирска ($\varphi = 83^\circ$ вост. долготы, $\theta = 55^\circ$ с. ш.) до Рио-де-Жанейро ($\varphi = 44^\circ$ зап. долготы, $\theta = 22^\circ$ ю. ш.).

1.33. Выразить орты сферической и цилиндрической систем координат через орты декартовой системы координат (и наоборот).

1.34. Футболист находится в 20 м от перпендикулярной траектории мяча. Скорость мяча 10 м/с, футболиста 8 м/с. При каких начальных положениях мяча футболист сможет догнать его? В каких точках траектории мяча возможен перехват, если вначале мяч был в 25 м от футболиста?

1.35. Для двух кораблей, движущихся неизменными пересекающимися курсами, выразить расстояние наибольшего сближения и время до сближения через векторы скоростей и начальных положений.

1.36. Определить векторы скоростей и ускорений траков гусениц трактора, который движется по прямой дороге с ускорением a при скорости V (в системе дороги и в системе трактора).

1.37. Самолет облетел стороны треугольника с длинами A, B и C за время t_1, t_2, t_3 соответственно. Найдите скорость ветра и самолета в случае, когда скорость ветра параллельна плоскости треугольника.

1.4. Системы отсчета

1.38. Снаряд, летящий на большой высоте со скоростью V , разрывается на осколки, которые в системе снаряда разлетаются в разные

стороны с одинаковыми начальными скоростями u . Какое положение в пространстве они займут в момент времени t ? Опишите движение осколков в системе координат, связанной с одним осколком.

1.39. Как изменяются импульс и кинетическая энергия системы частиц при преобразованиях Галилея? В какой системе отсчета кинетическая энергия частиц минимальна?

1.40. Какова кинетическая энергия гусеницы трактора в системе дороги и в системе трактора, если скорость трактора V ?

1.41. Определите скорость поезда, если при приближении к неподвижному наблюдателю гудок поезда имел частоту в α раз большую, чем при удалении от наблюдателя.

1.42. Машинисты двух сближающихся поездов сигнализируют друг другу гудками. Определите скорость поездов, если частоты принимаемых машинистами сигналов превышают «собственную» частоту гудка в α и β раз соответственно. Сигнальные устройства локомотивов одинаковы.

1.43. Какова угловая скорость вращения Луны с точки зрения наблюдателя, находящегося на поверхности Земли?

1.44. Найдите траекторию и закон движения точки на циферблате в системе координат, связанной с концом минутной стрелки часов.

1.45. Найдите траекторию и закон движения конца часовой стрелки часов в системе координат, связанной с концом минутной стрелки.

1.46. Найдите траекторию и закон движения конца минутной стрелки часов в системе координат, связанной с концом часовой стрелки.

1.47. Нарисовать траекторию Марса в системе координат, связанной с центром Земли, начиная с противостояния. Период между двумя последовательными противостояниями Марса 780 земных суток. Расстояние Земли — Марс меняется от $0,55 \cdot 10^8$ км до $4 \cdot 10^8$ км.

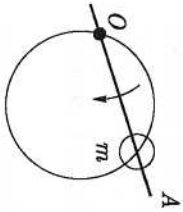
1.48. Нарисовать траекторию Луны в системе координат, неподвижной относительно центра Солнца. Оценить диапазон ускорений центра Луны в этой системе координат.

1.49. Могут ли на траектории спутника Земли в системе, связанной с Солнцем, появиться участки с нулевой кривизной?

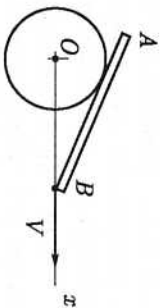
1.5. Кинематика вращения

1.50. Жесткий стержень AB движется в плоскости $ХОУ$, опираясь на окружность, центр которой находится в начале координат (см. рисунок).

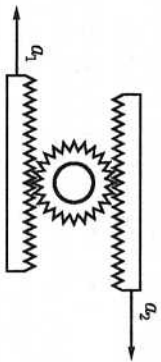
Найти угловую скорость стержня, если его конец B движется вдоль оси x с постоянной скоростью V .



1.51. Стержень OA (см. рисунок) равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг точки O , расположенной на окружности радиуса R . Определить скорость и ускорение колесика m , надетого на стержень и окружность.

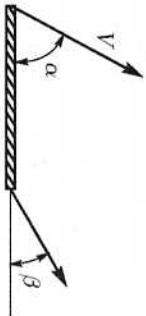


1.52. Между двумя зубчатыми рейками зажата шестеренка радиусом $R=0,5$ м. Ускорения реек $a_1=1,5$ м/с² и $a_2=2,5$ м/с² (см. рисунок). Найти поступательное и угловое ускорение шестеренки.



1.53. Стержень AB движется в плоскости XOY , опираясь своими концами на взаимно-перпендикулярные прямые OX и OY . Найти координаты мгновенного центра вращения в момент, когда угол OAB равен 60° .

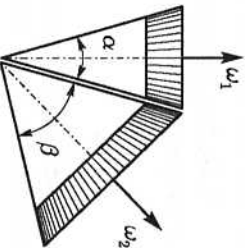
1.54. По стенке дома затаскивают бревно длиной L , так что его верхний конец движется вертикально вверх с постоянной скоростью V , а нижний передвигается по земле. Найти угловую скорость и угловое ускорение точек бревна в различные моменты времени.



1.55. Найти мгновенный центр вращения и угловую скорость жесткого стержня, если известна величина и направление скорости одного конца и направление вектора скорости второго конца. Скорости концов стержня лежат в одной плоскости (см. рисунок).

1.56. Конус, лежащий боковой поверхностью на горизонтальной плоскости, катится по ней без проскальзывания, так что его вершина неподвижна. Угол при вершине конуса $\alpha=90^\circ$.

Центр основания конуса движется равномерно и возвращается в начальное положение через 1 с. Найти вектор углового ускорения конуса.



1.57. В конической зубчатой передаче (см. рисунок) оси вращения шестерней неподвижны, $\omega_1=10$ об/мин, $\alpha=30^\circ$, $\beta=60^\circ$. Найти ω_2 .

1.58. Определить закон движения и траекторию точки, находящейся на расстоянии r от оси диска радиусом R , катящегося без проскальзывания по горизонтальной плоскости со скоростью V .

1.59. Найти угловую скорость, угловое ускорение и мгновенную ось вращения колеса автомобиля, когда он едет с постоянной по модулю скоростью V по вогнутому мосту радиусом R . Радиус колеса r .

1.60. Найти мгновенный центр вращения эллиптического колеса, которое катится по вогнутому мосту с постоянной кривизной.

1.61. Найти угловую скорость, угловое ускорение и мгновенную ось вращения колеса трамвая при повороте. Колесо движется без проскальзывания с постоянной по модулю скоростью V по рельсу с радиусом закругления R . Радиус колеса r .

небольшом расстоянии от космонавта по ходу корабля расположено зеркало. Через какое время космонавт увидит свое изображение в зеркале после включения источника света, расположенного рядом с космонавтом?

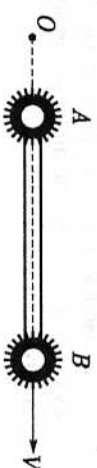
2.5. На ракете, летящей со скоростью, близкой к скорости света, произошла вспышка света. С точки зрения ракеты область, занятая фотонами, представляет собой равномерно расширяющуюся сферу. Каким представляется волновой фронт от вспышки неподвижному наблюдателю?

2.6. За пять лет наблюдения с Земли светящийся объект, находящийся на расстоянии 10^5 св. лет, совершил угловое перемещение 10^{-4} рад, т. е. его кажущаяся скорость перемещения равна удвоенной скорости света. Найдите, под каким углом к линии наблюдения может двигаться объект, чтобы его реальная скорость была меньше скорости света. Какова минимально возможная скорость объекта?

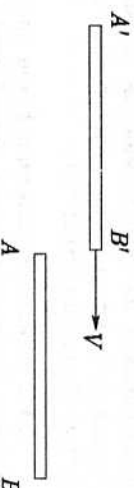
2.7. Каким будет казаться земному наблюдателю время обращения спутника Ио вокруг Юпитера? Как меняется это время в течение года? Истинный период обращения Ио 42 часа.

2.2. События. Преобразование Лоренца

2.8. На концах стержня с собственной длиной L_0 , движущегося со скоростью V , одновременно в системе стержня зажигаются две лампочки. Какая из них загорится раньше (и насколько) в L -системе отсчета? Какую вспышку увидит раньше (и насколько) неподвижный наблюдатель, находящийся в точке O (см. рисунок)?



2.9. Масштаб $A'B'$ собственной длиной L_0 движется со скоростью V вдоль такого же масштаба AB (см. рисунок). Часы, находящиеся на концах масштабов в точках A' и B' , A и B , синхронизованы в своих системах отсчета. В момент совпадения точек B' и A часы B' и A показывают одинаковое время $t = 0$. Какое время показывают каждые часы в момент совпадения точек A и A' , B и B' ?

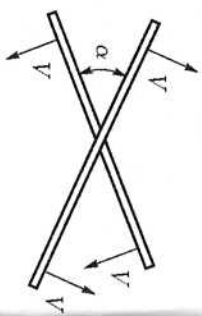


2.10. В точках O и $2L$ оси x одновременно происходят вспышки света. В L -системе отсчета фотоны этих вспышек «встречаются» в точках, равноудаленных от вспышек, т. е. в вертикальной плоскости, проходящей

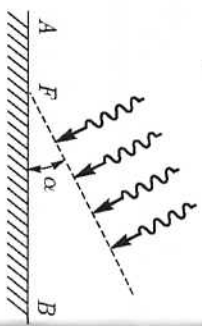
2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

2.1. Скорость света

2.1. Две палочки, пересекаясь под углом α , движутся поступательно со скоростями V перпендикулярно своей длине (см. рисунок). Найдите скорость перемещения точки пересечения палочек. Может ли она превысить скорость света?



2.2. Фронт плоской волны падает под углом α на плоскую поверхность AB (см. рисунок). Найдите скорость перемещения точки F вдоль прямой AB . Можно ли считать эту скорость скоростью распространения некоторого сигнала вдоль прямой AB ? Может ли она превысить скорость света?



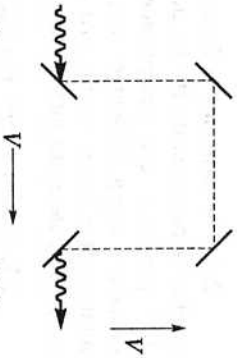
2.3. «Световой зайчик» от пульсара перемещается по поверхности Земли со скоростью $V = 10^{20}$ м/с (угловая скорость вращения пульсара $\omega = 10$ рад/с, расстояние до пульсара 10^{19} м). Можно ли считать перемещения «зайчика» рассматривать как скорость распространения светового сигнала?

2.4. Космонавт находится в неосвещенном космическом корабле, летящем относительно Земли со скоростью, близкой к скорости света. На

через точку $x = L$. Какой будет форма поверхности для точек встречи фотонов в системе отсчета, движущейся вдоль оси x с релятивистской скоростью V ?

2.11. Квадратная (в собственной системе отсчета) платформа со стороны L движется вдоль своей диагонали со скоростью V . В углах платформы установлены зеркала. Отражаясь от них, по периметру платформы движется фотон. Найти период его движения в L -системе отсчета.

2.12. Луч света движется через систему зеркал, расположенных в вершинах квадрата со стороной L . Найти время движения фотона через систему с точки зрения наблюдателей, движущихся со скоростью $V = 0,8c$ в направлениях, указанных на рисунке.



2.13. Космический корабль удаляется от Земли со скоростью V . Через время T после его старта с Земли послан сигнал связи. Каково с точки зрения космонавтов расстояние между Землей и кораблем в момент получения сигнала?

2.14. Два космических корабля летят встречными курсами со скоростями $V = 0,5c$ каждый. При пролете мимо друг друга (в точке O рисунка)



их часы были синхронизованы. Через час после встречи (по своим часам) один из кораблей посылает радиосигнал другому. Какое время покажут часы, установленные на втором корабле, в момент приема посланного радиосигнала?

2.15. Космический корабль половину времени (по часам корабля) движется с релятивистской скоростью V_1 , а вторую половину — со скоростью V_2 . Как далеко улетел корабль, если его путешествие по часам на Земле длилось время T ?

2.16. На сколько должна отличаться от скорости света скорость образующихся на Солнце мюонов (время жизни $2 \cdot 10^{-6}$ с), чтобы от Солнца до Земли успевало долететь, не распавшись, 95% частиц? Свет идет от Солнца до Земли 500 с.

2.17. В системе галактики фотон пролетает ее диаметр за время $T = 10^5$ лет. Сколько времени потребует фотону на это путешествие в системе отсчета протона с релятивистским фактором $\gamma = 10^{10}$, летящего следом за фотоном? Как изменится результат, если протон летит навстречу фотону?

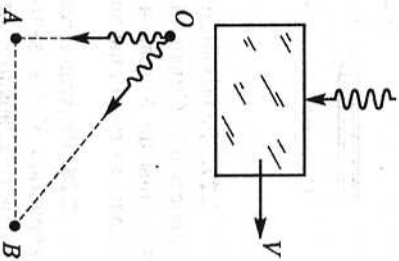
2.18. Из-за распада количество покоящихся нейтронов уменьшается экспоненциально с постоянной времени 10^3 с. Какая доля нейтронов с релятивистским фактором $\gamma = 10^{10}$, стартовавших вместе с фотоном, «останется в живых» к моменту, когда фотон достигнет края галактики с размером 10^5 световых лет? Рассмотреть задачу с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с нейтронами, и с точки зрения L -системы отсчета.

2.19. Стеклопленный брусок длиной L движется со скоростью V параллельно своей грани. Одна из сторон бруска, перпендикулярная к скорости, посеребрена. Сколько времени по часам неподвижного наблюдателя потребуется свету, летящему параллельно V , чтобы пройти сквозь брусок, отразиться от серебряной грани и выйти из бруска? Скорость света в неподвижном бруске sl (sl — показатель преломления).

2.20. Источник света находится на расстоянии L от неподвижного зеркала. По пути от источника к зеркалу свет проходит через стеклянную пластинку толщиной L_0 с показателем преломления n , движущуюся вдоль луча со скоростью V . Найти время движения света от источника до зеркала и обратно.

2.21. На какое расстояние сдвинется вертикальный луч света после прохождения через стеклянный брусок, летящий горизонтально со скоростью $V \approx c$ (см. рисунок)? Какое время фотоны будут находиться в бруске? Показать предельная толщина n , толщина бруска d .

2.22. В вершине O прямоугольного треугольника ABO происходит вспышка света (см. рисунок). С какой скоростью и в каких направлениях может двигаться наблюдатель, чтобы в его системе отсчета свет достиг точки B раньше, чем точки A ? $AO = AB = L$.

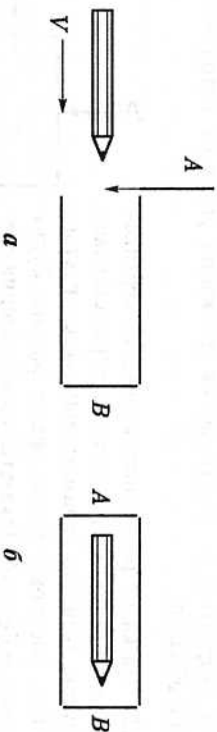


2.23. В релятивистскую реку со скоростью воды V перпендикулярно линии берега из точки A на берегу бросили камень, упавший в воду на расстоянии a от берега. За какое время волна от камня достигнет берега? Через какое время волна придет к точке A ? Скорость волны в стоячей воде $u > V$.

2.24. Координаты двух событий в L -системе отсчета (\vec{r}_1, t_1) и (\vec{r}_2, t_2) . В какой системе отсчета эти события одновременны? В какой системе они одноместны? Сколько таких систем отсчета существует?

2.25. В центре сферы радиусом R произошло вспышка света. С точки зрения наблюдателя, относительно которого сфера неподвижна, поверхность сферы освещается равномерно. Сколько времени сфера будет освещена с точки зрения наблюдателя, относительно которого сфера движется со скоростью V ? Как соотносятся количества фотонов, поглощенных передней и задней частями сферы, с точки зрения этого наблюдателя?

2.26. Вдоль оси пенада длиной L , закрывающегося с торцов крышками A и B (см. рисунок *a*) со скоростью V движется карандаш. Собственная длина карандаша L_0 удовлетворяет условию $L_0 > L > L_0\gamma$ (где γ — релятивистский фактор карандаша). Сначала крышка A пенада открыта, а крышка B закрыта. Когда карандаш влетает в пенад, крышка A закрывается, так что в течение некоторого времени карандаш находится в закрытом пенаде (рис. *b*). Затем открывается крышка B и карандаш свободно вылетает из пенада. Опишите явление в системе отсчета карандаша. Что изменится, если у пенада не открывать крышку B ?



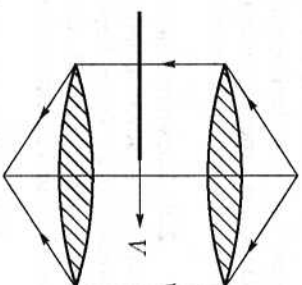
2.27. Релятивистский трактор движется по полю с постоянной скоростью V . Сидящий в кабине тракторист насчитал на каждой половине гусеницы по N траков. Сколько траков насчитает на верхней и нижней половинах гусеницы неподвижный наблюдатель?

2.28. Релятивистский танк движется по направлению к крепости со скоростью V . Он выпускает n снарядов в секунду (по часам стрелка). Скорость снарядов относительно танка u . Сколько снарядов в секунду попадает в крепость (по часам гарнизона в крепости)?

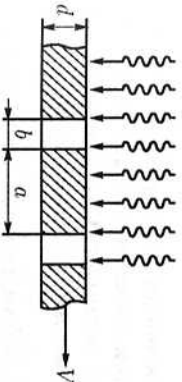
2.29. В пучок релятивистских электронов, движущихся со скоростью V и имеющих плотность частиц n_+ , добавлено некоторое количество неподвижных однозарядных ионов с концентрацией $n_-,$ так что в Л-системе отсчета пучок заряжен отрицательно. Найти плотность частиц каждого сорта в системе отсчета, связанной с электронами. При каком условии суммарная плотность заряда в этой СО будет положительной, т. е. электроны будут стягиваться к оси пучка?

2.30. Показать, что площадь поперечного сечения, проведенного перпендикулярно направлению движения параллельного пучка света, является релятивистским инвариантом.

2.31. Между двумя линзами сформирован пучок света, имеющий круглое сечение радиусом R и движущийся вертикально вниз (см. рисунок). Перпендикулярно пучку вдоль оси x со скоростью V движется диск такого же радиуса (в собственной системе отсчета). Плоскость диска перпендикулярна пучку. С точки зрения лабораторной системы отсчета диск испытывает лоренцево сокращение и не может перекрыть пучок света. Для наблюдателя на диске сокращается сечение пучка и должен наступить момент полного перекрытия света в фокусе второй линзы. Объясните парадокс.



2.32. Параллельный пучок света падает на решетку, состоящую из брусков сечением $a \times d$ с расстоянием между брусками b (см. рисунок). Какая часть падающего света сможет пройти через решетку, если ее двигать перпендикулярно пучку с релятивистской скоростью V ?



2.33. Что получится при моментальном фотографировании быстролетающих параллелепипеда, шара? Фотографирование производится в параллельных лучах света, падающих перпендикулярно фотопластинке.

2.3. Сложение скоростей

2.34. Две частицы движутся вдоль оси x навстречу друг другу со скоростями V_1 и V_2 . Найти скорость сближения частиц в Л-системе отсчета и сравнить ее с относительной скоростью частиц.

2.35. Один из двух одинаковых стержней покоится, а другой движется вдоль него со скоростью V . В какой системе отсчета длины стержней будут равными?

2.36. Массивная плита, движущаяся перпендикулярно своей плоскости со скоростью $c/2$, налетает на легкую неподвижную частицу. Найти скорость частицы после упругого столкновения с плитой.

2.37. В ускорителе на встречных пучках ток электронного пучка равен току позитронного, а плотность электронов в системе отсчета

позитронного пучка в N раз больше, чем плотность позитронов. Какова скорость пучков? Лабораторная геометрия пучков одинакова.

2.38. Системы отсчета S_1 и S_2 движутся вдоль оси x со скоростями V_1 и V_2 относительно системы S . На часах, покоящихся в системе S_1 , секундная стрелка совершает один оборот. Сколько времени длится этот оборот с точки зрения системы S_2 ?

2.39. Космический корабль, летящий к Земле со скоростью $V = 0,6 c$, посылает к Земле ракету связи, движущуюся относительно корабля со скоростью $u = 0,8 c$. Через какое время по часам корабля и Земли ракета встретится с Землей, если в момент ее старта корабль находился на расстоянии 5 св. лет от Земли (в СО Земли)?

2.40. Найти скорость распространения света относительно покоящегося наблюдателя, если луч движется в среде с показателем преломления n , которая движется относительно наблюдателя со скоростью V (опыт Физо).

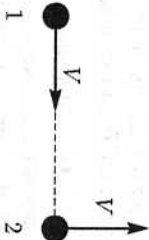
2.41. Релятивистский эскалатор, движущийся со скоростью $V = c/3$, имеет N ступенек. Пассажир, опаздывающий на поезд, сбегает по эскалатору со скоростью $u = c/2$ (относительно эскалатора), не пропуская ни одной ступеньки. Сколько шагов сделает пассажир по эскалатору?

2.42. Ширина релятивистской реки $2L = 2$ км, скорость воды у берега равна нулю и нарастает к середине реки. Найти скорость течения в центре реки, полагая, что в пределах узкой полоски шириной Δx в системе отсчета ближайшего к берегу края полоски скорость воды нарастает линейно по закону $\Delta V = \alpha \Delta x$, где $\alpha = 3 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}$.

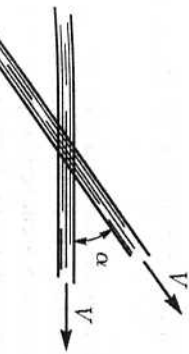
2.43. Найти скорость одинаковых частиц в системе центра масс, если в L -системе отсчета их скорости параллельны, но не равны по величине.

2.44. Найти скорость двух одинаковых частиц в системе центра масс, если в L -системе отсчета их скорости \vec{V}_1 и \vec{V}_2 .

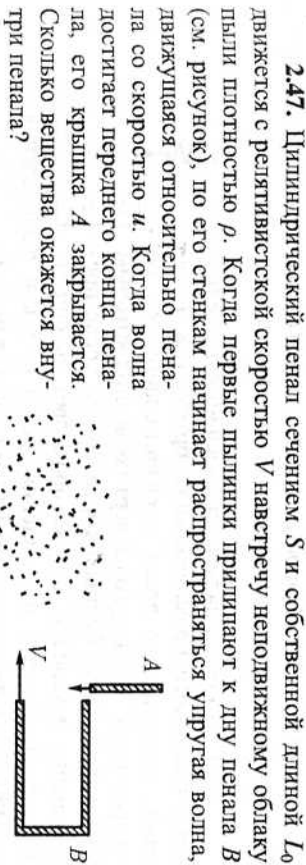
2.45. Из двух точек, разделенных расстоянием L , одновременно вылетают две частицы с перпендикулярными друг другу одинаковыми по величине скоростями V (см. рисунок). Найти минимальное расстояние между частицами:



- а) в L -системе отсчета;
- б) в системе одной из частей.



2.46. Два пучка частиц, летящих со скоростью V , пересекаются под углом α (см. рисунок). Найти плотность частиц в зоне пересечения пучков в системе отсчета одного из пучков. Плотность каждого из пучков в L -системе равна n .



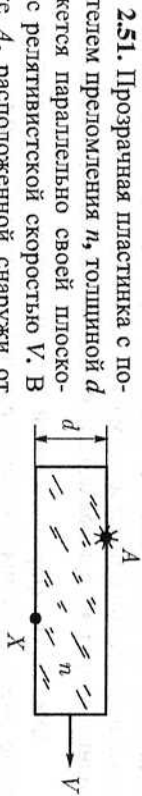
2.47. Цилиндрический пенал сечением S и собственной длиной L_0 движется с релятивистской скоростью V навстречу неподвижному облаку пыли плотностью ρ . Когда первые пылинки прилипнут к дну пенала B (см. рисунок), по его стенкам начинает распространяться упрямая волна, движущаяся относительно пенала со скоростью u . Когда волна достигает переднего конца пенала, его крышка A закрывается. Сколько вещества окажется внутри пенала?

2.4. Направление движения. Преобразование углов

2.48. На берегу релятивистской реки, текущей со скоростью V , стоит мальчик и кидает в воду камни. Под каким углом к линии берега он должен кидать камни, чтобы до него доходили волны от места падения? Скорость волн в стоячей воде равна u .

2.49. Катер, имеющий относительно воды скорость u , движется из пункта A в пункт B , находящийся строго напротив на другом берегу релятивистской реки шириной L , текущей со скоростью V . За какое время он пересечет реку?

2.50. Скорость течения релятивистской реки $V = 0,6 c$, скорость релятивистского пловца относительно воды $u' = 0,8 c$. За какое минимальное время в системе отсчета берега пловец может переплыть реку, если ее ширина 10^3 м? Каким будет минимальное время в системе отсчета пловца?

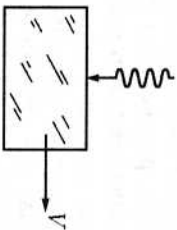


2.51. Прозрачная пластинка с показателем преломления n , толщиной d движется параллельно своей плоскости с релятивистской скоростью V . В точке A , расположенной снаружи от пластинки, произошла вспышка света. В какую точку X L -системы отсчета, расположенную на другой стороне пластинки (см. рисунок), свет

дойдет раньше всего? Свет в пластинке распространяется со скоростью c/n .

2.52. На противоположных берегах релятивистской реки со скоростью течения V и шириной L находятся пункты A и B . Пункт A расположен ниже по течению пункта B на расстоянии S в системе берега. Под каким углом к берегу должен плыть релятивистский плотец, чтобы попасть из B в A ? Скорость плывца относительно воды u' . Рассмотреть задачу в системе отсчета берега и в системе отсчета воды.

2.53. Луч света падает вертикально к поверхности стеклянного прямоугольного бруска (см. рисунок), движущегося вдоль горизонтальной оси со скоростью V . Найти угол к вертикали, под которым луч выйдет через боковой торец бруска после преломления, и условие, при котором свет выйдет из бруска. Показатель преломления стекла n . Закон преломления света на границе двух сред в системе бруска $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$.



2.54. При быстром движении наблюдателя относительно небосвода в передней полусфере насчитывается в N раз больше звезд, чем в задней. Определите скорость этого движения, если для неподвижного наблюдателя звезды распределены по небу изотропно.

2.55. Звезда, летящая со скоростью V порядка c , «сбрасывает» часть своего вещества, причем в системе отсчета звезды осколки разлетаются изотропно со скоростью u' . В какой телесный угол по ходу движения звезды будет лететь половина сбрасываемого вещества (с точки зрения неподвижного наблюдателя)? Какая часть сбрасываемого вещества будет лететь вперед по ходу движения звезды?

2.56. Найти изменение направления скорости частицы при переходе в движущуюся систему отсчета.

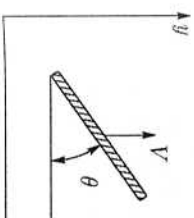
2.57. Космический корабль начинает двигаться, сохраняя постоянным угол $\alpha < \pi/2$ между вектором скорости корабля V и направлением на радиомаяк (в своей системе отсчета). При каких значениях скорости корабль будет приближаться к маяку? За какое время корабль совершит полный оборот вокруг маяка, если начальное удаление от маяка было R ?

2.58. Найти форму видимой кривой, которую описывает на небосводе очень удаленная звезда вследствие годичной аберрации.

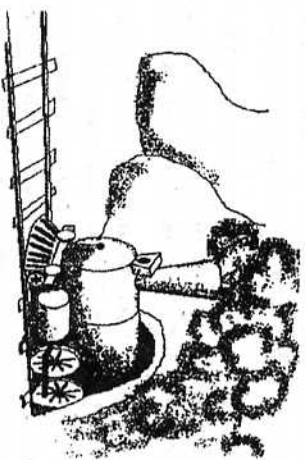
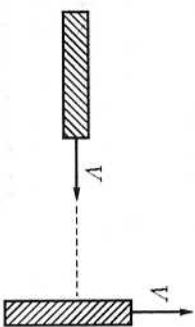
2.59. Стержень длины L падает на пол со скоростью u (ускорением пренебречь), так что его концы достигают пола одновременно. Какой

будет длина стержня и под каким углом к полу он будет расположен с точки зрения наблюдателя, движущегося по полу со скоростью V параллельно плоскости падения стержня?

2.60. Стержень движется со скоростью $V = 0,6c$ вдоль оси y , причем его ось наклонена под углом $\theta = 45^\circ$ к оси x (см. рисунок). Каким будет угол наклона стержня для наблюдателя, движущегося со скоростью $u = 0,8c$ вдоль оси x ?



2.61. Два стержня с собственной длиной L_0 , ориентированные перпендикулярно друг другу, движутся с одинаковыми по величине скоростями V вдоль своей длины (см. рисунок). Какова длина одного из стержней в системе отсчета другого стержня? Каким будет результат в случае, если стержни движутся перпендикулярно своей длине?



пература» квантов реликтового излучения $3 \cdot 10^{-3}$ эВ, плотность энергии $6 \cdot 10^{-14}$ Дж/м³.

3.7. Плотность мощности солнечного излучения на орбите Земли имеет величину $W = 1,4$ кВт/м². Насколько меняется масса Солнца в единицу времени за счет излучения света?

3.8. Давлением лазерного луча зеркало удерживается в поле тяжести. Какова масса зеркала, если мощность лазера 200 кВт?

3.2. Преобразования энергии-импульса. Эффект Доплера

3.9. Лазер испускает импульс света длительностью T и полной энергией E , который отражается от идеально зеркала, приближающегося к лазеру со скоростью V . Каковы энергия и длительность светового импульса после отражения? Свет падает по нормали к поверхности зеркала.

3.10. Фотон движется между двумя параллельными зеркалами, одно из которых неподвижно, а другое приближается к первому со скоростью $V \ll c$. Фотон движется по нормали к зеркалам. Как изменится энергия фотона при уменьшении расстояния между зеркалами в два раза? Изобразить движение фотона на фазовой плоскости. Как изменятся площадь, ограниченная его фазовой траекторией?

3.11. На космическом корабле, удаляющемся от Земли со скоростью $V = c/2$, вышла из строя энергетическая установка. Чтобы обеспечить корабль энергией, с Земли посылают лазерный луч. Какова должна быть мощность лазера, если на борту корабля потребляется мощность N ?

3.12. На космическом корабле, удаляющемся от Земли со скоростью V порядка c , включают передатчик мощностью N . Какова максимальная мощность сигнала, принимаемого на Земле антенной площадью S ? В момент включения передатчика корабль находится на расстоянии $L \gg r$.

3.13. Пучок электронов со средней энергией частиц 50 ГэВ и относительным разбросом энергий $\pm 1\%$ движется вдоль оси x Л-системы отчета. Какова максимальная кинетическая энергия электронов в сопро-вождающей пучок системе отчета?

3.14. Электроны в пучке имеют среднюю энергию 100 кэВ и энергетический разброс ± 1 эВ. Каков разброс энергий электронов (T) в сопро-вождающей пучок системе отчета?

3. ЭНЕРГИЯ-ИМПУЛЬС

3.1. Масса, энергия и импульс релятивистских частиц

3.1. Вычислить скорость и импульс электронов (в $\frac{эВ}{c}$), если их кинетическая энергия равна:

- а) 5 кэВ (трубка осциллографа);
- б) 3 МэВ (электростатический ускоритель Ван-де-Графа);
- в) 50 ГэВ (Стэнфордский линейный ускоритель).

3.2. Заряженные π -мезоны с импульсом 54 МэВ/с пролетают в среднем расстоянии $L = 3$ м (от момента рождения до распада). Найти собственное время жизни π -мезонов. Масса π -мезона 140 МэВ.

3.3. Энергия каждого из протонов в накопительном кольце равна $2 \cdot 10^{13}$ эВ, средний ток пучка 70 мА. Какая мощность будет выделяться, если этот пучок направить на поглощающую мишень? Сколько энергии выделится в мишени, если дорожка накопителя имеет длину 87 км? Пучок заполняет камеру равномерно по ее длине.

3.4. Найти давление, производимое пучком электронов с кинетической энергией 3 МэВ и током 1 А, сфокусированным на поглощающей мишени в пятно площадью 1 мм².

3.5. Оценить давление света, излучаемого настольной лампой, на лежащий под ней лист бумаги.

3.6. Оцените энергию и давление реликтового излучения, считая, что оно равномерно заполняет Вселенную размером $1,3 \cdot 10^{10}$ св. лет. «Тем-

3.15. Найти скорость центра инерции для системы частиц с импульсами P_x и энергиями E_x .

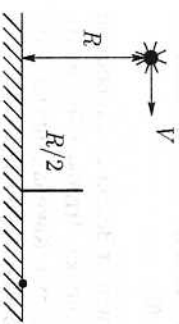
3.16. Докажите, что суммарная кинетическая энергия ансамбля независимых частиц имеет минимальную величину в системе центра масс.

3.17. В 1929 г. Э. Хаббл установил, что галактики разбегаются с относительными скоростями $V = H \cdot r$, пропорциональными расстояниям r между ними, где константа Хаббла $H = 71$ (км/с)/Мпارسек. Найти расстояние до галактики, если известно, что спектр приходящего от нее излучения при 10%-м сжатии шкалы длин волн совпадает со спектром излучения нашей галактики.

3.18. Определите скорость и рабочую длину волны радиомавка НЛО, если при его приближении к Земле принимаемая частота радиосигнала была ν , а при удалении — $\nu/4$.

3.19. Космический корабль, летящий со скоростью V_1 , посылает сигнал частотой ν_1 и после его отражения от летящего навстречу другого космического корабля принимает сигнал частотой ν_2 (частоты даны в системе отсчета первого корабля). Найти скорость второго корабля.

3.20. Источник света, движущийся горизонтально со скоростью $V = 0,6c$ на расстоянии R от пола, приближается к стене высотой $H = 0,5R$ (см. рисунок). В какую точку на полу за стеной свет придет быстрее всего? Свет какой частоты увидит наблюдатель в этой точке в момент появления света? Частота света в системе отсчета источника ω_0 .

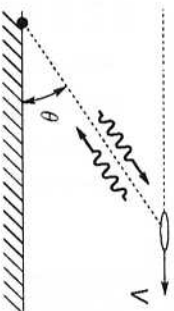


3.21. Рельтивистский трактор движется со скоростью V навстречу неподвижному локатору. Определить максимальную и минимальную частоту сигналов, возвращающихся к локатору после однократного отражения от гусениц трактора. Частота сигнала локатора ν_0 .

3.22. Источник света с частотой ν_0 движется со скоростью V в неподвижной среде с показателем преломления n мимо неподвижного наблюдателя. Какую частоту будет регистрировать наблюдатель при приближении источника света и при его удалении?

3.23. Две подводные лодки движутся навстречу друг другу с релятивистскими скоростями V_1 и V_2 относительно воды. Радары лодок имеют одинаковую собственную частоту ν_0 , скорость сигнала в воде равна c/n . Какова частота сигналов, принимаемых на лодках?

3.24. Для определения скорости космического объекта, пролетающего мимо Земли, его зондируют лазерным лучом с частотой фотонов ν_0 . Определите скорость объекта по частоте ν_n фотонов, «вернувшихся» к наблюдателю, и по углу θ между направлением движения объекта и лучом света (см. рисунок).

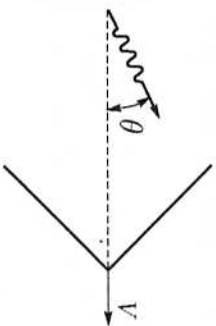


3.25. Ракета летит со скоростью V через скопление, состоящее из N одинаковых, равномерно распределенных звезд. Сколько звезд, по мнению экипажа, уменьшило длину волны своего излучения более чем в два раза по сравнению с результатами наблюдений из неподвижного корабля?

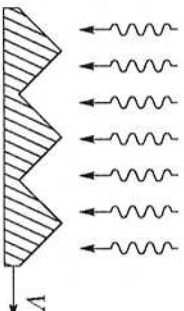
3.26. Луч света, параллельный оси x , отражается от массивного зеркала, движущегося вдоль оси x . Какова скорость и угол наклона зеркала, если частота света при отражении уменьшается в 2 раза, а отраженный луч движется по нормали к оси x ?

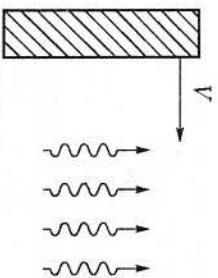
3.27. Найти изменение направления движения фотона при отражении от массивного зеркала, движущегося со скоростью V перпендикулярно своей плоскости.

3.28. Угловой отражатель сделан из двух массивных зеркал, соединенных под углом 90° (см. рисунок). Луч света, падающий под любым углом на неподвижный отражатель, меняет направление движения на противоположное. Какими будут частота и угол отражения света, если отражатель движется со скоростью V вдоль оси x , а падающий луч — под углом θ к оси x ? Частота падающего света ν_0 .



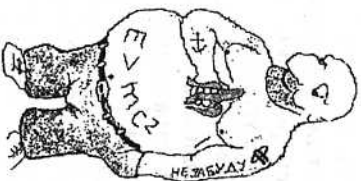
3.29. Система зеркал, закрепленных под углом 90° друг к другу, движется со скоростью $V = c/2$ перпендикулярно лучу света частотой ν (см. рисунок). Какова энергия фотонов, испытанных двойное отражение от зеркал? Под каким углом будет двигаться свет после двойного отражения от зеркал?





3.30. Идеальное зеркало движется со скоростью $V = 0,6 c$ через световой поток с плотностью энергии $W = 10^{-2}$ Дж/м². Плоскость зеркала параллельна направлению движения фотонов (см. рисунок). Найти давление света на зеркало.

3.31. Идеальное двухстороннее зеркало ускоряется лучом лазера. Какой будет установившаяся скорость зеркала, если с противоположной стороны его тормозит луч второго лазера в четыре раза меньшей мощности? Свет падает по нормали к поверхности зеркала.



4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

4.1. Распад частиц

4.1. Пучки мюонов получают при распаде заряженных π -мезонов на мюон и нейтрино. На каком удалении от мишени, генерирующей поток π -мезонов импульсом $10 \frac{ГэВ}{c}$, примесь π -мезонов к потоку мюонов становится меньше 50 %? Масса заряженного π -мезона 140 МэВ, время жизни $2,6 \cdot 10^{-8}$ с.

4.2. Найти энергию π^0 -мезонов, распадающихся по схеме $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, если счетчик, расположенный по направлению их движения, регистрирует γ -кванты распада с энергией 270 МэВ. Масса π^0 -мезона 135 МэВ.

4.3. Найти энергию π^0 -мезонов, распадающихся по схеме $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, если энергия летящих назад γ -квантов распада 10 МэВ. Масса π^0 -мезона 135 МэВ.

4.4. Релятивистский снаряд скоростью $V = 0,6 c$ и массой M разбивается на лету на N осколков с нулевой массой. Какова максимально возможная энергия одного из осколков, если в системе отсчета снаряда распад изотропен? Сравните со случаем, когда распад в системе снаряда не изотропен.

4.5. Энергия возбуждения ядра Fe^{57} равна 14,4 кэВ. На сколько отличается от энергии возбуждения энергия фотона, испущенного

незакрепленным возбужденным ядром? Какова скорость ядра после испускания фотона?

4.6. Летящий π -мезон распадается на мюон и нейтрино: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. Найти энергию π -мезонов, если известно, что максимальная энергия рождающихся при распаде нейтрино в $\alpha = 100$ раз больше минимальной. Масса π^+ -мезона 140 МэВ. Массу нейтрино считать равной нулю.

4.7. При распаде π -мезонов на мюоны и нейтрино: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ максимальные импульсы регистрируемых мюонов в $\alpha = 10$ раз больше минимальных. Найти энергию π -мезонов. $M_{\pi^+} = 140$ МэВ, $m_\mu = 105$ МэВ.

4.8. Покоящийся ϕ -мезон распадается на две частицы: $\phi \rightarrow X + \gamma$. X -частица в свою очередь распадается на два γ -кванта: $X \rightarrow 2\gamma$. Известно, что отношение максимальной и минимальной энергий этих двух квантов равно $\alpha = 3,47$. Найти массу X -частицы. Масса ϕ -мезона 1020 МэВ.

4.9. π^0 -мезон распадается на два γ -кванта. Найти энергию распадающихся π^0 -мезонов, если счетчик, расположенный под углом 45° к направлению их движения, регистрирует γ -кванты с энергией 27 МэВ.

4.10. Найти массу J/ψ -мезона, распавшегося на электрон и позитрон с одинаковыми энергиями 3,1 ГэВ и углом разлета 60° .

4.11. Какова энергия π^+ -мезонов, распавшихся на леву по схеме $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ если энергия образовавшегося мюона $E_\mu = 300$ МэВ, а угол разлета образовавшихся частиц $\theta = 60^\circ$. $M_{\pi^+} = 140$ МэВ, $M_\mu = 105$ МэВ.

4.12. π^0 -мезон распадается на леву на два γ -кванта, углы вылета которых составляют соответственно θ_1 и θ_2 с начальным направлением движения π^0 -мезона. Найти энергию π^0 -мезона, если его масса равна M .

4.13. Определить угловой размер конуса, в который попадает половина γ -квантов, образующихся при распаде π^0 -мезонов с энергией $E = 10^{10}$ эВ. Масса π^0 -мезона 135 МэВ. Найти минимальную и максимальную энергию квантов, попавших в этот конус.

4.14. Определить угловой размер конуса, в который полетят осколки разрывного снаряда, летящего со скоростью 0,99 c . Масса снаряда M . Снаряд разлетается на N осколков массой M/N каждый.

4.15. Пучок π^0 -мезонов, летящих со скоростью $V = 0,5 c$, распадается по схеме $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Во сколько раз суммарная энергия образо-

вавшихся фотонов, летящих в переднюю полусферу (по направлению движения пионов), больше, чем суммарная энергия фотонов, летящих назад? В системе отсчета π^0 -мезонов распад изотропен.

4.16. Гиперон распадается на нейтрон и π -мезон. При какой минимальной энергии пучка гиперонов будут отсутствовать π -мезоны, летящие навстречу пучку? Масса гиперона 1,2 ГэВ, нейтрона 940 МэВ, π -мезона 140 МэВ.

4.17. π -мезон с энергией 500 МэВ распадается на мюон и нейтрино. Найти максимальный угол вылета мюона по отношению к направлению движения π -мезона. Масса π -мезона 140 МэВ, мюона 105 МэВ.

4.18. Найти связь между углами вылета θ_1 и θ_2 в J -системе при распаде на две частицы.

4.19. Частица, летящая со скоростью V , распадается на две частицы. Найти связь между углами вылета и энергией образовавшихся частиц.

4.20. Летящий каон распадается по схеме $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$. На какое максимальное расстояние от линии движения каона успевают удалиться π -мезоны за время своей жизни? При какой минимальной энергии пучка каонов будут отсутствовать π -мезоны, летящие навстречу пучку? Собственное время жизни π^{\pm} -мезона $\tau = 2,6 \cdot 10^{-8}$ с, его масса $M_{\pi^{\pm}} = 140$ МэВ, масса каона $M_K = 494$ МэВ.

4.21. Определить интервал значений, которые может принимать угол между направлениями вылета распадающихся частиц равной массы в J -системе при распаде на две частицы.

4.22. При распаде каонов с энергией 510 МэВ по схеме $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ минимальный угол разлета π -мезонов равен 150° . Определите массу каона.

4.23. Каон с энергией 10^{10} эВ и массой $5 \cdot 10^8$ эВ распадается по схеме $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Найти максимальный угол разлета π -мезонов. Какова при этом относительная скорость π -мезонов?

4.24. Метастабильная молекула, обладающая внутренней энергией E и кинетической энергией T , распадается на две частицы массы m_1 и m_2 . Определить диапазон возможных направлений движения частиц в лабораторной системе.

4.25. Неподвижный ϕ -мезон распадается на фотон и X -частицу, которая в свою очередь распадается на два фотона: $\phi \rightarrow X + \gamma \rightarrow 2\gamma + \gamma$. Минимальный угол разлета двух фотонов при распаде X -частицы $\theta_{\min} = 113^\circ$. Найти массу X -частицы, если масса ϕ -мезона 1020 МэВ.

4.26. Каоны, летящие в пучке со скоростью $V = 2/3 c$, распадаются на мион и нейтрино. Найти отношение числа мионов, вылетающих в одинаковые малые телесные углы вперед и назад относительно направления движения каона. Масса каона 494 МэВ, миона — 105 МэВ, массу нейтрино считать равной нулю. Каким будет это отношение для нейтрино?

4.27. Место распада монохроматического пучка π^0 -мезонов с энергией 1 ГэВ окружено счетчиками, регистрирующими энергии всех γ -квантов распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Нарисовать регистрируемое распределение γ -квантов по энергиям.

4.28. Найти распределение распадных частиц по энергиям в Π -системе, если в Σ -системе угловое распределение имеет вид $dN \sim \sin^2 \theta d\Omega$, где θ — угол между скоростью V движущейся частицы и направлением вылета распадной частицы в Σ -системе. Скорость распадных частиц в Σ -системе равна V_0 .

4.29. Какая доля γ -квантов, рождающихся при распаде летящих параллельно π^0 -мезонов с энергией 10 ГэВ на два γ -кванта, имеет энергии, отклоняющиеся от максимальной не более чем на 10 %? Определить угловой разворот конуса, в который попадают γ -кванты.

4.30. Для нейтрино ν , образующихся при распаде π -мезонов с энергией 6 ГэВ ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$), определить энергетический спектр, максимальную и среднюю энергию, а также угловое распределение в лабораторной системе отсчета, если известно, что в системе отсчета π -мезона распад изотропен. Массу нейтрино считать равной нулю.

4.31. Определить наибольшую кинетическую энергию, которую может получить частица с массой m , образуемая при распаде неподвижной частицы массой M на несколько осколков с суммарной массой m .

4.32. Найти максимальную энергию электрона, возникающего при распаде неподвижного миона: $\mu^- \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$.

4.33. При какой максимальной энергии миона электрон, получаемый при распаде $\mu^- \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$, будет покоиться в лабораторной системе отсчета?

4.34. Неподвижный атом позитрония (связанная кулоновскими силами электрон-позитронная пара) аннигилирует в три γ -кванта. Углы

разлета γ -квантов в двух разных парах составили 120° и 150° . Найти энергии всех трёх γ -квантов. Энергией связи электрона и позитрона в атоме позитрония пренебречь.

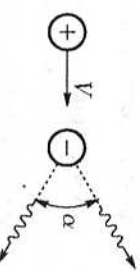
4.2. Неупругие столкновения. Пороги рождения частиц

4.35. При столкновении встречных пучков электронов и позитронов с энергиями 300 МэВ возможна реакция $e^+ + e^- \rightarrow 2\pi$. Каждый из образующихся π -мезонов затем распадается на два γ -кванта. Найти максимальную энергию образующихся γ -квантов.

4.36. Счетчик, предназначенный для регистрации π -мезонов, рождающихся при столкновении электронов и позитронов в установке со встречными пучками (по реакции $e^+ + e^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$), удален на 6 м от места встречи. Во сколько раз нужно увеличить показания счетчика, чтобы компенсировать распад π -мезонов за время полета до счетчика, если энергия частиц в каждом пучке 280 МэВ? Масса π -мезона 140 МэВ, время жизни $2,6 \cdot 10^{-8}$ с.

4.37. Показать, что излучение и поглощение света свободным электроном в вакууме невозможно. Возможно ли однофотонная аннигиляция электрон-позитронной пары по схеме $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$?

4.38. Найти угол симметричного разлета фотонов α (см. рисунок), получающихся при аннигиляции покоящегося электрона с движущимся позитроном.



4.39. До какой энергии нужно ускорить позитроны, чтобы на мишени из покоящихся электронов проявились эффекты, возможные на установке со встречными электрон-позитронными пучками при энергии частиц в каждом пучке 20 ГэВ?

4.40. Антипротон при столкновении с неподвижным протоном образует электрон-позитронную пару: $p^+ + p^- \rightarrow e^+ + e^-$. Какова энергия образующихся электрона, если он движется перпендикулярно направлению первоначального движения антипротона?

4.41. При какой энергии протонов становится возможным рождение J/ψ -мезонов с массой $3,1 \cdot 10^9$ эВ на мишени из неподвижных протонов по схеме $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + J/\psi$? При какой энергии

электронов и позитронов наблюдается рождение $\mu\mu$ -мезона в экспериментах на встречных электрон-позитронных пучках?

4.42. Найти пороговую энергию рождения электрон-позитронной пары при столкновении γ -квантов с разными энергиями: $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$. Энергия «холодного» γ -кванта 1 эВ.

4.43. Какова суммарная кинетическая энергия нуклонов, образующихся в реакции $\gamma + d \rightarrow n + p$ при пороговой для этой реакции энергии γ -квантов? Энергия связи дейтрона 2 МэВ.

4.44. При облучении неподвижной водородной мишени π^- -мезонами идет реакция $\pi^- + p \rightarrow \gamma + n$. Найти максимальную энергию γ -кванта, если кинетическая энергия π^- -мезона 300 МэВ, масса 140 МэВ.

4.45. Определить скорости протона и π^- -мезона (масса 135 МэВ), образующихся при столкновении фотона с первоначально покоявшимся протоном $\gamma + p \rightarrow \pi + p$. Фотон имел пороговую для этой реакции энергию.

4.46. Движущееся возбужденное ядро массой M и энергией возбуждения E испускает γ -квант. При какой скорости ядра испущенный γ -квант может возбудить аналогичное неподвижное ядро, находящееся в основном состоянии, до энергии возбуждения E ?

4.47. При каких энергиях π^- -мезона γ -квант, полученный при распаде $\pi \rightarrow \gamma + \gamma$ и летящий назад, может при столкновении с тяжелым ядром образовать электрон-позитронную пару?

4.48. Найти максимальную и минимальную энергию, уносимую нейтринно в реакции взаимодействия электрона с энергией E и неподвижного протона: $e + p \rightarrow n + \nu$. Массу нейтринно считать равной нулю.

4.49. Найти порог рождения пары протон-антипротон при столкновении электрона и позитрона, скорости которых в лабораторной системе равны по величине и перпендикулярны.

4.50. Электрон и позитрон с энергией 5 ГэВ каждый сталкиваются и рождают протон и антипротон: $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^- + p^+ + p^-$. При каких значениях угла между импульсами электрона и позитрона это возможно?

4.51. Две частицы массами m_1 и m_2 , летящие со скоростями v_1 и v_2 , сталкиваются в одну. Найти массу и скорость образовавшейся частицы.

4.52. Электрон с кинетической энергией 1 МэВ аннигилирует при столкновении с покоящимся позитроном. Один из двух образовавшихся при аннигиляции γ -квантов вылетает перпендикулярно направлению движения электрона. Найти направление вылета и энергию второго γ -кванта.

4.53. Предполагается, что протоны космических лучей из удаленных источников не доходят до Земли, если их энергия больше некоторой, так что они поглощаются при столкновениях с фотонами реликтового излучения в пороговой реакции $p + \gamma \rightarrow \Delta^+$. Найти величину пороговой энергии, если масса Δ^+ резонанса равна 1232 МэВ. Масса протона 938 МэВ, энергия фотона реликтового излучения $E_\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ эВ.

4.54. На встречных электрон-позитронных пучках происходит реакция $e^+ + e^- \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma$. При какой минимальной энергии встречных пучков энергия образующегося γ -кванта будет больше 50 МэВ? Масса π^- -мезона 140 МэВ.

4.55. При столкновении встречных электрон-позитронных пучков с неодинаковыми энергиями образуются γ -мезон массой 10,58 ГэВ, который распадается на два В-мезона: $e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow 2V$. При какой минимальной разнице энергий встречных пучков оба В-мезона будут двигаться в одну сторону? Какой при этом будет энергия γ -мезона? Масса В-мезона 5,28 ГэВ.

4.56. Во встречных электрон-позитронных столкновениях наблюдается процесс рассеяния с излучением фотона: $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^- + \gamma$. Электрон и позитрон разлетаются под углами θ_1 и θ_2 по отношению к линии движения фотона. Найти энергию фотона, если энергии частиц встречных пучков E . Все электроны и позитроны ультрарелятивистские.

4.57. В электрон-позитронных столкновениях с различной энергией встречных пучков $E_2 \neq E_1$ происходит процесс $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \tau^+ + \tau^-$. Масса μ^- -мезона 3,7 ГэВ. Масса τ^- -лептона 1,8 ГэВ, время жизни $\tau = 3 \cdot 10^{-13}$ с. Каким должно быть отношение энергий встречных пучков $k = E_2 / E_1$, чтобы в случае симметричного разлета τ^- -лептоны успевали отлететь от места рождения в среднем на расстояние $L = 5 \cdot 10^{-5}$ м?

4.58. Пучок фотонов с энергией E_0 сталкивается со встречным пучком фотонов различных энергий. В результате одного из столкновений рождается частица, которая распадается на два фотона. Найти массу этой частицы, если один из образовавшихся при распаде фотонов вылетел с энергией E_1 под углом 90° к направлению движения исходного пучка фотонов. Какова была энергия встречного фотона?

4.59. Найдите мощность фотонных двигателей ракеты, необходимой для поддержания ее равномерного движения со скоростью $0,99c$ через межзвездный водородный газ плотностью 10^6 м^{-3} . Поперечное сечение ракеты 40 м^2 , столкновения с водородом считать неупругими.

4.60. Ракета с фотонным двигателем движется в облаке «космической пыли». Вся пыль, встречающаяся на пути ракеты, улавливается и используется как топливо при аннигиляции с таким же количеством антивещества в фотонных двигателях. Найти предельную скорость ракеты.

4.3. Упругие столкновения

4.61. Частица массой m_1 налетает на покоящуюся частицу массой m_2 . При каком условии налетающая частица после упругого лобового столкновения будет двигаться назад? Рассмотреть нерелятивистский и релятивистский случаи.

4.62. Какую максимальную энергию может передать частица массой m с кинетической энергией T при упругом столкновении с первоначально покоящейся частицей массой M ? Рассмотреть нерелятивистский и релятивистский случаи.

4.63. Найти минимальную кинетическую энергию, которая может остаться у частицы массой m_1 после упругого столкновения с покоящейся частицей массой m_2 в а) нерелятивистском и б) релятивистском случаях.

4.64. Какую энергию получает покоящийся протон после рассеяния электрона с энергией 1 ГэВ на угол 10^{-3} рад?

4.65. Нерелятивистская частица массой m_1 , скоростью V упруго сталкивается с неподвижной частицей массой m_2 . Выразить скорость каждой из частиц после столкновения через угол ее рассеяния в Л-системе.

4.66. На какой максимальный угол может отклониться α -частица с кинетической энергией 1 МэВ при упругом столкновении с первоначаль-

но покоящимся нейтроном? Масса α -частицы в 4 раза больше массы нейтрона.

4.67. Частица массой m испытывает упругое столкновение с неподвижной частицей массой M . Выразить угол рассеяния в Ц-системе через угол рассеяния первой частицы в Л-системе (нерелятивистский случай).

4.68. Поток нерелятивистских моноэнергетических нейтронов в результате однократных упругих столкновений рассеивается на первоначально покоящихся протонах. Считая рассеяние изотропным в Ц-системе, найти долю нейтронов, рассеявшихся в Л-системе на угол, больший 60° .

4.69. Моноэнергетический пучок нейтронов с кинетической энергией 1 МэВ упруго рассеивается на первоначально покоящихся ядрах He^4 . Найти функцию распределения рассеянных нейтронов по энергиям в Л-системе, если в Ц-системе рассеяние изотропно. Определить среднюю энергию однократно рассеянных нейтронов.

4.70. Определить энергию электрона, если при лобовом столкновении с фотоном реликтового излучения с энергией $3 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}$ он отдаст половину своей энергии.

4.71. Электрон испытывает лобовое столкновение с неподвижным протоном и передает ему половину своей энергии. Найти начальную энергию электрона.

4.72. Какую максимальную энергию могут приобрести фотоны с энергией 2 эВ при рассеянии на встречном пучке электронов с энергией 10^{10} эВ ?

4.73. Ультрарелятивистский электрон сталкивается с неподвижным электроном. Найти его энергию, если известно, что после рассеяния оба электрона имеют ультрарелятивистские энергии и летят под малыми углами θ_1 и θ_2 к линии первоначального движения электрона. Найти энергию электронов после рассеяния.

4.74. Фотон с энергией E сталкивается с покоящимся электроном. Найти энергию фотона, рассеянного на угол θ . На сколько изменится длина волны фотона при таком столкновении?

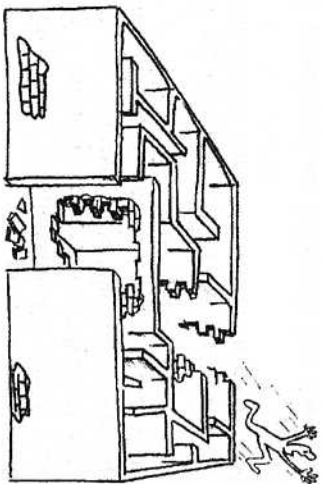
4.75. Фотон с энергией 10 эВ рассеивается на угол 90° на электроне, летящем навстречу. Найти энергию рассеянного фотона, если кинетическая энергия электрона была: а) 100 эВ ; б) 10 ГэВ .

4.76. На какой максимальный угол может отклониться релятивистский протон при столкновении с первоначально неподвижным электроном?

4.77. Определить минимальный угол разлета релятивистских частиц после упругого столкновения, если массы обеих частиц одинаковы, а одна из частиц до удара покоилась.

4.78. Два фотона с энергиями E_1 и E_2 сталкиваются под углом α друг к другу и рассеиваются с изменением своих энергий. Чему равна минимальная и максимальная энергия u рассеянных фотонов? Найдите минимальный угол между рассеянными фотонами.

4.79. В системе отсчета, движущейся со скоростью V порядка с относительно L -системы, два электрона летели навстречу друг другу с энергией E' каждый и рассеялись на малый угол θ' . Найдите изменение энергии электронов в L -системе отсчета.



5. ПРОСТЕЙШАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

5.1. Движение в магнитном поле. Сила Лоренца

5.1. Во сколько раз различаются кинетические энергии протона и электрона с одинаковыми импульсами $200 \frac{\text{МэВ}}{c}$? При какой напряженности магнитного поля радиус траекторий таких частиц равен 1 м^2 ?

5.2. Оценить кинетические энергии протонов, электронов и мюонов, проходящих по одинаковым траекториям с радиусом $0,3 \text{ м}$ через поворотный магнит с полем 1 Т .

5.3. Оценить напряженность магнитного поля, отклоняющего электроны энергией 10 кэВ на угол 60° в телевизионной трубке. Отклоняющая катушка создает магнитное поле на участке трубки длиной 10 см .

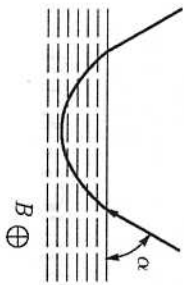
5.4. Оценить максимальное смещение электронного луча на экране при повороте осциллографа вокруг вертикальной оси. Энергия электронов 10 кэВ , длина трубки 50 см , магнитное поле Земли $0,5 \text{ Гс}$.

5.5. Каким должен быть радиус у кольцевого ускорителя с поворотным магнитным полем 1 Т , предназначенного для ускорения протонов до энергии 10^{11} эВ ? При какой величине магнитного поля в такой ускоритель следует инжектировать протоны с энергией $3 \cdot 10^8 \text{ эВ}$?

5.6. Какой минимальный радиус должен иметь электрон-позитронный ускоритель со встречными пучками, чтобы на нем можно было

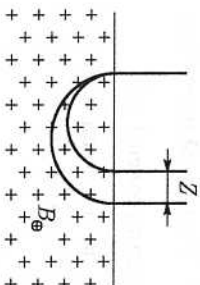
наблюдать рождение Z -бозонов по схеме $e^+ + e^- \rightarrow Z$? Масса Z -бозона 90 ГэВ. Магнитное поле на дорожке ускорителя 1 Т.

5.7. При столкновении ультрарелятивистских электрон-позитронных пучков из двух одинаковых по размерам кольцевых накопителей наблюдается рождение γ -частицы ($e^+ + e^- \rightarrow \gamma$). Определите скорость γ -частицы, если напряжённости магнитного поля на дорожках накопителей отличаются в три раза. $M_\gamma = 10^{-6}$ эв.

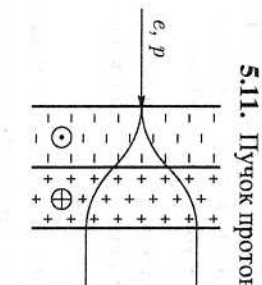


5.8. Показать, что угол падения равен углу отражения для электрона, влетающего под углом α в полупространство с неоднородным магнитным полем (см. рисунок). Поле перпендикулярно плоскости рисунка и изменяется лишь в направлении, перпендикулярном границе.

5.9. Мюоны влетают под углом α в полупространство с однородным поперечным магнитным полем величиной $B = 10^{-2}$ Т. Какая часть мюонов выйдет из области магнитного поля, не распавшись? Масса мюона 105 МэВ, собственное время жизни $2 \cdot 10^{-6}$ с.



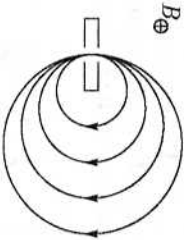
5.10. Пучок протонов со средней энергией $E = 2$ ГэВ и энергорасбросом $\pm 2\%$ инжектируется в полупространство с однородным поперечным магнитным полем $B = 1$ Т (см. рисунок). Каким будет ширина пучка на выходе из магнитного поля?



5.11. Пучок протонов и электронов с одинаковыми энергиями 2 ГэВ проходит через магнитный фильтр, который состоит из двух участков длины 0,2 м с однородным и перпендикулярным пучку магнитным полем величиной 1 Т разной полярности (см. рисунок). Найти расстояние между пучками протонов и электронов после прохождения фильтра.

5.12. Мюоны движутся по круговой траектории радиусом 10 м в поперечном магнитном поле величиной 1 Т. За какое время мюонный ток уменьшится в 20 раз? Собственное время жизни мюона $2 \cdot 10^{-6}$ с, масса 105 МэВ.

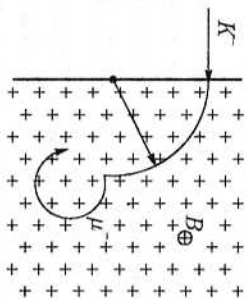
5.13. В ускорителе типа микроотрон электрон ускоряется из состояния покоя, проходя узкий ускоряющий зазор резонатора, где получает добавку энергии $\Delta E = mc^2 = 0,511$ МэВ. После этого он совершает оборот во внешнем поперечном магнитном поле и снова попадает в ускоряющий зазор (см. рисунок). Найти время ускорения электрона до энергии 511 МэВ в магнитном поле величиной $B = 2$ Т.



5.14. Каким будет радиус орбиты электронов в микроотроне (см. рисунок к задаче 5.13) при ускорении до энергии 50 МэВ, если за один пролет резонатора электрон получает энергию 0,5 МэВ? Во сколько раз отличаются максимальный и минимальный радиусы орбит в этом случае? Напряженность магнитного поля 1 Т.

5.15. Гамма-квант с энергией 10 МэВ сталкивается с тяжелым ядром, рождая электрон-позитронную пару. Треки образовавшихся электрона и позитрона в детекторе с магнитным полем представляют собой окружности с радиусами 4 и 6 см. Найти кинетические энергии образовавшихся частиц.

5.16. В пузырьковую камеру, которая находится в поперечном однородном магнитном поле, влетает поток каонов K^- . Трек каона в камере имеет вид дуги окружности (см. рисунок). При распаде каона по схеме $K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ отношение максимального радиуса трека образующегося мюона к минимальному радиусу равно $N = 3$ (для треков, лежащих в плоскости, перпендикулярной полю). Найти отношение масс каона и мюона M_K / M_μ . Время жизни каона $1,2 \cdot 10^{-8}$ с, средняя длина трека каона до распада в камере 1,85 м.



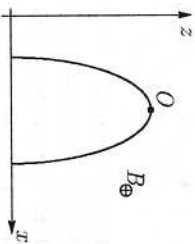
5.17. В пузырьковой камере с магнитным полем $B = 2$ Т фиксируется распад $\Delta_0 \rightarrow \pi^+ p$. Доказать, что точка пересечения треков протона и π -мезона лежит на линии движения Δ_0 -гиперона. Найти максимальное расстояние L от точки распада до точки пересечения треков. Треки частиц лежат в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

$M_p = 938$ МэВ, $M_\pi = 140$ МэВ, $M_\Delta = 1110$ МэВ.

5.18. Релятивистская частица массой m , зарядом q и энергией $E_{\text{ин}}^2$ движется в поперечном магнитном поле B . За какое время ее энергия

уменьшится до $2mc^2$, если на частицу действует сила трения $F = -\alpha V$? Сколько оборотов при этом совершит частица?

5.19. Определить траекторию движения релятивистской заряженной частицы в поперечном постоянном магнитном поле B при наличии силы вязкого трения $F = -\alpha V$.



5.20. Электрон со скоростью V влетает по нормали в область поперечного магнитного поля, увеличивающегося в направлении z по закону $B = B_0(1 + z/d)$. Определите радиус кривизны траектории электрона в верхней точке траектории O (см. рисунок).

5.21. Релятивистский электрон движется по окружности радиуса r_0 в аксиально-симметричном магнитном поле $B_z = B_0(r_0/r)^n$. Как изменится движение электрона, если его энергию увеличить на δE ?

5.2. Движение в электрическом поле. Релятивистская ракета

5.22. Электрон влетает в тормозящее постоянное однородное электрическое поле напряженностью \mathcal{E} с начальной скоростью $V_0 \parallel \mathcal{E}$. Через какое время электрон вернется в начальную точку? Какой путь он пройдет за это время?

5.23. Поток мюонов влетает по нормали в область тормозящего электрического поля напряженностью $\mathcal{E} = 10^6$ В/м. При какой энергии мюонов из области поля после «отражения» выйдет более 50 % частиц? Масса мюона 105 МэВ, время жизни $2 \cdot 10^{-6}$ с.

5.24. Ракета удаляется от Земли с постоянным ускорением a' в сопутствующей системе отсчета. Через время T после старта ей вдогонку посылаются сигнал связи. За какое время он догонит ракету? При каком T сигнал уже не сможет догнать ракету?

5.25. Сколько времени займет по земным часам и по часам космонавтов путешествие с удалением на 20 световых лет и возвращением обратно, совершаемое с постоянным по модулю ускорением, равным $a' = 9,8 \text{ м/с}^2$ (1 св. г/г^2) в сопутствующей системе отсчета? Изобразите это путешествие в пространстве событий.

5.26. Какой должна быть длина линейного ускорителя со средней напряженностью электрического поля 10^7 В/м, предназначенного для ускорения мюонов до энергии 10^{10} эВ? За какое время мюон с нулевой

начальной энергией ускорится до 10^{10} эВ? Какая доля вращенных мюонов ускорится до конечной энергии?

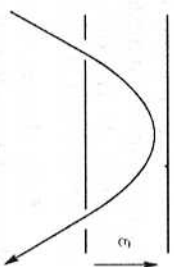
5.27. До какой энергии ускорится мюон из состояния покоя в однородном электрическом поле напряженностью $\mathcal{E} = 10^7$ В/м за время жизни в собственной системе отсчета $2 \cdot 10^{-6}$ с? Масса мюона 105 МэВ. Какой будет казаться длина такого ускорителя с точки зрения ускоряемых мюонов, если длиной считать суммарную длину участков ускорителя, измеренную из сопутствующих мюону систем отсчета?

5.28. Протон и электрон ускоряются из состояния покоя навстречу друг другу однородным электрическим полем напряженностью $\mathcal{E} = 10^7$ В/м. При каком минимальном расстоянии L между точками старта протона и электрона возможно образование пионов при столкновении в реакции $p + e^- \rightarrow p + e^- + \pi^- + \pi^+$? Каким будет это расстояние, если протон стартует раньше электрона на время $T = 10^{-7}$ с? $M_\pi = 140$ МэВ.

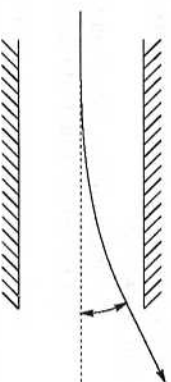
5.29. Две стартовавших одновременно ракеты движутся одна за другой по прямолинейной траектории с одинаковым ускорением g (в сопутствующих системах отсчета). В момент старта, когда расстояние между ракетами было равно $d = 0,5$ св. года, они послали друг другу радиосигналы частотой ω . Какова частота сигналов, принятых на каждой из ракет?

5.30. Частица массой m влетает с начальной скоростью V_0 в область, где на нее действует постоянная сила $\vec{F} \perp \vec{V}_0$. К каким значениям стреляются составляющие импульса p_{\parallel}, p_{\perp} и скорости V_{\parallel}, V_{\perp} , направленные соответственно вдоль и поперек начальной скорости?

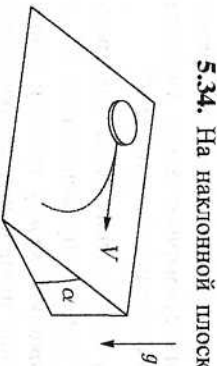
5.31. Электрон с кинетической энергией 1 МэВ влетает в тормозящее однородное электрическое поле напряженностью $\mathcal{E} = 10^6$ В/м под углом $\alpha = 45^\circ$ (см. рисунок). Какова высота траектории и минимальная скорость электрона? Найдите расстояние между точками влета и вылета электрона и время его пролета через конденсатор.



5.32. При пролете через электро-статический отклоняющий конденсатор (см. рисунок) протон с кинетической энергией 10^6 эВ отклоняется на угол $0,1$ радиана. На какой угол отклонится в этом конденсаторе электрон с такой же кинетической энергией?



5.33. Точечный радиоактивный источник, расположенный в однородном электрическом поле с напряженностью 10^6 В/м, испускает ионный поток электронов с энергией 10^4 эВ. Найти диаметр электронного потока на экране, перпендикулярном электрическому полю и находящемся на расстоянии 1 м от источника.



5.34. На наклонной плоскости с углом наклона α в поле тяжести лежит монета. Монете сообщается релятивистская скорость V вдоль горизонтальной оси (см. рисунок). Найти установившуюся скорость движения монеты u , если коэффициент трения $\mu = \lg \alpha$ не зависит от скорости.

5.35. Идеальное зеркало массой 1 кг ускоряется лучом лазера, расположенного на Земле. Какой должна быть мощность лазера, чтобы ускорить зеркало до скорости $0,8c$ за один год?

5.36. Космический корабль движется по круговой траектории с постоянной скоростью $V = 0,6c$, причем центростремительное ускорение в сопутствующей системе отсчета равно $a'_n = g$. За какое время по собственным часам корабль совершит полный оборот?

5.37. Релятивистский электрон движется в однородных электрическом \vec{E} и магнитном \vec{B} полях ($\vec{E} \parallel \vec{B}$). Во сколько раз продолжительность $N + 1$ периода обращения электрона по винтовой траектории больше продолжительности предыдущего периода? В начальный момент времени импульс электрона был перпендикулярен полю.

5.38. Источник излучения свободно движется со скоростью V . В собственной системе отсчета источник начинает изотропно излучать мощность N . Найти силу, действующую на источник в лабораторной системе отсчета, и изменение его импульса и скорости за время t .

5.39. Заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает. Интенсивность излучения в сопутствующей системе отсчета $I \sim a'^2$, где a' — ускорение частицы, причем импульс излучения в сопутствующей системе отсчета равен нулю. Во сколько раз отпочаются скорости потерь энергии на излучение у релятивистских протона и электрона в Л-системе, если они движутся:

- а) в продольном постоянном однородном электрическом поле,
- б) в магнитном поле по окружности одинакового радиуса?

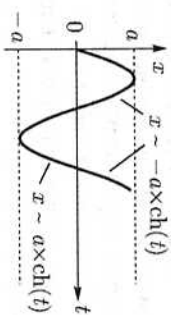
5.40. Какую скорость приобретет космический корабль с фотонным двигателем, когда его масса уменьшится вдвое? Корабль ускоряется от

нулевой начальной скорости. Считать, что масса топлива много больше массы ракеты, а к. п. д. двигателя равен 100% .

5.41. Какую часть топлива израсходует ракета с фотонным двигателем при доускорении от скорости $0,9c$ до $0,99c$?

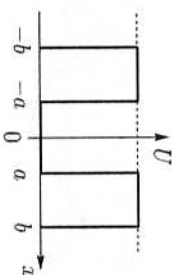
5.42. Первую половину пути ракета ускоряется с постоянным в сопутствующей системе отсчета ускорением $a' = 9,8 \text{ м/с}^2$ (1 св. г. / г^2), а вторую половину тормозится с таким же ускорением. Сколько горючего потребуется для полета на расстояние 10 св. лет ? Конечная масса ракеты M_k , скорость истечения газов относительно ракеты u .

6.5. Частица движется в статическом силовом поле по закону, показанному на рисунке. Найти зависимость силы и потенциала от координаты.



6.6. Найти закон движения частицы в поле $U = -\alpha x^4$ в случае, когда ее полная энергия равна нулю. Нарисовать траекторию частицы на фазовой плоскости.

6.7. Нарисовать траектории частицы на фазовой плоскости при движении в одномерном поле с потенциалом, изображенным на рисунке.



6.8. Нарисовать траектории частицы на фазовой плоскости для следующих одномерных полей:

1) $U(x) = \alpha^2 (x^2 - b^2)^2$, 2) $U(x) = -\alpha^2 (x^2 - b^2)^2$,

3) $U(x) = U_0 \sin kx$, 4) $U(x) = \alpha^2 \left(\frac{b^2}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$.

6.9. Как изменится со временем форма и объем области в фазовом пространстве, занимаемой группой движущихся вдоль оси x невзаимодействующих друг с другом частиц, помещенных в одномерный ящик с координатами стенок $x_1 = 0$, $x_2 = L$? Столкновения со стенками упругие. В начальный момент частицы занимали область x_0 , $x_0 + \Delta x$ и P_0 , $P_0 + \Delta P$.

6.10. Функция распределения частиц по скоростям и координатам x в момент времени $t = 0$ имеет вид:

$$F(V_x, x, 0) = \begin{cases} \alpha n_0 \cdot \exp(-V_x^2 / V_0^2) & \text{при } x \leq x_0, \\ 0 & \text{при } x > x_0. \end{cases}$$

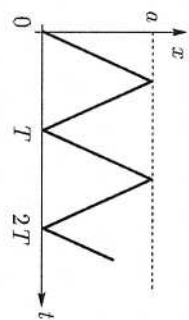
Найти распределение плотности частиц по x в момент времени t .

6.11. Как зависит период движения частицы в поле $U = \alpha|x|^\beta$ от ее энергии? $\alpha > 0$.

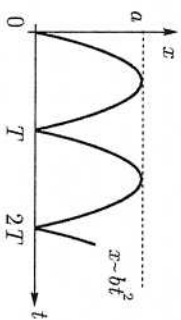
6.12. Жестя определитель распределение потенциала вдоль оси «черного ящика», экспериментатор пускает вдоль оси ионы с различными скоростями. Ионы, впущенные со скоростью V , возвращаются обратно через время $T = \alpha V^\beta$. Восстановите зависимость потенциала от координаты.

6. ДИНАМИКА ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

6.1. Законы движения. Фазовая плоскость



6.1. Найти зависимость силы, действующей на частицу, от координаты, если частица движется по закону, показанному на рисунке. Нарисовать зависимость потенциала от координаты. Изобразить движение на фазовой плоскости.



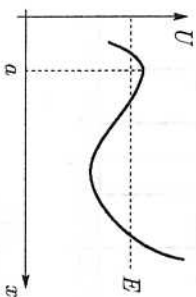
6.2. Найти зависимость силы, действующей на частицу, от координаты, если частица движется по закону, показанному на рисунке. Нарисовать зависимость потенциала от координаты. Изобразить движение на фазовой плоскости.

6.3. Исследовать движение заряженной частицы в однородном электрическом поле с синусоидальной зависимостью от времени. Нарисовать синхронные графики зависимости смещения, скорости и ускорения частицы от времени, а также траектории на фазовой плоскости при различных начальных условиях.

6.4. Найти зависимость силы, действующей на частицу массы m , от координаты, если закон движения частицы имеет вид $x(t) = a \sin \omega t$. Нарисовать зависимость потенциала от координаты. Изобразить движение на фазовой плоскости.

6.13. Изучая столкновения металлических шаров, студент обнаружил, что время соприкосновения шаров $T = \alpha V^{-1/2}$, где V — скорость шаров перед столкновением. Восстановите зависимость силы сопротивления шара деформации от величины деформации. Нарисуйте траектории сталкивающихся шаров на фазовой плоскости в системе центра масс.

6.14. Найдите зависимость периода колебаний частицы от энергии в одномерном поле с потенциалом $U(x) = \begin{cases} kx^2/2 & \text{при } |x| \leq a, \\ \infty & \text{при } |x| > a. \end{cases}$



6.15. Определите, по какому закону обрывается в бесконечность период движения частицы в поле, изображенном на рисунке, при приближении полной энергии частицы E к $U(a)$, если произвольная потенциала $U'(a) = 0$, причём $U''(a) \neq 0$.



6.16. Через трубку, соединенную по касательной с тором, влетает шарик. Объясните механизм отражения от стенок. Объясните механизм возврата шарика в трубку, который должен иметь место согласно теореме Пуанкаре. Оценить время возврата в зависимости от размеров системы и начальных условий влета.

6.2. Движение с трением

6.17. Сила сопротивления, тормозящая моторную лодку, пропорциональна квадрату скорости. За какое время после выключения мотора ее скорость уменьшится вдвое? Какое расстояние при этом пройдет лодка?

6.18. На моторной лодке, плывшей против течения, выключили мотор. Нарисовать синхронные графики зависимости от времени скорости и смещения лодки относительно берега, если сопротивление воды пропорционально квадрату скорости лодки относительно воды. Изобразить движение на фазовой плоскости.

6.19. Найти закон движения тела при падении в поле тяжести. Сила сопротивления воздуха $F = -\alpha V^2$. Начальная скорость тела равна нулю.

6.20. На какую высоту и за какое время поднимется тело, брошенное вертикально вверх, если сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости?

6.21. Найти зависимость скорости тела от пройденного расстояния при падении в поле тяжести. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Начальная скорость тела равна нулю, максимальная скорость падения $V_{\text{пик}}$.

6.22. Мячик подпрыгивает в поле тяжести над упругой плитой. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Как меняется высота и время полета мячика? Нарисовать синхронные графики скорости и координаты мячика в зависимости от времени, а также траекторию движения на фазовой плоскости.

6.23. Исследовать движение частицы в одномерном силовом поле при линейной зависимости силы сопротивления от скорости. Нарисовать графики зависимости смещения, скорости и ускорения частицы от времени. Представить движение на фазовой плоскости.

6.24. Найти зависимость скорости движения кальмара от времени, если он затрачивает мощность N и выбрасывает воду со скоростью u . Стартовая скорость кальмара равна нулю. Сила трения $F = -\alpha V$.

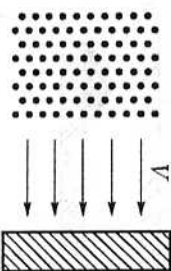
6.25. Тело массой m , брошенное вертикально вверх с малой скоростью V_1 , вернулось обратно со скоростью V_2 . Сила сопротивления воздуха $F = -\alpha V$, ускорение свободного падения g . Сколько времени тело находилось в полете?

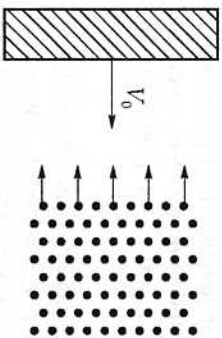
6.26. Тело массой m брошено в поле тяжести с малой скоростью V под углом θ к горизонту. Сила сопротивления $F = -\alpha V$. Какой будет скорость тела в верхней точке траектории?

6.27. На тонкое проволочное кольцо радиусом R налета бусинка, которой сообщили скорость V . Найти путь, который пройдет бусинка до остановки, если коэффициент трения μ . Кольцо неподвижно и расположено горизонтально в поле тяжести g .

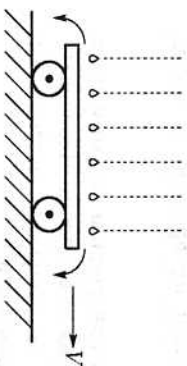
6.28. Исследовать теоретически движение пробки в горлышке бутылки с подогретым шампанским. Нарисовать графики зависимости от времени скорости и смещения пробки.

6.29. Диск диаметром D , массой M бомбардируется однородным потоком точечных пылинков массой $m \ll M$, плотностью n , скоростью V (см. рисунок). За какое время первоначально неподвижный диск ускорится до скорости u ? Удары пылинок упругие.





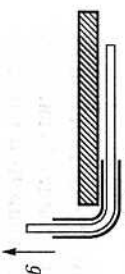
6.30. Диск диаметром D , массой M летит через однородный поток (см. рисунок) движущихся навстречу точечных пылинкок массой $m \ll M$. За какое время диск остановится? Плотность пылевого облака ρ , скорость V . Начальная скорость диска V_0 , удары пылинок упругие.



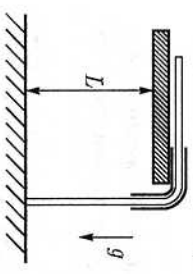
6.31. Плоская тележка, двинувшаяся со скоростью V , попадает под вертикально падающий дождь (см. рисунок). Скорость капель u , средняя плотность дождя ρ , площадь горизонтальной поверхности тележки S . За какое время тележка остановится, если коэффициент трения колес о плоскость μ . Вода с тележки стекает, так что ее масса M остается постоянной.

6.3. Движение с переменной массой

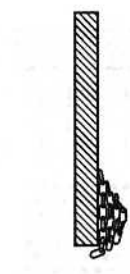
6.33. Однородный гибкий канат, висевший вертикально, падает на площадку весов. Нарисовать зависимость показаний весов от времени.



6.34. Однородная веревка соскальзывает со стола под действием силы тяжести через гладкую направляющую трубку (см. рисунок). Найти время соскальзывания, если в начальный момент длина свисающей части веревки равна четверти ее полной длины.



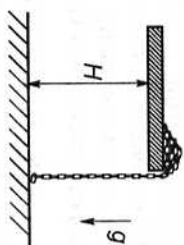
6.35. Однородная веревка длиной $2L$ соскальзывает под действием силы тяжести через направляющую трубку со стола высотой L (см. рисунок). Найти максимальную скорость веревки, если в начальный момент она покоилась, а длина свисающей части была равна L .



6.36. Свернутая в клубок тяжелая однородная цепь лежит на краю горизонтального стола, причем вначале одно звено цепи свешивается со стола. Под действием силы тяжести цепь начинает соскальзывать.

Принимая нулевые начальные условия, определить закон движения цепи. Считать, что звенья цепи поочередно приобретают только вертикальную скорость.

6.37. Свернутая в клубок тяжелая однородная цепь полной длиной $3H$ лежит на краю стола высотой H , так что ее один конец свешивается, касаясь пола (см. рисунок). Под действием силы тяжести цепь начинает соскальзывать. Найти зависимость скорости движущегося участка цепи от времени. За какое время цепь соскользнет со стола?



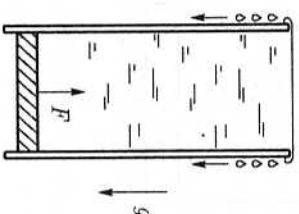
6.38. Какую массу газов должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться неподвижной в поле тяжести?

6.39. При какой минимальной мощности двигателей ракета весом 10^3 т сможет оторваться от стартового стола? Скорость истечения газов из сопла ракеты 2 км/с.

6.40. Ракета движется вверх с ускорением a в однородном поле тяжести. За какое время масса ракеты уменьшится в два раза? Сопротивлением воздуха пренебречь. Скорость истечения газов u .

6.41. Определите путь, пройденный ракетой при ускорении из состояния покоя до скорости u , равной эффективной скорости истечения газов. Сопротивление воздуха и поле тяжести отсутствуют. Начальная масса ракеты M_0 , секундный расход топлива μ .

6.42. Вертикальная открытая трубка длиной L доверху заполнена водой массой M . Снизу трубка закрыта тонким поршнем массой M . Под действием постоянной силы F поршень начинает двигаться вверх и вытесняет воду (см. рисунок). Найти скорость поршня в верхней точке. Поле тяжести g .



6.43. Найти закон движения сферической капли жидкости через неподвижный туман в поле тяжести. В начальный момент масса капли мала, а скорость равна нулю.

6.44. Найти закон движения капли жидкости под действием силы тяжести в переизбыточном паре. Скорость молекул пара много больше скорости капли. Скорость увеличения массы капли пропорциональна площади ее поверхности.

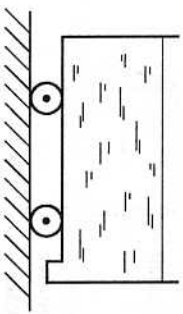
6.45. Ледяной метеорит сферической формы тормозится в атмосфере Земли. Сила трения о воздух пропорциональна его площади и скорости: $F = -\alpha S V$. Скорость испарения вещества метеорита пропорциональна его площади: $dm/dt = -\beta S$, причина в СО метеорита испарение изотропно. Найти зависимость скорости метеорита от времени, если его плотность ρ , а начальный радиус равен R_0 . Силой тяжести пренебречь. Начальная скорость метеорита V_0 .

6.46. На невесомый блок намотана тонкая веревка массой m , длиной L . По веревке начинает подниматься обезьянка массой M , при этом расстояние от нее до блока в процессе подъема остается постоянным и равным l . Найти зависимость от времени скорости обезьянки относительно веревки, если начальная длина свешивающейся части веревки $l_0 > l$.



6.47. На гладком столе лежит нить, сложенная пополам (см. рисунок). К одному из ее концов приложена постоянная сила F . Описать движение нити.

6.48. Свернутая в клубок однородная цепь длины L , массы m лежит на шероховатой поверхности с коэффициентом трения μ . Цепь тянут за крайнее звено с постоянной горизонтальной силой $F > \mu mg$. Какой будет скорость цепи в момент, когда она полностью распрямится? Звенья цепи вовлекаются в движение поочередно.

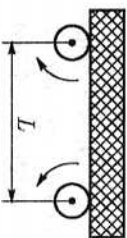


6.49. Исследовать движение тележки, из которой вытекает вода через отверстие на дне (см. рисунок). Поверхность воды в тележке остается горизонтальной.

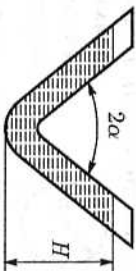
7. КОЛЕБАНИЯ

7.1. Свободные колебания

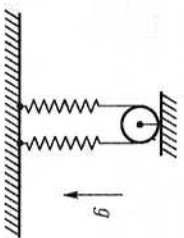
7.1. Определите частоту колебаний доски, положенной на два быстро вращающихся в противоположные стороны валика (см. рисунок), если расстояние между их осями L , коэффициент трения μ .



7.2. Найти частоту малых колебаний жидкости в трубке, показанной на рисунке. Высота трубки существенно больше радиуса закругления. Капиллярными эффектами пренебречь.



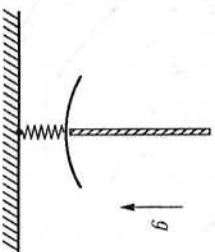
7.3. Через невесомый блок перекинута нерастяжимая нить массой M , длиной L , концы которой натянуты пружинами жесткостью k (см. рисунок). Найти собственную частоту колебаний нити в поле тяжести. При каком условии колебания устойчивы? Трения нет.

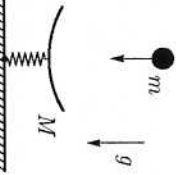


7.4. Определите время столкновения сильно накачанного мяча со стенкой. Масса мяча $m = 0,5$ кг, радиус $r = 0,1$ м. Избыточное давление $P = 7,5 \cdot 10^4$ Па в мяче в процессе удара меняется незначительно. Скорость мяча перпендикулярна стенке.

накачанного мяча со
стенкой. Масса мяча $m = 0,5$ кг, радиус $r = 0,1$ м. Избыточное давление

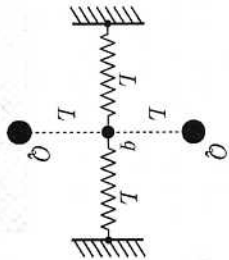
7.5. Какова амплитуда колебаний пружинных весов (см. рисунок) после быстрого падения каната длиной L , массой m ? Начальная скорость каната равна нулю.





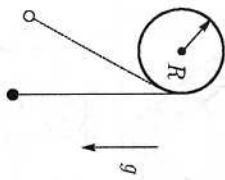
7.6. На неподвижную чашку весов массой M с пружинной жесткостью k (см. рисунок) упал вертикально со скоростью V кусок пластилина массой m . Найти зависимость координаты чашки от времени после падения пластилина.

7.7. Точка массой m , несущая заряд q , может двигаться по вертикали в поле тяжести. Ниже на той же вертикали закреплен одноименный заряд Q . Найти частоту малых колебаний точки. В равновесии расстояние между точкой и зарядом Q равно L .

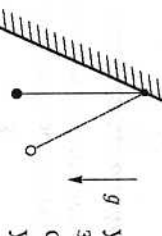


7.8. Найти частоту малых колебаний частицы с зарядом q , массой m вдоль линии, на которой закреплены заряды Q (см. рисунок). Пружинны натянуты, их длина в неравновесном состоянии $l < L$, коэффициент жесткости k . Найти условие, при котором рассматриваемое положение будет равновесием.

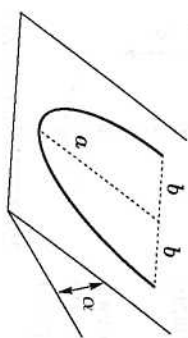
7.9. В соленоиде с сильным однородным магнитным полем, равномерно заполненном покрывшимися электронами, быстро включается электрическое поле, направленное вдоль оси. Потенциал поля зависит от координаты x вдоль оси по закону $U = ax^2$ (электроны ускоряются полем к центру $x = 0$). Найти зависимость плотности электронов от времени. Взаимодействием электронов между собой пренебречь. Как повлияет на результат конечный разброс начальных скоростей электронов?



7.10. На закрепленный цилиндр радиусом R намотана нитка. Длина свисающей части нити L . На ней подвешен груз массой m (см. рисунок). Найти частоту малых колебаний.



7.11. Грузик на нити подвешен к стенке с малым углом наклона к вертикали (см. рисунок). Определить зависимость периода колебаний грузика от угла отклонения от вертикали для случаев: а) удар о стенку упругий, б) удар неупругий.



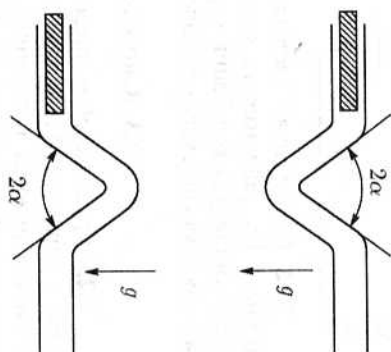
7.12. Частица может двигаться в поле тяжести по эллипсу, малая полуось которого b горизонтальна, а большая a составляет угол α с вертикалью (см. рисунок). Найти частоту малых колебаний частицы.

7.13. Бусинка налета на невесомую гладкую нить длиной L , концы которой закреплены на одинаковой высоте на расстоянии d друг от друга (см. рисунок). Найти частоту малых колебаний бусинки вдоль нити.



7.14. Найти период колебаний точки массой m , движущейся в поле тяжести в гладкой циклоидальной чашке $x = R(\varphi + \sin \varphi)$, $y = R(1 - \cos \varphi)$.

7.15. Гибкий однородный канат длины L скользит по горизонтальной внутри узкой гладкой трубки со скоростью u . Сколькo времени понадобится канату на преодоление V-образного углубления трубки (см. рисунок) с углом при вершине 2α и глубиной $H = L \cos \alpha$?

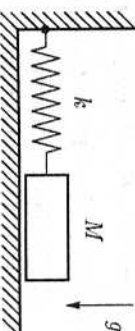


7.16. Гибкий однородный канат длины L скользит по горизонтальной внутри узкой гладкой трубки со скоростью u . Сколькo времени понадобится канату на преодоление A-образного подъема трубки (см. рисунок) с углом при вершине 2α и высотой $H = L \cos \alpha$?

7.17. В точке максимального (или нулевого) отклонения математического маятника массой M , длиной L от него откололся кусочек массой m . Найти изменение энергии маятника, нарисовать график на фазовой плоскости.

7.2. Колебания с трением

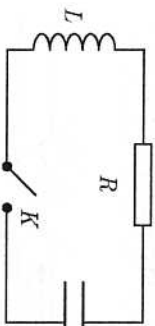
7.18. Исследовать движение стрелки амперметра с нулем в центре шкалы после быстрого разрыва цепи постоянного тока, протекавшего через него. Учесть момент сил сухого трения в подшипниках оси. Нарисовать траекторию на фазовой плоскости для угла отклонения стрелки φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$.



7.19. Лежащая на плоскости шайба массой M прикреплена к пружинке жесткости k (см. рисунок). Шайбу сместили из

положения равновесия на расстояние l и отпустили. Какой путь пройдет шайба до остановки? Сила трения мала и пропорциональна скорости $F = -\alpha V$ ($\alpha^2 \ll k \cdot M$).

7.20. При каком соотношении между сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C контура в цепи гальванометра осуществляется наиболее «оптимальный» аperiодический режим демпфирования колебаний рамки гальванометра?



7.21. В контуре, изображенном на рисунке, конденсатор C заряжен, причем $R^2 < 4L/C$. За какое время после замыкания ключа K энергия, запасенная в контуре, уменьшится в 20 раз?

7.22. Собственная частота стрелки амперметра с нулем в центре шкалы 1 Гц, добротность при затухании колебаний $Q = 20$. За какое время амплитуда колебаний стрелки уменьшится в 20 раз, если выключить протекавший через амперметр постоянный ток?

7.3. Вынужденные колебания. Резонанс

7.23. Груз массой m подвешен на пружине жесткостью k и колеблется с амплитудой A в поле тяжести. В момент, когда груз находится в крайнем нижнем положении, точку подвеса начинают двигать вверх с постоянной скоростью V . Найти зависимость координаты груза от времени.

7.24. Груз массой m подвешен на пружине жесткости k . Найти амплитуду его колебаний, оставшихся после действия прямоугольного импульса силы амплитудой F , длительностью τ . Сила направлена вдоль пружины. Начальная скорость груза была равна нулю.

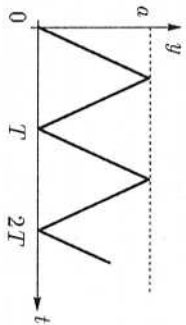
7.25. Найти амплитуду отклонения указателя гальванометра магнитозлектрической системы (в единицах показываемого тока), если через его рамку был пропущен прямоугольный импульс тока с амплитудой 1 А и длительностью 10^{-2} с. ПерIOD собственных колебаний рамки гальванометра 1 с. Затуханием колебаний пренебречь. Какой будет амплитуда колебаний при «треугольной» форме импульса тока?

7.26. Найти энергию, приобретенную осциллятором за все время действия силы $F = F_0 - F_0 \exp(-t/\tau)$. В начальный момент времени $t = 0$ энергия осциллятора была равна E_0 , и он проходил через положение равновесия.

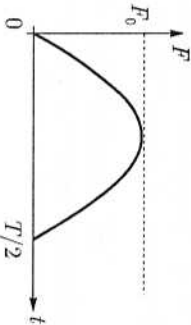
7.27. На осциллятор с трением, первоначально находившемся в равновесии, в течение времени T действует сила F , при этом уравнение

движения имеет вид: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F/m$, ($0 \leq t \leq T$). Найти энергию, перешедшую в тепло за все время движения осциллятора. При каком значении T эта энергия достигает максимума? Нарисовать фазовые траектории осциллятора при различных соотношениях между ω , γ и T .

7.28. Осциллятор, состоящий из груза массы m , подвешенного в поле тяжести на пружине, имеет период собственных колебаний T . Точку подвеса пружины двигают по вертикали по закону, показанному на рисунке. Какой будет энергия осциллятора через N полупериодов, если вначале осциллятор покоился? Что будет при других начальных условиях?



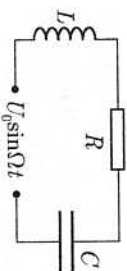
7.29. Определить амплитуду колебаний массы m , закрепленной на пружинке жесткостью k , оставшихся после воздействия внешней силы, график которой (один полупериод синусоиды) показан на рисунке. Период собственных колебаний осциллятора T совпадает с периодом внешней силы. До включения силы осциллятор покоился. Каким будет результирующий, если внешняя сила действовала в течение N полупериодов синусоиды?



7.30. Период собственных колебаний рамки амперметра магнитозлектрической системы равен 1 с, добротность $Q = 10$. Найти амплитуду установившихся колебаний стрелки (в единицах показываемого тока), если через амперметр пропускается синусоидальный ток с амплитудой 1 А и частотой 10 Гц. Какой будет амплитуда колебаний при резонансе?

7.31. Через амперметр магнитозлектрической системы пропускают ток, изменяющийся по закону $I(t) = I_0 \sin^2 \Omega t$. Найти зависимость амплитуды установившихся колебаний от Ω . Затухание считать малым. $I_0 = 1$ А. Амплитуду колебаний отсчитывать в амперах. Собственная частота ω_0 .

7.32. Через амперметр магнитозлектрической системы пропускают выпрямленный синусоидальный ток с амплитудой 1 А, частотой 100 Гц. Какими будут среднее отклонение и амплитуда установившихся колебаний стрелки? Частота собственных колебаний стрелки 1 Гц.



7.33. Найти амплитуду установившихся колебаний напряжения на конденсаторе и тока в контуре (см. рисунок), если на его вход подается переменное напряжение $U = U_0 \sin \Omega t$.

7.34. Шарик массой m подвешен в поле тяжести на пружине жесткости k . Точка подвеса пружины движется по вертикали по закону $z = a \cos \Omega t$. Найти амплитуду установившихся малых колебаний шарика.

7.35. Точка подвеса математического маятника длиной L движется по горизонтали по закону $x = b \cos \Omega t$. Найти угловую амплитуду установившихся малых колебаний.

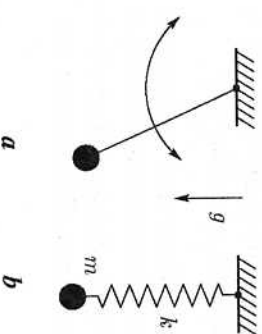
7.36. Рессоры железнодорожного вагона прогибаются под его тяжестью на 4 см, расстояние между стыками железнодорожного полотна 25 м. При какой скорости поезда амплитуда вертикальных колебаний вагона будет максимальной?

7.37. Предположим, что радиус одного из колец Сатурна периодически изменяется со временем. Найти условия резонанса и проанализировать баланс энергии.

7.38. По какому закону нужно менять длину математического маятника, чтобы параметрическая раскачка колебаний была наиболее эффективной (качели)? Изобразить движение на фазовой плоскости.

7.4. Адиабатические инварианты

7.39. Упругий шарик подпрыгивает в поле тяжести над горизонтальной плитой. Поле тяжести медленно изменяется. Как меняется высота подскока шарика над плитой?



7.40. Масса осциллятора медленно возрастает. Как при этом изменяются амплитуда и период его колебаний? Рассмотреть оба случая, показанных на рисунке.

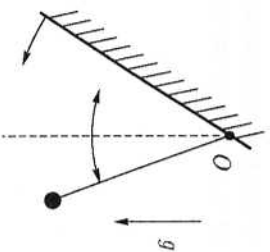
a b

7.41. Масса осциллятора медленно уменьшается (например, из-за таяния). Как при этом изменяются амплитуда и период его колебаний? Рассмотреть оба случая, показанных на рисунке к предыдущей задаче.

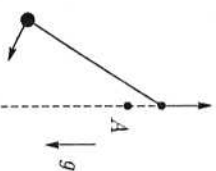
7. Колебания

7.42. Звезда теряет за счет излучения 10^{-9} часть своей массы в год. За какое время радиус круговой орбиты планеты, вращающейся вокруг звезды, изменится вдвое? Влиянием излучения на планету пренебречь.

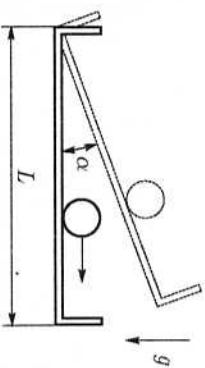
7.43. Грузик, подвешенный на нити к наклонной стенке, совершает малые колебания относительно точки подвеса O в поле тяжести (см. рисунок). Стенка медленно поворачивается вокруг точки O и принимает вертикальное положение. Во сколько раз изменится угловая амплитуда колебаний грузика? Удар упругий, начальный угол наклона стенки больше амплитуды колебаний грузика.



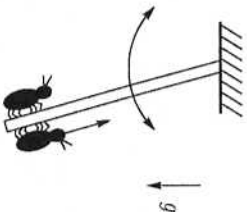
7.44. Вблизи точки подвеса математического маятника длиной L в точке A забит гвоздь. Точку подвеса медленно поднимают по вертикали (см. рисунок). Во сколько раз изменится размах колебаний маятника к моменту, когда расстояние между гвоздем и точкой подвеса станет равно $L/2$?



7.45. Частица движется со скоростью V вдоль стороны L в расположенном горизонтально прямоугольном ящике (см. рисунок), упруго отражаясь от его стенок. Ящик медленно поднимает за один конец, поворачивая вокруг ребра, перпендикулярного L . При каком угле наклона α дна ящика частица не будет достигать его верхней стенки?

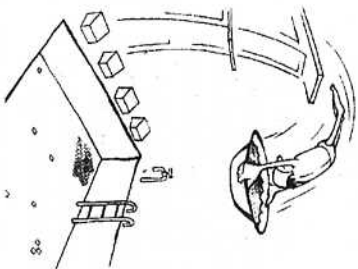


7.46. На нижнем конце невесомого стержня сидят два жука массой m каждый. Стержень совершает малые колебания в поле тяжести (см. рисунок). Один из жуков медленно ползет вдоль стержня. Как изменится амплитуда колебаний к моменту, когда жук достигнет середины стержня?



7.47. Найти период колебаний электронов вдоль оси z при движении по винтовым траекториям в магнитной ловушке. Магнитное поле симметрично относительно оси z и изменяется по закону $B_z = (1 + \lambda r^2) \alpha z$. Вблизи оси компоненты поля $B_x = B_y = 0$. В центре ловушки скорость электронов V_0 составляет угол θ_0

с осью z . Указание: воспользуйтесь диабатической инвариантностью магнитного момента электрона $M = \frac{mV_{\perp}^2}{2B} = \text{const}$, где V_{\perp} — компонента скорости электрона, перпендикулярная «медленно» изменяющемуся в пространстве магнитному полю.



8. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

8.1. Потенциал поля

8.1. Нарисуйте график потенциала и напряженности поля тяготения Земли в зависимости от расстояния до центра Земли.

8.2. Найти давление в центре «жидкой планеты» шаровой формы. Плотность жидкости считать однородной и равной $5,5 \text{ г/см}^3$. Радиус планеты 6400 км . Как изменится результат, если не пренебрегать сжимаемостью жидкости при увеличении давления?

8.3. На какой высоте от поверхности планеты нужно включить тормозной двигатель космического аппарата, чтобы обеспечить мягкую посадку на поверхность? Спуск происходит по прямой, проходящей через центр планеты. Сила торможения F постоянна. Сопротивлением воздуха и изменением массы аппарата пренебречь. Масса аппарата m , скорость вдали от Земли V_{∞} .

8.4. Внутри шара плотностью ρ имеется сферическая полость, центр которой находится на расстоянии \bar{a} от центра шара. Найти напряженность поля тяготения внутри полости.

8.5. Определить относительное изменение ускорения свободного падения $\Delta g/g$ в шахте на глубине 10 км (где g — ускорение на поверхности Земли). Средняя плотность вещества в земной коре в два раза меньше, чем средняя плотность Земли.

8.6. В результате сферически-симметричного взрыва однородного шара массой M , радиусом R образуется множество мелких осколков. При

какой минимальной суммарной кинетической энергии осколков они смогут разлететься на бесконечное расстояние от точки взрыва?

8.7. Сколько энергии выделится при гравитационном сжатии однородного шарового облака массой M , радиусом R до радиуса r ?

8.8. Оценить выход энергии при делении ядер урана ^{235}U . Считать, что радиус ядра с числом нуклонов A равен $R = R_0 \cdot A^{1/3}$, где $R_0 = 10^{-13}$ см.

8.9. Шарик массой m находится в поле сил, имеющем точку равновесия $x = 0, y = 0$. Если его вывести из положения равновесия и отпустить, то он движется по закону $x = a \sin \omega t, y = b \cos \omega t$. Найти зависимость силы $F = F(x, y)$ от координат.

8.10. На сферически-симметричную потенциальную «яму» радиусом R и глубиной U налетает плоский поток частиц с кинетической энергией E . В центре ямы расположена «липкая» сфера радиусом $a < R$. Найти зависимость сечения прилипания частиц к сфере от энергии частиц, построить график.

8.11. На сферически-симметричный потенциальный барьер радиусом R и высотой U налетает плоский поток частиц с кинетической энергией E . В центре барьера расположена «липкая» сфера радиусом $a < R$. Найти зависимость сечения прилипания частиц к сфере от энергии частиц, построить график.

8.12. По круговой орбите вокруг звезды массой M движется планета массой $m \ll M$. В результате взрыва звезда сбрасывает массу ΔM . Найти, при каком значении α планета покинет звезду. Считать, что сбрасываемая масса выходит за орбиту планеты сферически симметрично и мгновенно.

8.13. Вокруг звезды массой M по круговой орбите радиусом R движется космический объект массой $m \ll M$. В результате взрыва объекта его осколки стали разлетаться изотропно с начальной скоростью u (в системе отсчета объекта). Найти минимальное значение u , при котором не менее 25% осколков покинет систему звезды.

8.14. У быстро вращающейся звезды массой M , радиусом R взрывом сбрасывается тонкая верхняя шаровая оболочка. Какая часть сброшенного вещества вернется на звезду, если угловая скорость вращения звезды Ω , а начальная радиальная скорость оболочка $u < \sqrt{2GM/R}$? Как выглядит расширяющаяся оболочка через большое время после взрыва? Масса оболочка много меньше массы звезды.

8.15. На спутник, движущийся по круговой орбите, действует слабая тормозящая сила $F = -\alpha V^2$. Найти зависимость скорости спутника от времени. За какое время радиус орбиты уменьшится на 2%, если за месяц скорость спутника меняется на 1%?

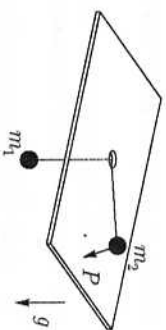
8.16. Оцените время жизни атома водорода с точки зрения классической физики, считая, что электрон вращается по круговой орбите радиусом $a_0 = 5 \cdot 10^{-9}$ см и в единицу времени излучает энергию $\frac{2e^2 a^2}{3c^3}$, где a — ускорение электрона, e — его заряд, c — скорость света (в системе CGSE).

8.17. Сферическая частица радиусом 1 мм, массой 10^{-2} г движется по круговой орбите радиусом 500 св. с вокруг Солнца. Оцените силу торможения, обусловленную взаимодействием частицы с излучением Солнца. Частица разогревается и переизлучает тепло изотропно в своей системе отсчета. Мощность излучения Солнца $4 \cdot 10^{26}$ Вт.

8.18. Оценить силу торможения, обусловленную взаимодействием Земли с солнечным излучением. Расстояние Земля — Солнце $1,5 \cdot 10^{11}$ м, мощность излучения Солнца $4 \cdot 10^{26}$ Вт, радиус Земли $6,4 \cdot 10^6$ м. За какое время радиус орбиты Земли изменится в два раза?

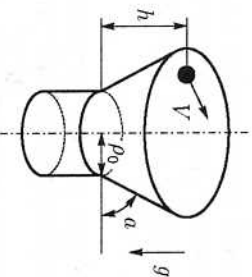
8.2. Момент импульса. Центробежный потенциал

8.19. Через отверстие в гладком столе пропущена невесомая нить, к концам которой прикреплены массы m_1 и m_2 . Масса m_2 лежит на расстоянии r_0 от отверстия (см. рисунок). Ей сообщают импульс P перпендикулярно нити. Найти максимальное удаление массы m_2 от отверстия.

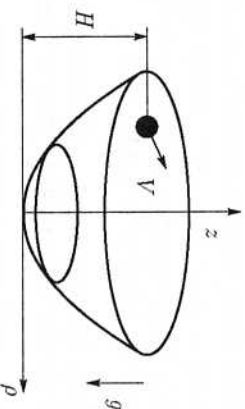


8.20. Электрон движется в плоскости, перпендикулярной положительно заряженной нити, по траектории, близкой к окружности радиуса R . Сила притяжения, действующая на электрон, равна α/r , где r — расстояние до нити. Найти период радиальных колебаний электрона.

8.21. Частица скользит без трения по стенке воронки (см. рисунок). В начальный момент частица находилась на высоте h и двигалась горизонтально со скоростью V . При какой минимальной скорости V частица не провалится в воронку, отверстие которой имеет радиус ρ_0 ?



К задаче 8.21



К задаче 8.22

8.22. Частица движется без трения по поверхности параболической чашки, описываемой в цилиндрической системе координат уравнением $z = \alpha r^2$. Поле тяжести направлено вдоль оси z . На высоте H скорость частицы V была горизонтальна (см. рисунок). Найти границы движения частицы.

8.23. Найти период движения частицы массой m в центральном поле с потенциалом $U = \alpha r^2$ ($\alpha > 0$).

8.24. Найти сечение падения потока метеоритов на Землю. Скорость метеоритов вдаль от Земли V_∞ .

8.25. На большом расстоянии R от Земли взорвался космический объект массой M . Осколки разлетелись сферически симметрично со скоростью V . Какая масса продуктов взрыва падает на Землю? Радиус Земли R_2 , вторая космическая скорость V_2 .

8.26. Найти сечение падения частиц энергией E на сферу радиусом R , находящуюся в центре поля с потенциалом отталкивания $U = \alpha/r$.

8.27. Найти сечение падения в центр поля притяжения $U = -\alpha/r^4$.

8.28. Найти сечение падения на сферу радиусом R , находящуюся в центре поля притяжения с потенциалом $U = -\alpha/r^{4+3\beta}$.

8.29. Найти сечение падения на сферу радиусом R , находящуюся в центре поля с потенциалом $U = -\alpha/r - \beta/r^2$, $\alpha, \beta > 0$. Скорость частиц на бесконечности $V_\infty > \alpha/(m\beta)^{-1/2}$.

8.30. Найти сечение падения в центр поля $U = -\alpha/r^n + \beta/r^2$, $\alpha, \beta > 0$.

8.31. Точка массой m движется в центральном поле, причём её скорость $V = \alpha/r$, где $\alpha = \text{const}$. Найти зависимость силы F от расстояния до центра поля r и траекторию точки.

8.32. Частице массы M , находящейся в центральном поле $U = \alpha r^{-2}$ на расстоянии r_0 от центра, сообщили скорость $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$. Найти уравнение траектории частицы.

8.33. При движении в центральном поле скорость частицы массой m изменяется по закону $V = \alpha r^{-1/2}$. Восстановите зависимость силы от расстояния до центра поля r . Найдите уравнение траектории частицы в случае, когда её максимальное приближение к центру поля имеет величину r_0 .

8.34. Частица движется в центральном поле по дуге окружности радиуса R , проходящей через центр поля. Доказать, что потенциал поля имеет вид $U = -\alpha r^{-4}$ ($\alpha > 0$). Найти начальные условия такого движения.

8.35. Найти время падения массы m в центр поля $U = -\alpha/r^6$ с расстояния R , если её полная энергия равна нулю, а начальная скорость перпендикулярна направлению на центр.

8.36. Найти время падения массы m в центр поля $U = -\alpha/r^4$ с расстояния R , если её полная энергия равна нулю, а начальная скорость перпендикулярна направлению на центр.

8.37. Найти период малых радиальных колебаний релятивистской частицы вблизи круговой орбиты при движении в поле с потенциалом $U = -\alpha/r - \beta/r^2$.

8.3. Кулоновское поле. Законы Кеплера

8.38. Какой должна быть минимальная скорость ракеты при выходе из атмосферы Земли, чтобы она смогла покинуть Солнечную систему без дополнительного ускорения?

8.39. Космический корабль должен покинуть Солнечную систему в определенном направлении. Какова минимальная скорость корабля при выходе из атмосферы Земли, необходимая для этого?

8.40. Космический корабль приближается к Луне по параболической траектории, почти касаясь поверхности Луны. Чтобы перейти на круговую орбиту, в момент наибольшего сближения включают тормозной ионный двигатель, выбрасывающий поток ионов цезия $^{133}\text{Cs}^+$ (ускоряющее напряжение 1 кВ). Какую часть общей массы должен потерять корабль? Радиус Луны 1740 км, ускорение силы тяжести $g/6$.

8.41. Находящийся на круговой орбите космический корабль тангенциальной добавкой скорости переводят на гиперболическую орбиту со скоростью на бесконечности V_∞ . При каком радиусе начальной круговой орбиты эта добавка скорости минимальна?

8.42. Оцените, с какой минимальной скоростью нужно стартовать с поверхности Луны, чтобы вернуться на Землю? Ускорение свободного падения на Луне $g/6$, скорость движения Луны по орбите 1 км/с . Радиус Луны 1740 км .

8.43. Баллистическая ракета стартует с Земли и продолжает свободный полет по траектории, апогей которой равен радиусу орбиты Луны. Какую максимальную скорость относительно Солнца сможет приобрести ракета при «правильном» использовании поля тяготения Луны («равноценный» маневр)?

8.44. Оценить поправку ко второй космической скорости, связанную с наличием Луны.

8.45. Какой должна быть минимальная скорость запуска тела с поверхности Луны, чтобы оно улетело за пределы Солнечной системы? Орбитальная скорость Земли 30 км/с , Луны — 1 км/с , ускорение свободного падения на поверхности Луны в шесть раз меньше, чем на Земле, радиус Луны 1740 км .

8.46. Комета Галлея движется по сильно вытянутой орбите с минимальным расстоянием до Солнца $0,6 \text{ а. е.}$ Во сколько раз максимальная скорость кометы больше скорости движения Земли вокруг Солнца?

8.47. Оценить скорость движения предметов внутри орбитальной станции, двигающейся по околоземной орбите.

8.48. В перигее величиной $\gamma_{\text{мин}}$ скорость спутника V . При каком касательном приросте скорости в перигее высота апогея увеличится на 1% ?

8.49. Орбитальная станция движется по круговой траектории на расстоянии 200 км от поверхности Земли. Какую наименьшую дополнительную скорость надо сообщить станции, чтобы ее максимальное удаление от Земли достигло 210 км ?

8.50. С какой минимальной скоростью должен покинуть атмосферу Земли космический корабль, направляющийся к Марсу и стартующий по касательной к орбите Земли? Каким будет расстояние от Земли до Марса при посадке корабля на Марс? Радиус орбиты Марса $1,52 \text{ а. е.}$ Какова минимальная начальная скорость при полете на Венеру? Радиус орбиты Венеры $0,72 \text{ а. е.}$

8.51. Спутник движется по околоземной круговой орбите радиусом r . Какую радиальную добавку скорости ему нужно сообщить, чтобы его орбита стала эллиптической с перигеем r_1 ?

8.52. Баллистическую ракету запускают с Северного полюса, так что после выхода из атмосферы и выключения двигателей она имеет скорость V_0 и угол вылета θ по отношению к горизонту. При каком соотношении между V_0 и θ ракета достигнет Южного полюса?

8.53. Как следует запускать баллистическую ракету на экваторе, чтобы она попала на Северный полюс? Найти связь между величиной начальной скорости и направлением запуска.

8.54. Требуется вывести космический корабль на околосолнечную орбиту с перигеем $0,001 \text{ а. е.}$ и периодом обращения один год. С какой скоростью и в каком направлении относительно линии Земли — Солнце нужно запустить такой корабль с Земли?

8.55. Астероид, вращающийся вокруг Солнца по круговой орбите со скоростью 20 км/с , за счет столкновения с метеоритом получил добавку тангенциальной скорости 20 км/с . С какой скоростью и под каким углом к первоначальной скорости астероид покинет пределы Солнечной системы?

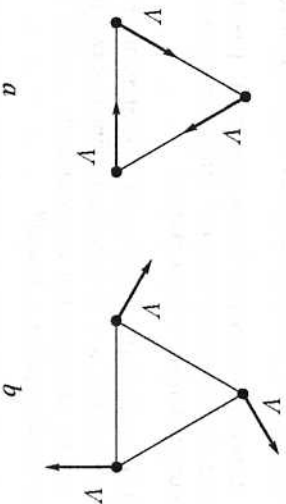
8.56. Астероид движется вокруг Солнца по эллиптической орбите с апогеем $2,8 \text{ а. е.}$ и перигеем $1,01 \text{ а. е.}$ При каком минимальном относительном изменении скорости в апогее астероид столкнется с Землей? Какова при этом максимальная относительная скорость Земли и астероида при встрече? Орбита астероида лежит в плоскости орбиты Земли.

8.57. С какой скоростью спутник должен покинуть атмосферу Земли, чтобы выйти на орбиту вокруг Солнца с перигеем $r_1 = 0,2 \text{ а. е.}$ и апогеем $r_2 = 1,8 \text{ а. е.}$? Плоскость орбиты спутника лежит в плоскости орбиты Земли.

8.58. На космическом аппарате, движущемся по круговой орбите радиусом 1 а. е. вокруг Солнца, ставится идеально отражающий излучение парус, ориентированный перпендикулярно лучам Солнца. Найти минимальную площадь паруса, необходимого для того, чтобы покинуть Солнечную систему. Масса аппарата $m = 10 \text{ т}$, масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$, полная мощность излучения $N = 3,86 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Какова минимальная площадь паруса для полета к орбите Марса (радиус орбиты $1,52 \text{ а. е.}$)?

8.59. Одно тело движется по параболе, другое — по окружности. В результате неупругого столкновения в перигее они слипаются. Найти траекторию образовавшегося тела. Массы тел одинаковы.

8.60. Три звезды одинаковой массы M , находящиеся в вершинах равностороннего треугольника со стороной d , движутся вдоль его сторон с одинаковыми начальными скоростями $v = \sqrt{GM/d}$ (см. рис. *a*). Каким будет минимальное расстояние между звездами в процессе движения? Каким будет максимальное расстояние между звездами, если скорости звезд были направлены перпендикулярно сторонам треугольника (см. рис. *b*)?



8.61. Сколько лет нужно ожидать возвращения кометы, удаляющейся от Солнца на 35 а. е.? Перигелий кометы 0,6 а. е.

8.62. При каком изменении скорости движения Земли продолжительность года увеличится в два раза?

8.63. Спутник движется по окружности радиусом R с периодом T . За короткое время скорость спутника была увеличена в k раз без изменения ее направления. Найти максимальное удаление спутника от центра Земли и новый период обращения.

8.64. Спутник, двигавшийся по круговой орбите, получил радиальную добавку скорости Δv . Как изменится период обращения спутника? Что будет, если добавка скорости перпендикулярна плоскости орбиты?

8.65. Два спутника движутся друг за другом на расстоянии 45 км по общей круговой орбите вблизи Земли. Чтобы состыковаться, спутники должны сблизиться и двигаться по общей орбите. Сколько раз нужно включить двигатель отстающего спутника, чтобы осуществить этот маневр наиболее экономично? Как зависит время сближения спутников от величины добавки к скорости? Двигатель сообщает спутнику импульс, перпендикулярный радиусу орбиты, а его каждое включение изменяет скорость спутника не более чем на 8 км/ч.

8.66. За какое время Земля упадет на Солнце, если остановить ее движение по орбите?

8.67. Оценить время, через которое возвратится баллистическая ракета, запущенная с поверхности Земли со скоростью 10 км/с. Сопроводим атмосферой пренебречь.

8.68. С какой начальной скоростью добрый молодец подобрался дубинку, если она вернулась на Землю через трое суток?

8.69. Как изменится период обращения Земли вокруг Солнца после неупругого столкновения с осколком, масса которого в 10^6 раз меньше массы Земли? Относительно Солнца осколок двигался по параболе и перед столкновением летел под углом α к скорости Земли.

8.70. Найти закон движения частицы по параболической траектории в поле с потенциалом $U = -\alpha/r$.

8.71. Найти траекторию частицы в поле

$$U = \begin{cases} -\alpha/r & \text{при } r \geq R, \\ -\frac{3\alpha}{2r} + \frac{\alpha r^2}{2R^3} & \text{при } r < R. \end{cases}$$

8.72. Определить траекторию движения релятивистского электрона в поле закрепленного ядра с зарядом Ze . Исследовать траектории для случая $L < Ze^2/c$ и $L \geq Ze^2/c$, где L – момент импульса электрона. Найти скорость прецессии орбиты, обусловленной релятивистскими поправками.

8.4. Задача двух тел

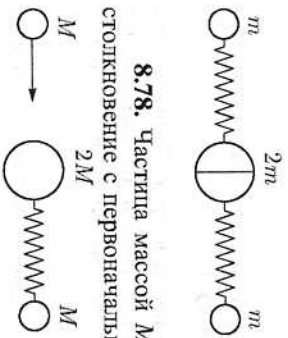
8.73. Найти период малых продольных колебаний осциллятора, состоящего из двух масс m и M , закрепленных на концах пружины жесткостью k .

8.74. Как изменится скорость хода часов с крутильным маятником, если их снять с пульты космического корабля и оставить свободно парить в кабине? От каких параметров и как будет зависеть это изменение?

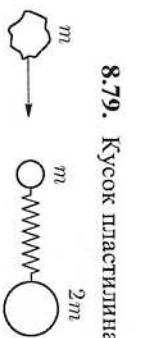
8.75. Через невесомый блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой через пружины жесткостью k подвешены грузики массой m и M . Найти частоту малых колебаний грузиков в поле тяжести. Трения нет.

8.76. Два шарика массами m и M соединены пружинной жесткости k . Шарик заряжают одноименными зарядами, так что пружина растягивается в α раз (пружины электрическое поле не возмущает). Найти частоту малых продольных колебаний системы.

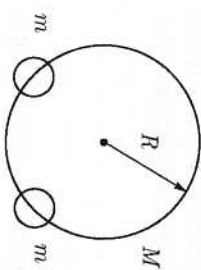
8.77. В линейной цепочке из трех масс m , $2m$ и m , соединенных пружинами жесткостью k , возбуждены симметричные колебания амплитудой A (см. рисунок). В фазе сжатия пружин средняя масса разваливается на две равные части. Найдите частоту и амплитуду колебаний новых цепочек.



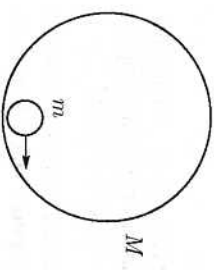
8.78. Частица массой M , скоростью V испытывает лобовое упругое столкновение с первоначально неподвижной частицей массой $2M$, соединенной невесомой пружиной жесткостью k с другой массой M (см. рисунок). Найдите законы движения частиц после столкновения. В момент удара пружина была нерастянута и имела длину L .



8.79. Кусок пластилина массой m , скоростью V испытывает лобовое неупругое столкновение с первоначально неподвижной частицей такой же массы, соединенной с другой массой $2m$ нерастянутой невесомой пружиной длиной L , жесткостью k (см. рисунок). Найдите законы движения частиц. Силу сцепления пластилина с частицей m считать равной нулю.



8.80. Две одноименно заряженные бусинки массой m и зарядом q каждая надеты на жесткое кольцо массой M , которое лежит на гладком столе (см. рисунок). Каким будет период малых колебаний системы, если бусинки сместить от положения равновесия и отпустить? Радиус кольца R .



8.81. Внутри первоначально неподвижной гладкой сферы радиусом R , массой M лежит шарик радиусом r , массой m (см. рисунок). Шарик сообщается начальная поступательная скорость V , так что он начинает скользить по внутренней поверхности сферы. Описать дальнейшее движение системы. Силы трения и тяготения не учитывать.

8.82. Найдите энергию связи атома позитрония, состоящего из электрона и позитрона, движущихся по круговой орбите радиусом R вокруг общего центра масс. Насколько эта энергия отличается от энергии связи атома водорода в случае, когда радиус орбиты электрона в позитронии и в атоме водорода одинаковы? Заряд электрона e .

8.83. Через какое время столкнутся две точки с разными массами, начавшие двигаться из состояния покоя под действием силы взаимного гравитационного притяжения?

8.84. Частица массой m , скоростью V налетает на первоначально покоящуюся частицу массой M . Прицельный параметр столкновения ρ . Найдите минимальное расстояние между частицами, если потенциал взаимодействия: а) $U = \alpha^2/r^2$; б) $U = \alpha^2/r^4$.

8.85. Компоненты двойной звезды имеют массы M и $2M$. Скорости звезд в начальный момент направлены перпендикулярно отрезку d , соединяющему их центры, и равны $2V$ и V соответственно. Нарисовать возможные траектории звезд. Сформулировать условие финитности движения для этого случая. Вычислить период их движения, а также максимальное и минимальное расстояния между ними.

8.86. Найдите полную массу системы «двойная звезда» по периоду обращения, минимальному и максимальному расстояниям между составляющими ее звездами.

8.87. Найдите расстояние между компонентами двойной звезды, если их суммарная масса равна удвоенной массе Солнца, а звезды вращаются по круговым орбитам вокруг общего центра масс с периодом два года. Расстояние от Земли до Солнца $1,5 \cdot 10^8$ км.

8.88. Масса шарового астероида M , радиус R . Какой должна быть минимальная скорость у шара массой $m \leq M$, радиусом $r < R$, запущаемого с поверхности астероида, чтобы он не вернулся на астероид?

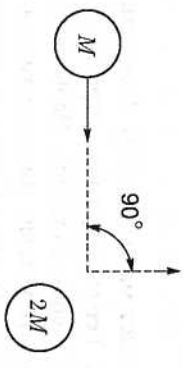
8.89. Две звезды массами m_1 и m_2 движутся по окружностям вокруг общего центра масс. У звезды массой m_2 в результате сферически-симметричного взрыва сбрасывается внешняя оболочка массой gm_2 , которая, расширяясь с большой скоростью, быстро уходит за пределы двойной системы. При каком значении g двойная система перестанет быть связанной гравитационными силами?

8.90. Две звезды с массами m и $2m$ движутся по окружностям вокруг общего центра масс на расстоянии d друг от друга. У звезды с массой $2m$ сферически-симметричным взрывом сбрасывается половина массы. Сброшенная оболочка, быстро расширяясь, покидает двойную систему. Каким будет новое максимальное расстояние между звездами? Во сколько раз изменится период их обращения?

8.5. Рассеяние частиц

8.91. Найти зависимость угла рассеяния точечных частиц на абсолютно упругой сфере радиусом R от прицельного параметра ρ .

8.92. Найти сечение рассеяния на угол, больший 90° , при упругом столкновении точечной частицы массой m с первоначально неподвижной сферой радиусом R , массой $2m$.



8.93. Сфера радиусом R , массой M при упругом столкновении с первоначально неподвижным шаром радиусом R и массой $2M$ рассеивается на угол 90° (см. рисунок). Найти прицельный параметр этого столкновения.

8.94. Точечная частица массой m и энергией T упруго рассеивается на первоначально неподвижном шаре массой M . Какая часть энергии в среднем передается шару за одно столкновение?

8.95. Найти зависимость угла рассеяния частиц с энергией E от прицельного параметра ρ при рассеянии на сферически-симметричном потенциальном барьере высотой U и радиусом R . Нарисовать график зависимости максимального угла рассеяния от энергии частиц при фиксированной высоте барьера. Нарисовать зависимость максимального угла рассеяния от высоты барьера при фиксированной энергии частиц.

8.96. Найти зависимость угла рассеяния от прицельного параметра при рассеянии частиц с кинетической энергией E на сферической потенциальной «яме» глубиной U . Нарисовать график зависимости максимального угла рассеяния от энергии частиц при фиксированной глубине ямы. Нарисовать зависимость максимального угла рассеяния от глубины ямы при фиксированной энергии частиц.

8.97. Найти зависимость угла рассеяния от прицельного параметра для быстрых электронов, пролетающих мимо тонкой заряженной проволоочки перпендикулярно ее оси (напряженность электрического поля проволоочки обратно пропорциональна расстоянию от нее).

8.98. Найти сечение рассеяния на угол, больший 90° , при столкновении электрона с энергией $T = 10$ кэВ с неподвижным протоном. Как изменится результат, если протон не закреплен?

8.99. Найти сечение рассеяния на угол, больший 90° , при упругом столкновении протона с энергией $T = 10$ эВ с летящим навстречу протоном такой же энергии.

8.100. Плоский поток частиц рассеивается на отталкивающем кулоновском потенциале. Найти область, в которую частицы попадают не могут.

8.101. Найти зависимость энергии, переданной покоящемуся протону нерелятивистским электроном от прицельного параметра. Каким будет результат при столкновении ядер дейтерия и гелия? Столкновения упругие.

8.102. Найти сечение упругого рассеяния электрона с кинетической энергией 1 МэВ на угол, больший 10^{-2} радиан, при пролете мимо первоначально покоящегося протона. Определить максимальную и минимальную энергию, переданную протону при рассеянии.

8.103. Оценить сечение «ионизации» (отрыва планеты) Солнечной системы быстрой звездой. Скорость звезды и много больше орбитальной скорости планеты V_0 .

8.104. Мисон с кинетической энергией T упруго рассеивается на первоначально покоящемся протоне. Прицельный параметр столкновения $\rho = 10^{-8}$ см. Найти энергию и направления разлета частиц после столкновения, если: а) $T = 10$ эВ; б) $T = 10$ МэВ. Определить минимальное расстояние между частицами в обоих случаях.

8.105. Найти зависимость угла рассеяния от прицельного параметра в поле $U = \alpha/r + \beta/r^2$, где $\alpha, \beta > 0$.

8.106. Найти уравнение траектории частицы массой m , движущейся в поле $U = \alpha/r^2 + \beta/r^2$, где $\alpha, \beta > 0$.

8.107. Описать качественно характер движения и вид траектории частицы в поле $U = -\frac{\alpha}{r^{1/2}} - \frac{\beta}{r^{7/2}}$.

8.108. Описать качественно характер движения частицы в поле $U = \alpha r^{-1} \exp(-r/r_0)$ при различных значениях момента импульса и энергии частицы. $\alpha > 0$.

8.109. Два встречных цилиндрических ступка нейтральных частиц имеют радиус a , длину L , скорость V . В каждом ступке N частиц, радиус которых r много меньше среднего расстояния между частицами в ступке. Найти полное число столкновений частиц за время прохождения ступков сквозь друг друга.

8.110. Пучок α -частиц с энергией 10 МэВ проходит через золотую фольгу толщиной 10 мк. За час происходит в среднем одно рассеяние на угол, больший 90° . Найти интенсивность пучка α -частиц.

8.111. Оценить скорость потери энергии легким упругим шариком массой m на покоящихся тяжелых шариках с таким же радиусом и массой $M \gg m$.

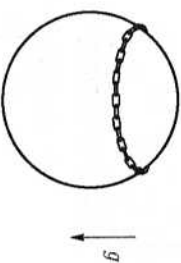
8.112. Найти толщину графитового замедлителя, понижающего среднюю кинетическую энергию нейтронов с 5 МэВ до 0,5 кэВ. Считать, что потери энергии происходят за счет упругих столкновений с ядрами углерода C^{12} радиусом $3,5 \cdot 10^{-13}$ см, рассматриваемыми как покоящиеся упругие шарики.

8.113. Пучок быстрых отрицательных ионов проходит через перезарядную мишень с интегральной плотностью молекул $\int n dx = N \text{ мол/см}^2$. Сечение перезарядки отрицательных ионов в атомы σ_0 , $\text{см}^2/\text{мол}$, сечение перезарядки атомов в протоны σ_p , $\text{см}^2/\text{мол}$. Какая доля пучка отрицательных ионов выйдет из мишени в виде отрицательных ионов, атомов и протонов? При какой толщине мишени выход атомов максимален?

9. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

9.1. Равновесие тел

9.1. Найти натяжение кольцевой цепочки, надетой на гладкий конус с углом при вершине α .

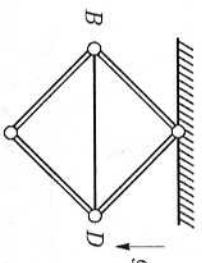


9.2. Найти натяжение кольцевой цепочки радиусом r , весом P , надетой на гладкую сферу радиусом R (см. рисунок).

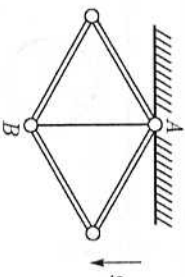
9.3. Обруч радиусом R , весом P лежит горизонтально в параболоческой чашке, описываемой уравнением $y = \alpha r^2$. Найти силу упругого сжатия обруча T .

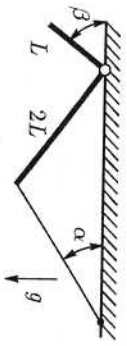
9.4. Найти силу упругого сжатия обруча радиусом r , весом P , лежащего горизонтально внутри гладкой сферической чашки радиуса R .

9.5. Найти силу, сжимающую невесомый стержень VD в системе, показанной на рисунке. Длина каждого стержня равна L , вес P . Стержни соединены шарнирами и образуют квадрат.

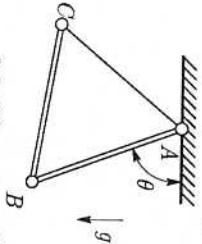


9.6. Ромб, составленный из четырех шарнирно закрепленных стержней весом P каждый, подвешен за вершину (см. рисунок). Найти натяжение невесомой нити, соединяющей верхнюю и нижнюю точки AB ромба.



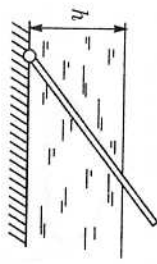


9.7. Однородная пластина длиной $3L$ и весом $3P$ согнута под прямым углом и подвешена, как показано на рисунке. Найти натяжение несомой нити. При каком угле β нить нужно заменить несомым стержнем?

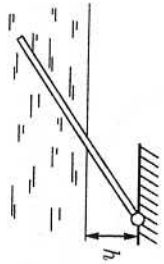


9.8. Одинаковые стержни AB и BC длиной L , весом P соединены шарнирно. Точки A и C соединены несомой нитью длины L . Найти натяжение нити и угол θ , образуемый стержнем AB с горизонталью в положении равновесия.

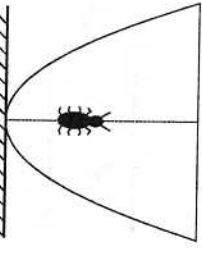
9.9. Однородный стержень длиной L , весом P может скользить своими концами без трения по параболе $y = \alpha x^2$. Найти положения равновесия стержня и исследовать их устойчивость.



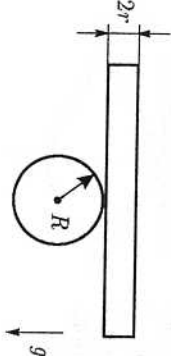
9.10. Нижний конец тонкой деревянной палочки длиной L шарнирно закреплен на дне бассейна (см. рисунок). Глубина воды $h < L$. Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.



9.11. Тонкая деревянная палочка длиной L шарнирно подвешена за один конец над поверхностью воды (см. рисунок, $h < L$). Найти положения равновесия палочки и исследовать их устойчивость.



9.12. Несомая плоская параболическая качалка высотой $H = 20$ см и шириной $L = 40$ см установлена вертикально на горизонтальной поверхности в поле тяжести и может качаться в своей плоскости (см. рисунок). По вертикальной оси качалки снизу вверх ползет маленький жук. До какой высоты он должен доползти, чтобы равновесие качалки стало неустойчивым и она могла наклониться?

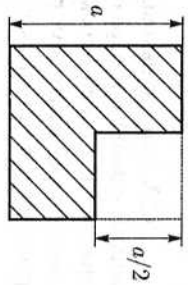


9.13. Карандаш радиусом r удерживается горизонтально в равновесии на стержне радиусом R в поле тяжести (см. рисунок). Оси карандаша и стержня перпендикулярны, коэффициент

трения скольжения μ . При каком максимальном угле отклонения α карандаш от горизонтали он еще вернется в положение равновесия?

9.2. Вращение с неизменной ориентацией оси. Момент инерции, момент импульса

9.14. Крест состоит из однородных стержней, скрепленных посередине под углом α . Найдите его момент инерции относительно конца одного из стержней. Ось вращения перпендикулярна плоскости креста.



9.15. Из однородной квадратной пластины стороны a вырезали квадрат стороны $a/2$ (см. рисунок). Масса полученной фигуры m . Найти момент инерции фигуры относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через её центр тяжести.

9.16. При каком соотношении между радиусом и высотой конуса его главные моменты инерции будут одинаковыми?

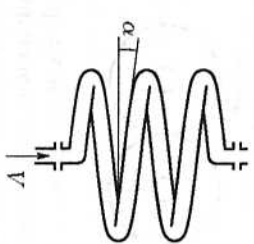
9.17. Стержень вращается с угловой скоростью ω , причём ось вращения проходит через середину стержня, образуя с ним угол α . Найти величину и направление момента импульса, а также кинетическую энергию стержня.

9.18. На поверхность Земли выпадает метеорная пыль. Поток ее изотропен, плотность потока μ . Найти зависимость продолжительности суток от времени.

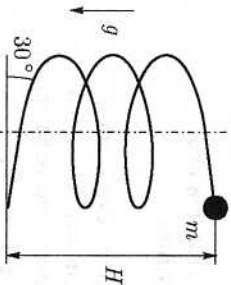
9.19. Оценить период вращения Солнца, если бы оно превратилось в нейтронную звезду с плотностью 10^{14} г/см³. Средняя плотность Солнца $1,4$ г/см³, период вращения $2 \cdot 10^6$ с.

9.20. Масса вращающейся звезды уменьшается за счет быстрого истечения вещества в пространство. Как изменяется угловая скорость вращения звезды при уменьшении ее радиуса? Звезду считать однородным твердым шаром. Разлет вещества сферически-симметричен в системе отсчета звезды.

9.21. Несомая труба согнута по винтовой линии радиусом R с углом наклона α и имеет N витков (см. рисунок). Начало и конец трубы выведены по радиусу на ось винтовой линии. Через подводы, обеспечивающие свободное вращение трубы вокруг

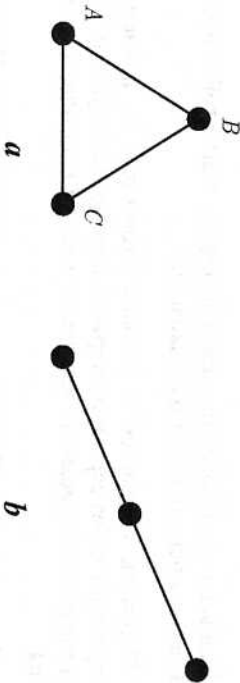


оси винтовой линии, прокачивается вода со скоростью V . Найти угловую скорость вращения трубы.



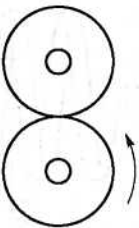
9.22. Тело массой m соскальзывает с высоты H по винтовому желобу с радиусом R и углом наклона 30° (см. рисунок). Желоб массой M может свободно вращаться вокруг своей вертикальной оси. Найти угловую скорость вращения желоба после соскальзывания тела. Трения нет.

9.23. Три одинаковые точечные массы соединены невесомыми стержнями длиной L и образуют равносторонний треугольник ABC , который вращается в своей плоскости с угловой скоростью Ω вокруг оси, проходящей через центр (см. рис. а). Связь AC исчезает. Найти линейные скорости масс в момент, когда они займут положение, показанное на рис. б.



9.24. На гладком столе лежит диск массой M , радиусом R , вращающийся с угловой скоростью ω_0 . На диск падает плашмя без горизонтальной скорости круглая пластилиновая лепешка массой M , радиусом $R/2$. Край лепешки совпадает с краем диска. Найти угловую скорость диска с приклеившейся к нему лепешкой.

9.25. Сплошной цилиндр радиусом R , вращающийся с угловой скоростью ω , ставят вертикально на шероховатую горизонтальную плоскость. Коэффициент трения μ . Сколько оборотов сделает цилиндр?



9.26. Два одинаковых диска, насаженных на гладкие оси, один из которых вращался с угловой скоростью ω , привели в соприкосновение (см. рисунок). Найти установившуюся скорость вращения дисков. Какая часть энергии перейдет в тепло?

9.27. К диску, раскрученному вокруг оси, проходящей через центр симметрии перпендикулярно плоскости, поднесли два таких же неподвижных диска, так что они начали раскручиваться вокруг своих осей,

9. Движение твердого тела

9.28. Цилиндрическая банка с жидкостью раскручена вокруг оси симметрии так, что жидкость не успела закрутиться. Как изменится угловая скорость вращения к моменту, когда угловые скорости банки и жидкости уравниются? Сколько энергии перейдет в тепло? Моменты инерции жидкости и пустой банки равны.

9.29. Диск массой M , радиусом R может вращаться вокруг своей оси без трения. На тонкую шершавую ось, находящуюся на расстоянии r от центра диска, насадили диск массой m , радиусом r , вращающийся с угловой скоростью ω_0 . Найти установившуюся угловую скорость вращения системы.

9.3. Физический маятник

9.30. Найти частоту малых колебаний тонкого стержня длиной L в поле тяжести вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и расположенной на расстоянии x от его середины.

9.31. Симметричный крест, состоящий из двух взаимно-перпендикулярных тонких однородных стержней длиной L , может колебаться в поле тяжести вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из стержней и перпендикулярной ему. При каком удалении X оси вращения от центра креста период его малых колебаний будет минимален? Найти минимальное значение периода колебаний креста.

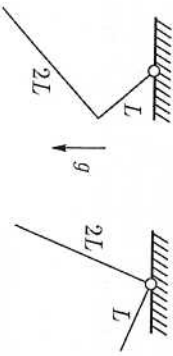
9.32. Обруч подвешен за верхнюю точку и может колебаться в вертикальной плоскости. Найти частоту малых колебаний: а) в плоскости обруча; б) перпендикулярно плоскости обруча.

9.33. Найти частоту малых колебаний тонкостенной сферы вокруг своей хорды в поле тяжести. Каким будет период малых колебаний для шара?

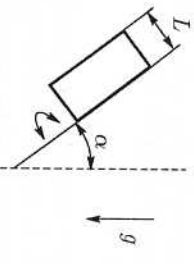
9.34. Тонкостенный сферический сосуд радиусом R целиком заполнен водой и совершает малые колебания относительно точки подвеса O , удаленной на расстояние $L = 2R$ от центра сферы. Вода постепенно, слой за слоем, замерзает на внутреннюю поверхность сосуда. Во сколько раз изменится амплитуда колебаний к моменту, когда вся вода замерзнет? Время полного замерзания воды много больше периода колебаний.

9.35. Каркас массой m , сделанный из тонкой проволоки, имеет вид полуокружности с диаметром. Каркас шарнирно закреплен в средней точке диаметра и может колебаться перпендикулярно своей плоскости. Какова частота малых колебаний, если диаметр полуокружности d ?

9.36. Найти частоту малых колебаний проволочного равноостороннего треугольника, подвешенного на шарнире за вершину в поле тяжести (см. рисунок). Треугольник колеблется в плоскости рисунка.



9.37. Однородный стержень согнут под прямым углом и подвешен на шарнире (см. рисунок). Найти частоту малых колебаний стержня для двух случаев, показанных на рис. *a* и *b*.

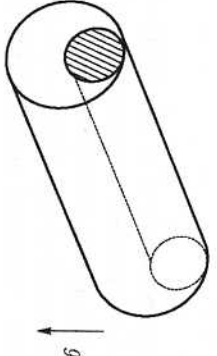


9.38. Найти частоту малых колебаний прямоугльной пластинки в поле тяжести относительно оси, которая проходит через край пластинки и наклонена под углом α к вертикали (см. рисунок).

9.39. Номерок из гайдырера представляет собой диск радиусом R , на краю которого имеется отверстие радиусом r . Номерок висит на тонком гвозде. Найти частоту его малых колебаний в своей плоскости.

9.40. В обод колеса, имеющего форму диска радиусом R , массой M , застрял камешек массой m . Найти частоту малых колебаний при плоском покачивании колеса без проскальзывания на горизонтальной плоскости.

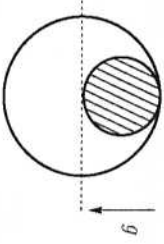
9.41. Обруч радиусом R лежит горизонтально внутри неподвижной гладкой сферы радиусом $2R$. Найти частоту малых колебаний обруча под действием силы тяжести.



9.42. В цилиндре радиусом R параллельно оси на расстоянии $R/2$ вставлен цилиндрический канал, в который вставлена цилиндрическая вставка радиусом $R/2$ и длиной, равной длине цилиндра (см. рисунок). Плотность вещества цилиндра ρ_1 , вставки — $\rho_2 < \rho_1$. Трение между стенками цилиндра и вставкой равно нулю. Найти частоту

малых колебаний цилиндра в поле тяжести вокруг горизонтальной оси, совпадающей с осью большого цилиндра.

9.43. На краю шара радиусом R , плотностью ρ_1 вырезана сферическая полость радиусом $R/2$ (см. рисунок). В полость вставлена шаровая вставка плотностью $\rho_2 < \rho_1$ того же радиуса. Трение между стенками полости и вставкой нет. Найти частоту малых колебаний шара в поле тяжести вокруг горизонтальной оси, совпадающей с диаметром большого шара.



9.44. Найти частоту малых колебаний полшара радиусом R на горизонтальной плоскости в поле тяжести. Проскальзывания нет.

9.45. На неподвижный горизонтальный стержень радиусом r надет тонкостенная труба радиусом R . Найти частоту малых колебаний трубы в поле тяжести. Труба движется без проскальзывания.

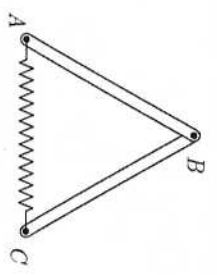
9.46. Найти частоту малых колебаний шарика радиусом r , движущегося без проскальзывания по внутренней поверхности сферы радиусом R в поле тяжести.

9.47. Найти частоту малых колебаний стержня массой m , длиной L , прикрепленного верхним концом к шарниру, а нижним — к середине нерастянутой горизонтальной пружины жесткостью k , концы которой закреплены.

9.48. Однородный стержень подвешен к потолку на двух одинаковых нитях, закрепленных на концах стержня. В положении равновесия нити вертикальны. Найти частоту малых крутильных колебаний стержня вокруг вертикальной оси, проходящей через центр стержня.

9.49. Найти частоту малых крутильных колебаний вокруг вертикальной оси для однородного колеса, подвешенного к потолку на трех одинаковых нитях. В положении равновесия нити вертикальны и делят колесо на три равные части. Плоскость колеса горизонтальна.

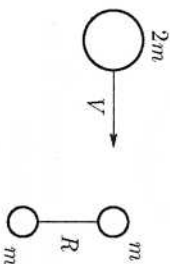
9.50. На гладком столе лежат стержни AB и BC , соединенные в точке B шарниром. Точки A и C соединены невесомой пружинной жесткостью k (см. рисунок). Длины L и массы M стержней одинаковы. В положении равновесия стержни образуют угол 60° . Найти частоту малых колебаний. Как изменится результат, если закрыть точку B ?



9.51. Диск массой M , радиусом R может катиться без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу. К центру диска шарнирно прикреплен невесомый стержень длиной l , на конце которого находится точечная масса m . Найти период малых колебаний такого маятника.

9.4. Плоское движение тел

9.52. Описать движение гантели, состоящей из двух одинаковых шаров массой m и радиусом r каждый, соединенных невесомым стержнем длины $R \gg r$ (см. рисунок), после упругого лобового столкновения частицы массой $2m$, скоростью V с одной из масс гантели. До столкновения гантель покоилась.



9.53. По стержню длиной l , лежащему на гладком столе, наносится удар. Направление удара перпендикулярно стержню. При ударе концы стержня приобретают скорости V и $2V$. Найти расстояние от точки удара до середины стержня.

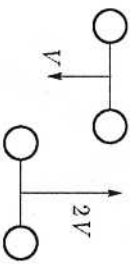
9.54. На льду лежит стержень длиной l , массой M , с которым упруго сталкивается шарик массой m . Скорость шарика V направлена по нормали к стержню. Точка удара близка к концу стержня. Найти скорость шарика после столкновения.

9.55. На гладком столе лежит стержень массой M , длиной l . Перпендикулярно стержню движется шарик массой m . После упругого удара о стержень шарик остановился. На каком расстоянии от середины стержня произошел удар?

9.56. Каким участком сабли следует рубить дозу, чтобы рука не чувствовала удара? Саблю считать однородным стержнем длиной l .

9.57. Однородный диск радиусом R , вращавшийся с угловой скоростью ω , разбится по диаметру на две равные части. Найти скорости поступательного и вращательного движения осколков.

9.58. Две одинаковые гантельки, движущиеся навстречу со скоростями V и $2V$ (см. рисунок), сталкиваются концами и сплюпаются. Описать движение образовавшейся гантельки. Длина каждой гантельки l .

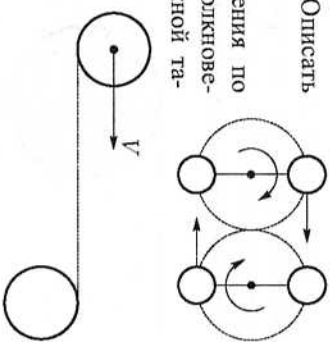


9.59. Две одинаковые гантельки, вращающиеся в одной плоскости навстречу друг другу с угловыми скоростями Ω и 2Ω (см. рисунок),

9. Движение твердого тела

сталкиваются концами и сплюпаются. Описать движение образовавшейся гантельки.

9.60. Шайба, двигавшаяся без вращения по льду со скоростью V , при касательном столкновении склеивается с первоначально неподвижной второй же шайбой (см. рисунок) и через некоторое время после совместного движения отрывается от нее. Какой будет максимальной скорость второй шайбы после отрыва?

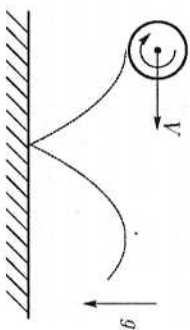


9.61. На обруч массой m , радиусом R намотана тонкая веревка линейной плотностью ρ . Обруч катится по плоскости, при этом веревка разматывается. Считая, что плоскость абсолютно шероховатая, найти зависимость скорости обруча от времени. Длина веревки l , начальная скорость обруча V_0 .

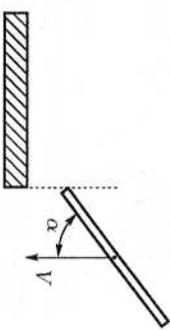
9.62. В одном из хоккейных матчей шайба, летевшая без вращения со скоростью V под углом 45° к борту, упруго ударилась о борт и отскочила... по нормали. Найти скорость вращения отскочившей шайбы. Масса шайбы m , радиус R .

9.63. Какое максимальное число оборотов вокруг своей оси может сделать футбольный мяч после одинаковым ударом? Радиус мяча $0,11$ м. Начальная скорость мяча направлена под малым углом к горизонту. Сопротивлением воздуха пренебречь.

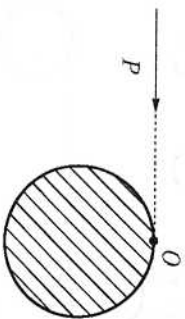
9.64. На шероховатый пол падает шар радиусом R , который вращается с угловой скоростью ω по часовой стрелке вокруг горизонтальной оси и имеет горизонтальную скорость $V_0 > \omega R$, перпендикулярную оси вращения (см. рисунок). Найти угловую скорость вращения шара и его горизонтальную скорость после N упругих отскоков от пола.



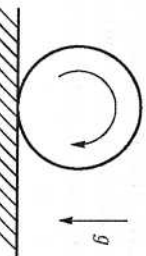
9.65. Стержень длиной l , движущийся поступательно со скоростью V , одним концом задевает за закрепленную стенку (см. рисунок). Найти угловую скорость вращения стержня после удара. Угол между осью стержня и начальной скоростью α . Удар упругий. Рассмотреть два случая: а) трения нет; б) проскальзывания нет.



9.66. По льду скользят две шайбы, имевшие одинаковые начальные скорости. Одна из них при этом вращается, а другая движется только поступательно. Какая из шайб пройдет большее расстояние? Коэффициент трения не зависит от скорости.



9.67. Лежащей на льду шайбе радиусом R касательным ударом в точку O сообщают импульс P (см. рисунок). Сколько оборотов сделает шайба и каково расстояние пройдет до остановки? Сила трения $F = -\alpha v$ пропорциональна скорости v и площади контакта S шайбы со льдом.



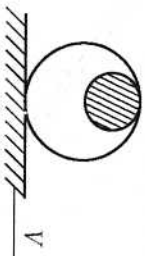
9.68. Однородный цилиндр раскрутили вокруг оси и поставили без поступательной скорости на шероховатую горизонтальную плоскость. Ось вращения параллельна плоскости (см. рисунок). Нарисовать синхронные трафики зависимости от времени угловой скорости, поступательной скорости, ускорения и смещения. Какая доля энергии перейдет в тепло?

9.69. Определить минимальное значение угловой скорости, при которой обруч, брошенный вперед с закруткой, сможет покатиться назад. Определить его установившуюся скорость, если начальная угловая скорость превышает минимальную.

9.70. Определить ускорение скатывания с наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α : а) полного и сплошного цилиндра; б) шара.

9.71. Определить ускорение, с которым цилиндрическая бочка массой m , целиком заполненная жидкостью массой M , скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости с углом наклона α . Вязкостью жидкости и моментом инерции дна бочки пренебречь.

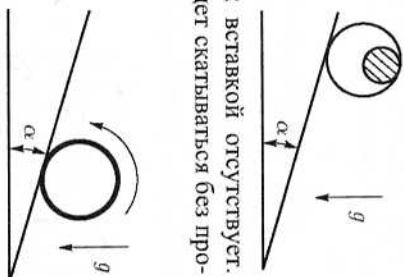
9.72. Шар радиусом R , массой M начинает скользить по наклонной плоскости с углом наклона α . Коэффициент трения скольжения μ . С какой силой соскальзывающий шар действует на плоскость?



9.73. В цилиндре с радиусом основания R параллельно оси вырезан цилиндрический канал радиусом $R/2$. В канал вставлена цилиндрическая вставка из того же материала. Расстояние между осями главного цилиндра и вставки равно $R/2$, трения между цилиндром и вставкой нет. Цилиндр поставили на шероховатую плоскость, движущуюся со скоро-

стью V (см. рисунок). Найти установившуюся угловую скорость цилиндра.

9.74. В цилиндре с радиусом основания R параллельно оси вырезан цилиндрический канал радиусом $R/2$ (см. рисунок). В канал вставлена цилиндрическая вставка из того же материала. Расстояние между осями главного цилиндра и вставки равно $R/2$, трение между цилиндром и вставкой отсутствует. Найти угловое ускорение, с которым цилиндр будет скатываться без проскальзывания с наклонной плоскости.

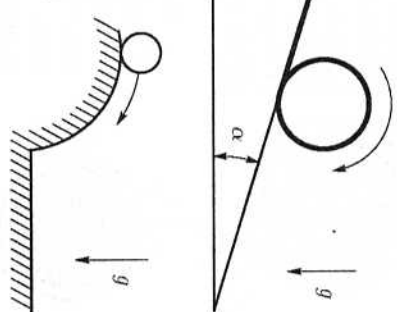


9.75. Однородный цилиндр раскрутили вокруг оси и поставили без начальной скорости на наклонную плоскость (см. рисунок). Описать движение цилиндра при различных соотношениях между коэффициентом трения и углом наклона.

9.76. Найти время, за которое цилиндр радиусом r , вращающийся с начальной угловой скоростью ω , достигнет наивысшего положения, будучи поставлен на шероховатую наклонную плоскость с углом наклона α к горизонту α .

9.77. На какую высоту поднимется поставленный на наклонную плоскость с углом наклона α вращающийся цилиндр радиусом R , энергией T , если имеется проскальзывание? Коэффициент трения μ .

9.78. Рулон тонкой бумаги общей длиной L , намотанный на невесомую трубу радиусом R , раскручивается под действием силы тяжести по наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту (см. рисунок). За какое время рулон развернется наполовину? Проскальзывания нет.

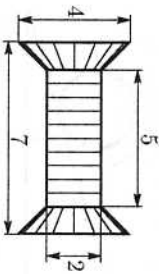


9.79. С верхней точки цилиндрической горки радиусом R скатывается без проскальзывания и без начальной скорости цилиндр радиусом r (см. рисунок). На какой высоте цилиндр оторвется от горки?

9.80. На шероховатом столе стоит палочка, которая начинает падать из вертикального положения в поле тяжести. При угле наклона палочки 45° ее нижний конек начинает скользить. Найти коэффициент трения.

9.81. Палочка длиной l , массой M , стоящая вертикально на горизонтальной плоскости, начинает падать с нулевой начальной скоростью. Найдите силу, с которой палочка действует на плоскость перед моментом полного касания в случаях: а) плоскость гладкая; б) проскальзывания нет.

9.82. Лестница длиной l , опирающаяся верхним концом на гладкую вертикальную стену, а нижним — на гладкий горизонтальный пол, начинает падать. Опишите ее движение, если в начальный момент она покоится, а расстояние от нижнего конца до стены было равно d . Определите силы реакции стены и пола при движении лестницы.

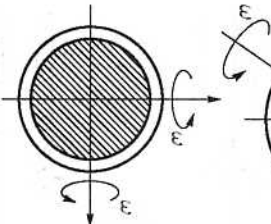


9.83. С каким ускорением надо тянуть вверх нить, намотанную на катушку, чтобы катушка не падала? Плотность материала катушки ρ . Размеры катушки указаны на рисунке.

9.84. Исследовать движение маятника Максвелла с моментом инерции J , весом mg и радиусом оси r . Найдите зависимость натяжения нити маятника F от времени.

9.5. Вращение с изменением ориентации оси. Гироскоп

9.85. В укрепленную на вертикальной оси тонкую сферическую оболочку массой M , радиусом R вложен шар массой M и радиусом R . Шар раскручен до угловой скорости ω под углом α к вертикали (см. рисунок). Найдите установившуюся угловую скорость вращения оболочки и шара, если между ними действует сила трения.

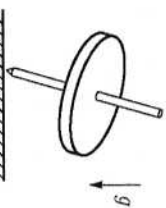


9.86. В тонкую сферическую оболочку массой M , радиусом R вложен шар массой M , радиусом R . Оболочка и шар раскручены до угловых скоростей ω в перпендикулярных направлениях (см. рисунок). Найдите установившуюся угловую скорость вращения оболочки и шара, если между ними действует сила трения.

9.87. Найдите частоту прецессии волчка, вращающегося с большой угловой скоростью вокруг своей оси, под действием силы тяжести.

9. Движение твердого тела

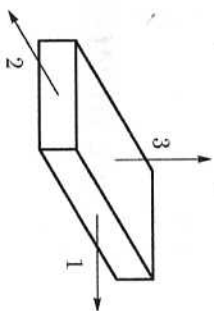
9.88. Волчок, имеющий форму диска диаметром 30 см, насаженного по середине оси длиной 20 см, вращается с угловой скоростью 15 об/с вокруг оси симметрии (см. рисунок). Определите угловую скорость регулярной прецессии волчка.



9.89. Исследовать устойчивость движения обруча, катящегося без проскальзывания с угловой скоростью ω по горизонтальной плоскости. Плоскость обруча вертикальна. Радиус обруча r .

9.90. Исследовать устойчивость движения однородного обруча, вращающегося вокруг вертикального диаметра с угловой скоростью ω . Нижней точкой обруча соприкасается с горизонтальной плоскостью. Радиус обруча r .

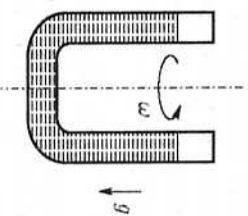
9.91. Исследовать устойчивость свободного вращения спичечного коробка вокруг оси, проходящей через его центр и параллельной одной из его сторон.



10.7. Оценить влияние вращения Земли на малые колебания магнетического маятника (маятник Фуко). Нарисовать проекции траектории на горизонтальную плоскость при различных начальных условиях. Какой будет частота прецессии маятника на экваторе, если угловая амплитуда его колебаний θ ?

10.8. Тонкая кольцевая стеклянная трубка заполнена водой и вращается в поле тяжести вокруг своего вертикального диаметра. В трубке имеется пузырь воздуха. При какой скорости вращения трубки равно-весие пузырька в ее нижней точке будет устойчивым? Диаметр кольца D .

10.9. Тонкая U-образная трубка заполнена жидкостью и вращается вокруг своей оси симметрии (см. рисунок). Найти частоту колебаний столба жидкости в поле тяжести. Полная длина столба жидкости L . Капиллярными эффектами пренебречь.

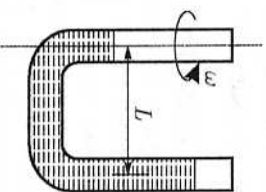


10.10. Оценить разницу между экваториальным и полярным радиусами Земли. Землю считать эллипсоидом вращения, гравитационный потенциал на поверхности которого меняется по закону

$$U = -\frac{GM}{r} + \frac{a_2}{2} \frac{GM}{r} \left[\frac{R^2}{r^2} (3\cos^2\theta - 1) \right],$$

где M — масса Земли, R — ее радиус на экваторе, r , θ — сферические координаты точки на поверхности эллипсоида. Причем угол $\theta = 0$ соответствует северному полюсу. Численный коэффициент $a_2 = 1,1 \cdot 10^{-3}$.

10.11. Вертикальная U-образная трубка, заполненная водой, вращается вокруг одной из своих пологих с угловой скоростью ω . Расстояние между параллельными частями трубки L . Концы трубки открыты. Найти разность уровней воды в трубке. Оценить разность глубины океана на полюсе и на экваторе, обусловленную вращением Земли. В среднем глубина океана 3 км.



10.12. Трубка вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, составляя с ней угол 45° . В трубке находится тяжелый шарик. Определить движение шарика, если в начальный момент его

10. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

10.1. Оценить силу давления воздуха на пол и потолок в свободно падающем лифте.

10.2. Оценить, с какой точностью выполняется первый закон Ньютона в системе отсчета спутника, движущегося по круговой орбите и повернутого к поверхности Земли одной и той же стороной.

10.3. Точка движется относительно диска по закону $r = r(t)$. Диск вращается относительно наблюдателя с постоянной угловой скоростью ω . Найти закон движения точки, ее скорость и ускорение в системе отсчета неподвижного наблюдателя.

10.4. Тело свободно падает с высоты 500 м на землю. Принимая во внимание вращение Земли и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, насколько отклонится тело при падении. Географическая широта места 60° .

10.5. Вращение Земли вызывает наклон поверхности воды в реке. Оценить угол наклона поверхности воды для реки, текущей с севера на юг на широте φ .

10.6. На каком расстоянии от орудия упадет снаряд, выпущенный вертикально вверх со скоростью V на широте φ , если пренебречь сопротивлением воздуха?

скорость относительно трубки была равна нулю, а начальное расстояние от точки пересечения трубки с осью равнялось L .

10.13. Шарик массой m , прикрепленный к концу горизонтальной пружины жесткостью k , находится в положении равновесия в трубке на расстоянии L от вертикальной оси. Определить относительное движение шарика, если трубка, образуемая с осью прямой угол, начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω .

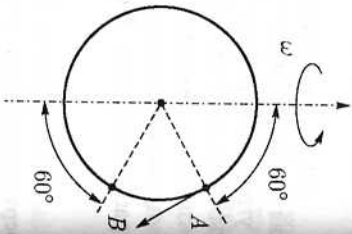
10.14. Горизонтальная трубка длиной L равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω . Внутри трубки свободно скользит пробка. Определить скорость пробки относительно трубки в момент вылета и время движения пробки в трубке. В начальный момент пробка покоилась на расстоянии x_0 от оси.

10.15. В узкий канал, проходящий через центр Земли и экватор, опустили тело с нулевой начальной скоростью. Найти время падения тела до центра Земли и его скорость в центре. Угловая скорость вращения Земли Ω , коэффициент трения о стенки канала μ .

10.16. На палочку длиной L надета бусинка массой m . Коэффициент трения о палочку μ . Палочка вращается по конусу с углом раствора 2α с угловой скоростью ω относительно вертикальной оси, проходящей через концы. Пренебрегая весом бусинки, написать уравнение ее движения во вращающейся системе координат.

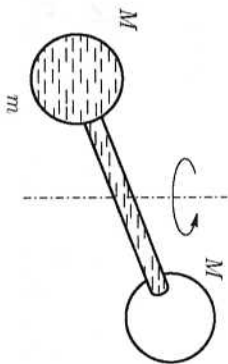
10.17. Стержень длиной L , массой M шарнирно подвешен за верхнюю точку в поле тяжести g и равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. При каком угле наклона стержня к вертикали может происходить такое вращение?

10.18. Тонкое гладкое проволочное кольцо радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего диаметра (см. рисунок). На кольцо надета бусинка, которая в начальный момент находилась в точке A с угловой координатой $\theta_0 = 60^\circ$ и имела относительно кольца скорость $\omega' R \sin \theta_0$. Найти время движения бусинки до точки B .

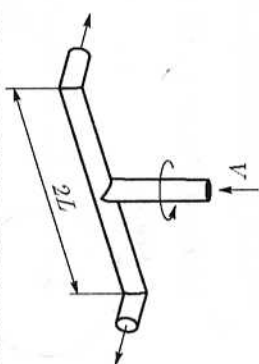


10.19. Оценить высоту прилива, вызываемого Солнцем и Луной.

10.20. Космическая станция представляет собой гантель длиной d , вращающуюся с угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс (см. рисунок). В отсеках станции, каждый из которых имеет массу M , есть резервуары, один из которых в начальный момент заполнен топливом массой m , а другой пуст. Какую работу необходимо затратить, чтобы полностью перекачать топливо из одного отсека в другой?



10.21. К Z-образной трубке (см. рисунок) через подвижный подвод того же сечения посредине трубки подается вода со скоростью V . Вода вытекает из обоих концов трубки, вызывая ее вращение. Найти угловую скорость вращения трубки, если ее длина $2L$.



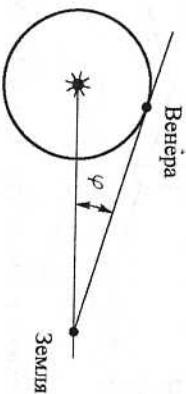
10.22. Найти закон движения самолета в атмосфере, при котором наиболее точно имитируется состояние невесомости.

1. КИНЕМАТИКА

1.1. Пространство и время

1.3. $L = 4,3$ св. года $\approx 1,3$ пк.

1.4. $R = 0,72$ а. е. $\approx 1,1 \cdot 10^8$ км.

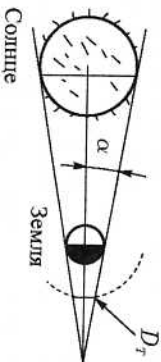


1.5. При максимальном угловом удалении Венеры от Солнца линия наблюдения с Земли касательна к орбите Венеры (см. рисунок). Отсюда $\sin \varphi = \frac{0,72 \text{ а. е.}}{1 \text{ а. е.}} = 0,72$ и $\varphi = 46^\circ$.

После захода Солнца Венера будет видна над горизонтом в течение

$$t = 24 \cdot \frac{46^\circ}{360^\circ} \approx 3 \text{ ч.}$$

1.6. При полном лунном затмении Луна попадает в конус земной тени (см. рисунок). Оценим диаметр конуса земной тени D_T на орбите Луны.



$$D_T = D_З - L_{З-Л} \cdot 2 \operatorname{tg} \alpha \approx D_З - \frac{D_C}{L_{C-З}} L_{З-Л} D_Л \approx D_З - D_Л,$$

где D_C , $D_З$ и $D_Л$ — диаметры Солнца, Земли и Луны, $L_{C-З}$ — расстояние Солнце-Земля, $L_{З-Л}$ — расстояние Земля-Луна, причем

$$2 \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{D_C}{L_{C-З}} \approx \frac{D_Л}{L_{З-Л}} \approx 10^{-2}.$$

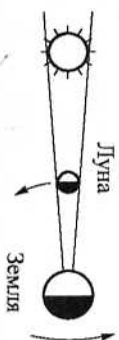
(Аналогичный результат получается и при рассмотрении подобных треугольников рисунка.) Луна движется относительно земной тени со скоро-

стью $V_T = 1$ км/с, так что максимальная продолжительность полного лунного затмения при движении через конус будет

$$\frac{D_T - D_Л}{V_T} \approx 6 \cdot 10^3 \text{ с} = 1 \text{ ч } 40 \text{ мин.}$$

1.7. При солнечном затмении скорость движения лунной тени определяется разностью скоростей движения Луны относительно Земли (см. рисунок) и скорости поверхности Земли, обусловленной ее суточным вращением. На экваторе скорость вращения поверхности Земли максимальна и равна $\omega_З R_З = 0,5$ км/с, так что скорость лунной тени будет минимальна в ближайшей к Солнцу точке экватора:

$$V = V_Л - \omega_З R_З \approx 0,5 \text{ км/с.}$$



1.2. Системы координат. Скорость, ускорение

1.11. $L = 50 \pi$ м.

1.14. $V_x = \pm 1$ м/с, $a_y = 8$ м/с².

1.21. $x^2 - y^2 = a^2$, $\cos 2\varphi = \frac{a^2}{r^2}$ (где $r \geq a$), $V = \gamma r$, $\vec{a} = \gamma^2 \vec{r}$.

1.22. $x = \frac{b}{t} \cos \gamma t$, $y = \frac{b}{t} \sin \gamma t$, траектория $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{\gamma b}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1.23. В цилиндрических координатах радиус-вектор записывается через единичные орты $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z$ в виде $\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z$. Дифференцируя выражение для радиус-вектора, получим вектор скорости

$$\vec{V} = \rho \dot{\hat{e}}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{e}_z,$$

где учтено, что орты $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi$ меняют свое направление при изменении

угла φ , т. е. $\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi$, $\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} \hat{e}_\rho$. Дифференцируя выражение для скорости, получим ускорение точки

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi + \ddot{z} \hat{e}_z.$$

1.24. Закон движения $\rho = ae^{kt}$, $\varphi = kt$, траектория $\rho = ae^{k\varphi}$.

Скорость и ускорение найдем дифференцированием:

$$\vec{V} = k\rho \dot{e}_\rho + k\rho \dot{e}_\varphi, \quad \vec{a} = (\dot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\dot{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\rho\dot{\varphi})\dot{e}_\varphi = 2\rho k^2 \dot{e}_\varphi,$$

где использованы соотношения $\dot{\rho} = k\rho$, $\dot{\varphi} = k$, $\ddot{\rho} = \rho k^2$, $\rho\dot{\varphi}^2 = \rho k^2$,

$\ddot{\varphi} = 0$. Тангенциальное ускорение равно $a_t = \frac{d|V|}{dt} = \sqrt{2}k^2\rho$, нормальное

ускорение $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{2}k^2\rho$, а радиус кривизны $R_{кр} = \frac{V^2}{a_n} = \sqrt{2}\rho$.

1.25. Ускорение точки $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 2$, $|a| = 2$, это тангенциальная

компонента $a_t = \frac{d|V|}{dt} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$, нормальная компонента $a_n^2 = a^2 - a_t^2 =$

$$= \frac{4}{1+t^2}. \text{ Радиус кривизны}$$

$$R_{кр} = \frac{V^2}{a_n} = 2(1+t^2)^{3/2} = \begin{cases} 2 \text{ м} & \text{при } t = 0, \\ 10\sqrt{5} \text{ м} & \text{при } t = 2 \text{ с.} \end{cases}$$

1.26. Связь декартовых координат с цилиндрическими

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \pm \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

В цилиндрических координатах:

Элемент длины дуги $dl = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2}$, объема $dV = \rho d\varphi dz \times$

$\times d\rho$. Элементы площади $\rho d\varphi d\rho$, $\rho d\varphi dz$, $dz d\rho$. Интегрируя по

элементам объема, найдем объем цилиндра $V = \int \rho d\varphi dz d\rho = \pi R^2 H$

и объем конуса:

$$V = \int d\varphi \int_0^{H/z} \int_0^{Rz/H} \rho d\rho dz = 2\pi \int_0^H \frac{(Rz/H)^2}{2} dz = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

Связь декартовых координат со сферическими:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

В сферических координатах:

элемент длины дуги $dl = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2}$;

элемент объема $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

1.27. Расположим начало полярной системы координат в месте встречи собак. При движении собаки расположены в вершинах правильного N -угольника, а радиальная компонента их скорости равна

$$\dot{\rho} = -V \sin \frac{\pi}{N}.$$

Время движения собак до встречи имеет величину

$$t = \frac{\rho_0}{|\dot{\rho}|} = \frac{a}{2V \sin^2(\pi/N)},$$

где $\rho_0 = \frac{a}{2 \sin \pi/N}$ — начальное удаление собак от точки встречи.

Поделив радиальную скорость $\dot{\rho}$ на азимутальную $\rho\dot{\varphi} = -V \cos \frac{\pi}{N}$,

получим уравнение для траектории

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{N} \right) d\varphi.$$

Его решением является уравнение логарифмической спирали:

$$\rho = \rho_0 \exp \left[(\varphi - \varphi_0^0) \operatorname{tg} \frac{\pi}{N} \right] = \frac{a}{2 \sin \pi/N} \exp \left[(\varphi - \varphi_0^0) \operatorname{tg} \frac{\pi}{N} \right],$$

где φ_0^0 — начальная угловая координата n -й собаки.

1.29. Предположим, что собака догонит зайца за время T . При этом зайц, бегущий со скоростью u , успевает пробежать расстояние uT , которое равно горизонтальной проекции пути, пройденного собакой. Эта проекция складывается из элементарных участков размером $V \sin \alpha dt$, где α — угол между направлением скорости собаки V и нормалью к линии движения зайца. Отсюда получаем соотношение

$$uT = \int_0^T V \sin \alpha(t) dt = V \int_0^T \sin \alpha(t) dt. \quad (1)$$

В системе отсчета собаки скорость сближения собаки и зайца равна $V - u \sin \alpha$, так что

$$\int_0^T [V - u \sin \alpha(t)] dt = L,$$

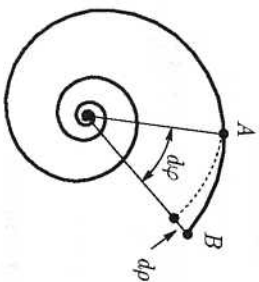
где L — начальное расстояние. Отсюда следует, что

$$\frac{VT - L}{u} = \int_0^T \sin \alpha(t) dt.$$

Подставляя последнее выражение в соотношение (1), получим

$$T = L \frac{V}{V^2 - u^2}.$$

1.30. Рассмотрим задачу в полярной системе координат, расположив шнур по линии вокруг начала координат (см. рисунок). Рассмотрим две соседние точки шнура А и В, координаты которых различаются на $d\rho$ и $d\varphi$. Длина дуги между этими точками равна $dl = \sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2}$. Чтобы взрывная волна от этих точек шнура пришла в начало координат



одновременно, время движения взрывной волны по воздуху $\frac{d\rho}{c}$ в направлении центра должно совпадать с временем «запаздывания» $\frac{\sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2}}{V}$ при распространении реакции взрыва (детонации) по шнуру между точками.

Полученное уравнение $\frac{\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2}{V^2} = \frac{d\rho^2}{c^2}$ разделение переменных приводится к виду

$$\left[\pm \sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1} \right] \frac{d\rho}{\rho} = d\varphi,$$

и его решением является уравнение логарифмической спирали

$$\rho = \rho_0 \exp \left[\pm \varphi / \sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1} \right].$$

Знаки \pm перед φ соответствуют закрутке спирали по и против часовой стрелки.

1.3. Векторы

1.31. Угол между векторами \vec{a} находим с помощью скалярного произведения векторов:

$$\alpha = \arccos \frac{(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2.$$

1.32. $L = 14,3$ тыс. км.

1.33. Полагая, что оси z декартовой и цилиндрической систем координат совпадают, для связи ортов получим:

$$\hat{e}_\rho = \hat{e}_x \cos \varphi + \hat{e}_y \sin \varphi, \quad \hat{e}_\varphi = -\hat{e}_x \sin \varphi + \hat{e}_y \cos \varphi, \quad \hat{e}_z = \hat{e}_z.$$

Для сферической системы координат

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \hat{e}_x \cos \theta + \hat{e}_y \sin \theta = \hat{e}_x \cos \theta + \hat{e}_z \sin \theta \cos \varphi + \hat{e}_y \sin \theta \sin \varphi; \\ \hat{e}_\theta &= \hat{e}_\rho \cos \theta - \hat{e}_z \sin \theta = \hat{e}_x \cos \theta \cos \varphi + \hat{e}_y \cos \theta \sin \varphi - \hat{e}_z \sin \theta; \\ \hat{e}_\varphi &= -\hat{e}_x \sin \varphi + \hat{e}_y \cos \varphi. \end{aligned}$$

1.35. В системе отсчета первого корабля расстояние между кораблями равно $\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, а скорость второго корабля $\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Минимальным расстоянием между кораблями в этой системе отсчета будет длина перпендикуляра, опущенного на линию движения второго корабля, при этом для достижения минимального расстояния второму кораблю необходимо пройти путь

$$R \cos \alpha = - \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)}{|\vec{V}_2 - \vec{V}_1|}$$

(здесь косинус угла между векторами \vec{R} и \vec{V} записан через скалярное произведение соответствующих векторов).

Время движения до максимального сближения кораблей определяется расстоянием и скоростью сближения кораблей V :

$$t_{\min} = \frac{R \cos \alpha}{V} = - \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)}{(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)^2}.$$

Минимальное расстояние между кораблями получим с помощью векторного произведения

$$R_{\min} = R \sin \alpha = \frac{|[(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)]|}{|\vec{V}_2 - \vec{V}_1|}.$$

1.37. Если скорость ветра \vec{u} , а скорость самолета относительно воздуха при облете сторон треугольника \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} равна \vec{V}_1 , \vec{V}_2 и \vec{V}_3 , то

$$\vec{A} = (\vec{V}_1 + \vec{u}) \vec{l}_1, \quad \vec{B} = (\vec{V}_2 + \vec{u}) \vec{l}_2, \quad \vec{C} = (\vec{V}_3 + \vec{u}) \vec{l}_3.$$

Возводя в квадрат с учетом равенства $\vec{V}_1^2 = \vec{V}_2^2 = \vec{V}_3^2 = V^2$, получим соотношение

$$l_1(V^2 - u^2) = -2\vec{A} \cdot \vec{u} + A^2/l_1,$$

$$l_2(V^2 - u^2) = -2\vec{B} \cdot \vec{u} + B^2/l_2,$$

$$l_3(V^2 - u^2) = -2\vec{C} \cdot \vec{u} + C^2/l_3.$$

Складывая их и принимая во внимание, что $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$, получим связь

$$V^2 - u^2 = \frac{1}{l_1 + l_2 + l_3} \left(\frac{A^2}{l_1} + \frac{B^2}{l_2} + \frac{C^2}{l_3} \right) = K_1. \quad (1)$$

Далее из равенств

$$\frac{A^2}{l_1^2} - 2 \frac{\vec{A} \cdot \vec{u}}{l_1} = \frac{B^2}{l_2^2} - 2 \frac{\vec{B} \cdot \vec{u}}{l_2},$$

$$\frac{A^2}{l_1^2} - \frac{C^2}{l_3^2} = 2 \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{u}}{l_1} - \frac{\vec{C} \cdot \vec{u}}{l_3} \right) = 2 \left(\frac{\vec{A}}{l_1} + \frac{\vec{A} + \vec{B}}{l_3} \right) \cdot \vec{u}$$

выразим величины $\vec{A} \cdot \vec{u}$ и $\vec{B} \cdot \vec{u}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2(l_1 + l_2 + l_3)} \left(\frac{l_2 + l_3}{l_1} A^2 - \frac{l_1}{l_2} B^2 - \frac{l_1}{l_3} C^2 \right) = K_2,$$

$$\vec{B} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2(l_1 + l_2 + l_3)} \left(\frac{l_1 + l_3}{l_2} B^2 - \frac{l_2}{l_1} A^2 - \frac{l_2}{l_3} C^2 \right) = K_3.$$

Введя систему координат с ортогональными осями

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{A}}{A} \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 = \left(\vec{B} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A^2} \vec{A} \right) / \sqrt{B^2 - \frac{(\vec{A} \cdot \vec{B})^2}{A^2}},$$

запишем выражение для скорости ветра в проекции на осях:

$$u^2 = (\vec{u} \cdot \vec{e}_1)^2 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_2)^2 = \frac{A^2(\vec{u} \cdot \vec{B})^2 + B^2(\vec{u} \cdot \vec{A})^2 - 2(\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{u} \cdot \vec{A})(\vec{u} \cdot \vec{B})}{A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2}. \quad (2)$$

Из $\vec{C} = -(\vec{A} + \vec{B})$ следует $\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}(C^2 - A^2 - B^2) = K_4$.

Формулы (1,2) определяют скорости ветра u и самолета V через значения K_1, K_2, K_3, K_4 , т. е. через стороны треугольника A, B, C и время движения l_1, l_2, l_3 . Графическая форма решения приведена в [18, с. 156].

1.4. Системы отсчета

1.38. В неинерциальной СО снаряда S' осколки разлетаются изотропно и расположены на расширяющейся сфере, описываемой уравнением $\vec{r}'^2 = u'^2 t'^2$. Радиус-вектор осколка в СО снаряда \vec{r}' связан с радиус-вектором в СО Земли \vec{r} соотношением $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$, где $\vec{r}_0 =$

$= \vec{V}t + \frac{g t^2}{2}$ — положение начала координат системы S' , движущейся относительно Земли со скоростью $\vec{V} + g t$. В системе отсчета Земли поверхность сферы, на которой расположены осколки, описывается уравнением

$$[\vec{r} - \vec{r}_0]^2 = u'^2 t'^2.$$

Перейдем в систему отсчета S'' осколка, движущегося относительно снаряда со скоростью \vec{u} . Радиус-векторы осколков в системах S' и S'' связаны соотношениями $\vec{r}' = \vec{r}'' + \vec{r}_0''$, где $\vec{r}_0'' = -\vec{u}t$ — положение начала координат системы S'' относительно системы S' . В системе отсчета S'' уравнение поверхности, на которой расположены осколки, будет иметь вид

$$(\vec{r}'' + \vec{u}t)^2 = u'^2 t'^2.$$

Это сфера радиусом u' и центром в точке $-\vec{u}t$.

1.39. Если система отсчета S' движется относительно системы S со скоростью \vec{V} , то суммарный импульс частиц при переходе из одной системы отсчета в другую будет равен

$$\vec{P}' = \sum_i m_i \vec{V}'_i = \sum_i m_i (\vec{V}'_i - \vec{V}) = \vec{P} - M\vec{V},$$

где $M = \sum_i m_i$ — суммарная масса частиц. Аналогично для энергии част. тип

$$E' = \sum_i \frac{1}{2} m_i (V'_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (V'_i - V)^2 = E + \frac{1}{2} M V^2 - \vec{P} \cdot \vec{V};$$

Если в системе S полный импульс \vec{P} равен нулю, то $E' = E + \frac{M V^2}{2} \geq E$, т. е. кинетическая энергия минимальна в системе центра масс.

1.40. $T_{\text{дв}} = M V^2$; $T_{\text{ДМ}} = M V^2 / 2$, где M, V — масса и скорость гусеницы относительно трактора.

1.41. $V = c \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$, где c — скорость звука.

1.42. Пусть скорости поездов V_1 и V_2 . Перейдем в систему отсчета первого поезда. Тогда источник звука приближается к нему со скоростью $V_1 + V$, а скорость звука равна $c + V_1$. По эффекту Доплера частота звука,

$$V_1 = \frac{V}{1 - \frac{V_1 + V_2}{c + V_1}}, \quad \text{а со-}$$

отношение частот $\alpha = \frac{V_1}{V} = \frac{c + V_1}{c - V_2}$. Аналогично получим значение

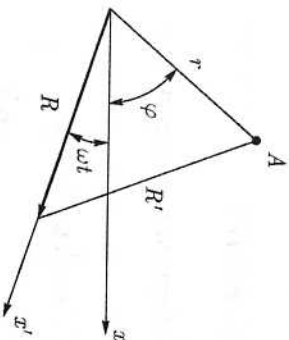
$\beta = \frac{c + V_2}{c - V_1}$. Решая систему $V_1 + \alpha V_2 = (\alpha - 1)c$, $\beta V_1 + V_2 = (\beta - 1)c$, найдем скорости:

$$V_1 = c \left[1 - \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha\beta - 1} \right] \quad \text{и} \quad V_2 = c \left[1 - \frac{2(\beta - 1)}{\alpha\beta - 1} \right].$$

1.43. Луна вращается с запада на восток с угловой скоростью

$$\omega = \omega_1 - \frac{2\pi}{T} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с,}$$

где $\omega_1 = 7,3 \cdot 10^{-5}$ рад/с — угловая скорость суточного вращения Земли, $T = 27$ дней — период обращения Луны вокруг Земли.



1.44. Пусть в момент времени t радиус-векторы точки A на пиферолате \vec{r} и минутной стрелки \vec{R} составляют углы φ и $-\omega t$ с осью x декартовой системы координат (см. рисунок, $\omega = \frac{2\pi}{60}$ рад/с).

Направим ось x' системы координат S' , связанной с концом минутной стрелки, в направлении, продолжающем стрелку.

Координаты точки на пиферолате в системе S' будут меняться по закону $x' = r \cos(\varphi + \omega t) - R$, $y' = r \sin(\varphi + \omega t)$.

Отсюда получаем связь координат

$$(x' + R)^2 + y'^2 = r^2,$$

т. е. точка на пиферолате движется в системе S' по окружности.

1.45. Решается аналогично предыдущей задаче, только теперь угол φ характеризует поворот часовой стрелки и изменяется по закону $\varphi = -\omega_1 t$, где ω_1 — угловая скорость часовой стрелки. Координаты конца часовой стрелки в системе S' будут меняться по закону $x' = r \cos(\omega - \omega_1)t - R$,

$y' = r \sin(\omega - \omega_1)t$, т. е. конец часовой стрелки в системе S' будет двигаться с угловой скоростью $\omega - \omega_1$ по окружности радиусом r .

$$(x' + R)^2 + y'^2 = r^2.$$

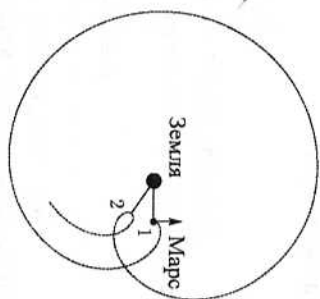
1.46. Аналогично предыдущей задаче получаем

$$x' = R \cos(\omega_1 - \omega)t - r, \quad y' = R \sin(\omega_1 - \omega)t.$$

Конец минутной стрелки движется по окружности $(x' + r)^2 + y'^2 = R^2$ с угловой скоростью $\omega_1 - \omega$.

1.47. Пусть в начальный момент Земля

и Марс находились в противостоянии на оси x системы, связанной с Солнцем, и вращались по часовой стрелке вокруг Солнца. В системе координат, связанной с центром Земли, у которой оси параллельны осям системы Солнца, Марс имеет координаты $x = R \cos \Omega t - r \cos \omega t$, $y = R \sin \Omega t - r \sin \omega t$, где R , Ω — радиус орбиты Марса и его угловая частота обращения вокруг Солнца, а r , ω — радиус орбиты и частота обращения Земли. Приведенные уравнения в параметрической форме определяют траекторию Марса, которая показана на рисунке пунктиром. Точками 1 и 2 показаны противостояния Земли и Марса.



В системе координат, связанной с центром Земли, в которой ось x' направлена от Солнца и поворачивается синхронно с вращением Земли, траектория Марса будет окружностью (см. задачу 1.46):

$$(x' + r)^2 + y'^2 = R^2.$$

1.5. Кинематика вращения

1.50. Пусть φ — угол наклона стержня к горизонту, $|OB| = x_0$, радиус окружности R . Тогда $\sin \varphi = \frac{R}{x_0 + Vt}$, $\dot{\varphi} \cdot \cos \varphi = -\frac{RV}{(x_0 + Vt)^2}$ и угловая скорость стержня

$$\dot{\varphi} = -\frac{VR}{x \sqrt{x^2 - R^2}}, \quad \text{где } x = x_0 + Vt.$$

1.51. Центральный угол φ , опирающийся на дугу окружности, вдвое больше, чем вписанный угол, опирающийся на эту дугу. Следовательно, удвоив частота вращения колесика вдвое больше частоты вращения стержня. При этом линейная скорость колесика $V = 2\omega R$, а тангенциальная и нормальная компоненты ускорения равны

$$a_t = \dot{\varphi} = 0, \quad a_n = \frac{V^2}{R} = 4\omega^2 R.$$

1.52. Считаем, что шестеренка движется со скоростью V и вращается с угловой скоростью Ω . Запишем выражения для скоростей верхней и нижней реск:

$$V_2 = V + \Omega R, \quad -V_1 = V - \Omega R.$$

Дифференцируя их, получим $a_2 = \dot{V} + \dot{\Omega} R$, $-a_1 = \dot{V} - \dot{\Omega} R$. Для ускорения шестеренки имеем

$$\dot{V} = \frac{a_2 - a_1}{2} = 0,5 \text{ м/с}^2, \quad \dot{\Omega} = \frac{a_2 + a_1}{2R} = 4 \text{ с}^{-2}.$$

1.53. Мгновенный центр вращения находится на пересечении перпендикуляров к скоростям концов стержня, т. е. его координаты будут

$$x = L \sin 60^\circ = L\sqrt{3}/2, \quad y = L \cos 60^\circ = L/2.$$

1.54. Вертикальная координата верхнего конца бревна изменяется по закону $y = Vt$, при этом угол наклона бревна к горизонтали $\alpha = \arcsin \frac{Vt}{L}$. Дифференцированием найдем угловую скорость и ускорение бревна:

$$\dot{\alpha} = \frac{V}{\sqrt{L^2 - V^2 t^2}}, \quad \ddot{\alpha} = \frac{V^3 t}{(L^2 - V^2 t^2)^{3/2}}.$$

Координаты точки бревна, отстоящей на расстояние l от его правого конца, запишутся в виде $y = \frac{l}{L} Vt$, $x = (1 - \frac{l}{L}) \sqrt{L^2 - (Vt)^2}$. Дифференцируя, найдем ускорение различных точек бревна:

$$\ddot{y} = 0, \quad \ddot{x} = \frac{(l-L)LV^2}{[L^2 - V^2 t^2]^{3/2}}.$$

1.55. Пусть в начальный момент стержень длиной L ориентирован горизонтально, а его левый конец находится в начале координат. Скорости левого и правого концов стержня равны соответственно V и u и составляют углы α и β с осью x (см. рисунок). Продольные проекции скоростей концов стержня равны: $V \cos \alpha = u \cos \beta$. В системе правого конца стержня его левый конец движется со скоростью $V \sin \alpha - u \sin \beta = V (\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)$ и поворачивается с угловой скоростью

$$\omega = \frac{V(\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)}{L}.$$

Мгновенный центр вращения C находится на пересечении перпендикуляров к скоростям концов стержня, т. е. его координаты удовлетворяют условиям $\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \alpha$, $\frac{x-L}{y} = \operatorname{tg} \beta$ и равны соответственно

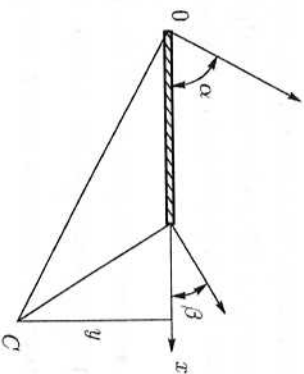
$$x = L \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}, \quad y = \frac{L}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}.$$

В случае $\alpha = \beta = \pi/2$ мгновенный центр вращения находится на оси стержня в точке $x = L \frac{V}{V-u}$, и его угловая скорость равна $\omega = \frac{V-u}{L}$.

1.56. Считаем, что конус вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$, а его ось вращается вокруг вертикали с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$, где $|\bar{\omega}_2| = 2\pi \text{ с}^{-1}$. Линейная скорость точек образующей конуса, касающейся горизонтальной плоскости, равна нулю. Отсюда следует, что линейная скорость при вращении вокруг оси конуса ($\omega_1 R$ для точки, находящейся на основании конуса с радиусом R) равна линейной скорости, обусловленной вращением относительно вертикальной оси ($\omega_2 R \sqrt{2}$ для точки на основании), так что

$$\omega_1 = \sqrt{2} \omega_2.$$

Результирующая угловая скорость конуса равна $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$, и так как $\bar{\omega}_2 = \operatorname{const}$, то угловое ускорение конуса $\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}_1$ определяется ско-



ростью вращения вектора $\vec{\omega}_1$ относительно вертикали. Вектор $\vec{\omega}_1$ составляет угол 45° с вертикалью. При повороте вокруг вертикальной оси на угол $d\varphi$ его горизонтальная компонента $\omega_1 \sin 45^\circ \cdot \hat{e}_\rho$ меняется на

$$d\vec{\omega}_1 = \omega_1 \sin 45^\circ \cdot d\varphi \cdot \hat{e}_\varphi,$$

а вертикальная компонента $\omega_1 \cos 45^\circ \cdot \hat{e}_z$ не изменяется (здесь $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z$ — орты цилиндрической системы координат — см. задачу 1.23). Угловая скорость вращения конуса вокруг вертикали $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_2$, поэтому вектор углового ускорения конуса составляет

$$\dot{\vec{\omega}} = \omega_1 \sin 45^\circ \cdot \omega_2 \cdot \hat{e}_\varphi = \omega_2^2 \hat{e}_\varphi = 4\pi^2 \hat{e}_\varphi \text{ с}^{-2}.$$

1.57. Линейная скорость точки касания шестерней записывается через угловые скорости вращения и расстояние до оси шестерней в виде $V_A = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$.

Отсюда получаем соотношение $\omega_1 N \sin \frac{\alpha}{2} = \omega_2 N \sin \frac{\beta}{2}$, где N — длина образующей конуса шестерней, и угловую скорость

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\sin \alpha/2}{\sin \beta/2} = \omega_1 \cdot 1,92 = 19,2 \text{ об/мин.}$$

1.58. Введем движущуюся систему координат с началом в центре диска и осями x', y' , параллельными осям лабораторной системы координат x, y . Центр диска в ЛСО имеет координаты $x = Vt, y = R$. Точка диска, имевшая в момент времени $t = 0$ координаты $x_0 = 0, y_0 = R - r$, в движущейся системе будет иметь координаты

$$x' = -rt \sin \omega t, \quad y' = -r \cos \omega t,$$

где $\omega = V/R$. В Л-системе ее координаты будут

$$x = Vt - r \sin \frac{Vt}{R}, \quad y = R - r \cos \frac{Vt}{R}.$$

Исключив t , получим уравнение траектории

$$\left(x - R \arccos \frac{R-y}{r} \right)^2 + (y-R)^2 = r^2.$$

1.59. Ось колеса движется относительно центра кривизны моста по дуге радиусом $R - r$, а относительно мгновенной оси вращения, совпадающей с точкой касания, — по дуге радиуса r . Отсюда найдем связь

$$\alpha(R-r) = \varphi r$$

между углом поворота оси колеса α относительно центра кривизны моста и углом поворота φ колеса относительно мгновенной точки вращения. Следовательно, $\Omega = \dot{\varphi} = \frac{R-r}{r} \dot{\alpha}$, и поскольку $\dot{\alpha} = \frac{V}{r}$, то

$$\Omega = \frac{R-r}{r^2} V \text{ и } \dot{\Omega} = 0.$$

1.61. Точки колеса участвуют в двух движениях: вращении колеса вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_2 = V/R$ и повороте оси колеса с угловой скоростью $\omega_1 = V/R$. Результирующая угловая скорость колеса $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$. Так как $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ перпендикулярны, то

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{2} \frac{V}{R}.$$

Поскольку $\vec{\omega}_2$ не меняется, угловое ускорение равно $\dot{\vec{\omega}}_1$ и обусловлено вращением вектора $\vec{\omega}_1$ вокруг вертикали. При малом повороте горизонтального вектора $\vec{\omega}_1$ на угол $d\varphi$ вокруг вертикали его изменение равно $d\vec{\omega}_1 = \omega_1 d\varphi \cdot \hat{e}_\varphi$ (здесь \hat{e}_φ — орг цилиндрической системы координат). Поскольку $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_2$, то

$$\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \omega_1 \omega_2 \hat{e}_\varphi = \frac{V^2}{rR} \hat{e}_\varphi.$$

Мгновенная ось вращения колеса проходит через точку касания колеса к рельсу и направлена вдоль $\vec{\omega}$.

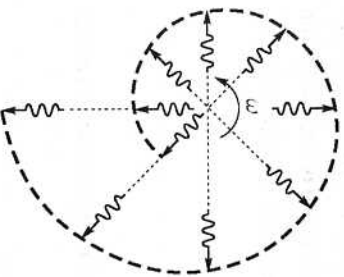
2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

2.1. Скорость света

2.1. $u = \frac{V}{\sin(\alpha/2)}$ может быть больше скорости света.

2.2. Скорость перемещения точки F равна $u = \frac{c}{\sin \alpha} > c$.

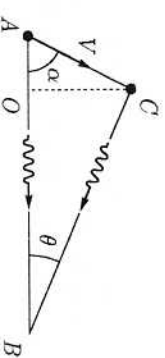
2.3. Пульсар — это вращающаяся звезда, испускающая часть своего коротковолнового излучения узким лучом. Испущенные фотоны в пространстве расположены по спирали, расширяющейся со скоростью света (см. рисунок). Скорость перемещения «зайчика» по поверхности Земли $V = \omega R$, где ω — угловая скорость вращения пульсара, R — расстояние до него. При больших R эта скорость может превышать скорость света.



Однако с помощью такого сверхсветового «зайчика» организовать передачу сигнала между двумя точками на поверхности Земли нельзя. Например, сигналом может быть определенная последовательность таких «зайчиков», с помощью которой первый наблюдатель кодирует свое сообщение второму. Для этого первый наблюдатель должен соответствующим образом промодулировать источник «зайчика» — пульсар, а поскольку источник удален на расстояние R , то второй наблюдатель получит сообщение не раньше, чем через $\Delta t = 2R/c$. Таким образом, скорость передачи сигнала не превышает скорость света.

2.4. Космонавт увидит свое отражение через $t = 2L/c$ секунд, где L — расстояние от космонавта до зеркала.

2.5. Волновой фронт излучения от точечного источника будет сферой во всех инерциальных системах отсчета.



2.6. Пусть объект движется со скоростью V под углом α к линии наблюдения AB (см. рисунок). Если объект пройдет путь AC , то видимое с Земли перемещение будет равно $|OC| = L = 10$ св.

2. Релятивистская кинематика

дет, при этом $|AC| = L/\sin \alpha$, $|AO| = L \cos \alpha$. Свет, испущенный объектом из точки A, придет к Земле раньше, чем свет, испущенный из точки C, на время

$$T = \frac{|AC|}{V} - \frac{|AO|}{c} = \frac{L}{V \sin \alpha} - \frac{L \cos \alpha}{c} = 5 \text{ лет}$$

(разностью расстояний $|BO|$ и $|BC|$, имеющей величину $\cong |BC| \cdot \theta^2/2 \cong \cong 5 \cdot 10^{-4}$ св. лет, можно пренебречь). Отсюда найдем скорость объекта:

$$V = \frac{c}{\cos \alpha + (cT/L) \sin \alpha}$$

Из ограничения $V < c$ следует, что $\lg \frac{c}{L} < \frac{1}{2}$, т. е. объект может двигаться к линии наблюдения под углом $\alpha < 53^\circ$.

Скорость движения объекта будет минимальной при условии $\frac{d}{d\alpha} [\cos \alpha + \frac{cT}{L} \sin \alpha] = 0$. Отсюда $\lg \alpha = cT/L = 1/2$, так что минимальная скорость движения объекта будет равна

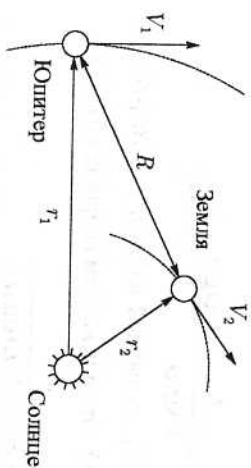
$$V_{\min} = c \left(\left(\frac{cT}{L} \right)^2 + 1 \right)^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{5}} c = 0,89 c.$$

2.7. Положение спутника Ио относительно Юпитера и различные фазы его движения по орбите будут наблюдаться земным наблюдателем с задержкой, обусловленной временем распространения света от Ио до Земли. В течение года эта задержка имеет разную величину (из-за перемещения планет), а ее изменение за период обращения Ио будет влиять на величину наблюдаемого периода обращения Ио. Наблюдаемый на Земле период обращения Ио будет равен

$$T = T_0 + \Delta R/c,$$

где ΔR — изменение расстояния Юпитер — Земля за время истинного периода обращения T_0 . Ио вокруг Юпитера (дополнительным смещением планет за время движения света от Ио до Земли $\sim 2 + 3 \cdot 10^3$ с можно пренебречь). Поскольку T_0 много меньше периодов обращения Юпитера и Земли вокруг Солнца, то можно считать, что за время T_0 расстояние между Землей и Юпитером изменяется на $\Delta R = \frac{dR}{dt} T_0$.

На рисунке, иллюстрирующем положение Юпитера и Земли относительно Солнца, видно, что



$$R = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}, \quad (1)$$

где \vec{r}_1 и \vec{r}_2 — радиус-векторы Юпитера и Земли, $\theta(t)$ — угол между ними, который изменяется с угловой скоростью $\Omega_2 - \Omega_1$, где Ω_1 и Ω_2 — угловые скорости обращения Юпитера

и Земли вокруг Солнца. Если пренебречь смещением Юпитера за земной год ($\Omega_2 \approx 12 \cdot \Omega_1$) и размерами орбиты Земли ($r_1 \approx 5 \cdot r_2$), то получим, что $dR/dt \approx V_2 \cdot \sin(\Omega_2 t)$, где V_2 — орбитальная скорость Земли. В этом приближении наблюдаемый на Земле период обращения Ио изменяется по гармоническому закону и в течение года будет меняться в диапазоне

$$T_0 \cdot \left[1 \pm \frac{V_2}{c} \right] \approx T_0 \pm 15 \text{ с.}$$

Чтобы учесть движение Юпитера, разложим выражение (1) в ряд по степеням малого параметра $\epsilon = (r_2/r_1) \approx 0.19$ с точностью до членов второго порядка малости по ϵ :

$$R \approx r_1 \left[1 - \epsilon \cdot \cos(\Omega_2 - \Omega_1)t + \frac{\epsilon^2}{2} \cdot \sin^2(\Omega_2 - \Omega_1)t + \dots \right].$$

Продифференцировав это выражение по времени и учитывая, что при движении по круговым орбитам $V = \Omega r$, получим

$$T \approx T_0 \left[1 + \frac{V_2 - \epsilon V_1}{c} \cdot \sin \theta(t) + \frac{\epsilon V_2}{2c} \cdot \sin 2\theta(t) \right].$$

Учетом численных значений наблюдаемый период обращения равен $T \approx T_0 + 12,8 \cdot \sin \theta(t) + 1,45 \cdot \sin 2\theta(t)$ с.

2.2. События. Преобразования Лоренца

2.8. События зажигания лампочек в точках А и В в Л-системе отсчета будут иметь пространственно-временные координаты

$$x_A = \gamma(x'_A + ct'_A), \quad t_A = \gamma(t'_A + \beta x'_A/c),$$

2. Релятивистская кинематика

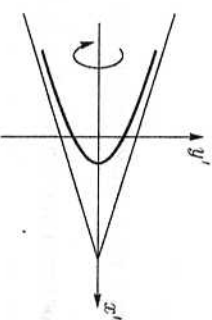
Поскольку $x'_B - x'_A = L_0$ и $t'_B = t'_A$, то $t_B - t_A = \gamma \beta L_0/c$, т. е. в Л-системе лампочка в точке А зажжется раньше, чем в точке В, на время $\gamma \beta L_0/c$. Для наблюдателя, находящегося в точке О, свет от точки В пройдет путь на $(x_B - x_A) = \gamma(x'_B - x'_A) = \gamma L_0$ больший, чем свет от точки А, и будет наблюдаться с дополнительной задержкой во времени $\gamma L_0/c$. Суммарная задержка между вспышками А и В для наблюдателя в точке О будет равна

$$\Delta t = \gamma \frac{L_0}{c} + \gamma \beta \frac{L_0}{c} = \frac{L_0}{c} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \Delta t' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

где $\Delta t' = L_0/c$ — задержка в случае неподвижного стержня. Данное выражение описывает изменение частоты при движении источника света (релятивистский «продольный» эффект Доплера).

2.10. В Л-системе свет от обеих вспышек приходит в точку (L, y, z) на вертикальной плоскости в момент времени $t = \sqrt{L^2 + y^2 + z^2}/c$. В движущейся СО это событие имеет пространственные координаты $x' = \gamma(L - Vt)$, $y' = y$, $z' = z$, и форма поверхности описывается уравнением

$$\left(\frac{x'}{\gamma \beta L} - \frac{1}{\beta} \right)^2 - \frac{y'^2}{L^2} - \frac{z'^2}{L^2} = 1,$$



причем $\frac{x'}{\gamma \beta L} - \frac{1}{\beta} \leq -1$. Полученное уравнение описывает гиперболоид вращения, асимптоты гипербол которого наклонены под углом α' к оси x' , так что $\text{tg} \alpha' = -\frac{1}{\gamma \beta}$ (см. рисунок).

2.11. Период движения фотона $T = \frac{4L/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$.

2.12. $t'_B = \frac{\gamma L}{c}(3 - \beta)$; $t'_A = \gamma \frac{3L}{c}$.

2.13. В системе отсчета корабля сигнал с Земли будет послан в момент времени γT , когда корабль находится на расстоянии $\gamma V T$ от

Земли. Сигнал связи пройдет эту дистанцию за время $\gamma\beta t$, в течение которого Земля удалится еще на $\gamma\beta Vt$. Таким образом, общее расстояние в момент получения сигнала, по мнению экипажа корабля, составит

$$L = Vt \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

2.14. $T' = T \left(\frac{c+V}{c-V} \right) = 3 \text{ ч.}$

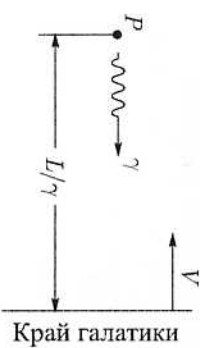
2.15. $L = \sqrt{T} = \frac{\gamma V_1 + \gamma V_2}{\gamma_1 + \gamma_2} T$.

2.16. Для того чтобы до Земли долетела, не распавшись, значительная доля мюонов, их время жизни в Л-системе должно быть в несколько раз больше времени полета от Солнца до Земли. Из сравнения величин собственного времени жизни мюонов $2 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ и минимально возможного времени полета мюонов до Земли (более 500 с) следует, что мюоны должны быть ультрарелятивистскими частицами, т.е. двигаться со скоростью, близкой к скорости света. Из уравнения радиоактивного распада

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\gamma\tau_\mu}$$

где $\gamma\tau_\mu$ — время жизни мюонов в Л-системе отсчета, определим долю оставшихся мюонов $N = N_0 \exp \left(-\frac{t}{\gamma\tau_\mu} \right)$. Подставляя $t = 500 \text{ с}$, $\frac{N}{N_0} = 0,95$,

найдем релятивистский фактор $\gamma \approx 5 \cdot 10^9$ и скорость мюонов $V = c \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} \right) \approx c(1 - 2 \cdot 10^{-20})$.



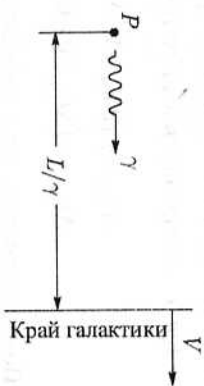
2.17. а) В системе отсчета протона, движущегося вслед за фотоном, галактика имеет размер $L' = L/\gamma$, причем противоположный край галактики приближается к протону со скоростью V (см. рисунок). В этой системе отсчета фотон и край галактики сближаются со скоростью $V + c$

$$T' = \frac{L'}{V+c} = \frac{L}{\gamma(V+c)} \approx \frac{L}{2\gamma c} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ лет.}$$

Аналогичный результат получается при рассмотрении пространственно-временных координат события «встреча фотона и конца галактики». В системе отсчета неподвижного наблюдателя это событие имеет координаты $[L, T]$, где L — размер галактики, $T = L/c = 10^5$ лет — время полета через галактику (старт фотона считаем событием с координатами $[0, 0]$). По преобразованиям Лоренца, в системе отсчета протона это событие встречн имеет координаты $[\gamma(L - VT), \gamma(T - VL/c^2)] = [L(1 - \beta), \gamma T(1 - \beta)]$, т.е. в этой системе отсчета прошло время

$$T' = \gamma T(1 - \beta) \approx \frac{L}{2\gamma c}$$

б) Если протон летит навстречу фотону, то в его системе отсчета край галактики, к которому летит фотон, удаляется со скоростью V , и скорость сближения фотона с противоположным концом галактики будет равна $c - V$ (см. рисунок). В результате фотон долгонит удаляющийся край галактики за время



$$T' = \frac{L'}{c-V} = \frac{L}{\gamma(c-V)} \approx 2\gamma \frac{L}{c} = 2 \cdot 10^{15} \text{ лет.}$$

2.18. а) Наблюдатель находится в системе отсчета нейтронов, т.е. момент прилета фотона к краю галактики фиксируется по часам системы отсчета нейтронов. В этом случае (см. предыдущую задачу) в системе отсчета нейтронов к моменту встречи фотона с концом галактики пройдет время $t' = L/\gamma(V+c) \approx 1,6 \cdot 10^2 \text{ с}$. В системе нейтронов их количество меняется по закону $N = N_0 \exp(-t'/\tau)$, где τ — время жизни нейтрона. Через время $t' \approx 1,6 \cdot 10^2 \text{ с}$ от первоначального количества останется $N/N_0 = \exp(-0,16) \approx 85\%$ нейтронов.

б) Наблюдатель находится в Л-системе отсчета, относительно которой нейтроны движутся со скоростью V , и момент прилета фотона к краю галактики фиксируется по часам Л-системы отсчета. В этом случае за время полета фотона через галактику $t = 10^5$ лет (по часам Л-системы) в системе отсчета нейтронов пройдет время $t' = t/\gamma \approx 3,1 \cdot 10^2 \text{ с}$.

и от первоначального количества нейтронов останется

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{L}{\gamma c \tau}\right) \approx 73 \% \text{ нейтронов.}$$

В отличие от случая а), в этом случае полученный результат не зависит от относительного направления движения фотона и нейтронов.

2.19. Свет выйдет из бруска через время $\Delta T = \gamma \frac{2nL}{c}$.

2.20. Рассмотрим два события: А — вход фотона в пластинку, В — выход фотона из пластинки. В системе отсчета пластинки расстояние $\Delta x'_{AB}$ между этими событиями равно L_0 , а временной интервал $\Delta t'_{AB} = L_0 n / c$. По преобразованиям Лоренца, в Л-системе

$$\begin{aligned} \Delta x_{AB} &= \gamma(\Delta x'_{AB} + V \cdot \Delta t'_{AB}) = \gamma(L_0 + \beta n L_0), \\ \Delta t_{AB} &= \gamma(\Delta t'_{AB} + V \cdot \Delta x'_{AB} / c^2) = \gamma(n L_0 / c + \beta L_0 / c). \end{aligned}$$

Подразумевается, что направления движения фотона и пластинки совпадают. Полное время движения фотона от источника до зеркала складывается из времени движения внутри пластинки и вне ее. В Л-системе это время

$$T = \Delta t_{AB} + \frac{L - \Delta x_{AB}}{c} = \frac{L}{c} + \gamma \frac{L_0}{c} (n-1)(1-\beta).$$

Время движения фотона в обратном направлении получается из этого выражения путем замены V на $-V$. Суммарное время движения света от источника и обратно будет равно

$$T_2 = 2 \frac{L}{c} + 2\gamma \frac{L_0}{c} (n-1).$$

2.21. В СО бруска луч падает под углом α' к вертикали, который определяется из уравнения $\sin \alpha' = \frac{V}{c} = \beta$. Из закона преломления

$\frac{\sin \alpha'}{\sin \phi'} = n$ найдем сдвиг и время движения фотонов через брусок в СО бруска:

$$x' = -d \cdot \operatorname{tg} \phi' = -\frac{d}{\sqrt{(n/\sin \alpha')^2 - 1}}, \quad t' = \frac{d}{\cos \phi'} \cdot \frac{n}{c} = \frac{dn}{c \sqrt{1 - (\sin \alpha'/n)^2}}.$$

В Л-системе сдвиг и время движения через брусок будут

$$x = \frac{\gamma \beta d (n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 - \beta^2}}, \quad t = \frac{\gamma d}{c} \cdot \sqrt{n^2 - \beta^2}.$$

2.22. $V > \frac{\sqrt{2}-1}{\cos \alpha} c > 0,41 c$, $|\alpha| < \arccos(\sqrt{2}-1) \approx 66^\circ$, где α — угол между скоростью наблюдателя и прямой АВ.

2.23. а) В СО реки участок волны, движущийся под углом θ' к берегу, придет в точку $x' = a \operatorname{ctg} \theta'$ берега за время $t' = \frac{a}{u \sin \theta'}$. В СО

$$t = \gamma V \cdot \frac{a}{u \sin \theta'} \left(1 + \frac{V u}{c^2} \cos \theta' \right),$$

которое при $\cos \theta' = -\frac{V u}{c^2}$ достигает минимального значения

$$t_{\min} = \frac{a}{u c} \sqrt{\frac{c^4 - (uV)^2}{c^2 - V^2}}.$$

б) В системе реки точка А к моменту прихода волны имеет координату $x' = -V t'$, где t' определяется условием $u t' = \sqrt{a^2 + V^2 t'^2}$. Отсюда $t' = \frac{a}{\sqrt{u^2 - V^2}}$, а в СО берега время прихода волны в точку А будет

$$t = \gamma V \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) = \frac{a \sqrt{c^2 - V^2}}{c \sqrt{u^2 - V^2}}.$$

2.24. а) Предположим, что данные события будут одновременны в системе отсчета, движущейся со скоростью V относительно векторов \vec{n}_1 и \vec{n}_2 Л-системы. Направим ось x' искомой системы отсчета и ось x Л-системы параллельно вектору V . Согласно преобразованиям Лоренца, в движущейся СО временные координаты заданных событий будут равны

$$t'_1 = \gamma \left(t_1 - \frac{V}{c^2} x_1 \right), \quad t'_2 = \gamma \left(t_2 - \frac{V}{c^2} x_2 \right), \quad (1)$$

где x_1, x_2 — проекции векторов \vec{r}_1 и \vec{r}_2 на ось x Л-системы отсчета. Из равенства $t'_1 = t'_2$ следует, что искомае СО должна двигаться со скоростью

$$V = c^2 \frac{t_1 - t_2}{x_1 - x_2}.$$

Направление вектора скорости V может меняться в определенном диапазоне, причем различным его ориентациям относительно векторов \vec{r}_1 и \vec{r}_2 будут соответствовать различные значения проекций x'_1, x'_2 на ось x Л-системы отсчета и различные значения модуля скорости V . Условие $V < c$ ограничивает возможные направления вектора V в пределах конуса, ось которого направлена вдоль вектора $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, а угол при вершине равен

$$2 \arccos \left(c \frac{t_1 - t_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right).$$

Для времениподобного интервала при $c \cdot (t_1 - t_2) > |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ систем отсчета, в которых указанные события будут одновременными, не существует.

б) Одноместными указанные события могут быть в системе отсчета, которая движется параллельно вектору $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Направим ось x' искомой системы отсчета и ось x Л-системы отсчета параллельно вектору $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. В этом случае поперечные к вектору V компоненты векторов \vec{r}_1 и \vec{r}_2 будут равны между собой и при переходе в движущуюся СО не изменятся. По преобразованиям Лоренца x -компоненты векторов в движущейся СО будут равны $x'_1 = \gamma(x_1 - Vt_1)$, $x'_2 = \gamma(x_2 - Vt_2)$. Условие $x'_1 = x'_2$ дает для скорости системы:

$$V = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2} \quad \text{или} \quad \vec{V} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{t_1 - t_2}.$$

Из условия $V < c$ следует, что подобная СО существует (и единственна) для событий с времениподобным интервалом $c \cdot (t_1 - t_2) > |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

2.25. Пусть сфера движется вдоль оси x Л-системы отсчета, а вспышка произошла в момент времени $t = t' = 0$ по часам Л-системы и системы отсчета сферы. В СО сферы события попадания фотонов на ее поверхность имеют пространственно-временные координаты $(x', y', z', R/c)$, которым в Л-системе соответствуют временные координаты

$$t = \gamma(R/c + x'V/c^2).$$

2. Релятивистская кинематика

Поскольку на сфере координаты x' меняются в интервале от $-R$ до $+R$, то временные координаты t будут меняться в диапазоне

$$\Delta t = 2\gamma RV/c^2,$$

в течение которого сфера и будет освещена в Л-системе отсчета.

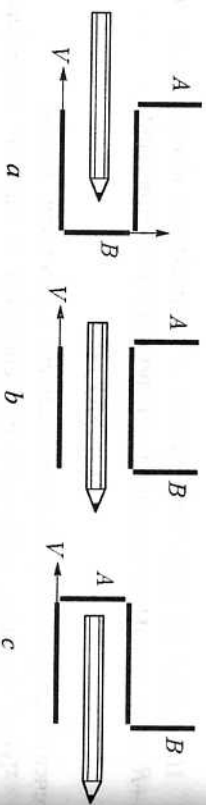
Число фотонов, попавших на переднюю и заднюю полусферы точки зрения Л-системы отсчета, будет таким же, как и в системе отсчета сферы. Для доказательств этого рассмотрим фотоны, летевшие в системе сферы под полярным углом $\theta' = \pi/2$ к линии движения сферы и попавшие на точки окружности, разделяющей в системе сферы ее переднюю и заднюю части. В Л-системе отсчета эти фотоны будут двигаться под меньшим полярным углом θ к линии движения, для которого $\cos \theta = \beta$. Однако эти фотоны будут попадать на точки той же самой, «догонояющей», их окружности, разделяющей движущуюся сферу на переднюю и заднюю половины.

Таким образом, несмотря на то что в Л-системе больше фотонов летит вперед (эффект «пржектора»), на переднюю и заднюю полусферы в Л-системе отсчета падает одинаковое число фотонов.

2.26. Считаем, что в СО пенада крышка A имеет координату $x = 0$, а крышка B — координату $x = L$, причем крышка A закрывается в момент времени $t = 0$, когда левый коней карандаша имеет координату $x = 0$, а правый коней — координату L_0/γ . С точки зрения СО пенада движущийся карандаш целиком уместается в пенаде. Чтобы карандаш свободно вылетел из пенада, крышку B нужно открыть не позднее момента

$$t_2 = [L - (L_0/\gamma)]/V.$$

В системе отсчета карандаша синхронизуем часы и выберем начало координат так, чтобы событие закрытия левой крышки пенада A имело координаты $x'_1 = 0$, $t'_1 = 0$. Событие открытия крышки B имеет координаты в СО пенада $x_2 = L$, $t_2 = [L - (L_0/\gamma)]/V$, а в СО карандаша — $x'_2 = L_0$, $t'_2 = [(L/\gamma) - L_0]/V$. Соотношение $t'_2 < t'_1$ показывает, что в системе отсчета карандаша указанные события меняют свою временную последовательность: сначала открывается крышка B (рис. a) и открытый с обеих сторон «короткий» пенад пролетает мимо карандаша (рис. b), тогда как закрытие крышки A происходит в более поздний момент времени $t'_1 = 0$, когда крышка A уже пролетит мимо левого конца карандаша (рис. c).



Поскольку указанные события не связаны между собой причинно-следственной связью (закрывание крышки A пенада не является причиной или следствием того, что носик карандаша приблизится к крышке B), изменение их временной последовательности в различных инерциальных системах отсчета вполне допустимо и не приводит к какому-либо неожиданным последствиям.

Более парадоксальным выглядит изменение временной последовательности указанных событий, если у пенада не открывать правую крышку B . В этом случае в системе отсчета пенада после закрытия крышки A «короткий» карандаш некоторое время находится внутри закрытого пенада, пока его правый конец не столкнется со стенкой B . После столкновения карандаш и / или стенка пенада начнут деформироваться и разрушаться (поскольку скорость движения пенада во много раз больше скорости распространения упругих деформаций, которая соответствует скорости звука в среде). В целом «спенарий» явления будет зависеть от геометрии и массы тел, их прочности и упругих свойств и т. п. Попробуйте промоделировать явление, представив карандаш в виде линейной цепочки упругих шариков.

В системе же отсчета карандаша (вернее, его не успевающего деформироваться левого конца) к моменту закрытия левой крышки A правый конец карандаша уже успел столкнуться со стенкой B пенада. В результате в момент закрытия левой крышки пенада правая часть карандаша и / или тело пенада будут деформированы, так что внутри «короткого» пенада в лучшем случае будет «закрыт» деформированный карандаш. Отметим, что зона деформации карандаша и / или пенада не успевает достичь левого конца карандаша (или крышки A) к моменту закрытия крышки A .

2.27. Пусть L — длина рамы трактора, а l — длина отдельного трака в соприкасающейся СО. По условию задачи $L/l = N$. В СО неподвижного наблюдателя рама имеет длину L/γ , а каждый из траков нижней половины гусеницы — длину l' , так как относительно Земли эти траки не движутся. Отсюда видно, что число траков на нижней половине гусеницы равно

$$N_{\text{ниж}} = N(1 - \beta^2).$$

$$N(1 + \beta^2)$$

Поскольку на гусенице всего $2N$ траков, оставшиеся траков приходится на верхнюю половину гусеницы.

2.28. В системе отсчета танка расстояние между двумя последовательно выпущенными снарядами $\lambda' = \omega l$, причем снаряды попадают в движущуюся навстречу крепость через промежуток времени $\Delta t' = \lambda' / (u + V)$. По преобразованиям Лоренца, эти промежуток времени в СО крепости равны $\Delta t = \tau / \gamma$, поскольку $\Delta t' = \gamma (\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x)$, а в СО крепости $\Delta x = 0$. Отсюда получаем частоту попаданий снарядов в СО крепости

$$N = \frac{1}{\Delta t} = \gamma u \left(1 + \frac{V}{u} \right).$$

Если снаряды летят со скоростью света («фотонная» пушка), то полученное выражение сводится к обычной формуле эффекта Доплера

$$N = \gamma u' \left(1 + \frac{V}{c} \right) = n \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

2.29. Благодаря лоренцевому сокращению продольных размеров, плотность электронов в L -системе в γ раз выше, чем в СО, связанной с электронами $n_- = \gamma n'_-$. Для ионов, неподвижных в L -системе отсчета, их плотность n'_+ в СО электронов будет в γ раз выше, чем в L -системе, т. е. $n'_+ = \gamma n_+$. Суммарная плотность заряда в СО электронов положительна при выполнении условия $\gamma n_+ > n_- / \gamma$ или $n_+ > n_- / \gamma^2$. При положительной плотности заряда электроны стягиваются к оси пучка (с точки зрения СО, связанной с электронами). С другой стороны, в L -системе $n_+ > n_-$, и ионы также стягиваются к оси пучка. Таким образом, при выполнении неравенств

$$n_+ > n_-, \quad n_+ > n_- / \gamma^2$$

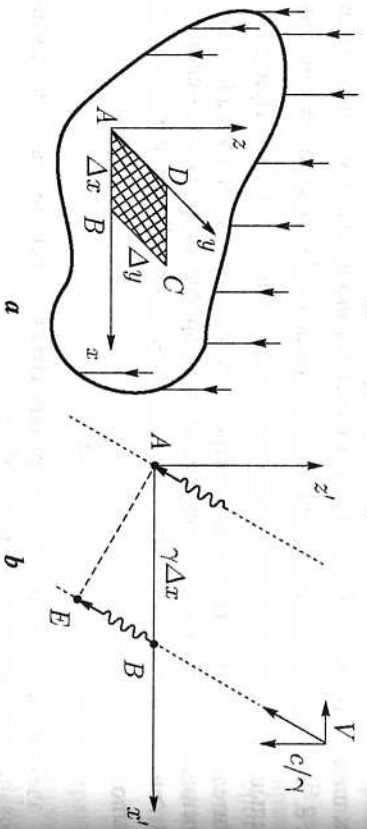
и электроны, и ионы будут притягиваться к оси пучка (стабилизированный пучок А. М. Булкер, 1956 г.).

Стягивание электронов в L -системе обеспечивается магнитным полем от «параллельных» токов электронов и ослаблением растакивающего электрического поля при добавке положительных ионов. Анализично осуществляется стягивание ионов в СО электронов.

2.30. Пусть параллельный пучок света распространяется параллельно оси z , а наблюдатель движется вдоль оси x со скоростью V . Выделим малый элемент размером Δx , Δy в поперечном сечении пучка ($ABCD$ на рис. а) и посмотрим, как трансформируется его границы при переходе в движущуюся систему отсчета. Для этого рассмотрим два одновременных в лабораторной системе отсчета события – пересечение фотонами плоскости xu в точках A и B (или в точках C и D), отсчитывая отсчеты выделенный элемент сечения пучка. В L -системе отсчета координаты этих событий будут $[0, 0]_A$ и $[\Delta x, 0]_B$ (для простоты запишем только x - и t -координаты событий).

В движущейся системе отсчета эти события имеют координаты $[0, 0]_A$ и $[\gamma V \Delta x, -\gamma \beta \cdot \Delta x / c]_B$, т. е. фотон B пересекает ось x' в точке $x'_B = \gamma \cdot \Delta x$ в момент времени $t'_B = -\gamma \beta \cdot \Delta x / c$. Соответствующее положение фотона A и B на оси x' показано на рис. б точками A и B . К моменту $t' = 0$ фотон B успевает пройти дополнительное расстояние $BE = c(t'_0 - t'_B) = -\gamma \beta \cdot \Delta x$ и занять положение E . Остальные фотоны, расположенные в L -системе вдоль отрезка волнового фронта AB , в движущейся системе отсчета к моменту времени $t' = 0$ будут также расположены вдоль отрезка AE . Так как треугольник AEB подобен прямоугольному треугольнику компонент скорости фотона $V'_x = -V$ и $V'_z = -c/\gamma$, то отрезок AE перпендикулярен скорости фотонного пучка и имеет длину

$$\sqrt{(\gamma \cdot \Delta x)^2 - (\gamma \beta \cdot \Delta x)^2} = \Delta x,$$

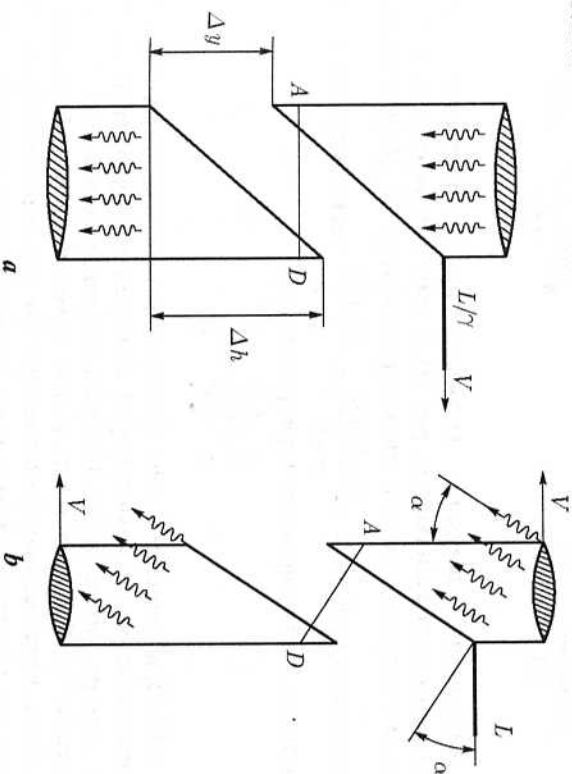


которая совпадает с размером данного элемента сечения в L -системе отсчета. Поскольку поперечный размер выделенного элемента сечения пучка Δy при переходе в движущуюся SO не меняется, то в целом при

таком переходе не изменяются конфигурация и площадь выбранного элемента $\Delta x \Delta y$ поперечного сечения пучка.

2.31. а) В системе линз заслонка имеет размер L/γ и после пролета заслонки пучок света имеет вид, показанный на рис. а. Высота разреза $\Delta y = L/\beta\gamma$, высота треугольного среза пучка $\Delta h = L/\beta$. Так как $\Delta h > \Delta y$, то любая горизонтальная линия AD (на которой расположены фотоны волнового фронта, приходящие в фокус нижней линзы одновременно) непременно пересекает часть пучка, т. е. полного перекрытия света заслонкой нет.

б) В системе заслонки линзы движутся горизонтально со скоростью V , а фотоны пучка – под углом α к вертикали, где $\sin \alpha = V/c$ (рис. б). Линии волнового фронта пучка в системе заслонки перпендикулярны скорости фотонов (см. предыдущую задачу), причём фотоны, находящиеся на линии волнового фронта, приходят в фокус нижней линзы одновременно. После прохождения через заслонку пучок шириной L/γ разрезан на две части, причём линии разреза параллельны скорости фотонов.

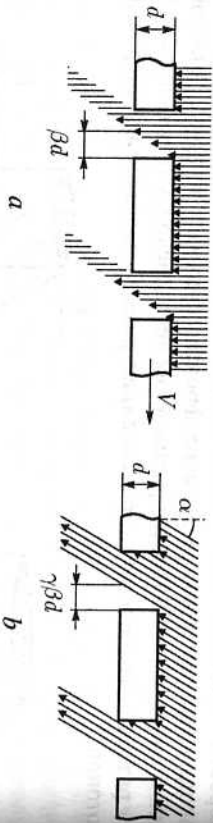


Аналогично случайно а) любая прямая линия, проходящая через разрез параллельно линиям волнового фронта, например AD на рис. б, будет пересекать часть пучка, так как ширина разреза $L \cos \alpha = L/\gamma$ меньше длины рассекającego отрезка $AD = L/(\gamma \cos \alpha) = L$. Это означает,

что и в системе заслонки часть фотонів волнового фронта не перекрывается заслонкой, т. е. в фокусе второй линзы не наблюдается полного перекрытия света.

2.32. Рассмотрим прохождение света через решетку в Л-системе отсчета (см. рис. а). Продольные размеры движущейся решетки a и b испытывают лоренцево сокращение $a' = a/\gamma$, $b' = b/\gamma$. При движении за ячейкой решетки образуется тень: пока свет проходит путь d вдоль вертикального размера ячейки, сама ячейка смещается по горизонтали на $d\beta$ и соответственно обрезает часть проходящего пучка. В итоге через решетку пройдет

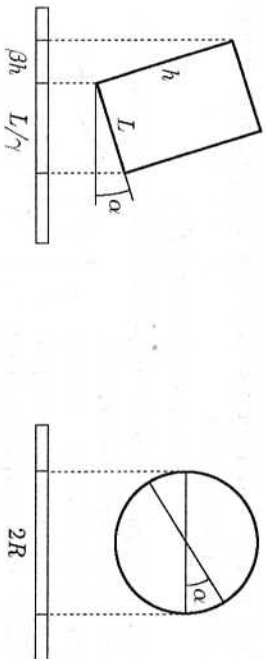
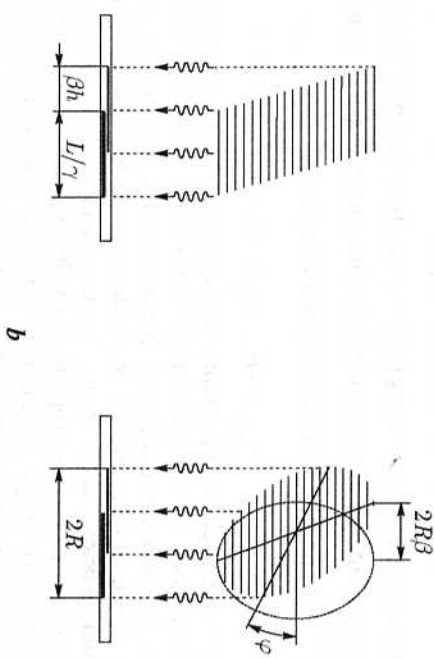
$$k = \frac{b/\gamma - d\beta}{a/\gamma + b/\gamma} = \frac{b - \beta\gamma d}{a + b} \text{ часть светового потока.}$$



Аналогичный результат получается при рассмотрении задачи в системе отсчета решетки (см. рис. б). В этом случае свет падает под углом α к нормали решетки, для которого $\sin\alpha = V/c$. Соответственно через решетку пройдет $k = \frac{b - d \cdot \text{tg}\alpha}{a + b} = \frac{b - \beta\gamma d}{a + b}$ часть светового потока. В частности, свет не проходит через решетку при

$$\frac{V}{c} \geq \left(\frac{d^2}{b^2} + 1 \right)^{-1/2}$$

2.33. При «моментальной» фотографии в параллельных лучах на фотопластинке регистрируются лучи, одновременно пришедшие в плоскость затвора фотоаппарата. Изображение движущегося тела на такой фотографии удобно представлять в виде суммы изображений различных слоев тела, параллельных фотопластинке (на рис. а показано разбиение на слои для параллелепипеда и шара). Из-за лоренцева сокращения каждый из движущихся слоев в системе отсчета фотопластинки имеет продольный размер, в γ раз меньший, чем его собственная длина, а из-за разности длины пути света от слоя к фотопластинке изображения различных слоев движущегося тела будут сдвинуты относительно друг друга вдоль оси x .



К задаче 2.33.

На рис. б показано положение различных слоев фотографируемых тел в моменты времени, когда они испускали регистрируемый фотопластинкой свет. Например, свет, передающий изображение ребра верх-

ней грани параллелепипеда, движется к фотопластинке на время $\Delta t = h/c$ больше, чем свет, отображающий положение нижней грани параллелепипеда. Соответственно изображение верхней грани на фотографии будет расположено на $V\Delta t = \beta h$ левее, чем изображение нижней грани. Отметим, что если тело непрозрачно, то его внутренние точки вкладываются в изображение давать не будут. В результате на фотографии непрозрачного параллелепипеда будет изображена его нижняя грань, имеющая в продольном направлении размер L/γ и «неодновременное» изображение его левой грани шириной βh .

Для шара края изображения будут определяться промежуточными сечениями, отстоящими от среднего сечения на расстоянии

$$y = \pm R \cdot \text{tg} \varphi = \pm \beta \gamma R,$$

где R — радиус шара, $\varphi = -\arctg(\beta \gamma r)$ — угол, при котором x -координата края изображения различных сечений шара, определяемая выражением

$$x = \frac{R \cos \varphi}{\gamma} - \beta R \sin \varphi, \text{ принимает экстремальные значения}$$

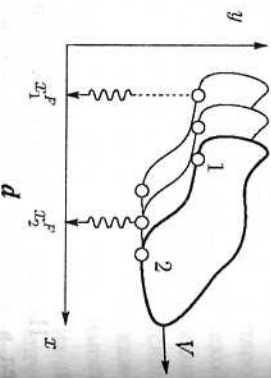
$$x_{\min} = -R, \quad x_{\max} = +R.$$

Таким образом, изображение движущегося шара на фотографии в направлении оси x имеет размер $2R$ (см. рис. *b*, справа), а отбрасываемой семейства спроектированных на фотопластинку свинутых эллипсов является окружность радиусом R . Отметим, что изображение шара на фотографии также дает слои, расположенные на удаленной от фотопластинки «тыльной» стороне шара. Это наглядно видно, если слои фотографируемого шара раскрасить в разные цвета и проследить за цветом получаемых на фотографии эллиптических полосок. Полученные фотографии можно интерпретировать как изображения неподвижных объектов, повернутых на угол

$$\alpha = \arcsin \beta = \arctg(\beta \gamma)$$

(см. рис. *c*) и фотографируемых с продолжительной экспозицией.

Докажем, что при «моментальном» фотографировании движущихся тел произвольной формы (рис. *d*) изображение на фотографии будет эквивалентно изображению, получаемому при фотографировании с длительной экспозицией неподвижного тела, повернутого на угол $\alpha = \arcsin \beta$ относительно линии движения тела. считаем, что затвор фотоаппарата



2. Релятивистская кинематика

открывается в момент времени $t = 0$ Л-системы отсчета, а точки 1 и 2 контура тела имеют в этот момент координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

Изображение точки 1 на фотопластинке будет иметь координату $x_1^F = x_1 - \beta y_1$, где добавочный член βy_1 учитывает запаздывание света при движении от точки 1 до фотопластинки. Изображение точки 2 на фотопластинке будет иметь координату $x_2^F = x_2 - \beta y_2$, а размер изображения тела будет соответствовать максимуму величины

$$x_2^F - x_1^F = x_2 - x_1 - \beta(y_2 - y_1),$$

взятой по всем точкам тела. По преобразованиям Лоренца, если временные координаты событий $t_1 = t_2 = 0$, то их пространственные координаты связаны соотношением

$$(x_2 - x_1) - \beta(y_2 - y_1) = \frac{x_2^F - x_1^F}{\gamma} - \beta(y_2^F - y_1^F),$$

где координаты (x_1^F, y_1^F) и (x_2^F, y_2^F) определены относительно неподвижного тела. Отметим, что величина

$$\frac{x_2^F - x_1^F}{\gamma} - \beta(y_2^F - y_1^F)$$

соответствует x -проекции отрезка с координатами концов (x_1^F, y_1^F) , (x_2^F, y_2^F) , повернутого на угол $\alpha = \arcsin \beta$ (при таком повороте $x = x^F \cdot \cos \alpha - y^F \sin \alpha$). Таким образом, изображение движущегося тела эквивалентно x -проекции неподвижного тела, повернутого на угол $\alpha = \arcsin \beta$. Подробно задача о фотографировании быстро движущихся объектов рассмотрена в статье [11].

2.3. Сложение скоростей

2.34. Скорость сближения частиц в Л-системе равна $V_{\text{сближ}} = V_1 + V_2$,

относительная скорость $V_{\text{отн}} = c \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$.

2.35. В СО, движущейся со скоростью $c \frac{\gamma - 1}{\gamma \beta}$.

2.36. В системе отсчета плиты скорость частицы до столкновения была $c/2$, причем после упругого столкновения частица удаляется от

плиты со скоростью $c/2$. Согласно формуле сложения скоростей, в Л-системе скорость отразившейся частицы будет равна

$$u = c \frac{2\beta}{1 + \beta^2} = 0,8c.$$

2.37. При равенстве токов и одинаковой геометрии пучков концентрации частиц в Л-системе отсчета одинаковы. В СО позитронов скорость встречного электронного пучка $u = \frac{2V}{1 + V^2/c^2}$, где V — скорость пучков в Л-системе отсчета. Из-за лоренцевого сокращения раз-

ров плотность электронного пучка в системе позитронов будет $\gamma_u n = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ раз больше, чем плотность электронов в собственной СО.

По условию $\gamma_u n = N$, откуда

$$V = c \cdot \sqrt{\frac{N-1}{N+1}}.$$

2.39. Относительно Земли $T = \frac{L}{V+u} \left(1 + \frac{Vu}{c^2}\right) \approx \frac{37}{7}$ лет,

корабль: $T' = \frac{L}{V+u} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{20}{7}$ лет.

2.41. Скорость бегущего пассажира относительно станции (Л-системы отсчета) будет $V_2 = \frac{V+u}{1+Vu/c^2}$, где V — скорость ленты, а u — скорость пассажира. Если в Л-системе лестница эскалатора имеет N ступенек длиной l каждая, то пассажир пробежит по ней за время $t = Nl/V_2$. За это время лестница эскалатора пройдет расстояние Vl , а число ее ступенек уменьшится на $\Delta N = Vl/l = NV/V_2$. Следовательно, пассажир пробегает оставшиеся $N - \Delta N$ ступенек и успевает сделать

$$N - \Delta N = N(1 - V/V_2) = N \frac{(1 - V^2/c^2)}{1 + 2V/c} = \frac{8}{15} \cdot N \text{ шагов.}$$

Аналогичный результат можно получить, используя формулы лоренцевого сокращения длины ступенек. В системе ленты эскалатора пассажир и нижний конец эскалатора сближаются со скоростью $V_{\text{сближ}} = 5c/6$, и к моменту встречи пассажир проходит $\frac{c/2}{c/3 + c/2} = 3/5$ части ступенек, расположенных на верхней части ленты. В системе

отсчета движущейся ленты ступенек на верхней части эскалатора будет меньше, чем в Л-системе отсчета «базы» эскалатора.

В системе отсчета ленты «базы» эскалатора сокращается в γ раз, тогда как собственная длина ступеньки будет, наоборот, в γ раз больше, чем в системе отсчета «базы». Соответственно на укороченной «базе» уменьшается в γ^2 меньше ступенек увеличенной длины. Всего в системе отсчета ленты эскалатора на ее верхней части будет $N(1 - V^2/c^2)$ ступенек, а количество шагов, которые делает пассажир, будет равно

$$N \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{3}{5} = \frac{8}{15} N.$$

2.42. По формуле сложения скоростей

$$V + \Delta V = \frac{V + \alpha \Delta x}{1 + (V \alpha \Delta x / c^2)}, \text{ и } \Delta V \approx \alpha \Delta x \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right).$$

Разделив переменные и интегрируя, получим

$$V = c \cdot \ln \frac{\alpha L}{c} = 0,76c.$$

2.44. Скорости одинаковых частиц в Ц-системе противоположны: $\vec{V}' = -\vec{V}'$. Скалярное произведение 4-скоростей в Ц- и Л-системе будет соответственно $(\gamma' c, \gamma' \vec{V}') \cdot (\gamma' c, \gamma' \vec{V}') = c^2 \frac{1 + \beta'^2}{1 - \beta'^2}$ и $c^2 \gamma' \gamma'_2 (1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)$.

Отсюда для искомой скорости в Ц-системе получим

$$V' = c \cdot \sqrt{\frac{\gamma_1 \gamma_2 (1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2) - 1}{\gamma_1 \gamma_2 (1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2) + 1}}.$$

2.45. а) В Л-системе частицы «сближаются» со скоростью $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$, и вектор скорости сближения составляет угол 45° с осью x . Минимальным расстоянием между частицами в процессе сближения будет длина перпендикуляра, опущенного из конца отрезка L на вектор скорости сближения частиц:

$$L_{\text{мин}} = L \sin 45^\circ = L/\sqrt{2}.$$

б) Если в Л-системе частицы имели координаты

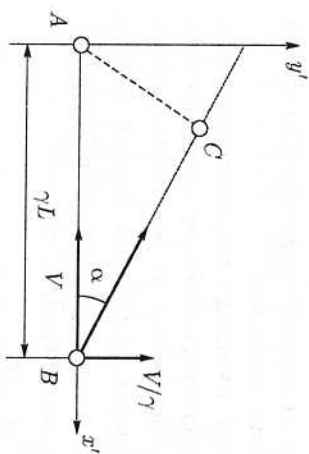
$$x_1 = 0, y_1 = 0, t_1 = 0 \text{ и } x_2 = L, y_2 = 0, t_2 = 0,$$

то в СО первой частицы их координаты будут равны:

$$x'_1 = 0, y'_1 = 0, t'_1 = 0 \text{ и } x'_2 = \gamma L, y'_2 = 0, t'_2 = -\gamma \frac{V}{c^2} L.$$

В СО первой частицы вторая частица движется в направлении ВС со скоростью, компоненты которой равны

$$V'_x = -V, \quad V'_y = V/\gamma$$



(см. рисунок). Минимальным расстоянием между частицами будет длина перпендикуляра AC, опущенного из начала координат A на линию движения второй частицы. Из подобия треугольников:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{V'_y}{\sqrt{V'^2_x + V'^2_y}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$$

и минимальное расстояние равно

$$L_{\min} = \frac{\gamma L}{\sqrt{1 + \gamma^2}}$$

2.46. $n' = \frac{n_0}{\gamma} \left(1 + \frac{c^2 - V^2 \cos \alpha}{c^2 - V^2} \right)$, где $\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-1/2}$

2.47. В системе облака пенал имеет длину L_0/γ_V , а упрямая волна придет к концу пенала A со скоростью $u_1 = \frac{u+V}{1 + \beta_u \beta_V}$ за время

$$t = \frac{L_0}{\gamma_V (u_1 - V)} = \gamma_V \frac{L_0}{u} (1 + \beta_u \beta_V)$$

За это время сам конец пенала A передвинется на расстояние Vt . Следовательно, внутри пенала окажутся пылинки, которые в момент удара первых пылинок находились на расстоянии

$$\frac{L_0}{\gamma_V} + Vt = L_0 \gamma_V \left(1 + \frac{\beta_V}{\beta_u} \right)$$

от его dna B. Масса вещества внутри пенала будет

$$m = \rho L_0 S \gamma_V \left(1 + \frac{V}{u} \right)$$

2.4. Направление движения. Преобразование углов

2.49. $t = \frac{L}{c} \sqrt{\frac{c^2 - V^2}{u^2 - V^2}}$

2.50. Пусть в СО реки пловец плывет под углом α' к линии берега. В СО берега скорость пловца поперек реки равна $u_\perp =$

$$\frac{u' \sin \alpha'}{\gamma_V (1 + u' V \cos \alpha' / c^2)}$$

При $\cos \alpha' = -u' V / c^2$ она достигает максимума

$$u_{\perp \max} = \frac{u'}{\gamma_V \sqrt{1 - u'^2 V^2 / c^4}}$$

и в этом случае пловец переплывает реку за минимальное время

$$t_{\min} = \frac{L}{u_{\perp \max}} = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

В своей системе отсчета пловец пересекает реку за минимальное время

$$\tau_{\min}^0 = \frac{L}{\gamma_V u'} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ с,}$$

при этом в системе реки он плывет под углом $\alpha' = 90^\circ$ к линии берега.

2.51. $x = d \frac{\beta \gamma (n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 - \beta^2}}$

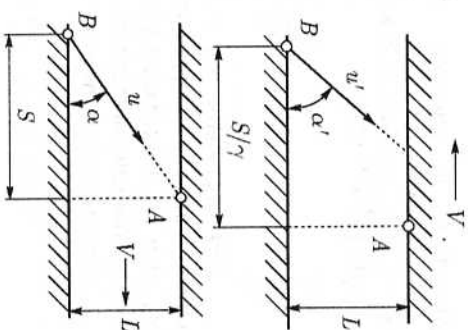
2.52. а) В СО реки точка A движется вдоль оси x' со скоростью $-V$, а расстояние S' в γ раз меньше, чем в СО берега (см. рисунок). Пловец, плывущий под углом α' к оси x' , достигнет точки A при условии

$$\frac{u' \sin \alpha'}{u' \cos \alpha' + V} = \gamma_V \frac{L}{S}$$

б) В СО берега компоненты скорости пловца будут равны

$$u_x = \frac{u' \cos \alpha' + V}{1 + u' V \cos \alpha' / c^2},$$

$$u_y = \frac{u' \sin \alpha'}{\gamma_V (1 + u' V \cos \alpha' / c^2)}$$



Чтобы попасть из B в A , эти компоненты скорости должны удовлетворять условию $\text{tg} \alpha = u_y/u_x = LS$ (см. рисунок), т. е. опять

$$\frac{u' \sin \alpha'}{\cos \alpha' + V} = \frac{\gamma' L}{S}.$$

$$2.53. \theta = \arcsin \frac{\beta - \sqrt{1 + \beta^2 - n^2}}{1 - \beta \sqrt{1 + \beta^2 - n^2}}, \quad n < \sqrt{1 + \beta^2}, \quad \text{где } \beta = V/c.$$

$$2.54. \text{Скорость движения наблюдателя } V = c \frac{N-1}{N+1}.$$

2.55. Осколок, летящий в системе звезды под углом $\theta' = \pm \frac{\pi}{2}$, в Л-системе будет двигаться под углом θ , для которого $\text{tg} \theta = \pm \frac{u'}{\gamma_V V}$, где $u' = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$. Половина сбрасываемого вещества звезды, летящая в системе звезды в переднюю полусферу $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$, в Л-системе будет лететь в конусе с углом при вершине 2θ , телесный угол которого составляет

$$\Omega_{1/2} = 2\pi \left(1 - \cos \theta\right) = 2\pi \left[1 - \left(1 + \frac{u'^2}{V^2 \gamma_V^2}\right)^{-1/2}\right] \approx \frac{\pi}{\gamma_V^2}.$$

В Л-системе в переднюю полусферу ($|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$) попадут осколки,

у которых в системе отсчета звезды угол вылета $\cos \theta' >$

$$> - \frac{1}{\sqrt{1 + (u'^2/V^2 \cdot \gamma_V^2)}}, \quad \text{т. е. в Л-системе вперед полетит часть осколков:}$$

$$\frac{N_{\text{справа}}}{N} = \frac{1 - \cos \theta'}{2} = 1 - \frac{1}{4\gamma_V^2}.$$

2.59. Направим ось x Л-системы отсчета вдоль скорости наблюдателя. В этой СО координаты событий «касание пола концами стержня» $[x_1, t_1]$ и $[x_2, t_2]$ связаны условиями $x_2 - x_1 = L$, $t_1 = t_2$, где x_2 и x_1 — координаты концов стержня.

В движущейся системе отсчета для координат этих событий имеем

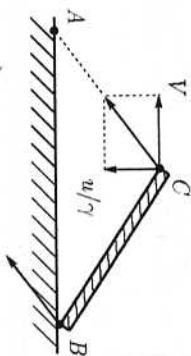
$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L, \quad t'_2 - t'_1 = -\gamma \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1) = -\frac{\gamma VL}{c^2}.$$

(здесь β и γ определены относительно скорости наблюдателя). В движущейся системе отсчета расстояние между точками касания A и B концов стержня с плоскостью составляет $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma L$, причем правый конец касается поверхности пола раньше, чем левый, на

$$\Delta t'_1 = \frac{\gamma VL}{c^2}.$$

Положение стержня в движущейся системе отсчета в момент времени t'_2 , когда правый конец стержня B уже коснулся пола, показано на рисунке. Расстояние AC , отделяющее левый конец стержня от пола, равно

$$|AC| = \Delta t'_1 \sqrt{V^2 + (u'^2/\gamma^2)},$$



где V и u'/γ — компоненты скорости стержня в движущейся системе отсчета. Для движущегося наблюдателя стержень будет наклонен под углом

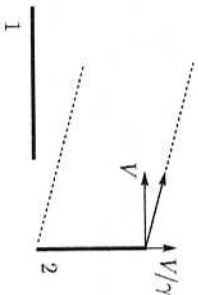
$$\theta = \arcsin \frac{(u/\gamma) \cdot \Delta t'_1}{|AB| - V \Delta t'_1} = \arcsin \frac{\gamma u V}{c^2}.$$

Длина стержня с точки зрения движущегося наблюдателя будет равна

$$L' = \sqrt{(|AB| - V \Delta t'_1)^2 + (u \Delta t'_1/\gamma)^2} = L \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} + \frac{V^2 u^2}{c^4}}.$$

$$2.60. \theta' = \arcsin \left[\gamma \left(\text{tg} \theta + \frac{uV}{c^2} \right) \right].$$

2.61. а) Пусть первый стержень ориентирован вдоль оси x Л-системы отсчета и движется вдоль нее со скоростью V , а второй стержень движется вдоль оси y , так что в момент времени t координаты его концов были равны (x, y_1) и (x, y_2) . В Л-системе оба стержня имеют длину $L = L_0/\gamma$. В системе



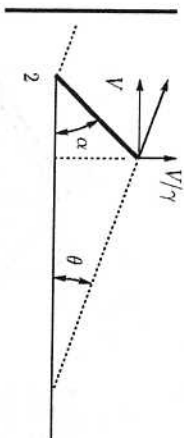
первого стержня второй стержень имеет компоненты скорости $V'_x = -V$ и $V'_y = V/\gamma$ (см. рисунок), а по преобразованиям Лоренца координаты концов

$$\text{второго стержня в момент времени } t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \text{ равны}$$

$$\gamma(x - Vt), \quad y_1 \text{ и } \gamma(x - Vt), \quad y_2.$$

Следовательно, стержень остается параллельным оси y' , а его длина равна

$$L' = y_2 - y_1 = L_0 / \gamma = L_0 \cdot \sqrt{1 - \beta^2}.$$



6) Если стержни движутся перпендикулярно своей длине (например, в L -системе первый стержень ориентирован по оси y и движется вдоль оси x , тогда как второй стержень параллелен оси x и движется вдоль оси y). В

системе отсчета первого стержня второй стержень будет двигаться под углом $\theta = \arcsin(1/\gamma)$ к оси x' (см. рисунок), причем ось второго стержня будет наклонена под углом $\alpha = \arcsin(\beta^2)$ к оси x' (см. предыдущую задачу). В этом случае длина второго стержня будет

$$L' = L_0 \sqrt{1 - \beta^2 + \beta^4}.$$

3. ЭНЕРГИЯ-ИМПУЛЬС

3.1. Масса, энергия и импульс релятивистских частиц

3.1. а) Скорость $4,2 \cdot 10^7$ м/с, импульс 72 кэВ/с;

б) скорость $2,97 \cdot 10^8$ м/с, импульс 3,47 МэВ/с;

в) скорость $c(1 - 5 \cdot 10^{-11})$, импульс 50 ГэВ/с.

3.3. Выделяющаяся мощность $N = \frac{T[\text{эВ}] \cdot I[\text{А}]}{e} = U[\text{В}] \cdot I[\text{А}] = 1,4 \cdot 10^{12}$

Вт, где $U = 2 \cdot 10^{13}$ В – эквивалентный потенциал электростатического поля, I – ток пучка. При длине пучка L энергия, выделявшаяся на мишени:

$$E = \frac{NL}{c} = 4 \cdot 10^8 \text{ Дж.}$$

3.4. Давление пучка на поглощающую мишень площадью S равно

$$P = \gamma m V^2 = \gamma m V \cdot \frac{I}{eS} \approx (T + mc^2) \cdot \frac{I}{eSc} \approx 1,2 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

3.7. Изменение массы Солнца за счет излучения

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt} = \frac{W \cdot 4\pi a_0^2}{c^2} = W \cdot 4\pi a_0^2 \approx 5 \cdot 10^9 \text{ кг/с,}$$

где $a_0 = c \cdot t_0$ – расстояние от Солнца до Земли, а $t_0 \approx 500$ с – время движения света от Солнца до Земли. Приведенное значение изменения массы Солнца за счет излучения сравнимо с потерями массы, за счет потока плазмы (солнечный ветер), которые составляют $\approx 2 \cdot 10^9$ кг/с.

3.8. При отражении от неподвижного зеркала фотон передает ему импульс $\Delta p = 2E/c$, где E – энергия фотона. При интенсивности пучка I фотонов в секунду и мощности лазера $N = E \cdot I$ свет действует на зеркало с силой $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2E}{c} \cdot I = \frac{2N}{c}$. Отсюда масса зеркала

$$m = \frac{2N}{cg} = 0,133 \text{ г.}$$

3.2. Преобразование энергии-импульса. Эффект Доплера

3.9. В L -системе импульс света продолжительностью T будет отличаться от движущегося навстречу зеркала в течение времени $t =$

$= cT(c+V)$. За это время передний фронт отраженного света успевае
удалиться от зеркала на расстояние

$$d = (c-V)t = cT(c-V)/(c+V),$$

т. е. в Л-системе продолжительность отраженного импульса будет

$$T_{\text{отр}} = \frac{d}{c} = T \frac{1-\beta}{1+\beta}.$$

При отражении фотона от движущегося навстречу зеркала его энер
гия увеличивается в $\frac{1+\beta}{1-\beta}$ раз. Энергия светового импульса равна сумме
энергий составляющих его отдельных фотонов:

$$E_{\text{отр}} = E \cdot \frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

3.10. Обозначим через x_n расстояние между зеркалами в момент n -
го столкновения фотона с движущимся зеркалом, а через P_n — импульс
фотона непосредственно после этого столкновения. Рассмотрение двух
последовательных столкновений показывает, что для величин x_n и P_n
справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$x_{n+1} = \frac{1-\beta}{1+\beta} x_n, \quad P_{n+1} = \frac{1+\beta}{1-\beta} P_n,$$

где $\beta = V/c$. Таким образом, произведение $x_n \cdot P_n$ является сохраняющей-
ся величиной, и при уменьшении расстояния между зеркалами наполо-
вину энергия фотона должна увеличиться в два раза. Область, ограни-
чиваемая фазовой траекторией фотона, имеет вид прямоугольника (с точ-
ностью до малой поправки порядка V/c), высота которого P_n увеличи-
вается по мере сближения зеркал. Площадь этого прямоугольника равна
 $2x_n P_n$ и не изменяется при медленном сближении зеркал.

3.11. Пусть в СО Земли импульс лазера имеет энергию E и продол-
жительность T . Свет догоняет корабль, поэтому временной интервал
между приходом переднего и заднего фронтов импульса на корабль в СО
Земли будет равен

$$\Delta t = \frac{T}{1-\beta},$$

соответственно пространственный интервал между этими событиями
составит $\Delta x = V\Delta t$. В системе корабля энергия луча будет $E' = \gamma E \times$
 $\times (1-\beta)$, а длительность принимаемого сигнала

$$T' = \gamma \left(\Delta t - \frac{V}{c} \Delta x \right) = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{T}{\gamma(1-\beta)}.$$

Принимаемая на корабле мощность $N = \frac{E'}{T} = \frac{E}{T} \frac{1-\beta}{1+\beta}$, т. е. мощность
лазера на Земле должна быть равна

$$N_0 = N \frac{1+\beta}{1-\beta} = 3N.$$

$$3.12. \quad N_{\text{max}} = N \frac{r^2}{4L^2} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2.$$

3.13. Считаем, что в Л-системе энергия и импульс электронов
лежат в диапазоне $p \pm \Delta p$, $E \pm \Delta E$. Дифференцируя выражение $(pc)^2 +$
 $+ (mc^2)^2 = E^2$, получим соотношение

$$p \cdot \Delta p = E \cdot \Delta E / c^2.$$

По преобразованию Лоренца, в сопровождающей пучок системе от-
счета, движущейся со скоростью $V = pc^2/E$, разброс импульсов частиц
будет

$$\Delta p' = \gamma (\Delta p - \Delta E \cdot V/c^2).$$

Учитывая, что $p' = 0$ и $\Delta p = E \cdot \Delta E / pc^2$, для импульса электронов в со-
провождающей системе отсчета получим

$$\Delta p' = \gamma \frac{\Delta E}{c^2} \left(\frac{E}{p} - V \right) = \frac{\Delta E}{\gamma V} \approx \pm 5 \cdot 10^3 \text{ эВ/с}.$$

Следовательно, максимальная кинетическая энергия электронов в сопро-
вождающей пучок системе отсчета будет равна:

$$T'_{\text{max}} = \sqrt{m^2 c^4 + (\Delta p')^2} - mc^2 \approx \frac{(\Delta p')^2}{2m} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta E}{E} \right)^2 mc^2 \approx 25 \text{ эВ}.$$

3.15. Направим ось x Л-системы отсчета вдоль вектора суммарного
импульса частиц $\sum \vec{p}_i = \vec{P}$. В этом случае P_y и P_z компоненты сум-
марного импульса частиц равны нулю, а $P_x = |P|$. При переходе в СО,
движущуюся вдоль оси x со скоростью V , поперечные компоненты
импульса останутся равными нулю, а x -компонента станет $P'_x = \gamma(P_x -$
 $\frac{V}{c^2} E)$, где $E = \sum E_i$ — суммарная энергия частиц в Л-системе. В Ц-
системе $P'_x = 0$, отсюда скорость Ц-системы:

$$\vec{V} = c^2 \frac{\vec{P}}{E} = c^2 \frac{\sum \vec{p}_i}{\sum E_i}.$$

3.17. Из-за эффекта Доплера длины волн в спектре удаляющейся галактики больше, чем в «собственных» спектрах:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 1,1.$$

Отсюда скорость удаления галактики $V = 0,17c$, и по закону Хаббл-да расстояние до галактики будет

$$L = \frac{V}{H} = 7 \cdot 10^8 \text{ парсек.}$$

3.18. При приближении радиомаяка частота принимаемого сигнала

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta}}, \text{ а при его удалении } \nu/4 = \nu_0 \cdot \frac{1-\beta}{\sqrt{1+\beta}}. \text{ Отсюда находим}$$

скорость и рабочую волну передатчика:

$$V = 0,6c, \lambda_0 = 2c/\nu.$$

3.19.
$$V_2 = c \cdot \frac{\beta(\nu_1 + \nu_2) - (\nu_2 - \nu_1)}{\beta(\nu_2 - \nu_1) - (\nu_2 + \nu_1)}.$$

3.20. Свет быстрее всего придет в точку на полу, расположенную за стенкой на расстоянии

$$L = \frac{Rc}{2\sqrt{4V^2 - c^2}}.$$

Частота света в Л-системе в момент появления сигнала

$$\omega = \frac{2\omega_0}{\gamma} = 1,6\omega_0.$$

3.21.
$$\nu_{\max} = \nu_0 \cdot \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^2; \nu_{\min} = \nu_0.$$

3.22. Пусть источник света движется вдоль оси x Л-системы отчета, а неподвижный наблюдатель находится в ее начале координат. Скорость света в неподвижной среде с показателем преломления n равна c/n , т. е. точки электромагнитной волны с постоянной фазой (например, точки с максимальной напряженностью электрического поля) перемещаются относительно среды со скоростью c/n . Источник движется относительно среды со скоростью V , и расстояние между соседними

максимумами волны будет равно $\lambda_1 = \frac{(c/n) - V}{\nu}$ — для волны.

распространяющейся по направлению движения источника, и $\lambda_2 = \frac{(c/n) + V}{\nu}$ — для волны, испущенной назад. Здесь ν — частота излучаемого света в Л-системе отчета, которая в γ раз меньше собственной частоты источника ν_0 .

Для наблюдателя в Л-системе регистрируемая частота волны (т. е. частота, с которой к нему приходят максимумы волны) будет равна:

$$\text{при приближении источника } \nu_{\text{пробл}} = \nu_0 \cdot \frac{1}{\gamma(1-n\beta)},$$

$$\text{при удалении } \nu_{\text{удал}} = \nu_0 \cdot \frac{1}{\gamma(1+n\beta)}.$$

Если $V > c/n$ (но меньше скорости света в вакууме), то источник обгоняет свое излучение и наблюдатель, находящийся в Л-системе, не видит приближающийся к нему источник. После того как источник пройдет мимо наблюдателя и начнет удаляться от него, наблюдатель будет видеть два изображения. Первое — на частоте $\nu_{\text{удал}}$ со стороны удаляющегося вдоль оси x источника, второе — запаздывающее изображение приближавшегося источника. Если считать, что при движении через волновой фронт источник его не разрушает, то частота запаздывающего излучения будет равна $|\nu_{\text{пробл}}|$, причем наблюдатель будет видеть обращенную во времени эволюцию приближавшегося источника.

3.23.
$$\nu_2 = \nu_0 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{1+n\beta_2}{1-n\beta_1}, \nu_1 = \nu_0 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{1+n\beta_1}{1-n\beta_2},$$
 где γ_i, β_i определены относительно скорости V_i .

3.24. Из-за эффекта Доплера частоты падающего ν_0' и отраженного ν_n' излучения в системе отчета движущегося объекта будут равны $\nu_0' = \nu_0 \cdot (1 - \beta \cdot \cos \theta)$, $\nu_n' = \nu_n \cdot (1 + \beta \cdot \cos \theta)$,

где ν_0 и ν_n — частоты падающего и отраженного излучения в Л-системе, θ — угол между вектором скорости объекта и направлением распространения падающего излучения в Л-системе, $V = \beta c$ — скорость движения объекта. Поскольку $\nu_0' = \nu_n'$, то $\nu_n = \nu_0 \cdot \frac{1 + \beta \cdot \cos \theta}{1 - \beta \cdot \cos \theta}$ и скорость объекта равна

$$V = c \cdot \frac{\nu_n - \nu_0}{\nu_n + \nu_0} \cdot \frac{1}{\cos \theta}.$$

3.25. $N_{1/2} = N \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma - 2}{2\beta} \right)$.

3.26. Пусть в Л-системе энергия падающего фотона E . В системе зеркала падающий фотон имеет энергию $E'_{\text{зад}} = \gamma E (1 - \beta)$, а отраженный $E'_{\text{отр}} = \gamma E_{\text{отр}} (1 - \beta \cos \theta) = \gamma \frac{E}{2}$, которые должны быть одинаковы, т. е. $\gamma E (1 - \beta) = \gamma \frac{E}{2}$. Отсюда для скорости зеркала получим

$$V = \beta c = 0,5.$$

В системе зеркала отраженный фотон имеет x -компоненту импульса $p'_x = -\gamma \beta \frac{E}{2c}$, т. е. движется под углом θ' , для которого выполняется соотношение $\cos \theta' = \frac{cp'_x}{E'_{\text{отр}}} = -\beta$ и $\theta' = 120^\circ$. Следовательно, нормаль к зеркалу направлена под углом 150° , а плоскость зеркала — под углом $\alpha' = 60^\circ$ к оси x' системы отсчета зеркала. Углы в Л-системе и СО зеркала связаны соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y'}{\Delta x'/\gamma} = \gamma \operatorname{tg} \alpha'.$$

Отсюда $\operatorname{tg} \alpha = 2$, т. е. в Л-системе зеркало наклонено под углом $\alpha = \arcsin \operatorname{tg} 2 = 63^\circ$.

3.28. Пусть отражатель движется вдоль оси x , а фотон — под углом θ к оси x Л-системы отсчета. В системе отражателя скорость фотона имеет компоненты

$$c'_x = c \cdot \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cdot \cos \theta}, \quad c'_y = c \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cdot \cos \theta)}.$$

В системе отражателя фотон, последовательно отразившись от двух зеркал, меняет направление движения на противоположное, и его компоненты скорости c'_x, c'_y изменяют знак. В Л-системе компоненты скорости фотона после отражения будут равны

$$c''_x = \frac{V - c'_x}{1 - c'_x V/c^2}, \quad c''_y = \frac{-c'_y}{\gamma(1 - c'_x V/c^2)},$$

а угол наклона α к оси x будет

$$\alpha = \arcsin \frac{c'_y}{c'_x} = \arcsin \frac{(1 - \beta^2) \sin \theta}{(1 + \beta^2) \cos \theta - 2\beta}.$$

Энергия фотона в СО отражателя $E' = \gamma E (1 - \beta \cos \theta)$ при отражении не меняется, а x -компонента импульса $p'_x/c = \gamma E (\cos - \beta)$ меняет знак. В Л-системе энергия и частота отраженного фотона будут

$$E_{\text{отр}} = E \frac{1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2}{1 - \beta^2}, \quad \nu_{\text{отр}} = \nu \frac{1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

3.29. $E_{\text{отр}} = E \cdot \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{5}{3} h\nu$; $\theta_{\text{отр}} = \arcsin \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} \cong 37^\circ$.

3.30. $P = 2W \frac{V^2}{c^2 - V^2} = 1,12 \cdot 10^{-2}$ Па.

3.31. $V = \frac{c}{3}$.

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

4.1. Распад частиц

4.1. Скорость распада движущихся π -мезонов определяется уравнением

$$\frac{dn_{\pi}}{dt} = -\frac{n_{\pi}}{\gamma_{\pi} \tau_{\pi}},$$

где n_{π} — плотность π -мезонов в потоке, γ_{π} — их релятивистский фактор. Перейдя к новой переменной $x = V_{\pi} t$ — расстояние от мишени, напишем уравнение в виде

$$\frac{dn_{\pi}}{dx} = -\frac{n_{\pi}}{\gamma_{\pi} \tau_{\pi} V_{\pi}} = -\frac{n_{\pi} m_{\pi}}{R \tau_{\pi}}, \quad (1)$$

где R — импульс, а m_{π} — масса π -мезона. π -мезоны в данном случае являются ультрарелятивистскими частицами ($\gamma_{\pi} = 71,4$), поэтому можно считать, что образующиеся при распаде $\mu \rightarrow \mu + \nu$ мюоны летят параллельно пучку π -мезонов. Распадом мюонов на начальном этапе можно пренебречь, поскольку даже самые медленные из них (имеющие наименьшее время жизни) распадутся в среднем за время

$$\tau_{\mu} = \gamma_{\mu} \tau_{\mu 0} \approx \gamma_{\pi} \frac{m_{\mu}}{m_{\pi}} \cdot \tau_{\mu 0} = 10^{-4} \text{ с,}$$

что много больше времени жизни π -мезонов в пучке $\gamma_{\pi} \tau_{\pi}$. Решая уравнение (1), получим

$$n_{\pi} = n_{\pi}(0) \cdot \exp\left(-\frac{x m_{\pi}}{R \tau_{\pi}}\right).$$

Плотность π -мезонов в пучке будет меньше половины суммарной плотности частиц, начиная с расстояния

$$L \geq \frac{R \tau_{\pi}}{m_{\pi}} \ln 2 \approx 371 \text{ м.}$$

4.2. По преобразованиям Лоренца, энергия фотона, вылетевшего вперед по ходу движения π -мезона, в Л-системе равна

$$E_{\nu} = \gamma E'(1 + \beta),$$

где E' — его энергия в Ц-системе. Фотон, вылетевший назад, в Л-системе будет иметь энергию

$$E_{\bar{\nu}} = \gamma E'(1 - \beta).$$

Премножив оба уравнения, получим соотношение $E_{\nu} E_{\bar{\nu}} = (E')^2$. Так как $E' = mc^2/2$, то энергия распадающихся π -мезонов

$$E_{\pi} = E_{\nu} + \frac{m_{\pi}^2 c^4}{4E_{\nu}} \approx 287 \text{ МэВ.}$$

4.6. Пусть π -мезон двигался вдоль оси x Л-системы, а в Ц-системе нейтринно вылетело под углом θ' к оси x' . Если в Ц-системе энергия нейтринно равна E' , то в Л-системе его энергия будет $E_{\nu} = \gamma E'(1 + \beta \cos \theta')$, где $\beta = V/c$ определяется скоростью π -мезона. В Л-системе максимальная энергия будет у нейтринно, вылетающих вперед, а минимальная — у вылетающих назад. Отношение максимальной энергии к минимальной:

$$\alpha = \frac{E_{\text{max}}}{E_{\text{min}}} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = 100,$$

откуда энергия распадающихся π -мезонов равна

$$E_{\pi} = \frac{\alpha + 1}{2\sqrt{\alpha}} mc^2 \approx 707 \text{ МэВ.}$$

$$4.7. E_{\pi} = M_{\pi} c^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{M_{\pi}^2 - m_{\mu}^2}{M_{\pi}^2 + m_{\mu}^2} \right)^2 \right]^{\pm 1/2} \left(\frac{\pm \alpha + 1}{\pm \alpha - 1} \right)^{\pm 1/2} = \begin{cases} 1,06 M_{\pi} c^2 \\ 1,03 M_{\pi} c^2 \end{cases}.$$

$$4.8. M_{\pi} = \frac{M_{\rho}^2}{\sqrt{\alpha}} = 547 \text{ МэВ.}$$

4.9. Запишем законы сохранения энергии и импульса в четырехмерной форме: $p_{\pi}^i - p_{\gamma}^i = p_{\nu}^i$, где $p_{\gamma}^i \equiv \left(\frac{E_{\gamma}}{c}, \vec{p}_{\gamma} \right)$ — 4-вектор энергии-импульса регистрируемого γ -кванта, p_{ν}^i — 4-импульс второго γ -кванта, образующегося при распаде π -мезона с 4-импульсом p_{π}^i . Возведя обе стороны в квадрат и считая $c \equiv 1$, получим $(E_{\pi} - E_{\gamma})^2 - (\vec{p}_{\pi} - \vec{p}_{\gamma})^2 = 0$. Выразив модули импульсов через соответствующие энергии и массы частиц, получим:

$$m_{\pi}^2 - 2E_{\gamma} \cdot E_{\pi} + 2E_{\gamma} \sqrt{E_{\pi}^2 - m_{\pi}^2} \cdot \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

где α — угол вылета регистрируемого γ -кванта по отношению к направлению движения π -мезона. Отсюда найдем энергию π -мезона:

$$E_{\pi} = \frac{m_{\pi}^2 c^4}{2E_{\gamma} \sin^2 \alpha} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2E_{\gamma} \sin \alpha}{m_{\pi} c^2} \right)^2} \right) \cdot \cos \alpha \approx 1,13 \text{ ГэВ.} \quad (2)$$

Перед корнем оставлен знак «+», чтобы обеспечить выполнение условия $E_\pi > m^2 c^2$, вытекающего из выражения (1). Значение $E_\pi = 217$ МэВ, получающееся из (2) при замене знака перед корнем, соответствует углу вылета фотона 135° по отношению к направлению движения π -мезона.

$$4.10. M_{\gamma/\mu} = 2 \left[\left(\frac{E}{c^2} \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 + m^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]^{1/2} \approx 3,1 \text{ ГэВ.}$$

$$4.11. E_\pi = E_\mu + \frac{(M_\pi^2 - M_\mu^2) c^4}{2(E_\mu - \sqrt{E_\mu^2 - M_\mu^2 c^4} \cos \theta)} \approx 327 \text{ МэВ.}$$

$$4.12. E_\pi = \frac{M c^2}{2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} \cdot \left(\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} + \sqrt{\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}} \right).$$

4.13. Пусть π -мезоны летят вдоль оси x Л-системы отсчета. В системе отсчета π -мезонов γ -кванты разлетаются изотропно, причем половина летит в переднюю полусферу, для которой угол вылета θ' меняется от 0 до $\pi/2$. Из формулы преобразования углов для частиц, летящих со скоростью света

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}$$

(где β - релятивистский фактор π -мезона), найдем, что при угле вылета в Л-системе $\theta' = \pi/2$ в Л-системе γ -квант будет лететь под углом $\theta = \arccos \beta$. Так как $\gamma \gg 1$, то $\arccos \beta \approx \arccos(1 - 1/2\gamma^2) \approx 1/\gamma$, и угловой развор конуса, в который в Л-системе полетит половина всех γ -квантов, будет равен $2\theta \approx 2/\gamma = 2,7 \cdot 10^{-2}$ рад, при этом телесный угол равен

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta) = \frac{\pi}{\gamma^2} \approx 5,7 \cdot 10^{-4} \text{ ср.}$$

Энергию γ -квантов в Л-системе найдем с помощью преобразований Лоренца: $E = \gamma \frac{m c^2}{2} (1 + \beta \cos \theta)$. В пределах полученного конуса угол θ' меняется в диапазоне от 0 до $\pi/2$, соответственно минимальная и максимальная энергии фотонов равны

$$E_{\min} = \frac{\gamma m c^2}{2} = 5 \text{ ГэВ} \quad \text{и} \quad E_{\max} = \frac{m c^2}{2} \cdot \gamma (1 + \beta) = \gamma m c^2 \approx 10 \text{ ГэВ.}$$

$$4.15. N = \frac{2 + 3\beta - \beta^3}{2 - 3\beta + \beta^3} \approx 5,4.$$

$$4.22. M_K = \sqrt{\left(2m_\pi \cos \frac{\theta_{\min}}{2} \right)^2 + \left(\frac{E_K}{c^2} \sin \frac{\theta_{\min}}{2} \right)^2} \approx 500 \text{ МэВ.}$$

4.23. Пусть в СО каона π^+ -мезон вылетает под углом θ' относительно скорости движения каона в Л-системе. Тогда в Л-системе проекции скорости π^+ -мезона на оси равны

$$\beta_x = \frac{\beta'_x \cos \theta' + \beta_K}{1 + \beta'_x \beta_K \cos \theta'} \quad \text{и} \quad \beta_y = \frac{\beta'_y \sin \theta'}{\gamma_K (1 + \beta'_x \beta_K \cos \theta')},$$

т. е. в Л-системе он летит под углом θ_1 к оси x , определяемым соотношением $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\beta'_y \sin \theta'}{\beta'_x \cos \theta' + \beta_K}$ (обозначения стандартные). Для угла

вылета π^- -мезона аналогично получаем $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\beta'_y \sin \theta'}{\gamma_K (\beta'_x \cos \theta')}$.

Суммарный угол разлета π -мезонов $\theta = \theta_1 + \theta_2$ в Л-системе определится выражением

$$\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2}{1 - \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2} = \frac{2\gamma_K \beta'_x \beta'_y \sin \theta'}{\gamma_K (\beta'_x \cos \theta') - \beta_K \sin^2 \theta'} = \frac{2\beta'_x \beta'_y}{\beta'_x \cos \theta' - \beta_K \sin^2 \theta'}. \quad (1)$$

Выражение (1) достигает экстремума при $\sin \theta' = \sqrt{\frac{1 - \beta_K^2}{\beta'^2}}$ или $\cos \theta' = 0$ (симметричный разлет). Подставляя значение $\sin \theta' = \sqrt{\frac{1 - \beta_K^2}{\beta'^2}}$, найдем для максимального угла разлета:

$$\operatorname{tg} \theta_{\max} = \frac{1}{\gamma_K \sqrt{\beta'^2 - \beta_K^2}}, \quad \text{т. е.} \quad \cos \theta_{\max} = \sqrt{1 - \frac{\gamma'^2}{\beta'^2}}.$$

С учетом $\gamma'_x m_\pi = \frac{M_K}{2}$ максимальный угол разлета будет равен

$$\theta_{\max} = \arccos \sqrt{1 - \frac{M_K^4 c^4}{4m_\pi^2 E_K^2}} \approx 0,09 \text{ рад.}$$

Симметричный разлет ($\sin \theta' = 1$) соответствует локальному минимуму угла:

$$\theta_{\text{loc min}} = \arccos \left[1 - \frac{2(M_K^2 - 4m_\pi^2)c^4}{E_K^2 - 4m_\pi^2 c^4} \right] \approx 0,08 \text{ рад.} \quad (2)$$

Локальный минимум (2) также можно найти из условий симметрии. Для этого запишем равенство 4-векторов энергии-импульса при распаде К-мезона на два π -мезона в виде $(E_K, \vec{p}_K) = (E_1, \vec{p}_1) + (E_2, \vec{p}_2)$. Возведя его в квадрат, получим (считаем $c \equiv 1$)

$$M_K^2 = 2m_\pi^2 + 2(E_1 E_2 - p_1 p_2 \cos \theta),$$

где θ — угол разлета π -мезонов в Л-системе. Отсюда находим

$$\cos \theta = \frac{E_1 E_2 + m_\pi^2 - M_K^2 / 2}{\sqrt{E_1^2 - m_\pi^2} \cdot \sqrt{E_2^2 - m_\pi^2}}. \quad (3)$$

Зависимость $\cos \theta = f(E_1, E_2)$ симметрична относительно перестановки E_1 и E_2 , и при равных энергиях $E_1 = E_2$ производные совпадают:

$$\frac{\partial f}{\partial E_1} = \frac{\partial f}{\partial E_2}.$$

Из равенства $E_1 + E_2 = \text{const}$ следует, что $\Delta(E_1 + E_2) = \Delta E_1 + \Delta E_2 = 0$.

Отсюда для $E_1 = E_2$ получим

$$\Delta f(E_1, E_2) = \frac{\partial f}{\partial E_1} \Delta E_1 + \frac{\partial f}{\partial E_2} \Delta E_2 = 0,$$

т. е. при равных энергиях π -мезонов значение $\cos \theta$ (и угла θ) достигает экстремального значения. В данном случае выражение (3) при $E_1 = E_2$ определяет полученное выше значение локального минимума угла (2).

Для нахождения относительной скорости π -мезонов воспользуемся инвариантностью скалярного произведения 4-векторов скоростей частиц

$$u_1 \cdot u_2 = \gamma_1 \gamma_2 (c^2 - \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2).$$

В СО первого π -мезона, где $u_1 = 0$, $\gamma_1 = 1$, $u_2 = V_{\text{отн}}$, он имеет величину $A = c^2 \gamma (V_{\text{отн}})$. В П-системе $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2 = \vec{u}$, и инвариант равен

$$A = \gamma_n^2 (c^2 + u^2) = c^2 (2\gamma_n^2 - 1) = c^2 \left(\frac{M_K^2}{2m_\pi^2} - 1 \right),$$

где $\gamma_n = \frac{E'_\pi}{m_\pi c^2} = \frac{M_K}{2m_\pi}$. Сравнивая значения инварианта, найдем

относительную скорость π -мезонов:

$$V_{\text{отн}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{M_K}{2m_\pi} - 1 \right)^{-2}} \approx 0,98 c.$$

$$4.25. M_x = M_\phi \frac{\sin(\theta_{\text{min}}/2)}{1 + \cos(\theta_{\text{min}}/2)} \approx 546 \text{ МэВ.}$$

4.26. Пусть каоны летят вдоль оси x Л-системы отсчета. В П-системе мюон и нейтрино разлетаются с энергиями E'_μ , E'_ν и одинаковыми по величине, но противоположно направленными импульсами p' . Запишем законы сохранения энергии и импульса (считаем $c \equiv 1$):

$$M_K = E'_\mu + E'_\nu, \quad \sqrt{E_\mu'^2 - m_\mu^2} = E'_\nu.$$

Отсюда получаем

$$E'_\nu = (M_K^2 - m_\mu^2) / 2M_K = p' \text{ и } E'_\mu = (M_K^2 + m_\mu^2) / 2M_K.$$

Проекции импульса частиц на оси Л-системы равны

$$p_x = \gamma p' (\cos \theta' + \beta E'), \quad p_y = p' \sin \theta',$$

где θ' — угол вылета частицы в системе каона, β и γ — скорость и релятивистские факторы каона. Для угла вылета θ частиц в Л-системе имеем

$$\lg \theta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\sin \theta'}{\gamma [\cos \theta' + (\beta E' / p')]}.$$

В данном случае ($\gamma = 1,3$, $\beta E' / p' \sim 1$) при малых θ углы θ' также имеют малую величину и связаны соотношением

$$\theta' \approx \theta \gamma (1 + \beta E' / p').$$

Для частиц, летящих в направлении движения каона, малому интервалу углов в Л-системе $[0, \theta_+]$ в системе каона будет соответствовать интервал углов от 0 до $\theta'_+ = \theta_+ \gamma [1 + (\beta E' / p')]$, а интервалу углов

$$[\pi, \pi - \theta_-] \text{ в Л-системе — интервал углов } [\pi, \pi - \theta'_-] = \left[\pi, \pi - \theta_- \gamma \left(1 - \frac{\beta E'_-}{p'_-} \right) \right]$$

в СО каона.

Интервалу углов $[0, \theta]$ соответствует телесный угол $2\pi (1 - \cos \theta)$, который для малых θ равен $\pi \theta^2$. Таким образом, двум одинаковым по величине малым телесным углам, в которые в Л-системе частицы летят

вперед и назад, в системе каона будут соответствовать малые телесные углы, отношения которых равно

$$\left(\frac{\theta_+}{\theta_-}\right)^2 = \frac{(p' + \beta E')^2}{(p' - \beta E')^2} = \frac{(\beta' + \beta)^2}{(\beta' - \beta)^2},$$

где $\beta' = p'/E'$ — скорость выбранного сорта частиц в системе каона.

Поскольку в системе каона частицы разлетаются изотропно, полное отношение телесных углов $(\theta'_+/\theta'_-)^2$ равно искомому отношению N_+/N_- числа частиц, летящих в Л-системе в одинаковые малые углы вперед и назад. Подставляя $\beta' = 1$, $\beta = 2/3$, для числа нейтрино получим отношение

$$N_+/N_- = 25.$$

Для мюонов

$$\beta' = p'/E'_\mu = (M_K^2 - m_\mu^2)/(M_K^2 + m_\mu^2) = 12/13,$$

и соотношение числа мюонов, летящих в одинаковые малые телесные углы вперед и назад, в Л-системе будет равно

$$N_+/N_- \approx 38,4.$$

4.30. В системе центра инерции энергия образующихся нейтрино равна $E'_\nu = (m_\pi^2 - m_\nu^2)c^2/2m_\pi = 34$ МэВ, причем вылет нейтрино изотропен:

$$dN/d\Omega' = N/4\pi.$$

В Л-системе энергия нейтрино $E_\nu = \gamma E'_\nu (1 + \beta \cos\theta')$, где γ , β — релятивистские факторы μ -мезона, θ' — угол вылета нейтрино относительно оси x' Ц-системы. Таким образом, энергия нейтрино лежит в диапазоне $0,4$ МэВ \div $2,9$ ГэВ.

Малому интервалу энергий нейтрино в Л-системе соответствует интервал углов вылета нейтрино в Ц-системе:

$$dE_\nu = \gamma\beta \cdot E'_\nu \cdot d(-\cos\theta') = \gamma\beta E'_\nu \cdot d\Omega'/2\pi,$$

где $d\Omega' = 2\pi \cdot d(-\cos\theta')$ — малый телесный угол, ограниченный углами θ' и $\theta' + d\theta'$. Отсюда для энергетического спектра нейтрино в Л-системе получим

$$\frac{dN}{dE} = \frac{dN}{d\Omega'} \cdot \frac{d\Omega'}{dE} = \frac{N}{4\pi} \cdot \frac{2\pi}{\gamma\beta E'_\nu} = \frac{N}{\gamma\beta E'_\nu} \cdot \frac{E_{\text{max}} - E_{\text{min}}}{E_{\text{max}} - E_{\text{min}}},$$

которое показывает, что в пределах указанного диапазона энергий любое значение энергии нейтрино в Л-системе равновероятно, т. е. средняя энергия нейтрино равна $1,65$ ГэВ.

Аналогично находим угловое распределение нейтрино в Л-системе:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{dN}{d\Omega'} \cdot \frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{N}{4\pi} \cdot \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos\theta)^2},$$

где выражение для

$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{d \cos\theta'}{d \cos\theta}$$

получено дифференцированием равенства $\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta \cos\theta}$, связывающего углы вылета частиц нулевой массы в различных системах отсчета.

4.31. Пусть 4-импульс неподвижной частицы до распада $P^i = (Mc, 0)$, 4-импульс одного из образовавшихся осколков P_1^i , а суммарный 4-импульс остальных осколков P_2^i . Возводя в квадрат обе части равенства $P^i - P_1^i = P_2^i$ и считая $c \equiv 1$, получим соотношение

$$M^2 + m_1^2 - 2ME_1 = m_2^2.$$

Здесь использовано, что $P^2 = M^2$, $P_1^2 = m_1^2$ и $P_2^2 = m_2^2 = \left(\sum_{i=1}^3 E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^3 \vec{p}_i\right)^2$ — квадрат инвариантной массы системы остальных осколков. Отсюда найдем

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M},$$

т. е. кинетическая энергия осколка m_1 будет максимальной при минимуме инвариантной массы m_2^2 .

Перейдем в систему центра масс «оставших осколков». В этой СО инвариантная величина

$$m_2^2 = \left(\sum_{i=1}^3 E_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^3 \sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^2}\right)^2$$

будет иметь минимальное значение

$$m_2^2 = \left(\sum_{i=1}^3 m_i\right)^2 = (m - m_1)^2$$

при условии $\vec{p}_1^2 = 0$, т. е. когда осколки в этой системе неподвижны, а в Л-системе имеют одинаковую скорость. Таким образом, максималь-

ная кинетическая энергия осколка m_1 достигается при $m_2^2 = (m - m_1)^2$ и составляет

$$T_1^{\max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m - m_1)^2}{2M} c^2 - m_1 c^2 = \frac{(M - m_1)^2 - (m - m_1)^2}{2M} c^2.$$

4.32. Пусть m_2 — инвариантная масса системы образующихся нейтрино-антинейтрино. Ее величина

$$m_{\Sigma}^2 = (P_i^i + P_j^j)^2 = 2E_i E_j (1 - \cos \theta)$$

достигает минимального значения $m_{\Sigma}^2 = 0$, когда угол разлета частиц $\theta = 0$, т. е. максимальная энергия электрона (см. решение задачи 4.31) равна

$$E_e^{\max} = \frac{m_{\mu}^2 + m_e^2}{2m_{\mu}} c^2 \approx 53 \text{ МэВ}.$$

4.34. $E_1 = \frac{4mc^2}{3 + \sqrt{3}}, E_2 = \frac{2mc^2}{3 + \sqrt{3}}, E_3 = \frac{2mc^2}{1 + \sqrt{3}}.$

4.2. Неупругие столкновения. Пороги рождения частиц

4.38. $\alpha = 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{1 + E/mc^2}}.$

4.40. $E_e = M_p c^2 = 1 \text{ ГэВ}.$

4.41. Запишем законы сохранения энергии и импульса в четырехмерной форме

$$P_{p1}^i + P_{p2}^i = \vec{p}_1^i + \vec{p}_2^i + \vec{p}_{\psi}^i,$$

где значком «~» обозначены 4-векторы энергии-импульса рождающихся частиц. Возведем это равенство в квадрат и, пользуясь инвариантностью длины 4-вектора, запишем правую часть в Π -системе, в которой при пороговой энергии процесса все образующиеся частицы покоятся:

$$[(E, p) + (m, 0)]_{\Pi}^2 = [(m, 0) + (m, 0) + (M_{\psi}, 0)]_{\Pi}^2,$$

где (E, p) — 4-вектор энергии-импульса налетающего протона, $(m, 0)$ — 4-вектор энергии-импульса покоящегося протона, $(M_{\psi}, 0)$ — 4-вектор энергии-импульса покоящегося J/ψ -мезона (считаем $c \equiv 1$). Вычисляя

квадрат длины суммы 4-векторов, получим равенство

$$(E + m)^2 - p^2 = (2m + M_{\psi})^2,$$

откуда найдем пороговую энергию протона при рождении J/ψ -мезона на неподвижной мишени

$$E_p = \left(2M_{\psi} + M_p + \frac{M_{\psi}^2}{2M_p} \right) c^2 = 12,3 \text{ ГэВ}.$$

Значение пороговой кинетической энергии протона в 3,6 раза превышает массу J/ψ -мезона. Избыток энергии протона величиной 8,2 ГэВ переходит в кинетическую энергию продуктов реакции, обусловленную движением центра масс частиц. В ускорителях на встречных пучках вся энергия сталкивающихся частиц может идти на образование новых частиц. Например, при столкновении электрона и позитрона с одинаковыми по величине и противоположно направленными импульсами образующаяся в реакции $e^- + e^+ \rightarrow J/\psi$ частица будет покоиться. Из закона сохранения энергии следует, что в этом случае каждая из сталкивающихся частиц должна иметь пороговую энергию

$$E_e = \frac{M_{\psi}}{2} c^2 = 1,55 \text{ ГэВ}.$$

4.42. Пороговая энергия фотона будет минимальной, если фотоны будут двигаться навстречу друг другу. Положим, что энергия первого равна E_1 , а второго — $E_2 = 1$ эВ. Квадрат длины 4-вектора энергии-импульса фотонов до столкновения в Π -системе имеет величину

$$(E_1 + E_2)^2 - (p_1 - p_2)^2 = 4E_1 E_2$$

(считаем $c \equiv 1$). Если энергия фотонов пороговая, то образующаяся электрон-позитронная пара в системе центра инерции должна покоиться, а квадрат длины 4-вектора энергии-импульса пары в Π -системе будет иметь величину $(2m)^2$. Из законов сохранения и инвариантности длины 4-вектора энергии-импульса в Π - и Π' -системах получим $4E_1 E_2 = (2m)^2$ и

$$E_2 = \frac{m^2 c^4}{E_1} \approx 2,5 \cdot 10^{11} \text{ эВ}.$$

4.43. Запишем закон сохранения энергии и импульса при пороговой энергии γ -кванта E_{γ} в инвариантном четырехмерном виде ($c \equiv 1$):

$$[(E_{\gamma}, p_{\gamma}) + (M_a, 0)]_{\Pi}^2 = [(m_a, 0) + (m_p, 0)]_{\Pi}^2.$$

Отсюда $E_\gamma = \frac{(m_n + m_p)^2 - M_d^2}{2M_d} c^2 = \Delta E + \frac{(\Delta E)^2}{2M_d}$, где $\Delta E = (m_n + m_p - M_d)c^2$

— энергия связи дейтрона. Из закона сохранения энергии $E_\gamma + M_d c^2 = T_\Sigma + m_n c^2 + m_p c^2$ найдем кинетическую энергию образующихся нуклонов

$$T_\Sigma = E_\gamma - \Delta E = \frac{(\Delta E)^2}{2M_d} = 10^3 \text{ эВ.}$$

$$4.48. E_{\text{max}} = E - \frac{M_n^2 - M_p^2 - m_e^2}{2M_p} c^2, E_{\text{min}} = \frac{E_{\text{max}}}{1 + (2E/M_p c^2)}$$

4.50. Из законов сохранения и инвариантности длины 4-вектора энергии-импульса частиц следует, что

$$\sin^2 \theta = \frac{[M + m + (T/2c^2)]^2 - m^2}{(E/c^2)^2 - m^2},$$

где E — энергия электрона, M и m — массы протона и электрона, θ — угол между векторами импульсов сталкивающихся частиц, T — суммарная кинетическая энергия образовавшихся частиц в системе центра инерции. При пороговой энергии образующиеся частицы в системе центра инерции неподвижны, и образование протон-антипротонной пары возможно, если

$$\theta \geq 2 \cdot \arcsin \sqrt{\frac{(M+m)^2 - m^2}{(E/c^2)^2 - m^2}} \approx 22^\circ.$$

4.53. Пороговая энергия протонов, необходимая для поглощения, минимальна при лобовых столкновениях с релятивистскими фотонами и равна

$$E = \frac{M_\Delta^2 - M_p^2}{4E_\gamma} c^4 + \frac{E_\gamma}{(M_\Delta^2/M_p^2) - 1} \approx 5 \cdot 10^{20} \text{ эВ.}$$

4.54. Пусть в Л-системе γ -квант имеет необходимую энергию E_γ . Суммарный импульс образовавшихся π -мезонов равен E_γ/c , а их инвариантная масса будет минимальной, если оба π -мезона летят в одну сторону с одинаковыми скоростями, т. е. импульс каждого равен $E_\gamma/2c$. Энергия образовавшихся частиц в этом случае $E = E_\gamma + 2\sqrt{(E_\gamma/2)^2 + (m_\pi c^2)^2}$, т. е.

минимальная энергия частиц встречных пучков равна

$$E_2 = \frac{E_\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{E_\gamma}{2}\right)^2 + (m_\pi c^2)^2} = 167 \text{ МэВ.}$$

4.55. В системе центра инерции встречных пучков γ -мезон покоится и распадается на V -мезоны изотропно. Скорости V -мезонов в Ц-системе равны $u = c(1 - 4M_B^2/M_\pi^2)^{1/2}$, а скорость центра масс

$$V = c^2 \frac{\sum P_i}{\sum E_i} = c \frac{\sqrt{E_1^2 - m^2 c^4} - \sqrt{E_2^2 - m^2 c^4}}{E_1 + E_2},$$

где E_1 и E_2 — энергии встречных электрон-позитронных пучков. Поскольку энергия E_1 и E_2 , необходимые для рождения γ -мезона с массой 10,58 ГэВ, должны быть много больше $m^2 c^4 = 0,5 \text{ МэВ}$, то можно считать, что $E_1 \approx P_1$, $E_2 \approx P_2$, и упростить выражение для скорости центра масс:

$$V \approx \frac{E_1 - E_2}{\gamma M_\pi c} = c \left(1 + \frac{M_\pi^2 c^4}{(E_1 - E_2)^2} \right)^{-1/2}, \text{ где } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

В Л-системе V -мезоны будут двигаться в одну сторону, если $V > u$, т. е. при соотношении

$$E_1 - E_2 > M_\pi c^2 \left(\frac{M_\pi^2}{4M_B^2} - 1 \right)^{1/2} \approx 6,5 \cdot 10^8 \text{ эВ.}$$

При этом энергия γ -мезона

$$E_\gamma \geq \frac{M_\pi^2 c^2}{2M_B} = 10,6 \text{ ГэВ.}$$

$$4.57. k = \frac{1 - \sqrt{1 - (M_\psi c^2/E_\psi)^2}}{1 + \sqrt{1 - (M_\psi c^2/E_\psi)^2}} = 0,38, \text{ где } E_\psi = 2M_\tau c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{L}{ct}\right)^2}.$$

$$4.58. M = \frac{2E_0}{c^2} \sqrt{\frac{E_1}{2E_0 - E_1}}, E_\gamma = \frac{E_0 E_1}{2E_0 - E_1}.$$

4.59. В СО ракеты импульс атома mV , и в единицу времени в ракету сечением S попадает nV VS атомов (здесь m — масса, n — плотность, V

и γ — скорость и релятивистский фактор атомов). Сила, тормозящая ракету, равна $\frac{dp}{dt} = \gamma^2 m V^2 S$. Скорость ракеты не меняется, если тяга двигателей $F = \frac{dp}{dt}$. Мощность фотонных двигателей с тягой F равна

$$N = m^2 \gamma^2 S m c \approx 8 \cdot 10^7 \text{ Вт.}$$

4.60. $V = \frac{2}{\sqrt{5}} c$.

4.3. Упругие столкновения

4.61. Выразим импульс налетающей частицы массой m_1 через ее энергию и импульс в системе центра инерции $p_1 = \gamma \left(p_1' + \frac{VE_1'}{c^2} \right)$. Лобовое столкновение приводит к изменению знака p_1' , и, чтобы частица и в Л-системе изменила направление своего движения, должно выполняться условие

$$|p_1'| > \left| \frac{VE_1'}{c^2} \right|.$$

Поскольку $|p_1| = |p_2|$, где p_2 — импульс частицы массы m_2 в системе центра инерции, а $|p_2| = \left| \frac{VE_2'}{c^2} \right|$ (так как в Л-системе частица m_2 до столкновения покоилась), то условие $|p_1'| > \left| \frac{VE_1'}{c^2} \right|$ сводится к виду $E_1' < E_2'$. Учитывая равенство $|p_1| = |p_2|$, получим искомое соотношение

$$m_1 < m_2.$$

4.62. считаем, что первая частица летит вдоль оси x . Рассмотрим задачу в Ц-системе. Импульс каждой из сталкивающихся частиц в Ц-системе равен $p_i' = \gamma V_{ii} M$. Максимальную энергию частица передает при лобовом столкновении. После лобового столкновения вторая частица в Ц-системе летит вперед с импульсом $p' = \gamma V_{ii} M$ и энергией $E' = \gamma M$. Ее энергия в Л-системе будет равна

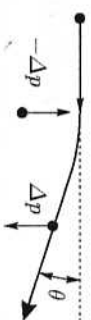
$$E = \gamma (E' + V_{ii} p') = M \frac{1 + V_{ii}^2}{1 - V_{ii}^2},$$

т. е. возрастет на $\Delta E = M \frac{2V_{ii}^2}{1 - V_{ii}^2}$. Подставляя $V_{ii}^2 = \frac{E^2 - m^2}{(E + M)^2}$ и $E = m + T$, для передаваемой энергии получим

$$\Delta E = 2M \frac{2mT + T^2/c^2}{(m + M)^2 + 2MT/c^2}$$

4.63. а) $T_{\min} = T_0 \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2$, б) $T_{\min} = T_0 \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_2 + m_1)^2 + (2m_2 T_0/c^2)}$.

4.64. Импульс протона после столкновения равен (с противоположным знаком) изменению импульса электрона Δp (см. рисунок). Угол рассеяния θ мал, и изменение импульса электрона $\Delta p \approx p_0 \theta$. Учитывая, что $p_0 c \approx E$, где E — энергия налетающего электрона, для кинетической энергии протона получим



$$T_p = \sqrt{(M_p c^2)^2 + p_0^2 \theta^2 c^2} - M_p c^2 \approx \frac{p_0^2 \theta^2}{2M_p} = \frac{E^2 \theta^2}{2M_p} = 0,5 \text{ кэВ.}$$

4.65. $V_1 = \frac{m_1 V}{m_1 + m_2} \left[\cos \theta_1 \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 + \cos^2 \theta_1 - 1} \right]$, $V_2 = \frac{2m_1 V}{m_1 + m_2} \cos \theta_2$.

При соотношении масс $m_1 > m_2$ перед корнем допустимы оба знака. При $m_1 < m_2$ (или при $m_1 = m_2$ и $\theta_1 \neq 0$) — только знак «+».

4.66. $\alpha_{\max} = \arcsin \frac{M_n}{M_p} = 14,5^\circ$.

4.68. $\frac{\Delta N_{\geq 60^\circ}}{N} = \frac{3}{4}$.

4.71. Если энергия электрона мала по сравнению с энергией покоя протона, то при столкновении электрон (как легкая частица) может потерять лишь малую долю своей первоначальной энергии. Отсюда следует, что рассматриваемый электрон должен быть ультрарелятивистским. Поскольку при лобовом столкновении с неподвижным протоном направление движения электрона меняется на противоположное, импульс протона после столкновения будет равен $3E/2c$, где E — искомая энергия электрона. Далее из закона сохранения энергии

$$\frac{E}{2} + Mc^2 = \sqrt{M^2 c^4 + \frac{9}{4} \cdot E^2} \quad \text{находим}$$

$$E = \frac{Mc^2}{2}.$$

Для точного решения задачи воспользуемся четырёхмерной формой записи законов сохранения: $p_e^i - \vec{p}_e^i + p_p^i = \vec{p}_p^i$, где знаком « \sim » отмечены значения 4-импульсов частиц после столкновения. Возведя в квадрат и для удобства полагая $c \equiv 1$, найдем

$$(E - \vec{E} + M)^2 - p^2 - \vec{p}^2 - M^2 = -2p\vec{p}.$$

Снова возведя обе части равенства в квадрат и выразив импульсы через энергии, получим

$$\left[(E - \vec{E} + M)^2 - E^2 - \vec{E}^2 - M^2 + 2m^2 \right]^2 = 4(E^2 - m^2) \cdot (E^2 - m^2).$$

Полагая $\vec{E} = E/2$, получим квадратное уравнение, решение которого дает

$$E = \frac{M^2 + m^2 + \sqrt{M^4 + 34 \cdot M^2 m^2 + m^4}}{4M} \approx \frac{Mc^2}{2} + \frac{9m^2}{2M} c^2 \approx 0,5 \text{ ГэВ}.$$

4.72. Пусть начальные энергии и импульс фотона E_γ и p_γ электрона — E и p . Центр инерции частиц движется со скоростью

$$V = c^2 \frac{|\vec{p} + \vec{P}_\gamma|}{E + E_\gamma} = c^2 \frac{\sqrt{E^2/c^2 - m^2 c^2 - E_\gamma/c}}{E + E_\gamma},$$

которая направлена вдоль скорости движения электрона. В системе центра инерции энергии фотона до столкновения $E'_\gamma = \gamma E_\gamma (1 + \beta)$, где релятивистские факторы γ , β определяются скоростью центра инерции V . Максимальную энергию фотон приобретет при лобовом столкновении с электроном. В системе центра инерции при лобовом столкновении частиц их импульсы меняют знак, а энергии не изменяются. Совершив обратный переход в Л-систему отсчета, найдем энергию фотона после лобового столкновения:

$$E''_\gamma = \gamma E'_\gamma (1 + \beta) = \gamma^2 E_\gamma (1 + \beta)^2 = E_\gamma \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Подставляя значение β и исходные данные, для максимальной энергии фотона после столкновения получим

$$E_{\text{max}} = E_\gamma \frac{E + \sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{E + 2E_\gamma - \sqrt{E^2 - m^2 c^4}} \approx \frac{E}{1 + m^2 c^4 / 4E_\gamma E} \approx 2,4 \cdot 10^9 \text{ эВ}.$$

При увеличении начальной энергии фотона доля энергии, передаваемой от электрона к фотону, возрастает. В частности, электрон остановится при энергии фотона

$$E_\gamma = \frac{m^2 c^2 + \sqrt{E^2 - m^2 c^4} - E}{2} \approx 260 \text{ кэВ}.$$

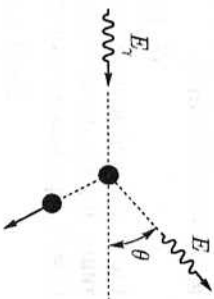
$$\mathbf{4.73.} \quad E = \frac{2mc^2}{q_1 \cdot \theta_2}, \quad E_1 = \frac{2mc^2}{(q_1 + \theta_2) \cdot q_1}, \quad E_2 = \frac{2mc^2}{(q_1 + \theta_2) \cdot \theta_2}.$$

4.74. Энергия фотона E после рассеяния выражается через его энергию до рассеяния E_γ и угол рассеяния θ (см. рисунок) в виде

$$E = E_\gamma \left[1 + \frac{E_\gamma}{mc^2} (1 - \cos \theta) \right]^{-1}.$$

Длина волны света при рассеянии увеличивается на $\Delta \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$, где $\frac{h}{mc} = 2,4 \times$

$\times 10^{-12}$ м — комптоновская длина волны электрона.



4.75. Пусть E_γ , T_e — энергии фотона и кинетическая энергия электрона до рассеяния. Энергия фотона, рассеянного на угол $\pi/2$, равна

$$E'_\gamma = E_\gamma \frac{m^2 c^2 + T_e + \sqrt{T_e^2 + 2m^2 c^2 T_e}}{m^2 c^2 + T_e + E_\gamma} \approx \begin{cases} 10 \text{ эВ} & \text{при } T_e = 100 \text{ эВ,} \\ 20 \text{ эВ} & \text{при } T_e = 10 \text{ ГэВ.} \end{cases}$$

4.76. Введем обозначения: $V = \beta c$ — скорость Ц-системы, p' , E' и θ' — модуль импульса, энергия и угол рассеяния протона в Ц-системе. Продольная и поперечная составляющие импульса протона в Л-системе после столкновения: $p_{\parallel} = \gamma (p' \cos \theta' + E' V / c^2)$, $p_{\perp} = p' \cdot \sin \theta'$. Тангенс угла отклонения протона в Л-системе

$$\text{tg } \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma (\cos \theta' + E' V / p' c^2)}.$$

Максимальный угол рассеяния θ_{\max} достигается при

$$\cos \theta_m = -\frac{p'c^2}{E'V}$$

Подставляя $p' = \gamma mV$, $E' = \sqrt{p'^2 c^2 + M^2 c^4}$ и $\frac{E'V}{p'c^2} = -\frac{1}{\cos \theta_m} = \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{M}{\gamma m}\right)^2}$,

для максимального угла рассеяния получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_{\max} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta_m} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{M^2}{m^2} - 1}} \quad \text{и} \\ \theta_{\max} &= \arcsin \frac{m}{M} \end{aligned}$$

Примечательно, что максимальный угол рассеяния тяжелой частицы на легкой не зависит от энергии налетающей частицы.

4.77. Сумма 4-векторов энергии-импульса частиц до и после столкновения не меняется:

$$(E, p) + (m, 0) = (E_1, p_1) + (E_2, p_2),$$

где E, p — энергия и импульс налетающей частицы, m — масса каждой частицы, E_1, E_2, p_1, p_2 — энергия и импульсы частиц после столкновения ($c \equiv 1$). При возведении этого равенства в квадрат получим

$$2m(E+m) = 2m^2 + 2(E_1 E_2 - p_1 p_2 \cdot \cos \theta),$$

где θ — угол разлета частиц. Отсюда находим

$$\cos \theta = \frac{E_1 E_2 - mE}{\sqrt{E_1^2 - m^2} \sqrt{E_2^2 - m^2}} \quad (1)$$

Полученная зависимость симметрична относительно перестановки E_1 и E_2 , поэтому при условии

$$E_1 + E_2 = E + m = \text{const}$$

одно из экстремальных значений $\cos \theta$ (и угла θ) будет достигаться при равенстве энергий $E_1 = E_2$, т. е. при симметричном разлете.

В данном случае угол симметричного разлета θ будет являться минимальным углом разлета частиц. Подставляя значения $E_1 = E_2 = (E + m)/2$ в выражение (1), найдем

$$\theta_{\min} = \arccos \frac{\gamma - 1}{\gamma + 3}$$

где $\gamma = E/m$ — релятивистский фактор налетающей частицы. Аналогичный результат можно получить из рассмотрения «эллипса» импульсов рассеянных частиц [3].

4.78. Запишем законы сохранения энергии и импульса в виде

$$E_1 + E_2 = E_0 = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2, \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_0 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2, \quad (1)$$

где $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ — энергии и импульсы фотонов после столкновения.

Из равенства

$$|\tilde{p}_1|c + |\tilde{p}_2|c = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 = E_0$$

следует, что в треугольнике, образованном векторами $\vec{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ (см. рисунок), сумма расстояний AC и BC равна постоянной величине $|\vec{p}_0|c$.

Таким образом, геометрическое место точек C при различных возможных значениях \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 будет образовывать эллипс с фокусами в точках A и B . На рисунке видно, что минимальная и максимальная энергии в спектре рассеянных фотонов реализуются при их разлете вдоль вектора p_0 , когда

$$\tilde{E}_{\max} - \tilde{E}_{\min} = p_0 c.$$

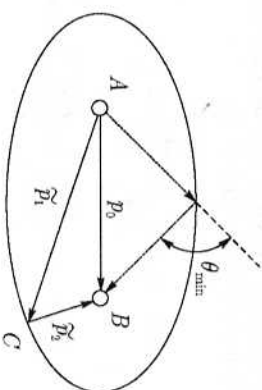
Учитывая (1), для энергий получим

$$E_{\min} = \frac{E_1 + E_2 - |\vec{p}_1 + \vec{p}_2|c}{2}, \quad E_{\max} = \frac{E_1 + E_2 + |\vec{p}_1 + \vec{p}_2|c}{2}.$$

Минимальный угол разлета фотонов θ_{\min} достигается при $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_2$ (см. рисунок) и равен

$$\theta_{\min} = 2 \arcsin \left(\frac{2\sqrt{E_1 E_2}}{E_1 + E_2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

где α — угол между векторами \vec{p}_1, \vec{p}_2 фотонов до столкновения.



5. ПРОСТЕЙШАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

5.1. Движение в магнитном поле. Сила Лоренца

5.1. Кинетическая энергия электрона $T_e \sim rc \sim 2 \cdot 10^8$ эВ, протона $T_p \approx r^2/2M \approx 2 \cdot 10^7$ эВ. Магнитное поле

$$B [T] = \frac{rc [MэВ]}{300 \cdot r [м]} = \frac{2}{3} T$$

(в скобках указаны соответствующие коэффициенту 300 единицы измерения величины B, rc и r).

$$5.7. \quad V_T = \frac{c}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{M_T^2}} \approx \frac{c}{2}$$

$$5.10. \quad z \approx 4 \frac{\Delta E}{eVc} \left(1 + \frac{m^2 c^4}{2E^2}\right) \approx 0,6 \text{ м, где } \Delta E = 0,02 E.$$

5.12. Импульс мюонов $p = eVR = 3 \frac{\text{ГэВ}}{c}$, релятивистский фактор $\gamma \approx$

≈ 30 . Время жизни движущихся мюонов в γ раз больше, чем покоящихся. Из уравнения

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{J}{\gamma\tau}$$

найдем зависимость тока мюонов от времени $J = J_0 \exp(-t/\gamma\tau)$.

Ток уменьшится в $20 \sim e^3$ раз за время

$$T = \gamma\tau \ln 20 \approx 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

5.13. Период обращения электрона в однородном магнитном поле $T = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\gamma m}{qB}$. После каждого прохождения ускоряющего промежутка энергия

электрона увеличивается на величину $m_e^2 c^2$, при этом период обращения электрона возрастает на $2\pi m/qB$. После очередного оборота электроны будут возвращаться в ускоряющий промежуток микрофона к одной и той же фазе ускоряющего электрического поля, если последнее меняется с частотой $f = \frac{qB}{2\pi m} \approx 5,6 \cdot 10^{10}$ Гц. При ускорении электрона до

5. Простейшая релятивистская динамика

энергии 511 МэВ электрон совершит 998 оборотов и время ускорения будет

$$T = \frac{2\pi m}{qB} (2 + 3 + \dots + 999) \approx \frac{\pi m}{qB} \cdot 10^6 \approx 8,9 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

$$5.14. \quad r_{\max} = 0,17 \text{ м, } \frac{r_{\max}}{r_{\min}} \approx 57.$$

5.16. Для указанных условий возможные соотношения масс

$$\frac{M_K}{M_\mu} \approx 4,7 \quad \text{и} \quad \frac{M_K}{M_\mu} \approx 1,3.$$

Второй результат не соответствует реальным массам частиц.

5.17. Считаем, что распадается частица движется вдоль отрезка AC , а импульсы образовавшихся частиц \vec{p}_1 и \vec{p}_2 составляют углы α и β с отрезком AC (см. рисунок). После поворота в магнитном поле на угол α и β импульсы обеих частиц будут параллельны отрезку AC . Радиусы поворота частиц равны $R_1 = p_1/eB$ и $R_2 = p_2/eB$. Точки пересечения C' и C'' треков образовавшихся частиц с линией движения Δ° -гиперона удалены от точки распада на расстояния

$$|AC'| = 2R_1 \sin \alpha \quad \text{и} \quad |AC''| = 2R_2 \sin \beta.$$

Так как $p_1 \sin \alpha = p_2 \sin \beta$, то $|AC'| = |AC''|$ и точка пересечения треков $C' = C''$ также лежит на линии движения Δ° -гиперона.

Поперечная к скорости Δ° -гиперона компонента импульса частицы $p_\perp = p_1 \sin \alpha = p_2 \sin \beta$ не меняется при переходе из Л-системы в Ц-систему. Ее максимальная величина равна импульсу каждой из частиц в Ц-системе p_0 , который определяем из закона сохранения энергии при распадае Δ° -гиперона: $M_\Delta = \sqrt{m_p^2 + p_0^2} + \sqrt{m_\pi^2 + p_0^2}$ (здесь $c \equiv 1$). Окончательно для максимального расстояния AC получим

$$L = \frac{M_\Delta c^2}{eB} \sqrt{\left(1 - \frac{(M_p + M_\pi)^2}{M_\Delta^2}\right) \left(1 - \frac{(M_p - M_\pi)^2}{M_\Delta^2}\right)} = \frac{1}{3} \text{ м.}$$

5.18. Изменение энергии частицы описывается уравнением

$$\frac{dE}{dt} = F_{тр} \cdot v = -\alpha \cdot v^2 = \alpha \cdot c^2 \frac{m^2 c^4 - E^2}{E^2}. \quad (1)$$

Разделяя переменные, получим время торможения от энергии E_0 до E_1 :

$$t = \frac{1}{\alpha c^2} \int_{E_0}^{E_1} \frac{E^2}{m^2 c^4 - E^2} dE = \frac{E_0 - E_1}{\alpha c^2} + \frac{m}{2\alpha} \ln \frac{(E_1 + mc^2)(E_0 - mc^2)}{(E_0 + mc^2)(E_1 - mc^2)}.$$

Следовательно, энергия частицы уменьшится с $3mc^2$ до $2mc^2$ за время

$$T = \frac{m}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \right) \approx 1,2 \frac{m}{\alpha}.$$

Поделив обе части уравнения (1) на циклотронную частоту $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{qB}{E} c^2$, получим уравнение

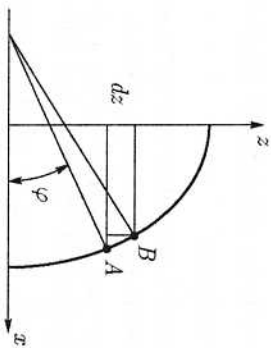
$$\frac{dE}{d\varphi} = \left(\frac{\alpha}{qB} \right) \frac{m^2 c^4 - E^2}{E},$$

решение которого имеет вид

$$\ln \frac{E_0^2 - m^2 c^4}{E^2 - m^2 c^4} = \frac{2\alpha}{qB} \cdot (\varphi - \varphi_0).$$

Из него следует, что частица при торможении до энергии $2mc^2$ совершит

$$N = \frac{qB}{4\pi\alpha} \ln \frac{8}{3} \text{ оборотов.}$$



в точке A (φ — релятивистский фактор электрона, который не изменяется). Интегрируя уравнение

$$\frac{e}{\gamma m V} B_0 \left(1 + \frac{z}{a} \right) dz = \cos \varphi \cdot d\varphi,$$

5. Простейшая релятивистская динамика

найдем связь между φ и z-координатой электрона. В точке поворота $\varphi = \frac{\pi}{2}$, и

$$B_0 \left(1 + \frac{z_{\max}}{a} \right) = V_0 \sqrt{\frac{2\gamma m V}{e B_0 a} + 1}.$$

Отсюда находим минимальный радиус кривизны:

$$R_{\min} = \frac{\gamma m V}{e V_0} \left(\frac{2\gamma m V}{e B_0 a} + 1 \right)^{-1/2}.$$

5.2. Движение в электрическом поле. Релятивистская ракета

5.22. Импульс электрона определяется уравнением $\frac{dp}{dt} = -q\mathcal{E}$. Отсюда $p = R_0 - q\mathcal{E}t$, и полное время движения электрона в поле будет равно $t = \frac{2\gamma m V}{q\mathcal{E}}$. Приравняв работу электрического поля изменению кинетической энергии электрона, найдем полный путь, пройденный электроном:

$$L = \frac{2(\gamma - 1)mc^2}{q\mathcal{E}}.$$

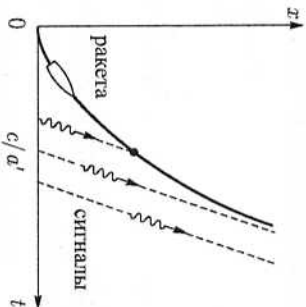
5.24. Ракета, движущаяся с ускорением a' в сопутствующей системе отсчета, в Л-системе за время t пройдет путь

$$L = \frac{c^2}{a'} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{a't}{c} \right)^2} - 1 \right].$$

Сигнал, посланный через время T , пройдет расстояние $x = c(t - T)$ и догонит ракету за время

$$t - T = T \frac{a'T}{2(c - a'T)}.$$

Сигналы, посланные с задержкой $T \geq c/a'$, не смогут догнать ракету (см. рисунок).



5.27. Движение мюона в продольном однородном электрическом поле осуществляется с постоянным ускорением $a' = e\mathcal{E}/m$ относительно

сопутствующей мноюу системы отсчета. За время $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ с в сопутствующей системе отсчета мноюу ускорится до энергии

$$E = mc^2 \frac{d\tau}{c} = 5,7 \cdot 10^{33} \text{ эВ.}$$

Положим, что в Л-системе ускоритель имеет длину L и состоит из элементарных участков длиной dl каждый. В сопутствующей мноюу системе отсчета движущийся навстречу элементарный участок ускорителя имеет длину $dl' = dl/\gamma$, а полная длина ускорителя, измеренная из сопутствующих мноюу систем отсчета, будет равна

$$\int dl' = \int \frac{V dt}{\gamma} = c \int_0^{\tau} \ln \left(\frac{d\tau'}{c} \right) dt' = \frac{c^2}{a} \ln \left[\frac{d\tau}{c} \right] = c\tau - \frac{c^2}{a} \ln 2 = 593 \text{ м.}$$

$$5.28. L = \frac{\sqrt{(M_p + m_e + 2M_\pi)^2 + (e\mathcal{E}T/c)^2} - M_p - m_e}{e\mathcal{E}} c^2 = \begin{cases} 28 \text{ м} & \text{при } T = 0, \\ 31,6 \text{ м} & \text{при } T = 10^{-7} \text{ с.} \end{cases}$$

$$5.29. \omega_1 = \omega_0 \left(1 + \frac{dg}{c^2} \right) \approx \frac{3}{2} \omega_0, \quad \omega_2 = \omega_0 \left(1 - \frac{dg}{c^2} \right) \approx \frac{1}{2} \omega_0.$$

5.30. Компоненты импульса частицы меняются в соответствии с уравнениями $\frac{dp_\perp}{dt} = F$, $\frac{dp_\parallel}{dt} = 0$. Отсюда $p_\perp = Ft$, $p_\parallel = P_0 = \gamma_0 m V_0$. Энергия частицы изменяется по закону $E = \sqrt{E_0^2 + F^2 t^2 c^2}$, где $E_0 = \gamma_0 m c^2$. Компоненты скорости частицы будут равны

$$V_\perp = \frac{P_\perp}{E} c^2 = c^2 \frac{F \cdot t}{\sqrt{E_0^2 + (Ft/c)^2}} \rightarrow c, \\ V_\parallel = \frac{P_\parallel}{E} c^2 = c \frac{V_0}{\sqrt{1 + (Ft/\gamma_0 m c)^2}} \rightarrow 0.$$

Поперечная компонента скорости частицы возрастает, а продольная компонента уменьшается, несмотря на отсутствие продольной силы.

5.31. В точке поворота у электрона остается только продольная компонента импульса, а энергия равна

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \left[(mc^2 + T)^2 - m^2 c^4 \right] \cos^2 \alpha}.$$

Соответственно скорость и высота траектории будут

$$V = c^2 \frac{P}{E} = c \frac{\sqrt{(mc^2 + T)^2 - m^2 c^4}}{\sqrt{(mc^2 + T)^2 + m^2 c^4 \lg^2 \alpha}} \approx 0,89c,$$

$$H = \frac{(mc^2 + T) - E}{e\mathcal{E}} = 0,38 \text{ м.}$$

Расстояние от точки влета до влета $L = \frac{2P_{0x} c}{e\mathcal{E}} \operatorname{arcsinh} \frac{P_{0y}}{\sqrt{(mc)^2 + P_{0x}^2}} = 1,8 \text{ м.}$

Время пролета через конденсатор $T = \frac{2P_{0y}}{e\mathcal{E}} = 6,7 \cdot 10^{-9} \text{ с.}$

5.32. Положим, что электрическое поле \mathcal{E} направлено вдоль оси y , а частицы влетают в конденсатор вдоль оси x . Поперечный импульс, приобретенный частицей за время пролета τ через конденсатор, равен $P_y = q\mathcal{E}\tau$. Продольная скорость релятивистской частицы определяется выражением

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P_x c^2}{E} = \frac{P_0 c^2}{\sqrt{E_0^2 + (q\mathcal{E}ct)^2}},$$

где E_0, P_0 — ее начальные энергия и импульс. Интегрируя это уравнение, найдем время пролета через конденсатор

$$\tau = \frac{E_0}{q\mathcal{E}c} \operatorname{sh} \left(\frac{q\mathcal{E}L}{P_0 c} \right),$$

где L — размер конденсатора вдоль оси x .

Для угла θ отклонения частицы в поперечном электрическом поле найдем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{E_0}{P_0 c} \operatorname{sh} \left(\frac{q\mathcal{E}L}{P_0 c} \right). \quad (1)$$

У протона с кинетической энергией $T = 1$ МэВ начальная энергия $E_0 \gg P_0 c = 43,3$ МэВ, при этом $\frac{P_0 c}{E_0} \operatorname{tg} \theta \ll 1$, и можно считать, что

$$\operatorname{sh} \frac{q\mathcal{E}L}{P_0 c} \approx \frac{q\mathcal{E}L}{P_0 c}.$$

Отсюда найдем величину

$$q\mathcal{E}L \approx \frac{(P_0 c)^2}{E_0} \operatorname{tg} \theta, \quad \operatorname{tg} \theta_p \approx 2\Gamma \cdot \operatorname{tg} \theta_e \approx 0,2 \text{ МэВ.}$$

(Аналогичный результат можно получить из релятивистского расширения, при котором $\lg \theta = \frac{q\mathcal{E} \cdot L/V_0}{P_0} = \frac{q\mathcal{E}L}{2I}$.)

Электрон с начальной кинетической энергией 1 МэВ ($P_0 \approx 1,4$ МэВ) при пролете такого конденсатора, в соответствии с выражением (1), отклонится на угол $\theta \approx 0,15$ рад. Заметим, что для электрона с кинетической энергией 1 МэВ соотношение $\frac{q\mathcal{E}L}{P_0} = 0,15$ также имеет малую величину, и из выражения (1) следует, что $\lg \theta \approx \frac{q\mathcal{E} \cdot L/V_0}{P_0}$. Последнее означает, что при определении угла отклонения электрона его продольную скорость тоже можно было считать постоянной.

Если же величина $P_0 c$ порядка $q\mathcal{E}L$, то ускорение поперечным путем существенно влияет на величину продольной скорости частицы, и ее угол отклонения определяется точной формулой (1).

5.34. При $\mu = \lg \alpha$ скатывающая сила $F_{\text{ск}} = P \sin \alpha$ и сила трения $F_{\text{тр}} = \mu P \cos \alpha$ равны (здесь P — вес монеты). Полагая $F_{\text{ск}} = F_{\text{тр}} = F$, запишем закон изменения компоненты импульса монеты P_x в направлении скатывающей силы и закон изменения модуля импульса $|p|$:

$$\frac{dP_x}{dt} = F - F \cos \theta \quad \text{и} \quad \frac{d|p|}{dt} = F \cos \theta - F,$$

где θ — угол между векторами скатывающей силы и силы трения. Отсюда видно, что

$$\frac{d(|p| + P_x)}{dt} = 0,$$

т. е. величина $|p| + P_x$ является инвариантом. Начальное значение инварианта $|p| = \gamma_v m v$, при установившейся скорости монеты и инвариант равен

$$|p| + P_x = 2P_x = 2\gamma_u m v.$$

Отсюда

$$u = v \left(4 - 3 \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

В частности, в нерелятивистском случае $u = \frac{v}{2}$.

5.35. Энергия E и импульс p идеального зеркала, ускоряемого лучом света частотой ν_1 , изменяются по уравнениям

$$\frac{dE}{dt} = S n (c - V) h (\nu_1 - \nu_2) \quad \text{и} \quad \frac{dp}{dt} = S n (c - V) h (\nu_1 + \nu_2),$$

где S — сечение луча, n — плотность фотонов, ν_2 — частота отраженного излучения, V — скорость зеркала. Складывая эти уравнения, получим

$$\frac{d}{dt} (E + pc) = 2N \left(1 - \frac{V}{c} \right),$$

здесь $N = S n h \nu_1 c$ — мощность лазера.

Выражая энергию и импульс зеркала через его скорость, получим уравнение для β зеркала:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta}} \right) = \frac{2N}{Mc^2} (1 - \beta).$$

Заменой $\xi = \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta}}$ оно сведется к более простому уравнению. Интегрируя которое получаем соотношение

$$\xi + \frac{\xi^3}{3} = \frac{4Nt}{Mc^2} + \frac{4}{3}.$$

При $V = 0,8 c$ (т. е. $\xi = 3$) для мощности лазера получим значение

$$N = \frac{8Mc^2}{3T} = 8 \cdot 10^9 \text{ Вт}.$$

5.36. Поперечное ускорение в Л-системе в γ^2 меньше, чем в сопутствующей системе, т. е.

$$a_{\perp} = \frac{V^2}{R \gamma^2} = \frac{g}{\gamma^2}.$$

Отсюда находим $R = \frac{\gamma^2 V^2}{g}$ и время полного оборота в Л-системе

$$t = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi \gamma^2 V}{g}.$$

В сопутствующей СО время оборота будет

$$t' = \frac{2\pi \gamma V}{g} = 4,8 \text{ года}.$$

5.37. Угол поворота электрона в магнитном поле описывается выра-

$$\text{жением } d\varphi = \frac{eB}{\gamma m} dt, \text{ где релятивистский фактор } \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{P_0}{mc}\right)^2 + \left(\frac{eEt}{mc}\right)^2}$$

определяется ускорением электрона в электрическом поле. Интегрируя, получим для угла поворота $\varphi = \frac{Bc}{E} \operatorname{arsh} \frac{eEt}{\sqrt{(mc)^2 + P_0^2}}$, т. е. $(N+1)$ -й оборот электрон совершает за время

$$T_{N+1} = \frac{\sqrt{(mc)^2 + P_0^2}}{eE} \left[\operatorname{sh} \frac{2\pi eE(N+1)}{Bc} - \operatorname{sh} \frac{2\pi eEN}{Bc} \right].$$

Искомое соотношение периодов равно

$$\frac{T_{N+1}}{T_N} = \frac{ch \frac{\pi eE}{Bc} (2N+1)}{ch \frac{\pi eE}{Bc} (2N-1)} = \begin{cases} 1 + 8N\pi^2 \frac{E^2}{B^2 c^2} & \text{при } N \ll \frac{Bc}{E}; \\ \exp\left(2\pi \frac{E}{Bc}\right) & \text{при } N \gg \frac{Bc}{E}. \end{cases}$$

5.38. $F = 0, \Delta p = -\frac{VN}{c^2}l, V = \text{const}$

5.39. а) $\frac{I_m}{I_M} \sim \left(\frac{M}{m}\right)^2$; б) $\frac{I_m}{I_M} \sim \left(\frac{M}{m}\right)^4$.

5.40. Из закона сохранения импульса следует, что импульс ракеты p равен суммарному импульсу испущенных при полете фотонов $p = \sum E_{\gamma}/c$. Энергия ракеты E и суммарная энергия фотонов $\sum E_{\gamma}$ связаны законом сохранения энергии $E + \sum E_{\gamma} = M_0 c^2$, где M_0 — начальная масса ракеты. Поскольку для ракеты массой M выполняется соотношение

$$E^2 - p^2 c^2 = E^2 - (\sum E_{\gamma})^2 = M^2 c^4,$$

то можно найти значения p, E и скорости ракеты:

$$V = c \frac{\sum E_{\gamma}}{E} = c \cdot \frac{M_0^2 - M^2}{M_0^2 + M^2} = 0,6 c.$$

5.41. Будет израсходована

$$\frac{M_1 - M_2}{M_1} \approx 0,69 \text{ часть топлива.}$$

где M_1 — масса ракеты при скорости $V_1 = 0,9c$, а $M_2 = M_1 \times \sqrt{\frac{c-V_2}{c+V_2} \cdot \frac{c+V_1}{c-V_1}}$ — масса ракеты при скорости $V_2 = 0,99c$.

5.42. При движении с постоянным ускорением a' в сопутствующей СО скорость ракеты относительно Л-системы и пройденный ею путь равны соответственно

$$V = \frac{a'l}{\sqrt{1 + (a'l/c)^2}} \text{ и } L = \frac{c^2}{a'} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{a'l}{c}\right)^2} - 1 \right],$$

где l — время движения в Л-системе. Отсюда

$$\frac{V}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left[1 + (a'l/c^2)\right]^2}}.$$

При ускорении $a' = 1$ св. год/год² на участке $L = 5$ св. лет ракета достигнет скорости

$$V_{\text{max}} = c \sqrt{\frac{35}{36}}.$$

Масса ракеты M , ускоренной до скорости $V_{\text{max}} = \beta_{\text{max}} c$, связана с начальной массой ракеты M_0 соотношением

$$\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1 - \beta_{\text{max}}}{1 + \beta_{\text{max}}} \right)^{c/2a'}$$

где a' — скорость истечения газов относительно ракеты.

Процесс торможения удобно рассматривать в СО, движущейся со скоростью V_{max} , относительно которой ракета должна ускориться из состояния покоя до скорости V_{max} . После такого торможения масса ракеты

$$\text{будет в } \left(\frac{1 - \beta_{\text{max}}}{1 + \beta_{\text{max}}} \right)^{c/2a'}$$

раз меньше, чем была до торможения. Масса ракеты в конце пути составит

$$M_k = M_0 \left(\frac{1 - \beta_{\text{max}}}{1 + \beta_{\text{max}}} \right)^{c/4a'}$$

при этом потребуется горючего:

$$M_0 - M_k = M_k \left[\frac{1 + \beta_{\max}}{1 - \beta_{\max}} \right]^{c/u} - 1 \approx M_k (142^{c/u} - 1).$$

Для фотонной ракеты расход горючего:

$$M_0 - M_k = M_k \cdot 141,$$

для ракеты с химическим топливом ($u \approx 3 \cdot 10^3$ м/с):

$$M_0 - M_k = M_k \left(\frac{1 + \beta_{\max}}{1 - \beta_{\max}} \right)^{10^9} \approx M_k \cdot 10^{215000}!$$

6. ДИНАМИКА ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

6.1. Законы движения. Фазовая плоскость

6.1. $U = U_0$ при $a > x > 0$, $U > U_0 + 2m \left(\frac{a}{T} \right)^2$ при $x = 0$, a .

6.2. $U = U_0 + 2mbx$ при $a > x > 0$,
 $U > U_0 + 2mba$ при $x = 0$.

6.4. $U = k \frac{x^2}{2} + U_0$, $k = m\omega^2$, где m — масса частицы.

6.5. $F = \begin{cases} m(x - 2a) & \text{при } a \geq x > 0; \\ m(x + 2a) & \text{при } -a \leq x < 0. \end{cases}$

6.6. $x = \frac{X_0}{1 \pm X_0 t \sqrt{2\alpha/m}}$.

6.8. В верхней части рисунков a, b, c и d приведены графики заданных потенциалов и показаны отдельные характерные уровни полной энергии частицы E_1, E_2, E_3, E_4 , в нижней части каждого рисунка — фазовые траектории частиц, соответствующие этим уровням полной энергии частицы. Стрелками показано направление движения частицы по фазовой траектории.

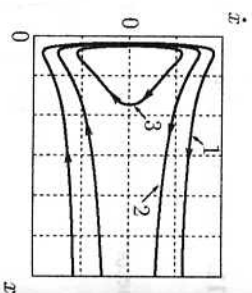
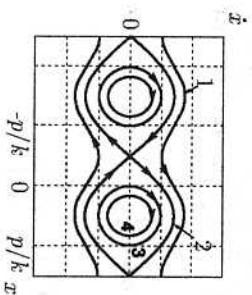
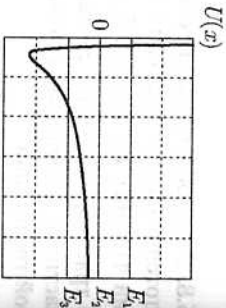
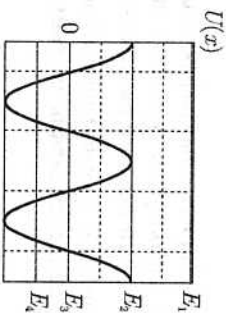
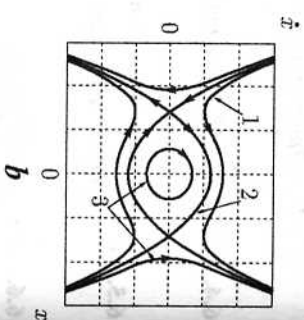
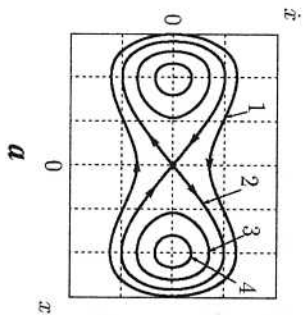
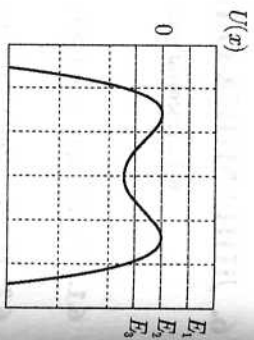
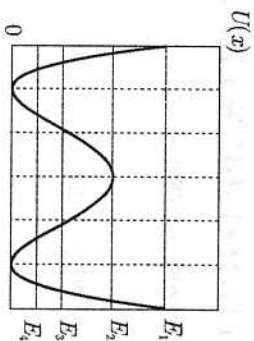
6.11. Период движения $T = 4 \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{V} = 4 \int_0^{(E/\alpha)^{1/\beta}} \left[\frac{2}{m} (E - \alpha x^\beta) \right]^{-1/2} dx$.

Произведя замену переменной $Y = x/E^{1/\beta}$, преобразуем интеграл к виду

$$T = \frac{E^{1/\beta}}{E^{1/2}} \left\{ 4 \int_0^{(1/\alpha)^{1/\beta}} \left[\frac{2}{m} (1 - \alpha Y^\beta) \right]^{-1/2} dY \right\}.$$

Определенный интеграл в скобках не зависит от E , т. е. зависимость периода движения от энергии определяется предельноинтегральным множителем

$$T \sim E^{\beta/2}.$$



6.12. $U = kx^{\beta-1}$ при $x \geq 0$.

6.13. Считаем, что потенциал взаимодействия шаров изменяется по закону $U = \alpha x^\beta$. Время движения от момента соприкосновения шаров до их останова в таком поле будет равно четверти периода колебаний час-тики в поле с потенциалом $U = \alpha|x|^\beta$. Поскольку период колебаний в таком поле зависит от полной энергии как

$$T \sim E^{\frac{1}{\beta-1}} \sim V^{\frac{2}{\beta-1}}$$

(см. задачу 6.11), то $\beta = \frac{5}{2}$, а зависимость силы сопротивления от деформации имеет вид

$$F \sim x^{3/2}.$$

6.14. $T = \begin{cases} 4\sqrt{m/k} \arcsin \sqrt{ka^2/2E} & \text{при } E \geq ka^2/2, \\ 2\pi\sqrt{m/k} & \text{при } E \leq ka^2/2. \end{cases}$

6.15. $T \sim \ln \left[\frac{-U'(a)}{U(a)-E} \right].$
 $T \sim \sqrt{\frac{m}{-U''(a)}} \ln \left[\frac{-a^2 U''(a)}{U(a)-E} \right].$

6.2. Движение с трением

6.17. $t_{1/2} = \frac{m}{\alpha N_0}, \quad S_{1/2} = \frac{m}{\alpha} \ln 2.$

6.19. Уравнение движения при падении $m\dot{V} = mg - \alpha V^2$. Введем обозначение $V_{mp}^2 = \frac{mg}{\alpha}$ и разделим переменные:

$$\frac{dV}{V^2 - V_{mp}^2} = \frac{\alpha}{m} dt.$$

Интегрируя с учетом начальных условий, получим скорость и длину пути при падении:

$$V = V_{mp} \cdot th \frac{gt}{V_{mp}}, \quad H = \int_0^t V dt = \frac{V_{mp}^2}{g} \ln ch \frac{gt}{V_{mp}}.$$

К задаче 6.8.

6.20. Уравнение движения при подъеме $m\dot{V} = -mg - \alpha V^2$. Введя обозначение $V^2 = \frac{mg}{\alpha}$, из уравнения

$$\frac{dV}{V^2 + V^2} = -\frac{\alpha}{m} dt$$

с учетом начальных условий получим скорость подъема

$$\frac{V}{V_{\text{mp}}} = \text{tg} \left[\arctg \frac{V_0}{V_{\text{mp}}} - \frac{gt}{V_{\text{mp}}} \right].$$

Время и высота подъема будут равны соответственно

$$t_n = \frac{V_{\text{mp}}}{g} \arctg \frac{V_0}{V_{\text{mp}}}, \quad H = \int_0^{t_n} V dt = \frac{V_{\text{mp}}^2}{2g} \ln \left(1 + \frac{V_0^2}{V_{\text{mp}}^2} \right).$$

6.21. $V = V_{\text{max}} \sqrt{1 - \exp \left(-\frac{2gH}{V_{\text{max}}^2} \right)}$.

6.22. При начальной скорости V_0 тело поднимется на высоту

$$H_1 = \frac{V_{\text{mp}}^2}{2g} \ln \left(1 + \frac{V_0^2}{V_{\text{mp}}^2} \right),$$

где $V_{\text{mp}}^2 = \frac{mg}{\alpha}$ (см. задачу 6.20). При спуске скорость тела растет как

$$H_1 = \frac{V_{\text{mp}}^2}{g} \ln ch \frac{gt}{V_{\text{mp}}} = -\frac{V_{\text{mp}}^2}{2g} \ln \left(1 - \frac{V^2}{V_{\text{mp}}^2} \right).$$

$V = V_{\text{mp}} \cdot \ln \frac{gt}{V_{\text{mp}}}$, а пройденный путь связан с набранной скоростью соотношением

$$1 - \left(\frac{V_1}{V_{\text{mp}}} \right)^2 = \frac{1}{1 + \left(V_0/V_{\text{mp}} \right)^2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_0^2} + \frac{1}{V_{\text{mp}}^2}.$$

Для скорости тела в конце первого спуска V_1 получим

Скорость в конце N -го спуска V_N и высота последующего подскока H_{N+1} будут соответственно равны

$$V_N = V_{\text{mp}} \frac{1}{\sqrt{N + \left(V_0^2/V_{\text{mp}}^2 \right)}}, \quad H_{N+1} = \frac{V_{\text{mp}}^2}{2g} \ln \left[1 + \frac{1}{N + \left(V_{\text{mp}}/V_0 \right)^2} \right].$$

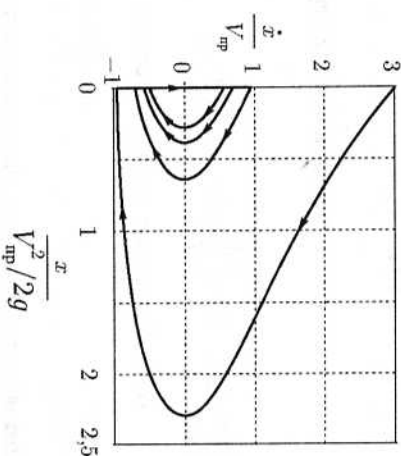
Аналогично найдем время N -го подъема \tilde{t}_N и последующего спуска \tilde{t}_{N+1} :

$$\tilde{t}_N = \frac{V_{\text{mp}}}{g} \arctg \sqrt{\frac{1}{(N-1) + \left(V_0^2/V_{\text{mp}}^2 \right)}}, \quad \tilde{t}_{N+1} = \frac{V_{\text{mp}}}{g} \text{ar} \text{th} \sqrt{\frac{1}{N + \left(V_0^2/V_{\text{mp}}^2 \right)}}.$$

При $N \gg \frac{V_{\text{mp}}^2}{V_0^2}$ высота и время подскока уменьшаются как

$$H_{N+1} \approx \frac{V_{\text{mp}}^2/2g}{N} \quad \text{и} \quad \tilde{t}_{N+1} \approx \frac{V_{\text{mp}}/g}{\sqrt{N}}.$$

Фазовая траектория первых четырех подскоков мячика, подброшенного с начальной скоростью $V_0 = 3V_{\text{mp}}$, показана на рисунке в приведенных координатах



так $\left(\frac{\dot{x}}{V_{\text{mp}}}, \frac{x}{V_{\text{mp}}^2/2g} \right)$.

6.24. Уравнение движения кальмара $m\dot{V} = -\alpha V + \mu(u - V)$.

Здесь учтено, что в единицу времени кальмар захватывает движущуюся навстречу порцию воды величиной $\mu = 2N/u^2$, а затем отбрасывает ее назад. Введя обозначение $V_{\text{mp}} = \frac{\mu u}{\alpha + \mu}$, запишем уравнение в виде

$$\frac{dV}{V - V_{\text{mp}}} = -\frac{\alpha + \mu}{m} dt.$$

Это решение

$$V = V_{\text{mp}} \left(1 - e^{-\frac{\alpha + \mu}{m} t} \right) = u \frac{\mu}{\alpha + \mu} \left(1 - e^{-\frac{\alpha + \mu}{m} t} \right).$$

6.25. $T = \frac{m}{\alpha} \ln \frac{mg + \alpha V_1}{mg - \alpha V_2} \approx \frac{V_1 + V_2}{g} \left[1 - \frac{\alpha(V_1 - V_2)}{2mg} \right]$.

6.26.
$$V_{\min} = \frac{V \cos \theta}{1 + \frac{\alpha V}{mg} \sin \theta}.$$

6.27.
$$S = \frac{R}{2\mu} \ln \left[\frac{V^2}{gR} + \sqrt{1 + \left(\frac{V^2}{gR} \right)^2} \right].$$

6.29.
$$T = \frac{\mu}{V(V-\mu)} \cdot \frac{2M}{\pi D^2}.$$

6.3. Движение с переменной массой

6.33. $F = \frac{3M}{2L} g^2 t^2, F_{\max} = 3Mg.$

6.34. Уравнение движения веревки $\rho L \ddot{x} = \rho g x$, т. е.

$$\ddot{x} - \frac{g}{L} x = 0.$$

Его общее решение удобно представить в виде $x = A \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\frac{g}{L}} t + B \cdot \operatorname{ch} \sqrt{\frac{g}{L}} t$.

Подставляя начальные условия, найдем $x = \frac{L}{4} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{g}{L}} t$ и время соскаль-

зывания

$$T = \sqrt{\frac{L}{g}} \operatorname{arsh} 4 \approx 2 \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

6.35. $V_{\max} = \sqrt{2gL(1 + \ln 2)}.$

6.36. $x = \frac{gt^2}{6}.$

6.37. $V = \sqrt{gH} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{g}{H}} \right), T = \sqrt{\frac{H}{g}} \operatorname{arsh} (e^2) \approx 2,7 \sqrt{\frac{H}{g}}.$

6.38. $\mu = \frac{M_0 g}{u} \exp \left(-\frac{gt}{u} \right)$, где u — скорость истечения газов.

6.39. $N \geq \frac{Mg\mu}{2} = 10^{10} \text{ Вт}.$

6.40. $t_{1/2} = \frac{\mu}{a+g} \ln 2.$

6.41. $L = \left(1 - \frac{2}{e} \right) \frac{\mu M_0}{\mu}.$

6.42. Уравнение движения $m\dot{V} = F - mg$, где m — суммарная масса поршня и воды в трубке. Интегрируя с заменой $dt = -\frac{L}{MV} dM$, найдем

$$V = \sqrt{2L \left(\frac{F}{M} \ln 2 - g \right)}.$$

6.43. Считаем, что масса капли по мере движения через стоящий туман возрастает пропорционально ее площади S , скорости движения V и плотности ρ_T тумана:

$$\dot{M} = \rho_T S V = \alpha M^{2/3} V.$$

Отсюда получим, что масса капли растет как $M^{1/3} = \frac{\alpha}{3} x$, где x —

пройденный каплей путь. Уравнение движения капли $M\dot{V} + \dot{M}V = Mg$

запишется в виде

$$\dot{x} + \frac{3x^2}{x} = g.$$

Его решение при начальных условиях $x_0 = V_0 = 0$ будет

$$x = \frac{gt^2}{14}.$$

6.44. Если скорость молекул много больше скорости капли, то можно считать, что масса последней возрастает пропорционально ее площади S и плотности пара ρ_n и не зависит от скорости капли:

$$\dot{M} = k \rho_n S = \alpha \cdot M^{2/3}.$$

Отсюда найдем, что при $M_0 = 0$ масса капли растет как $M = (\alpha t/3)^3$.

Сила трения, обусловленная столкновениями молекул пара с каплей, увеличивается пропорционально площади капли и ее скорости V :

$$F_{\text{тр}} = -\beta S V = -\gamma M V,$$

где $\gamma = \beta/k\rho_n$. Следовательно, уравнение движения капли запишется в виде $\frac{d}{dt} MV = Mg - \gamma MV$. Подставляя $V = \dot{x}$ и $M = (\alpha t/3)^3$, преобразуем уравнение к виду $\frac{d}{dt}(x\dot{x}^3) = g t^3 - 3\gamma t^2 \dot{x}$ или

$$\ddot{x} + \frac{3(1+\gamma)}{t} \dot{x} = g.$$

Его решением при начальных условиях $x_0 = V_0 = 0$ будет зависимость

$$x = \frac{gt^2}{2(4+3\gamma)}.$$

В частности, в одномерном случае, когда быстрые молекулы летят навстречу или догоняют каплю, $\gamma = \beta/k\rho_n = 2$, и капля будет падать по закону

$$x = \frac{gt^2}{20}.$$

6.45. В СО метеорита при симметричном испарении последний остается неподвижным, и относительно Л-системы его скорость не меняется. В этом случае для описания торможения основной части метеорита можно использовать уравнение

$$M \frac{dV}{dt} = F_{\text{тр}}$$

(вместо уравнения $\frac{dp}{dt} = F_{\text{тр}}$, описывающего поведение всей системы).

Используя $F_{\text{тр}} = -\alpha SV = -\frac{\alpha}{\beta} MV$, получим уравнение

$$MV = -\frac{\alpha}{\beta} MV,$$

решением которого будет

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{M}{M_0} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Изменение массы метеорита определяется уравнением

$$\dot{M} = \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{4\pi}{3} R^3 \right) = -\beta \cdot 4\pi R^2$$

(здесь ρ — плотность метеорита). Отсюда находим зависимость радиуса и массы метеорита от времени:

$$R = R_0 - \frac{\beta t}{\rho}, \quad M = \rho \frac{4\pi}{3} \left(R_0 - \frac{\beta t}{\rho} \right)^3.$$

Следовательно, скорость метеорита уменьшается по закону

$$V = V_0 \left(\frac{M}{M_0} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} = V_0 \left(1 - \frac{\beta}{\rho R_0} t \right)^{\frac{3\alpha}{\beta}}.$$

$$6.46. \quad V = \sqrt{gL} \left(\frac{M + l_0}{m} + \frac{l_0}{L} \right) \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t \right).$$

6.47. Пусть вытягиваемый конец нити переместился на расстояние x . Длина движущейся части нити равна $\frac{L+x}{2}$, а ее ускорение описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} \lambda(L+x)\dot{x} = F,$$

где λ — линейная плотность нити. Интегрируя, найдем

$$(L+x)\dot{x} = \frac{2F}{\lambda} t \quad \text{и} \quad Lx + \frac{x^2}{2} = \frac{2F}{\lambda} t^2.$$

Закон движения конца нити имеет вид $x = \sqrt{L^2 + \frac{2F}{\lambda} t^2} - L$. Через время

$$T = L \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\lambda}{F}$$

нить выпрямится полностью, при этом ее скорость будет

$$V = \sqrt{\frac{3F}{2\lambda}}.$$

6.48. Уравнение движения цепи имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{L} xV \right) = F - \mu \frac{m}{L} xg.$$

Заменой $dt = \frac{dx}{V}$ преобразуем уравнение к виду $V \frac{d}{dx} (xV) = \frac{FL}{m} - \mu g x$ или

$$\frac{1}{2} \frac{d(xV)^2}{dx} = \frac{FL}{m} x - \mu g x^2.$$

где $\gamma = \beta/k\rho_n$. Следовательно, уравнение движения капли запишется в виде $\frac{d}{dt} MV = Mg - \gamma MV$. Подставляя $V = \dot{x}$ и $M = (\alpha t/3)^3$, преобразуем уравнение к виду $\frac{d}{dt}(x\dot{x}^3) = g t^3 - 3\gamma t^2 \dot{x}$ или

$$\ddot{x} + \frac{3(1+\gamma)}{t} \dot{x} = g.$$

Его решением при начальных условиях $x_0 = V_0 = 0$ будет зависимость

$$x = \frac{gt^2}{2(4+3\gamma)}.$$

В частности, в одномерном случае, когда быстрые молекулы летят навстречу или догоняют каплю, $\gamma = \beta/k\rho_n = 2$, и капля будет падать по закону

$$x = \frac{gt^2}{20}.$$

6.45. В СО метеорита при симметричном испарении последний остается неподвижным, и относительно Л-системы его скорость не меняется. В этом случае для описания торможения основной части метеорита можно использовать уравнение

$$M \frac{dV}{dt} = F_{\text{тп}}$$

(вместо уравнения $\frac{dp}{dt} = F_{\text{тп}}$, описывающего поведение всей системы).

Используя $F_{\text{тп}} = -\alpha SV = -\frac{\alpha}{\beta} MV$, получим уравнение

$$MV = -\frac{\alpha}{\beta} MV,$$

решением которого будет

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{M}{M_0} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Изменение массы метеорита определяется уравнением

$$\dot{M} = \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{4\pi}{3} R^3 \right) = -\beta \cdot 4\pi R^2$$

(здесь ρ — плотность метеорита). Отсюда находим зависимость радиуса и массы метеорита от времени:

$$R = R_0 - \frac{\beta t}{\rho}, \quad M = \rho \frac{4\pi}{3} \left(R_0 - \frac{\beta t}{\rho} \right)^3.$$

Следовательно, скорость метеорита уменьшается по закону

$$V = V_0 \left(\frac{M}{M_0} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} = V_0 \left(1 - \frac{\beta}{\rho R_0} t \right)^{\frac{3\alpha}{\beta}}.$$

$$6.46. \quad V = \sqrt{gL} \left(\frac{M + l_0}{m} \right) \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t \right).$$

6.47. Пусть вытягиваемый конец нити переместился на расстояние x . Длина движущейся части нити равна $\frac{L+x}{2}$, а ее ускорение описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} \lambda(L+x)\dot{x} = F,$$

где λ — линейная плотность нити. Интегрируя, найдем

$$(L+x)\dot{x} = \frac{2F}{\lambda} t \quad \text{и} \quad Lx + \frac{x^2}{2} = \frac{2F}{\lambda} t^2.$$

Закон движения конца нити имеет вид $x = \sqrt{L^2 + \frac{2F}{\lambda} t^2} - L$. Через время

$$T = L \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\lambda}{F}$$

нить выпрямится полностью, при этом ее скорость будет

$$V = \sqrt{\frac{3F}{2\lambda}}.$$

6.48. Уравнение движения цепи имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{L} xV \right) = F - \mu \frac{m}{L} xg.$$

Заменой $dt = \frac{dx}{V}$ преобразуем уравнение к виду $V \frac{d}{dx} (xV) = \frac{FL}{m} - \mu g x$ или

$$\frac{1}{2} \frac{d(xV)^2}{dx} = \frac{FL}{m} x - \mu g x^2.$$

Интегрируя, найдем $\frac{1}{2}(LV)^2 = \frac{FL}{m} \frac{L^2}{2} - \frac{\mu g}{3} L^2$, откуда скорость цепи

$$V = \sqrt{\left(\frac{F}{m} - \frac{2}{3}\mu g\right)L}.$$

6.49. Пусть масса тележки m , масса воды M , а отверстие, из которого вытекает вода, смешено относительно центра тележки на расстоянии L . считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ центр тележки находится в точке $x_0 = 0$. В отсутствие трения центр тяжести системы должен оставаться на месте. Напишем это условие для момента времени t . За малый интервал времени $(\tau, \tau + d\tau)$ порция воды массой $-\dot{M}(\tau)d\tau$ вытекает через отверстие с координатой $x(\tau) + L$, где $x(\tau)$ — координата центра тележки. При вытекании горизонтальная компонента скорости воды равна скорости тележки $\dot{x}(\tau)$, и к моменту времени t эта порция воды сдвинется к координате $x(\tau) + L + \dot{x}(\tau)(t - \tau)$. Так как центр тяжести системы остается на месте, то

$$(m + M)x = \int_0^t \dot{M}(\tau)[x(\tau) + L + \dot{x}(\tau)(t - \tau)]d\tau.$$

Продифференцируем это равенство, используя правило

$$\frac{d}{dt} \int_0^t F(t, \tau)d\tau = F(t, t) + \int_0^t \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} d\tau.$$

В результате получим соотношение

$$(m + M)\dot{x} = \dot{M}L + \int_0^t \dot{M}\dot{x}d\tau. \quad (1)$$

Из выражения (1) видно, что в момент времени $t = 0$ скорость тележки $V_0 = \frac{\dot{M}(0)L}{m + M_0}$ отрицательна. Эту скорость тележка приобретает за короткое время при установлении течения воды к смещенному вправо отверстию.

В установившемся режиме вода вытекает со скоростью $V = \sqrt{2gh}$, где h — уровень воды в тележке. Расход воды определяется уравнением

$$\dot{M} = -\rho V \sigma = -\alpha \sqrt{2M},$$

здесь $\alpha = \sigma \sqrt{\frac{2\rho g}{S}}$, ρ — плотность воды, σ — площадь отверстия, S — площадь dna тележки. Интегрировав найдем, что масса воды в тележке

ке уменьшается по закону

$$M = \left(\sqrt{M_0} - \frac{\alpha t}{2}\right)^2 = M_0(1 - \lambda t)^2,$$

где M_0 — масса воды в тележке при $t = 0$ и $\lambda = \frac{\alpha}{2\sqrt{M_0}}$.

Дифференцируя (1) и подставляя значение \dot{M} , получим уравнение

$$\dot{x} = \frac{\dot{M}L}{m + M} = \frac{2\lambda^2 LM_0}{m + M_0(1 - \lambda t)^2},$$

откуда найдем скорость и координату тележки при вытекании воды:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\lambda L \sqrt{\frac{M_0}{m}} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{M_0}{m}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{M_0}{m}(1 - \lambda t)} \right] - \lambda L \frac{2M_0}{m + M_0}, \\ x &= -L \left[\frac{2M_0}{m + M_0} \lambda t - \ln \frac{m + M_0}{m + M_0(1 - \lambda t)^2} \right] - \\ &\quad - 2L \sqrt{\frac{M_0}{m}} (1 - \lambda t) \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{M_0}{m}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{M_0}{m}(1 - \lambda t)} \right]. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\dot{x}(0) = -\frac{2\lambda LM_0}{m + M_0}$ и $x_0 = 0$.

Когда вода вытечет (при $t \geq T = \frac{1}{\lambda}$), тележка будет двигаться с положительной скоростью

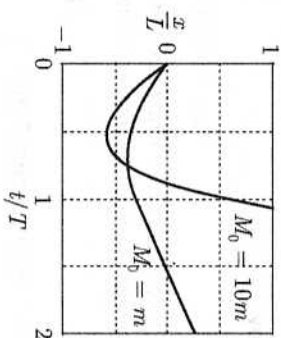
$$V_n = 2\lambda L \left(\sqrt{\frac{M_0}{m}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{M_0}{m}} - \frac{M_0}{m + M_0} \right) > 0.$$

Последнее следует из неравенства $\operatorname{arctg} z >$

$\frac{z}{1+z^2}$ (при $z > 0$), которое можно получить интегрированием соотношения

$$\frac{1}{1+z^2} > \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}.$$

Графики смещения тележки в зависимости от времени в приведенных координатах ($t/T, x/L$) для соотношений масс $M_0 = 10m$ и $M_0 = m$ показаны на рисунке. Подробно задача рассмотрена в статье [19].



7. КОЛЕБАНИЯ

7.1. Свободные колебания

7.1. Пусть доска сместилась на расстояние x от положения равновесия. Моменты силы тяжести Mg и сил реакций опоры F_1 , F_2 относительно точек опоры уравновешены: $F_1 L = Mg \left(\frac{L}{2} + x \right)$ и $F_2 L = Mg \left(\frac{L}{2} - x \right)$.

Сила, возвращающая доску, равна $\mu(F_2 - F_1) = -2\mu Mg \frac{x}{L}$, и уравнение для горизонтальных колебаний доски будет

$$M \ddot{x} + \frac{2\mu Mg x}{L} = 0.$$

Частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{L}}.$$

7.2. При повышении уровня воды в одном из колен пробирки на высоту ΔH перепад давлений будет $2\rho g \Delta H$, вода массой $M = 2\rho S H$ переместится на расстояние $x = \Delta H / \cos \alpha$, при этом возвращающая сила будет равна

$$F_{\text{вос}} = -2\rho g S \Delta H \cos \alpha = -\frac{x}{H} Mg \cos^2 \alpha$$

(здесь S — горизонтальное сечение столба воды, а $S \cos \alpha$ — поперечное сечение). Уравнение колебаний будет

$$M \ddot{x} + \frac{x}{H} Mg \cos^2 \alpha = 0.$$

Частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{H}} \cos \alpha.$$

$$7.3. \omega = \sqrt{2 \left(\frac{k}{M} - \frac{g}{L} \right)}.$$

$$7.4. T_{\text{стойки}} = \sqrt{\frac{mL}{2rP}} \approx 10^{-2} \text{ с.}$$

7.5. Уравнение движения для системы переменной массы «чашка резьб + упавшая часть каната» имеет вид

$$\frac{dP}{dt} = -kx + \frac{\rho g^2 t^2}{2} + \rho g^2 t^2,$$

где $P = m/L$, второй член описывает вес лежащего каната, а третий — передачу импульса системе из-за присоединения новых частей. Считаем, что за время падения каната чашка весов свинутся не успевает и членом $-kx$ можно пренебречь. За время падения $t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2L}{g}}$ системе передается импульс

$$\Delta P = \int_0^{t_{\text{пад}}} \rho g^2 t^2 dt = m \sqrt{2Lg},$$

так что начальная скорость чашки после падения каната

$$V_0 = \frac{m}{m+M} \cdot \sqrt{2Lg},$$

где M — масса чашки. Частота колебаний системы $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$. Вес ка-

ната смещает положение равновесия колебаний на $x_0 = \frac{mg}{k}$, где k — суммарная жесткость пружин. Амплитуда колебаний чашки с канатом будет

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}} = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{k}{m+M} \frac{2L}{g}} = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \left(\omega t_{\text{пад}} \right)^2}.$$

При условии $\omega t_{\text{пад}} \ll 1$ амплитуда колебаний будет $A \approx \frac{mg}{k}$.

7.6. После падения пластилина чашка приобретает скорость $V_0 = \frac{mV}{m+M}$ и колеблется с частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$. Положение равновесия смещается в точку $x = \frac{mg}{k}$. Подставляя начальные значения $x(0) = 0$

и $V(0) = V_0$ в общее решение уравнения колебаний типа $x = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{mg}{k}$, получим

$$x = \frac{mV}{\sqrt{k(m+M)}} \cdot \sin \omega t + \frac{mg}{k} (1 - \cos \omega t).$$

7.7. В равновесии $\frac{qQ}{L^2} = mg$. При небольшом смещении x от положения равновесия, например при уменьшении расстояния между зарядами, сила расталкивания возрастает:

$$F_{\text{вн}} = \frac{qQ}{(L-x)^2} \approx \frac{qQ}{L^2} + \frac{2qQ}{L^3}x,$$

т. е. появляется возвращающая сила, пропорциональная малому смещению x . При малых x уравнение колебаний для заряда будет иметь вид $m\ddot{x} + \frac{2qQ}{L^3}x = 0$, откуда частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{2qQ}{mL^3}} = \sqrt{\frac{2g}{L}} = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{mg}{Qq}}.$$

$$7.8. \omega = \sqrt{\frac{2k(L-l) + 4Qq/l^2}{mL}}.$$

$$7.9. n(t) = \frac{n_0}{\cos(t \cdot \sqrt{2\alpha/m})}.$$

7.12. Запишем уравнение эллипса в виде $x = b \sin \varphi$, $y = a \cos \varphi$. Компоненты скорости частицы при движении по эллиптической траектории равны $\dot{x} = b\dot{\varphi} \cos \varphi$, $\dot{y} = -a\dot{\varphi} \sin \varphi$, так что ее кинетическая энергия равна

$$\frac{m\dot{\varphi}^2}{2} (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) = \frac{mb^2\dot{\varphi}^2}{2} \quad (\text{при } \varphi \ll 1).$$

Так как потенциальная энергия частицы

$$a \cdot mg \sin \alpha (1 - \cos \varphi) \approx a \cdot mg \frac{\varphi^2}{2} \sin \alpha,$$

то для полной энергии получим

$$E = a mg \sin \alpha \cdot \frac{\varphi^2}{2} + mb^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Отсюда найдем частоту колебаний

$$\omega = \frac{\sqrt{a g \sin \alpha}}{b}.$$

$$7.13. \omega^2 = \frac{2g}{L} \sqrt{1 - \frac{d^2}{L^2}}.$$

7.14. Запишем кинетическую, потенциальную и полную энергию частицы при движении в циклоидальной чашке:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2m \left(R\dot{\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2,$$

$$U = mgR(1 - \cos \varphi) = 2mgR \sin^2(\varphi/2),$$

$$E = T + U = 2mgR \sin^2(\varphi_{\text{max}}/2).$$

В процессе колебаний параметр φ меняется монотонно в пределах

$$|\varphi| \leq |\varphi_{\text{max}}| < \pi, \quad \text{при этом } \dot{\varphi}^2 = \frac{g \left[\sin^2(\varphi_{\text{max}}/2) - \sin^2(\varphi/2) \right]}{R \cos^2(\varphi/2)}. \quad \text{Период дви-}$$

жения равен

$$T = 4 \int_0^{\varphi_{\text{max}}} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\varphi_{\text{max}}} \frac{\cos(\varphi/2)}{\sqrt{\sin^2(\varphi_{\text{max}}/2) - \sin^2(\varphi/2)}} d\varphi = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Полученный результат справедлив при $|\varphi_{\text{max}}| < \pi$.

$$7.15. T = \frac{2L}{\sqrt{gH}} \left[\operatorname{arsh} \frac{\sqrt{gH}}{u} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{gH}{2u^2 + 3gH}} \right].$$

7.2. Колебания с трением

$$7.19. L = A \operatorname{sh} \frac{\beta T}{4} \approx A \frac{4\sqrt{kM}}{\pi \alpha}, \quad \text{где } \beta = \frac{\alpha}{2M}.$$

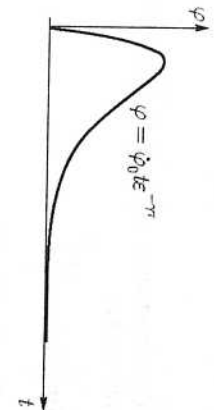
$$7.20. \text{Отклонение стрелки гальванометра описывается уравнением}$$

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0.$$

Наиболее выгодный режим демпфирования колебаний реализуется в случае «апериодического затухания», когда $\gamma \geq \omega_0$, а стрелка совершает одно отклонение и плавно возвращается к положению равновесия (см. рисунок). При таком демпфировании амплитуда отклонения и его производительность будут максимальными, если декремент затухания γ и собственная частота колебаний ω_0 совпадают. В этом случае общее решение приведенного уравнения имеет вид $\varphi = Ae^{\lambda t} + Ve^{i\lambda t}$, где $\lambda = -\gamma$.

Для эквивалентной цепи гальванометра с последовательно соединенными R, L, C оптимальное демпфирование будет при условии

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \gamma^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2,$$



т. е. $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. При таком демпфировании стрелка гальванометра после подачи короткого импульса тока отклоняется от нулевого положения по закону

$$\varphi = \varphi_0 t e^{-\gamma t},$$

достигая максимального отклонения $\varphi_{\text{max}} = \frac{\varphi_0}{\gamma e}$ через время $t = \frac{1}{\gamma}$.

7.3. Вынужденные колебания. Резонанс

7.24. Уравнения колебаний в течение действия постоянной силы и после ее отключения имеют вид и решение (при нулевых начальных условиях)

$$m\ddot{x} + kx = \begin{cases} F, & \text{решение } x = F(1 - \cos \omega t)/k \\ 0, & \text{решение } x = A \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Энергия осциллятора после выключения силы

$$E = \frac{kx_0^2}{2} + \frac{mV_0^2}{2} = \frac{2F^2}{k} \sin^2 \frac{\omega t}{2}.$$

Из условия $E = \frac{kA^2}{2}$ найдем амплитуду колебаний после отключения силы:

$$A = \frac{2F}{k} \left| \sin \frac{\omega t}{2} \right|.$$

7.25. Для прямоугольного импульса $A = 62,8$ мА, для импульса треугольной формы $A = 31,4$ мА.

7.27. Для $\gamma < \omega$ частота колебаний $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, а выделяемое тепло

$$Q = \frac{F^2}{m\omega^2} \left[1 - e^{-\gamma t} \left(\cos \Omega t + \frac{\gamma}{\Omega} \sin \Omega t \right) \right]$$

достигает максимума при $T = \frac{\pi}{\Omega}$.

При $\gamma > \omega$ и $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ выделяемое тепло возрастает с увеличением T :

$$Q = \frac{F^2}{m\omega^2} \left[1 - e^{-\gamma t} \left(\operatorname{ch} \beta t + \frac{\gamma}{\beta} \operatorname{sh} \beta t \right) \right].$$

7.28. $E_N = 2mV^2N^2$, где $V = 2a/T$.

7.29. Уравнение колебаний при действии силы $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$.

Его общее решение

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t - \frac{F_0}{2m\omega} \cos \omega t.$$

Подставляя начальные условия $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$, найдем $A = \frac{F_0}{2m\omega^2} = \frac{F_0}{2k}, B = 0$, т. е.

$$x = \frac{F_0}{2k} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t).$$

Если сила действовала в течение N полуциклов ($\omega t = N\pi$), амплитуда колебаний после выключения силы будет

$$A = |x| = \frac{F_0}{2k} \left| \sin N\pi - N\pi \cos N\pi \right| = \frac{F_0}{2k} \pi N.$$

7.30. Амплитуда вынужденных колебаний с частотой $\Omega \gg \omega_0$

$$i_0 = \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} I_0 = \frac{\omega^2}{\Omega^2} I_0 = 10^{-2} \text{ А}.$$

Амплитуда колебаний при резонансе $\Omega = \omega_0$ (с учетом затухания β)

$$i_0 = \frac{\omega_0}{2\beta} I_0 = Q I_0 = 10 \text{ А}.$$

7.31. Колебания стрелки описываются уравнением

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin^2 \Omega t = \frac{F_0}{m} \frac{1 - \cos 2\Omega t}{2}.$$

Для установившихся колебаний решение в комплексной форме имеет вид $x = \frac{F}{2k} + B e^{2i\Omega t}$. Подстановкой в уравнение найдем величину

$$B = \frac{-F_0/2m}{\omega_0^2 - 4\Omega^2 + i4\Omega\beta}.$$

Ее модуль

$$|B| = \frac{F_0/2m}{\sqrt{(\omega_0^2 - 4\Omega^2)^2 + 16\Omega^2\beta^2}}$$

характеризует амплитуду вынужденных колебаний, которая при малом затухании зависит от Ω как

$$|B| \approx \frac{F_0}{2k} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - 4\Omega^2} = [0,5 \text{ A}] \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - 4\Omega^2}.$$

Здесь учтено, что пропорциональная току вынуждающая сила F_0 при постоянном токе величиной 1 А вызывает отклонение стрелки $\frac{F_0}{k} = [1 \text{ A}]$ по шкале амперметра.

7.32. Выпрямленный ток можно представить в виде ряда Фурье:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \dots \right).$$

Ограничиваясь двумя первыми членами разложения, получим уравнение колебаний стрелки $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cos 2\Omega t \right)$. Его решение $x = \frac{2}{\pi} \frac{F_0}{k} + \text{Re} \left(B e^{i2\Omega t} \right)$ включает среднее отклонение $\bar{I} = \frac{2}{\pi} \frac{F_0}{k} = 0,64 \text{ A}$ и вынужденные колебания относительно среднего отклонения, амплитуда которых при $\Omega = 100 \text{ Гц}$, $\omega_0 = 1 \text{ Гц}$ и малом трении равна

$$B = \frac{4}{3\pi} \frac{\omega_0^2}{4\Omega^2 - \omega_0^2} \frac{F_0}{k} \approx 10^{-5} \text{ A}.$$

Здесь учтено, что при постоянном токе величиной 1 А пропорциональная току вынуждающая сила F_0 вызывает отклонение стрелки $\frac{F_0}{k} = [1 \text{ A}]$ по шкале амперметра.

7.33. Падение напряжения при обходе контура

$$IR + U_C = U_0 \sin \Omega t.$$

Так как $I = \dot{Q} = C\dot{U}$, уравнение колебаний будет

$$\ddot{U} + \frac{R}{L}\dot{U} + \frac{U}{LC} = \frac{U_0}{LC} \sin \Omega t.$$

Амплитуда вынужденных колебаний равна

$$|B| = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\Omega^2)^2 + \Omega^2 R^2 C^2}}.$$

7.34. Уравнение колебаний сдвигающейся точкой подвеса $m\ddot{x} + k(x - a \cos \Omega t) = 0$ или $\ddot{x} + \omega_0^2 x = a\omega_0^2 \cos \Omega t$.

Амплитуда установившихся колебаний равна

$$B = a \frac{1}{1 - (\Omega^2/\omega_0^2)}.$$

7.35. При отклонении маятника на угол α его скорость обусловлена скоростью поворота относительно точки подвеса $L\dot{\alpha}\hat{e}_\tau$, где \hat{e}_τ — единичный вектор в тангенциальном направлении, и скоростью перемещения $\dot{x}\hat{i}$ точки подвеса А относительно Л-системы (см. рисунок). Тангенциальная проекция скорости равна

$V_\tau = (L\dot{\alpha}\hat{e}_\tau + \dot{x}\hat{i}) \cdot \hat{e}_\tau = L\dot{\alpha} + \dot{x} \cos \alpha \approx L\dot{\alpha} + \dot{x}$. При малых a уравнение движения маятника запишется в виде

$$m(L\ddot{\alpha} + \dot{x}) = -mg\alpha \quad \text{или} \quad \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = -\frac{\dot{x}}{L} = \frac{b}{L} \Omega^2 \cos \Omega t,$$

где $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$. Установившиеся вынужденные колебания имеют вид

$$\alpha = B \cos \Omega t.$$

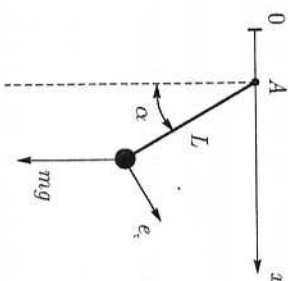
Их угловая амплитуда равна

$$B = \frac{b}{L} \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Колебания малы, если $B \ll 1$, т. е. если $b \ll$

$\ll \frac{g}{\Omega^2} - L$. В случае $\Omega > \omega_0$ колебания совер-

шаются в противофазе с колебаниями точки подвеса, а в случае $\Omega < \omega_0$ маятник и точка подвеса колеблются синфазно.



7.4 Адиабатические инварианты

7.39. $H \sim g^{-1/3}$.

7.40. Адиабатическим инвариантом является величина E/ω .

- а) Период не меняется, амплитуда $A \sim m^{-1/2}$,
 б) $T \sim m^{1/2}$, $A \sim m^{-1/4}$.

7.41. Адиабатическим инвариантом является величина $E/m\omega$.

- а) Период и амплитуда не меняются,

- б) $T \sim m^{1/2}$, $A \sim m^{1/4}$.

Подробно задача рассмотрена в статье [20].

- 7.42.** $T = 10^9 \ln 2$ лет.

7.43. Угловая амплитуда колебаний возрастёт в $\sqrt{2}$ раз.

7.44. Фазовая траектория состоит из двух половинок эллипса, первая из которых соответствует гармоническому осциллятору с частотой $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}$, вторая — с частотой $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L-h}}$. Площадь внутри фазовой траектории равна

$$S = \pi E \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) = \pi E \left(\sqrt{\frac{L}{g}} + \sqrt{\frac{L-h}{g}} \right),$$

где h — свитг точки подвеса. Эта площадь является адиабатическим инвариантом, и при $h = \frac{L}{2}$ энергия маятника станет в $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2+1}}$ раз больше первоначальной.

Амплитуды колебаний маятника влево A_1 и вправо A_2 от положения равновесия связаны соотношением

$$A_2 = A_1 \sqrt{1 - \frac{h}{L}},$$

и при $h = \frac{L}{2}$ размах колебаний составит

$$A = A_1 + A_2 = A_1 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h}{L}} \right) = A_1 \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \right).$$

Начальный размах колебаний был равен $A_0 = 2A_0$, а при $h = \frac{L}{2}$ раз-

мах увеличится в $\frac{A}{A_0} = \frac{\sqrt{2+1}}{2\sqrt{2}}$ раз. Подставляя $\frac{A_1}{A_0} = \sqrt{\frac{E}{E_0}}$, для раз-

маха колебаний получим

$$\frac{A}{A_0} = \sqrt{\frac{\sqrt{2+1}}{2\sqrt{2}}} \approx 0,92.$$

7.45. Пусть x — координата частицы, отсчитываемая относительно дна ящика. При горизонтальном положении ящика траектория частицы на фазовой плоскости — прямоугольник площадью $S_1 = 2LmV$. Если ящик попят на «критический» угол α , при котором скорость частицы в верхней точке равна нулю, траектория на фазовой плоскости превращается в параболу (см. рисунок). При таком наклоне ящика скорость частицы в нижней точке $V_{\max} = \sqrt{2gL} \sin \alpha$, а площадь, ограниченная фазовой траекторией:

$$S_2 = 2m \int_0^L \sqrt{2xg \sin \alpha} dx = \frac{m\sqrt{32L^3 g \sin \alpha}}{3}.$$

В адиабатическом процессе эта площадь не изменится, так что искомый угол наклона

$$\alpha = \arcsin \frac{9V^2}{8gL}$$

(если $L \geq \frac{9V^2}{8g}$). Скорость частицы в нижней точке будет $V_{\max} = \frac{3}{2}V$.

7.47. С помощью адиабатического инварианта $\frac{V^2}{2B} = \text{const}$ ([2], С. 242)

найдем поперечную долю компоненту скорости электрона:

$$V_{\perp}^2 = V_{\perp 0}^2 (1 + \lambda h^2 \alpha z).$$

Параллельная компонента скорости равна

$$V_{\parallel}^2 = V_0^2 - V_{\perp 0}^2 (1 + \lambda h^2 \alpha z).$$

Так как $V_{\parallel} = \dot{z}$, для z -координаты электрона получим уравнение

$$2 \dot{z} \ddot{z} = -2V_{\perp 0}^2 \lambda \frac{h \alpha z}{ch^2 \alpha z}.$$

При малых z уравнение можно упростить:

$$\ddot{z} + V_0^2 \sin^2 \theta \cdot \lambda \alpha^2 \cdot z = 0,$$

где V_0 — скорость электрона, а θ — угол между вектором скорости и осью z в точке $z = 0$. Его решением являются гармонические колебания электрона вдоль оси z с частотой

$$\omega = \sqrt{\lambda} \cdot \alpha V_0 \sin \theta.$$

8. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

8.1. Потенциал поля

$$8.1. U = \begin{cases} gR \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} \right) & \text{при } r < R, \\ -gR^2/r & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

8.2. а) Для однородного шара давление в центре

$$P_0 = \frac{\rho_0 g R}{2} = 2 \cdot 10^6 \text{ атм.}$$

б) Если плотность жидкости линейно спадает от центра к периферии по закону $\rho = \rho_0 (1 - \alpha r)$, то

$$P_n = P_0 \cdot \frac{1 - (7\alpha R/6) + (3\alpha^2 R^2/8)}{[1 - (3\alpha R/4)]^2}.$$

Полгая $\alpha R = 0,75$, т. е. $\rho_n = 4\rho(R)$, получим $P_n = 1,75 \cdot P_0 = 3,5 \cdot 10^6$ атм.

$$8.3. H = \frac{m(V_\infty^2 + V_z^2)}{2F}, \text{ где } V_z^2 = 2gR_{земли}.$$

$$8.5. \frac{\Delta g}{g} = \frac{h}{2R_{земли}} \approx 8 \cdot 10^{-4}.$$

$$8.6. T_s = \frac{3GM^2}{R}.$$

8.8. Считаем, что радиус ядра равен $R = R_0 \cdot A^{1/3}$, где $R_0 = 10^{-13}$ см, A — число нуклонов в ядре (235 для урана), и что ядро урана делится на два одинаковых равномерно заряженных осколка. Потенциальная энергия равномерно заряженного шара зарядом Ze , радиусом R равна

$$\frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R},$$

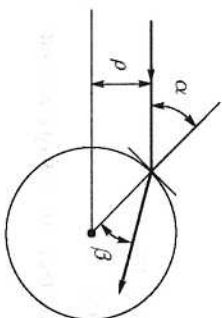
⁴ Для шара с зарядом $Ze/2$ и радиусом $R/2^{1/3}$ соответственно

$$\frac{3}{20} \frac{(Ze)^2}{R} \cdot 2^{1/3}.$$

Разность энергий ядра урана и двух осколков деления будет (при $Z = 92$)

$$\Delta E = \frac{3}{5} (1 - 2^{-2/3}) \frac{e^2 Z^2}{R_0 A^{1/3}} \approx 4 \cdot 10^2 \text{ МэВ.}$$

8.9. $\vec{E} = -m\omega^2 \vec{r}$.



8.10. Пусть частица налетает на яму со скоростью V_0 и с пренебрежимым параметром $\rho \leq R$ (см. рисунок). После доускорения потенциалом ямы U частица будет двигаться со скоростью

$$V = V_0 \sqrt{1 + (U/E)}$$

под углом к нормали β , определяемым

$$\sin \beta = \frac{V_t}{V} = \frac{\rho/R}{\sqrt{1 + (U/E)}}$$

где $V_t = V \sin \alpha = V \rho/R$ — тангенциальная компонента скорости частицы, не меняющаяся при влете в яму. Минимальное удаление частицы от центра будет

$$r_{\text{min}} = R \sin \beta = \frac{\rho}{\sqrt{1 + (U/E)}}.$$

Условие прилипания к сфере $r_{\text{min}} \leq a$ реализуется для пренебрежных параметров $\rho \leq a \sqrt{1 + (U/E)}$, соответственно сечение прилипания равно

$$\sigma = \pi a^2 \left(1 + \frac{U}{E} \right).$$

Поскольку $\sigma \leq \pi R^2$, полученное выражение справедливо при кинетической энергии частиц $E \geq \frac{U}{(R/a)^2 - 1}$. Для частиц с энергией $E <$

$< \frac{U}{(R/a)^2 - 1}$ минимальное удаление от центра $r_{\text{min}} \leq a \frac{\rho}{R} < a$, и сечение прилипания

$$\sigma = \pi R^2.$$

8.11. Для частицы, тормозящейся сферически-симметричным потенциалным барьером, минимальное удаление частицы от центра при

движении внутри барьера

$$r_{\text{min}} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - (U/E)}},$$

где ρ — притягательный параметр столкновения, U — высота барьера, E — кинетическая энергия частицы (см. предыдущую задачу). При энергии частицы $E \geq U$ сечение прилипания к сфере радиуса a будет равно

$$\sigma = \pi a^2 \left(1 - \frac{U}{E} \right).$$

При $E < U$ частица от барьера отразится, и сечение прилипания $\sigma = 0$.

8.12. $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

8.13. $n > \frac{V}{2} (\sqrt{5} - 1) \approx 0.62 V$, где $V = \sqrt{\frac{GM}{R}}$.

8.14. $\frac{m_{\text{вертоль}}}{m_{\text{деформ}}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{(2GM/R) - n^2}{\Omega^2 R^2}}$.

8.15. Считаем, что орбита спутника остается круговой, так что $\frac{mV^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$. Отсюда $2 \frac{dV}{V} = -\frac{dR}{R}$, то есть радиус орбиты уменьшается

на 2 % в месяц. Полная энергия спутника $E = \frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{mV^2}{2}$ изменяется по закону

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{mV^2}{2} \right) = F_{\text{тр}} V = -\alpha V^2 \cdot V.$$

Преобразуя к виду $\frac{\alpha}{m} dt = \frac{dV}{V^2}$ и интегрируя, для скорости спутника получим

$$V = \frac{V_0}{1 - (\alpha V_0 t / m)}.$$

8.16. Для круговой орбиты $\frac{mV^2}{R} = \frac{e^2}{R^2}$, и скорость уменьшения полной энергии за счет излучения будет равна

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{mV^2}{2} \right) = -\frac{2e^2 V^4}{3c^3 R^2} = -\frac{2m^2 V^8}{3e^2 c^3}.$$

Интегрируя, получим $\frac{1}{6} \left(\frac{1}{V_0^6} - \frac{1}{V^6} \right) = \frac{2}{3} \frac{m}{e^2 c^3}$, т. е. время падения будет

$$T = \frac{e^2 c^3}{4mV_0^6} = \frac{m^2 c^3 a_0^3}{4e^4} = 1,6 \cdot 10^{-11} \text{ с.}$$

8.17. Пусть в системе Солнца на частичку падает излучение с энергией E , причем тангенциальная к орбите компонента импульса излучения $P_x = 0$. В системе отсчета частички падающее излучение имеет энергию $E' = \gamma(E - VP_x) \approx E$ и переизлучается изотропно, т. е. $E'' = E'$ и $\vec{P}'' = 0$. Импульс, тераемый частичкой при переизлучении, в системе Солнца равен

$$\vec{P}_x = \gamma \left(P_x + \frac{\beta}{c} E'' \right) \approx \gamma \beta \frac{E'}{c} = \frac{V}{c^2} E,$$

и сила торможения будет

$$F = \frac{V}{c^2} \frac{Nd^2}{4R^2} = 1,5 \cdot 10^{-15} \text{ Н;}$$

здесь учтено, что скорость частички на орбите Земли $V = 10^4$ с, а мощность падающего излучения $N_n = N \frac{\pi a^2}{4\pi R^2}$, где N — мощность, излучаемая Солнцем, πa^2 — сечение частички, R — радиус орбиты. Если перекрыть солнечный свет, пылинка при остывании будет продолжать терять импульс и начнет терять массу:

$$\frac{dp_x}{dt} = - \frac{d\vec{P}_x}{dt} = - \frac{\beta \gamma dE'}{c dt}, \quad \frac{dm}{dt} = - \frac{1}{c^2} \frac{dE'}{dt}$$

(здесь P_x — x -компонента импульса пылинки в системе Солнца, m — ее масса). Скорость пылинки не меняется, поскольку из $\frac{dp_x}{dt} = \gamma N \frac{dm}{dt} + m \frac{d(\gamma \gamma')}{dt} = - \frac{\beta \gamma dE'}{c dt} + m \frac{d(\gamma \gamma')}{dt}$ следует $\frac{d(\gamma \gamma')}{dt} = 0$.

8.18. Сила торможения (см. предыдущую задачу) имеет величину

$$F = \frac{VN}{c^2} \left(\frac{R_3}{2R_{\text{орб}}} \right)^2 = 5 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

Уменьшение полной энергии равно работе сил торможения:

$$- \frac{d}{dt} \left(- \frac{\alpha}{2R} \right) = \frac{R_3^2 N V}{4c^2 R^2} = \frac{R_3^2 N \alpha}{4M_3 c^2 R^3},$$

где $\alpha = GM_3 M_0 = M_3 V^2 R$. Отсюда $-\frac{\alpha}{2R^2} \dot{R} = \frac{R_3^2 N \alpha}{4M_3 c^2 R^3}$ или

$$R dR = - \frac{R_3^2 N}{2M_3 c^2} dt.$$

Интегрируя, найдем $R_{\text{орб}}^2 - R^2 = \frac{R_3^2 N}{M_3 c^2} t$, т. е. радиус орбиты уменьшится в два раза за время

$$T_{1/2} = \frac{3 M_3 c^2}{4 N} \left(\frac{R_{\text{орб}}}{R_3} \right)^2 \approx 2 \cdot 10^{15} \text{ лет.}$$

Давление света $P = N \frac{a^2}{4R_{\text{орб}}^2 c} \approx 5 \cdot 10^7 \text{ Н}$ уменьшает силу притяжения, но не влияет на величину $T_{1/2}$.

8.2. Момент импульса. Центробежный потенциал

8.19. Максимальное удаление массы m_2 от отверстия

$$R_{\text{max}} = R + \sqrt{R^2 + 2R \cdot r_0}, \quad \text{где } R = \frac{P^2}{4m_1 m_2 g}.$$

8.20. Момент импульса электрона $L = mVr$, эффективный потенциал

$$U_{\text{эфф}} = \alpha \ln \frac{r}{R} + \frac{L^2}{2mr^2} = \alpha \ln \frac{r}{R} + \frac{\alpha R^2}{2r^2}.$$

При малом отклонении $x = r - R$ от равновесной траектории на электрон действует возвращающая сила $F = - \frac{dU_{\text{эфф}}}{dx} \approx - \frac{2\alpha}{R^2} x$. Уравнение радиальных колебаний $m\ddot{x} = - \frac{2\alpha}{R^2} x$, частота

$$\omega = \sqrt{\frac{2\alpha}{mR^2}}.$$

Отметим, что частота радиальных колебаний в $\sqrt{2}$ раз больше угловой частоты вращения, и траектория электрона при таких колебаниях не замкнута.

8.21. При движении сохраняется компонента момента импульса вдоль оси воронки

$$L_z = m r^2 \dot{\phi} = m V (\rho_0 + h \operatorname{ctg} \alpha).$$

Энергия частицы равна

$$E = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \frac{m \rho^2}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \frac{L_z^2}{2m \rho^2} + mgz,$$

где учтено, что $z = (\rho - \rho_0) \operatorname{tg} \alpha$. В верхней $\rho_{\max} = \rho_0 + h \operatorname{ctg} \alpha$ и нижней ρ_{\min} точках траектории $\dot{\rho} = 0$, т. е.

$$\frac{L_z^2}{2m} \left(\frac{1}{\rho_{\min}^2} - \frac{1}{\rho_{\max}^2} \right) = mg (\rho_{\max} - \rho_{\min}) \operatorname{tg} \alpha \quad \text{или} \quad V^2 = \frac{2g \rho_{\min}^2}{\rho_{\max} + \rho_{\min}} \operatorname{tg} \alpha.$$

При $\rho_{\min} > \rho_0$ частица в воронку не проваливается, при этом скорость в верхней точке должна удовлетворять соотношению

$$V > \sqrt{\frac{2g \rho_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{\rho_{\max} + \rho_0}} = \sqrt{1 + (h \operatorname{ctg} \alpha / 2 \rho_0)^2}.$$

8.22. При движении сохраняется вертикальная компонента момента импульса

$$L_z = m r^2 \dot{\phi} = m V \sqrt{H/\alpha}.$$

Для параболической чапки $\dot{z} = 2\alpha \alpha r$, и энергия частицы в цилиндрических координатах запишется как

$$E = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \frac{m}{2} (1 + 4\alpha^2 \rho^2) \dot{\rho}^2 + \frac{V^2 H}{z} + 2gz.$$

В крайних точках $\dot{\rho} = 0$, а энергия равна

$$\frac{m V^2 H}{2} + mgz = \frac{m V^2}{2} + mgH.$$

Отсюда найдем

$$\left(\frac{H}{z} - 1 \right) \left(z - \frac{V^2}{2g} \right) = 0$$

и границы движения по вертикали

$$z_1 = H, \quad z_2 = \frac{V^2}{2g}.$$

8.23. x -компонента силы равна $F_x = -\frac{\partial}{\partial x} (\alpha x^2) = -2\alpha x$ (т.к. $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$).

Аналогично найдем $F_y = -2\alpha y$ и $F_z = -2\alpha z$. Следовательно, частица совершает гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}.$$

8.24. $\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{2gR_3}{V^2} \right)$.

8.25. $\frac{\Delta M}{M} = \begin{cases} k/2 & \text{при } V^2 R \geq V^2 R_3, \\ k & \text{при } V^2 R < V^2 R_3, \end{cases} \quad k = 1 - \sqrt{1 - \frac{R_3^2}{R^2} \left(1 + \frac{V^2}{V^2} \right) + \frac{R_3^3 V^2}{R^3 V^2}}.$

8.26. $\sigma = \begin{cases} \pi R^2 \left(1 - \frac{\alpha}{ER} \right) & \text{при } E \geq \frac{\alpha}{R}, \\ 0 & \text{при } E < \frac{\alpha}{R}. \end{cases}$

8.27. Эффективный потенциал $U_{\text{эфф}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^4} = \frac{E R^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^4}$, где ρ —

прицепленный параметр. $L = m V \rho$ — момент импульса, $E = \frac{L^2}{2m \rho^2}$ — полная

энергия частицы. При $r = \sqrt{\frac{2\alpha}{E R^2}}$ эффективный потенциал достигает мак-

симума величиной $U_{\text{эфф}}^{\max} = \frac{E^2 \rho^4}{4\alpha}$. Условие падения в центр $E \geq U_{\text{эфф}}^{\max}$,

т. е. сечение падения

$$\sigma = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{E}}.$$

8.28. $\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{\alpha}{E R^{3/2}} \right)$.

8.29. $\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{\alpha}{ER} \right) + \pi \frac{\beta}{E}$.

8.31. $\vec{F} = -\frac{m\alpha^2}{r^4}\vec{r}$; траектория $r = r_0 \exp\left[\pm(\varphi - \varphi_0) \sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 - 1}\right]$,

где L — момент импульса частицы.

8.32. Полная энергия частицы $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^2}$, где $L = mV_0r_0$ — ее момент импульса. Уравнение

$$\frac{E}{L^2} = \frac{mv^2}{2L^2} + \frac{1}{2mr^2} - \frac{\alpha}{L^2r^2}$$

при переходе к новой переменной $z = \frac{1}{r}$ преобразуется к виду

$$\frac{E}{L^2} = \frac{1}{2m} \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{1}{2m} - \frac{\alpha}{L^2} \right) z^2$$

(здесь использовано соотношение $\dot{r} = \frac{\dot{r}}{mr^2\dot{\varphi}} = \frac{1}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{m} \frac{dz}{d\varphi}$).

Дифференцированием по z получаем $0 = \frac{1}{m} \frac{dz}{d\varphi} \frac{d^2z}{d\varphi^2} + \left(\frac{1}{2m} - \frac{\alpha}{L^2} \right) 2z \frac{dz}{d\varphi}$

или

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} + \left(1 - \frac{2\alpha}{mV_0^2r_0^2} \right) z = 0.$$

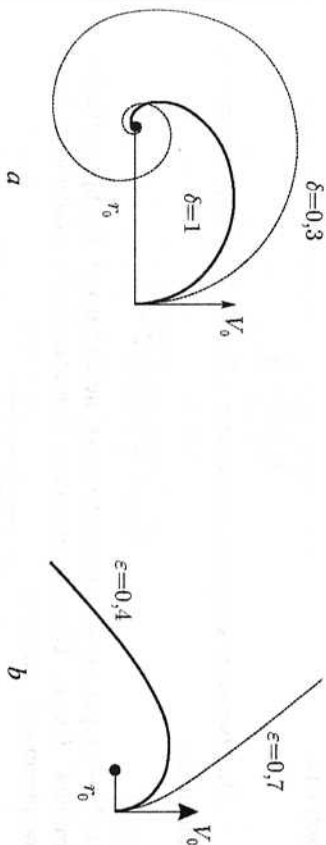
Его решением будут траектории:

1) $r = \frac{r_0}{\text{ch}(\delta\varphi)}$, $\delta = \sqrt{\frac{2\alpha}{mV_0^2r_0^2} - 1}$ при $\frac{mV_0^2}{2} < \frac{\alpha}{r_0^2}$,

2) окружность $r = r_0$ при $\frac{mV_0^2}{2} = \frac{\alpha}{r_0^2}$,

3) $r = \frac{r_0}{\cos(\varepsilon\varphi)}$, $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{mV_0^2r_0^2}}$ при $\frac{mV_0^2}{2} > \frac{\alpha}{r_0^2}$.

(Угол φ отсчитывается относительно вектора \vec{r}_0 , параллельного оси x .)



Вид траекторий $r = \frac{r_0}{\text{ch}(\delta\varphi)}$ для значений $\delta = 0,3$ (пунктир) и $\delta = 1$

(сплошная линия) показан выше на рис. а, траекторий $r = \frac{r_0}{\cos(\varepsilon\varphi)}$ для $\varepsilon = 0,4$ и $\varepsilon = 0,7$ — на рис. б.

8.33. $\vec{F} = -\frac{m\alpha^2}{2r^3}\vec{r}$, траектория — парабола $r = \frac{2r_0}{1 + \cos\varphi}$.

8.34. $E = 0$, $L = \sqrt{\frac{m\alpha}{2R^2}}$.

8.35. $T = \sqrt{\frac{m}{8\alpha}} R^4$.

8.36. $T = \sqrt{\frac{m}{32\alpha}} \pi R^3$.

8.3. Кулоновское поле. Законы Кеплера

8.38. Чтобы тело, находящееся на расстоянии 1 а. е. от Солнца, могло покинуть пределы Солнечной системы, ему необходимо сообщить начальную скорость, в $\sqrt{2}$ раз большую, чем орбитальная скорость Земли V_0 . При старте с Земли можно использовать скорость движения Земли по орбите. Для этого нужно стартовать так, чтобы после преодоления поля тяготения Земли ракета двигалась в том же направлении, что и Земля на орбите. При этом относительно Земли ракета достаточно иметь

скорость

$$V_0(\sqrt{2}-1).$$

Минимальная скорость при старте с Земли $V_{\text{старт}}$ определится соотношением

$$V_2^2 - V_2^2 = V_0^2 (\sqrt{2}-1)^2,$$

где V_2 — вторая космическая скорость, необходимая для преодоления тяготения Земли. Отсюда находим минимальную стартовую (третью космическую) скорость:

$$V_3 = \sqrt{V_0^2 (\sqrt{2}-1)^2 + V_2^2} \approx 16,7 \text{ км/с.}$$

8.39. $V_{\text{мин}} = \sqrt{V_2^2 + V_{\text{орб}}^2 (\sqrt{1 + \cos^2 \theta - \cos \theta})^2}$, где θ — угол между направлением вылета и скоростью Земли.

8.40. $\frac{\Delta M}{M} \approx \frac{\sqrt{2}-1}{V_{\text{ср}}} \cdot \sqrt{\frac{gR_{\text{л}}}{6}} = 1,8 \cdot 10^{-2}$.

8.41. На круговой орбите выполняется соотношение между скоростью и радиусом орбиты $mV_0^2 = GmM_3/R_0$. Энергия корабля после вывода на гиперболическую орбиту будет

$$\frac{mV_{\infty}^2}{2} = -mV_0^2 + \frac{m}{2}(V_0 + \Delta V)^2.$$

Добавка скорости

$$\Delta V = \sqrt{V_{\infty}^2 + 2V_0^2} - V_0$$

минимальна при $V_0 = V_{\infty}/\sqrt{2}$. Начальный радиус круговой орбиты слутника при этом равен

$$R_{\text{орб}} = R_3 \left(\frac{V_2}{V_0} \right)^2,$$

где R_3 — радиус околоземной круговой орбиты.

8.42. После выхода из поля тяготения Луны корабль должен перейти на эллиптическую орбиту вокруг Земли, у которой высота перигея равна радиусу Земли R_3 , а высота апогея равна расстоянию Земля—Луна $R_{3-л}$ (см. рисунок). Момент количества движения в апогее и перигее одинаков: $V_{\text{мин}} R_{3-л} = R_3 V_{\text{макс}}$. Так как орбита сильно вытянута, то

$V_{\text{макс}} \approx V_2$ и скорость в апогее должна быть равна

$$V_{\text{мин}} \approx V_2 \frac{R_3}{R_{3-л}} \approx 0,2 \text{ км/с.}$$

Луна движется по орбите со скоростью 1 км/с, т. е. для возврата на Землю нужно преодолеть поле тяготения Луны и двигаться относительно Луны со скоростью $V_{\text{отн}} = 0,8$ км/с в направлении, противоположном ее орбитальной скорости. Для Луны вторая космическая

$$V_2^{\text{л}} = \sqrt{2g_{\text{л}}R_{\text{л}}} = \sqrt{gR_{\text{л}}/3} \approx 2,4 \text{ км/с,}$$

где $R_{\text{л}}$ — радиус Луны. Стартовая скорость с поверхности Луны

$$V_{\text{мин}} = \sqrt{(V_2^{\text{л}})^2 + V_{\text{отн}}^2} = \sqrt{\frac{gR_{\text{л}}}{3} + \left(V_{\text{л}} - V_2 \frac{R_3}{R_{3-л}} \right)^2} \approx 2,6 \text{ км/с.}$$

8.44. $\Delta V = V_2 - V = 0,2 \text{ км/с.}$

8.45. $V_{\text{мин}} = \sqrt{\left(\sqrt{V_{\text{орб}}^2 (\sqrt{2}-1)^2 + 2V_{\text{л}}^2} - V_{\text{л}} \right)^2 + \frac{gR_{\text{л}}}{3}} \approx 11,8 \text{ км/с,}$

где $V_{\text{орб}}$, $V_{\text{л}}$ — орбитальные скорости Земли и Луны.

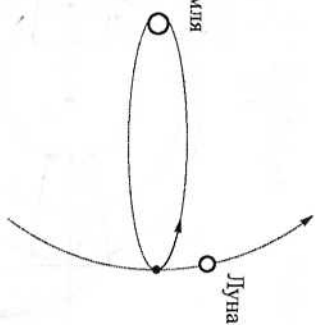
8.46. Орбита кометы сильно вытянута, поэтому ее полную энергию можно считать равной нулю. В перигелии

$$\frac{mV_{\text{л}}^2}{2} = \frac{GmM_{\odot}}{r_{\text{мин}}} = \frac{GmM_{\odot}}{0,6 a_0} = \frac{mV_{\text{орб}}^2}{0,6},$$

где $V_{\text{орб}}$ — орбитальная скорость Земли. Отсюда находим максимальную скорость кометы:

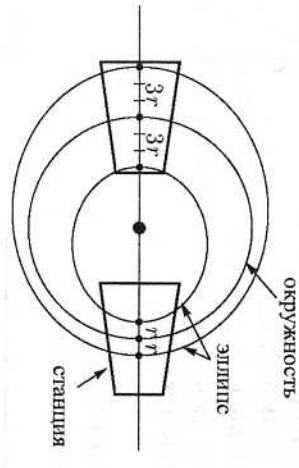
$$V_{\text{макс}} = V_{\text{орб}} \sqrt{\frac{2a_0}{r_{\text{мин}}}} = 55 \text{ км/с.}$$

8.47. Центр масс орбитальной станции движется по окружности, для которой $\frac{GmM}{R^2} = \frac{mV_1^2}{R}$. Если в начальный момент предметы покоились



относительно станции и находились в разных по радиусу точках $R_1 = R + r$ и $R_2 = R - r$ (см. рисунок), то относительно Земли они движутся по эллипсам, большие оси которых

$$2a_{\pm} = \frac{GM}{|E_{\pm}|} = \left(-\frac{1}{2R} + \frac{1}{R \pm r} \right)^{-1} = 2R \frac{R \pm r}{R \mp r} \approx 2R \pm 4r$$



на величину $4r$ отклоняются от диаметра окружности, по которой движется центр станции. За полпериода дальний предмет сместится относительно центра станции от точки $+r$ до точки $-3r$, а ближний (к Земле) — от точки $-r$ до $+3r$. Полагая, что станция совершает оборот за время $T \sim 90$ мин, найдем, что при характерном размере станции $r = 1$ м средняя скорость перемещения предметов относительно станции будет

$$V \approx \frac{4r}{(T/2)} \approx 0,15 \text{ см/с.}$$

8.48. $\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{V^2 r_{\min}}{2gR^2} \right) \cdot \frac{\Delta r_{\max}}{r_{\max}}$, где V — скорость в перигее, R_3 — радиус Земли. Для околоземной орбиты

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{1}{4} \frac{\Delta r_{\max}}{r_{\max}} = 0,25 \%$$

8.49. При добавке скорости $\Delta \vec{V}$ изменение кинетической энергии

$$\Delta T = \frac{m(\Delta V)^2}{2} + m\vec{V} \cdot \Delta \vec{V}$$

и большой полуоси эллиптической орбиты будет максимальным, если добавка скорости ΔV тангенциальна. Сначала полуось орбиты станции была $(200 \text{ км} + R_3) = \frac{\alpha}{2|E' |}$, после тангенциальной добавки скорости ста-

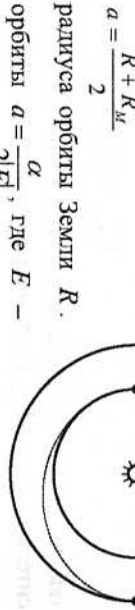
ла $(205 \text{ км} + R_3) = \frac{\alpha}{2|E' |}$ (здесь R_3 — радиус Земли, E и E' — полная энергия станции до и после добавки скорости, $\alpha = GMm$). Из соотношения

полуосей получим $\frac{R_3 + 200 \text{ км}}{R_3 + 205 \text{ км}} = \frac{V_1^2 - \left[(V_1 + \Delta V_m)^2 / 2 \right]}{V_1^2 / 2} = 2 - \left(1 + \frac{\Delta V_m}{V_1} \right)^2$,

здесь $V_1 = \sqrt{gR_3}$ — первая космическая скорость. Отсюда найдем величину тангенциальной добавки скорости

$$\Delta V_m = V_1 \left[\sqrt{2 - \frac{R_3 + 200 \text{ км}}{R_3 + 205 \text{ км}}} - 1 \right] \approx V_1 \frac{5 \text{ км}}{2(R_3 + 205 \text{ км})} \approx 3 \text{ м/с.}$$

8.50. а) При путешествии к Марсу наиболее экономичная траектория — эллипс, касающийся орбит Земли и Марса (см. пунктир на рис.), большая полуось которого



в 1,26 раза больше радиуса орбиты Земли R .

Для эллиптической орбиты $a = \frac{\alpha}{2|E' |}$, где E —

полная энергия корабля и $\alpha = GMm_{\odot}$, т. е. полная энергия корабля для полета к Марсу $|E' |$ будет в 1,26 раза меньше, чем энергия при полете на орбите Земли. Из равенства

$$E' = \frac{mV^2}{2} - \frac{\alpha}{R} = -\frac{\alpha}{R + R_M}$$

получим, что скорость корабля для полета к Марсу после преодоления тяготения Земли должна быть равна

$$V = \sqrt{\frac{\alpha}{mR} \frac{2R_M}{(R + R_M)}} \approx V_{\text{орб}} \sqrt{\frac{6}{5}},$$

где $V_{\text{орб}} = \sqrt{\frac{\alpha}{mR}}$ — орбитальная скорость движения Земли. Если корабль

после преодоления тяготения Земли будет двигаться в том же направлении, что и Земля, то относительно Земли корабль для полета к Марсу должен иметь скорость $V_{\text{отн}} = V_{\text{орб}} \left(\sqrt{\frac{6}{5}} - 1 \right) \approx 2,86 \text{ км/с}$. С учетом земного

тягиотения с Земли надо стартовать со скоростью

$$V_{\text{отн}} = \sqrt{V_2^2 + V_{\text{орб}}^2 \left(\sqrt{\frac{2R_M}{R + R_M}} - 1 \right)^2} \approx 11,56 \text{ км/с.}$$

Время полета к Марсу будет $T = \frac{1}{2} \left(\frac{R+R_M}{2R} \right)^{3/2} \approx 0,7$ года. При

встрече ракеты с Марсом расстояние до Земли будет

$$R_{3M} = \sqrt{R^2 + R_M^2 - 2RR_M \cos(0,4\pi)} \approx 1,5R.$$

б) Для полета к Венере аналогично находим энергию на орбите и необходимую скорость

$$E' = \frac{mV^2}{2} - \frac{\alpha}{1,72R}, \quad V = \sqrt{\frac{1,44}{1,72}} V_{орб} = 0,91 V_{орб}.$$

Относительно Земли скорость должна быть $V_{отн} = -2,55$ км/с. Стартовать с Земли надо со скоростью

$$V_{старт} = 11,5 \text{ км/с}$$

так, чтобы после преодоления тяготения Земли скорость ракеты относительно Земли $V_{отн}$ была направлена против орбитальной скорости Земли. Время полета к Венере $T \approx 0,4$ года. При встрече ракеты с Венерой расстояние Земли – Венера будет

$$R_{3В} = 0,6R.$$

8.51. В перигее $r_{\text{пер}} = \frac{R}{1+\epsilon}$. На круговой орбите скорость $V_1 = \sqrt{gr}$.

эксцентриситет орбиты $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = 0$. При радиальной добавке скорости ΔV , момент импульса и параметр орбиты R не меняются, энергия

возрастает на $\frac{m(\Delta V_r)^2}{2}$, а эксцентриситет орбиты становится равным

$$\epsilon' = \frac{|\Delta V_r|}{V_1}.$$

Из соотношения

$$\frac{r_1}{r} = \frac{1}{1+\epsilon'} = \frac{1}{1+(\Delta V_r/V_1)}$$

получим для радиальной добавки скорости

$$\Delta V_r = \pm \left(\frac{r}{r_1} - 1 \right) \cdot \sqrt{gr}.$$

8.52. Уравнение эллиптической траектории, проходящей через оба полюса:

$$r = \frac{L^2/m\alpha}{1 + \epsilon \cos \varphi} = \frac{R}{1 + \epsilon \cos \varphi},$$

где R – радиус Земли. Подставляя $\frac{\alpha}{R^2} = mg$, $L = mVR \cos \theta$ (здесь θ – угол вылета по отношению к горизонту), получим искомое соотношение

$$R = \frac{L^2}{m\alpha} = \frac{V^2 \cos^2 \theta}{g} \quad \text{или} \quad V \cos \theta = \sqrt{gR} = V_1.$$

8.55. $V = V_0 \sqrt{2} = 28,3$ км/с, $\varphi = \arcsin \frac{1}{\epsilon} = 19,5^\circ$,

где V_0 – начальная скорость, $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{2 \cdot mV_0^2 (2mV_0 R_0)^2}{m(mV_0^2 R_0)^2}} = 3$.

8.56. $\frac{\Delta V}{V} = \frac{r_{\text{max}}}{2r_{\text{min}}} \cdot \frac{R - r_{\text{min}}}{r_{\text{min}} + r_{\text{max}}} \approx -4 \cdot 10^{-3}$, где $R = 1$ а. е.

$$V_{\text{отн}} = \sqrt{V_{\text{зем}}^2 \left(\frac{2r_{\text{max}}}{\sqrt{r_{\text{max}} + R} \pm 1} \right)^2 + V_2^2} = \begin{cases} 67 & \text{км/с,} \\ 13 & \text{км/с.} \end{cases}$$

8.57. Пусть скорость спутника после вывода на эллиптическую орбиту вокруг Солнца равна V_c . Полная энергия спутника равна

$$E = \frac{mV_c^2}{2} - \frac{\alpha}{R_0} = -\frac{\alpha}{2a},$$

где $R_0 = 1$ а. е. и $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = R_0$ – большая полуось орбиты. Отсюда

найдем кинетическую энергию спутника $\frac{mV_c^2}{2} = -\frac{\alpha}{2a} + \frac{\alpha}{R_0} = \frac{\alpha}{2R_0}$ и его

скорость $V_c = V_{орб} = 30$ км/с.

Уравнение орбиты вокруг Солнца $r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$, где $r_1 = \frac{p}{1 + \epsilon}$,

$r_2 = \frac{p}{1 - \epsilon}$, $p = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$. Так как $p = \frac{L^2}{m\alpha}$, причем $L = mV_c \cdot R_0 \sin \beta$, то для

угла β между скоростью спутника и направлением к Солнцу получим

$$\sin^2 \beta = \frac{pm\alpha}{(mV_c \cdot R_0)^2} = \frac{p}{R_0} \cdot \frac{\alpha}{mV_c^2 R_0} = \frac{p}{R_0} = 0,36.$$

Относительная скорость Земли и спутника после выхода на орбиту

$$V_{\text{отн}} = \sqrt{V_c^2 \cdot \cos^2 \beta + (V_{\text{орб}} - V_c \sin \beta)^2} = V_{\text{орб}} \sqrt{2(1 - \sin \beta)} \approx 0,9V_{\text{орб}}.$$

Стартовая скорость спутника после выхода из атмосферы Земли должна быть равна

$$V_{\text{старт}} = \sqrt{V_{\text{отн}}^2 + V_2^2} = 29 \text{ км/с.}$$

8.58. Чтобы покинуть Солнечную систему, необходимо парус площадью $S \geq \frac{\pi GM_{\odot} mc}{N} \approx 3,3 \cdot 10^6 \text{ м}^2$.

8.60. а) Из симметрии видно, что положение звезд всегда составляет правильный треугольник, центр масс которого неподвижен. Расположим начало системы координат в центре треугольника. Тогда $r_1 = r_2 = r_3 = \sqrt{3} \cdot x$, где x — сторона треугольника, уменьшающаяся по мере сближения звезд.

Сила, действующая на каждую звезду, направлена к центру и равна

$$2F \cos 30^\circ = \sqrt{3} \frac{GM^2}{r^2},$$

т. е. каждая звезда движется в центральном поле с потенциалом $U = -\frac{\alpha}{r}$,

(здесь $\alpha = G \frac{M^2}{\sqrt{3}}$), имеет момент импульса $L = \frac{M V d}{2\sqrt{3}}$ и отрицательную

полную энергию $E = \frac{M V^2}{2} - \frac{GM^2}{2d} = -\frac{GM^2}{2d}$. Траектория каждой из звезд

будет эллипсом, причем минимальное расстояние от звезды до центра поля $r_{\text{мин}}$ определяется соотношением

$$\frac{L^2}{2Mr_{\text{мин}}^2} - \frac{\alpha}{r_{\text{мин}}} = E.$$

Отсюда $r_{\text{мин}} = \frac{d}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, и минимальное расстояние между звездами

$$d_{\text{мин}} = d \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

В случае б), когда скорости звезд перпендикулярны сторонам треугольника, каждая из звезд движется по эллипсу с моментом импульса

$$L = \frac{M V d}{2} \quad \text{и максимальным расстоянием до центра } r_{\text{макс}} = \frac{d\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Макси-}$$

мальное расстояние между звездами в этом случае

$$d_{\text{макс}} = \frac{3}{2}d.$$

8.63. Полная энергия спутника, движущегося со скоростью V_1 по круговой орбите, равна $E = -\frac{mV_1^2}{2}$. После увеличения скорости в k раз полная энергия будет

$$E' = -mV_1^2 + k^2 \frac{mV_1^2}{2} = E(2 - k^2).$$

Полуось орбиты возросла в

$$\frac{a'}{R} = \frac{E'}{E} = \frac{1}{2 - k^2} \text{ раз,}$$

при этом апогей орбиты и период обращения будут иметь величину

$$R' = 2a' - R = R \frac{k^2}{2 - k^2},$$

$$T' = T \left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2} = T \left(\frac{1}{2 - k^2}\right)^{3/2}.$$

8.66. $t_{\text{год}} \approx \frac{1}{4\sqrt{2}}$ года $\approx 2,1$ месяца.

8.67. $T = 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g} \left(2 - \frac{V^2}{gR_3}\right)^{-3/2}} \approx 5,5$ ч,

где R_3 — радиус Земли, V — скорость ракеты после выхода из атмосферы.

8.4. Задача двух тел

8.73. $T = 2\pi \sqrt{\frac{mM}{m+M} \frac{1}{k}}$.

8.75. $T = 2\pi \sqrt{\frac{2mM}{m+M} \frac{1}{k}}$.

$$8.76. \omega = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM} \left(3 - \frac{2}{\alpha}\right)}.$$

$$8.77. \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \Delta' = A \sqrt{\frac{1 + \sin^2 \varphi}{8}}, \text{ где } \sin \varphi = \frac{\Delta x}{A}, \text{ а } \Delta x - \text{ смещение}$$

каждой из масс от положения равновесия в момент развала системы.

$$8.78. x_{2M} = \frac{4}{9} V t + \frac{2}{9} \frac{V}{\omega} \sin \omega t, \quad x_M = L + \frac{4}{9} V \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{2M}}.$$

$$8.79. x_m = \begin{cases} \frac{V}{4} \left(t + \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) & \text{при } t \leq \frac{\pi}{\omega}; \\ \frac{\pi V}{4\omega} + \frac{V}{3} \left(t - \frac{\pi}{\omega} \right) - \frac{V}{6\omega_1} \sin \omega_1 \left(t - \frac{\pi}{\omega} \right) & \text{при } t > \frac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$. Пластилин остановится в точке $x = \frac{V\pi}{4\omega}$.

$$8.80. \omega = \sqrt{\frac{q^2(M+2m)}{4R^3 mM}}.$$

$$8.82. E_n = \frac{e^2}{4R} \approx \frac{E_H}{2} \approx 6,8 \text{ эВ.}$$

8.83. В системе центра масс задача эквивалентна падению на центр частицы приведенной массы $\mu = \frac{mM}{m+M}$ с расстояния d . Время такого падения равно половине периода обращения по вытянутому эллипсу с полуосью $d/2$, которое можно найти по времени вращения частицы по окружности того же радиуса:

$$T_{\text{пад}} = \frac{T}{2} = \frac{\pi d^{3/2}}{\sqrt{8G(m+M)}}.$$

Для $d = 1 \text{ м}$, $M = m = 1 \text{ кг}$, $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ время падения $T = 10^5 \text{ с}$.

8.84. а) Перейдем к эквивалентной задаче о рассеянии частицы приведенной массы на неподвижном силовом центре. В точке поворота, на

минимальном расстоянии, эффективный потенциал равен полной энергии:

$$\frac{M^2 \rho^2}{2 r_{\text{мин}}^2} + \frac{\alpha^2}{r_{\text{мин}}} = E = \frac{M V^2}{2},$$

где $\mu = \frac{mM}{m+M}$ – приведенная масса частицы, V – ее начальная скорость. Отсюда найдем

$$r_{\text{мин}} = \rho \sqrt{1 + \frac{2\alpha^2}{\rho^2 V^2} \frac{m+M}{mM}}.$$

$$\text{б) Для потенциала } \frac{\alpha^2}{r^4} \text{ получим } r_{\text{мин}} = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{8\alpha^2(m+M)}{\rho^4 V^2 mM}}}.$$

$$8.85. \text{Финитно при } V^2 < \frac{2GM}{3d}, \text{ причем } T = \frac{\pi}{\sqrt{6GM}} \left(\frac{1}{d} - \frac{3}{2} \frac{V^2}{GM} \right)^{-3/2}.$$

Апогей и перигей орбиты равны $r_{\text{мин}} = \frac{p}{1+\varepsilon}$, $r_{\text{макс}} = \frac{p}{1-\varepsilon}$, где $p = 3 \frac{V^2 d^2}{GM}$,

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 6 \frac{V^2 d^2}{GM} \left(\frac{3}{2} \frac{V^2}{GM} - \frac{1}{d} \right)}.$$

8.86. Период обращения двойной звезды равен периоду вращения тела приведенной массы μ вокруг неподвижного центра

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{GmM}} = 2\pi \sqrt{\frac{(r_{\text{мин}} + r_{\text{макс}})^3}{2G(m+M)}},$$

где $a = \frac{r_{\text{мин}} + r_{\text{макс}}}{2}$ – большая полуось орбиты тела. Отсюда найдем суммарную массу двойной звезды:

$$m+M = \frac{\pi^2}{T^2} \frac{(r_{\text{мин}} + r_{\text{макс}})^3}{2G}.$$

8.87. Период обращения двойной звезды равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{G \cdot 2M_\odot}},$$

где d — расстояние между движущимися по круговым орбитам компонентами двойной звезды. Период вращения Земли вокруг Солнца

$$T_{\oplus} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_{\odot}}} = 1 \text{ год},$$

и по условию $\frac{T}{T_{\oplus}} = \sqrt{\frac{d^3}{2R^3}} = 2$. Отсюда найдем расстояние между компонентами двойной звезды

$$d = 2R = 2 \text{ а. е.}$$

8.88. Перейдя от задачи двух тел к движению частицы приведенной массы относительно неподвижного центра, найдем энергию, необходимую для удаления частицы от центра:

$$\frac{\Delta V^2}{2} - \frac{GmM}{R+r} > 0.$$

т. е. скорость частицы (и скорость шара относительно астероида) должна быть

$$V \geq \sqrt{\frac{2G(m+M)}{r+R}}.$$

$$\mathbf{8.90.} \quad d_{\max} = 3d, \quad T = T_0 \cdot \sqrt{12}.$$

8.5. Рассеяние частиц

8.91. Угол рассеяния θ на неподвижной сфере связан с углом α между направлением начального движения и нормалью к поверхности в точке падения соотношением $\theta = \pi - 2\alpha$ ($0 < \theta < \pi$). Прицельный параметр столкновения и радиус сферы связаны соотношением $\rho = R \sin \alpha$. Отсюда для угла рассеяния (при $\rho \leq R$) получим

$$\theta = 2 \arccos \frac{\rho}{R}.$$

8.92. При рассеянии массы m на первоначально неподвижной сфере массы M углу рассеяния 90° в Л-системе соответствует угол θ в Ц-системе, определяемый соотношением

$$\cos \theta = -\frac{m}{M} \quad \text{или} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{M-m}{2M}}.$$

Рассеяние частиц в Ц-системе удобно рассматривать, перейдя к эквивалентной задаче о рассеянии частицы приведенной массы на неподвиж-

ной сфере. Угол рассеяния частиц в Ц-системе совпадает с углом рассеяния частицы приведенной массы на неподвижной сфере. При этом рассеяние на угол $> \theta$ происходит при условии

$$\frac{\rho}{R} < \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{M-m}{2M}},$$

т. е. сечение рассеяния равно

$$\sigma = \pi R^2 \frac{M-m}{2M} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

8.93. Перейдем к эквивалентной задаче о рассеянии частицы приведенной массы на неподвижной сфере радиусом $2R$ (при упругом столкновении действуют силы, направленные вдоль линии, соединяющей центры сфер). Углы рассеяния частицы в Л- и Ц-системах связаны соотношением

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\rho' \sin \chi}{m_1 V_{\text{Ц}} + \rho' \cos \chi},$$

где $V_{\text{Ц}}$ — скорость Ц-системы, $\rho' = m_2 V_{\text{Ц}}$ — импульс частицы в Ц-системе.

По условию $\theta = 90^\circ$, т. е.

$$\cos \chi = -\frac{m_1 V_{\text{Ц}}}{\rho'} = -\frac{1}{2},$$

и угол рассеяния в Ц-системе $\chi = 120^\circ$.

Прицельный параметр столкновения и угол рассеяния на неподвижном центре радиуса $2R$ связаны соотношением (см. рисунок)

$$\frac{\rho}{2R} = \sin \frac{\pi - \chi}{2} = \frac{1}{2}.$$

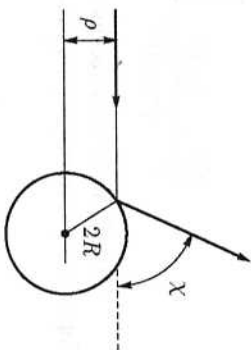
т. е. искомый прицельный параметр равен $\rho = R$.

8.94. В системе центра масс угол рассеяния θ связан с прицельным параметром ρ соотношением

$$\cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \sin \alpha = \frac{\rho}{R}.$$

В Л-системе скорость шара после рассеяния равна

$$V_2' = \frac{2mV}{m+M} \sin \frac{\theta}{2}.$$



Переданная энергия $\Delta T = \frac{MV^2}{2} = \frac{4mM}{(m+M)^2} \frac{mV^2}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$, причем

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{4mM}{(m+M)^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right),$$

где $T = \frac{mV^2}{2}$.

Усредняя по прицельным параметрам, найдем среднее значение

$$\overline{\frac{\Delta T}{T}} = \frac{4mM}{(m+M)^2} \int_0^R \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) 2\pi\rho d\rho = \frac{2mM}{(m+M)^2}.$$

8.95. Если кинетическая энергия частиц $E \leq U$, то частица от барьера отражается, и угол рассеяния составляет (при $\rho \leq R$)

$$\theta = 2 \arccos \frac{\rho}{R}. \quad (1)$$

Если $E > U$, то при $\rho < kR$, где $k = \sqrt{1 - (U/E)}$, частица влетает в область барьера, при этом радиальная компонента скорости частицы уменьшается, а тангенциальная компонента не меняется. В результате траектория частицы на границе барьера «преломляется» (см. рис. а), причем угол преломления β связан с углом падения α , считываемыми от нормали к поверхности, соотношением

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = k.$$

В этом случае угол рассеяния равен

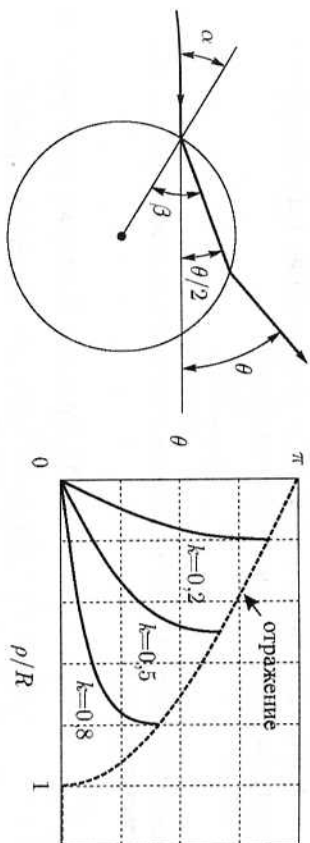
$$\theta = 2(\beta - \alpha) = 2 \left[\arcsin \left(\frac{\rho}{kR} \right) - \arcsin \frac{\rho}{R} \right],$$

где использовано соотношение $\sin \alpha = \frac{\rho}{R}$. При $E > U$ и $kR \leq \rho < R$ частица от барьера отражается, и угол рассеяния определяется формулой (1).

Графики угла рассеяния частицы θ в зависимости от приведенного прицельного параметра ρ/R показаны на рис. б (пунктирной линией — при отражении от барьера, сплошными линиями — при преломлении в случае $\rho \leq kR$ для значений $k = 0,2, k = 0,5$ и $k = 0,8$).

Максимальный угол рассеяния при $E > U$ равен

$$\theta_{\max} = 2 \arccos \sqrt{1 - (U/E)}.$$



При $\rho \geq R$ рассеяния не происходит.

$$8.96. \theta = \begin{cases} 2 \arcsin \frac{\rho}{R} - 2 \arcsin \frac{\rho}{R \sqrt{1 + (U/E)}}, & \text{если } \rho \leq R; \\ 0, & \text{если } \rho \geq R. \end{cases}$$

Максимальный угол рассеяния достигается при $\rho \rightarrow R$ и составляет

$$\theta_{\max} = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + (U/E)}}.$$

8.97. Считаем, что при рассеянии на малые углы скорость частицы изменяется несущественно. Для поперечного импульса частицы имеем

$$P_y = \int F_y dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{r} \cdot \frac{y}{r} dx \approx \frac{q\varphi}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\rho^2 + x^2} = \frac{\alpha}{V} \arctg \frac{x}{\rho} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi\alpha}{V}.$$

где использовано $F_y = \frac{\alpha}{r} \cdot \sin \varphi = \frac{\alpha}{r} \frac{y}{r}$ (см. рисунок). Таким образом, угол рассеяния не зависит от прицельного параметра:

$$\theta = \frac{V_y}{V} = \frac{\pi\alpha}{mV^2} = \frac{\pi\alpha}{2T}.$$

$$\theta = \frac{\pi q \varphi}{2V^2} \text{ или } V \sim \sqrt{\varphi}.$$

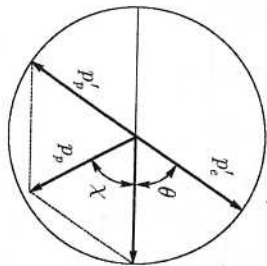
8.98. Для неподвижного протона $\sigma_0 = \frac{\pi e^4}{4T^2} = 1,6 \cdot 10^{-26} \text{ м}^2$.

Для незакрепленного протона $\sigma_{\text{незарп}} = \left[1 - \left(\frac{m_e}{M_p} \right)^2 \right] \sigma_0$.

8.100. Для потока, падающего слева направо параллельно оси x , недоступна область, ограниченная параболой

$$r = \frac{2\alpha/E}{1 - \cos \varphi}$$

(здесь E — кинетическая энергия налетающей частицы, а угол φ отсчитывается от оси x).



8.101. Протон в Ц-системе имеет импульс $MV_{Ц} = \frac{mM}{m+M}V = \mu V$. Пусть электрон в Ц-системе рассеялся на угол θ (см. рисунок). В этом случае в Л-системе протон после рассеяния будет двигаться под углом χ к линии первоначального движения электрона, так что

$$\operatorname{ctg} \chi = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{e^2}{\mu V^2},$$

и его энергия будет равна

$$T_p = T \cdot \frac{4mM}{(m+M)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{M}{m+M} \frac{2T\rho}{e^2} \right)^2} \approx T \frac{4m}{M} \frac{1}{1 + \frac{4T^2}{e^4} \rho^2},$$

где $T = \frac{mV^2}{2}$ — кинетическая энергия электрона до столкновения.

8.102. Рассеяние релятивистской частицы на малый угол описывается выражением

$$\theta = \frac{2\rho}{rV} \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^2}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \frac{2e^2}{\rho r V} = 10^{-2} \text{ рад}$$

(интеграл вычисляется заменой $\frac{\rho^2}{r^2} = u$). Отсюда находим приличный параметр и сечение рассеяния на угол, больший 10^{-2} рад:

$$\rho = \frac{2e^2}{\theta r V} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ М}, \quad \sigma = \frac{4\pi e^4}{\theta^2 r^2 V^2} \approx 1,5 \cdot 10^{-25} \text{ М}^2.$$

Минимальная энергия будет передаваться протону при рассеянии электрона на угол 10^{-2} рад:

$$T_{\min} \approx \frac{R^2}{2m_p} = \frac{(R\theta)^2}{2m_p} = \frac{(E^2 - m_e^2 c^4) \theta^2}{2m_p c^2} \approx 0,1 \text{ эВ}.$$

Максимальная энергия передается при лобовом столкновении:

$$T_{\max} = M_p c^2 \left[\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} - 1 \right] = \frac{2M_p (E^2 - m_e^2 c^4)}{2EM_p + M_p^2 c^2 + m_e^2 c^2} \approx 2T \frac{T + 2m_e c^2}{M_p c^2} = 4 \text{ кэВ}$$

(здесь $\beta = \frac{\sqrt{E^2 - m_e^2 c^4}}{E + m_p}$ — скорость Ц-системы).

8.103. Произведем оценку в случае, когда скорость звезды и паралагеля скорости планеты V_0 , причем $u \gg V_0$. В системе отсчета звезды планета при отклонении на малый угол приобретает поперечную скорость $V_{\perp} = \frac{2GM}{\rho u}$, где ρ — прицельный параметр столкновения, M и u — масса и скорость звезды (см. предыдущую задачу).

Планета покинет Солнечную систему при условии

$$\frac{m}{2} (V_0^2 + V_{\perp}^2) \geq \frac{GmM_{\odot}}{R},$$

где M_{\odot} — масса Солнца, R — радиус круговой орбиты планеты. С учетом соотношения $\frac{V_0^2}{R} = \frac{GM_{\odot}}{R^2}$ условие отрыва запишется в виде $V_{\perp} \geq V_0$. От-

сюда найдем приличный параметр $\rho \leq 2R \frac{M}{M_{\odot}} \frac{V_0}{u}$ и сечение «ионизации»

$$\sigma = \pi \rho^2 = 4\pi \frac{G^2 M^2}{V_0^2 u^2} = 4\pi R^2 \left(\frac{M V_0}{M_{\odot} u} \right)^2.$$

Для звезды, подобной Солнцу,

$$\sigma = 4\pi R^2 \left(\frac{V_0}{u} \right)^2.$$

8.104. Угол рассеяния мюона в Ц-системе определяется выражением:

$$\theta_{Ц} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\mu V^2 \rho} = 2 \operatorname{arctg} \frac{e^2}{2T\rho} \frac{m+M}{M}.$$

Из соотношений $\operatorname{tg} \theta_{Л} = \frac{\sin \theta_{Ц}}{m} + \cos \theta_{Ц}$ и $\theta_{р} = \frac{\pi - \theta_{Ц}}{2}$ найдем направление

Движения мюона и протона в L-системе после рассеяния:

$$\theta_{\mu} \approx \begin{cases} 71^{\circ} & \theta_p \approx \begin{cases} 51^{\circ} & \text{при } T = 10 \text{ эВ,} \\ 90^{\circ} & \text{при } T = 10 \text{ МэВ.} \end{cases} \\ 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ рад} & \end{cases}$$

Энергия протона (здесь p' — импульс частиц в L-системе):

$$T_p = \frac{(2p' \cos \theta_p)^2}{2M} = 4 \frac{mM}{(m+M)^2} T \sin^2 \frac{\theta_{\mu}}{2} \approx \begin{cases} 1,4 \text{ эВ} & \text{при } T = 10 \text{ эВ,} \\ 2,3 \cdot 10^{-6} \text{ эВ} & \text{при } T = 10 \text{ МэВ.} \end{cases}$$

Энергия мюона после рассеяния равна 8,6 эВ и 10 МэВ.

Минимальное расстояние («+» — для притяжения, «-» — отталкивания):

$$r_{\text{min}} = \frac{L^2}{\mu\alpha(\epsilon \pm 1)} = \frac{\mu M^2 \rho^2}{\alpha \left[\sqrt{1 + \frac{\mu^2 v^4 \rho^2}{\alpha^2}} \pm 1 \right]} = \rho \frac{\cos(\theta_{\mu}/2)}{1 \pm \sin(\theta_{\mu}/2)} \approx \begin{cases} 2\rho & \text{для } T = 10 \text{ эВ (одноименные заряды),} \\ \rho/2 & \text{для } T = 10 \text{ эВ (разноименные заряды),} \\ \rho & \text{для } T = 10 \text{ МэВ.} \end{cases}$$

8.106. Из законов сохранения следует уравнение

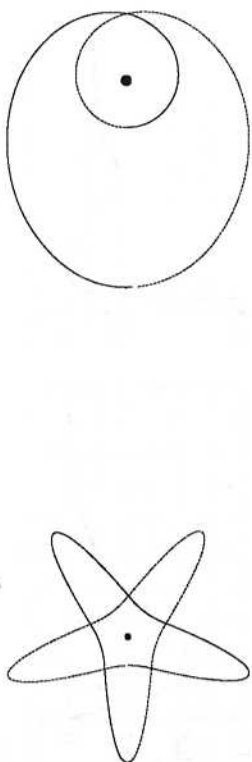
$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{L/r^2}{\sqrt{2m \left(E - \alpha r^2 - \frac{\beta}{r^2} \right) - \frac{L^2}{r^2}}}. \quad (1)$$

Интегрируя с помощью замены $z = \frac{1}{r^2}$, при $L \neq 0$ для траектории получим

$$\frac{P^2}{r^2} = 1 + \epsilon \cos(2k\varphi),$$

$$\text{где } k = \sqrt{1 + \frac{2m\beta}{L^2}}, \quad P^2 = \frac{L^2 + 2m\beta}{mE} > 0, \quad \epsilon = \sqrt{1 - \frac{2\alpha(L^2 + 2m\beta)}{mE^2}} < 1.$$

Траектории замкнуты, если k является рациональным числом. Параметры траекторий для $k = 0,25$ и $k = 1,25$ (при $\epsilon = 0,9$) показаны на рисунках. Для наглядности один из витков траектории показан сплошной линией, последующий — пунктирной линией.



При $E = \sqrt{4\alpha \left(\beta + \frac{L^2}{2m} \right)}$ эксцентриситет $\epsilon = 0$, а траектория является окружностью радиусом $r = \rho = \left[\frac{\beta + L^2/2m}{\alpha} \right]^{1/2}$.

При $L = 0$ уравнение (1) упрощается, и траектория представляет собой отрезок прямой

$$\varphi = \varphi_0, \quad \frac{E}{2\alpha} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\alpha\beta}{E^2}} \right) \geq r^2 \geq \frac{E}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha\beta}{E^2}} \right),$$

который при минимальной энергии частицы $E = 2\sqrt{\alpha\beta}$ превращается в точку $r = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\varphi = \varphi_0$.

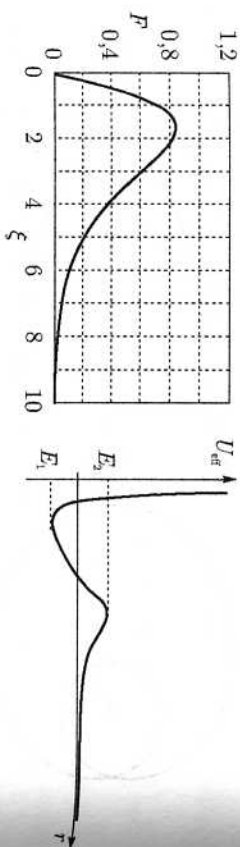
8.108. Траектория частицы определяется эффективным потенциалом

$$U_{\text{эф}} = -\frac{\alpha \cdot \exp(-r/r_0)}{r} + \frac{L^2}{2mr^2},$$

где L — момент импульса частицы. Дифференцируя выражение для потенциала и произведя замену переменной $\xi = r/r_0$, из условия $\frac{dU_{\text{эф}}}{d\xi} = 0$ получим соотношение

$$-\frac{L^2}{m\alpha r_0} + \xi(1 + \xi) \exp(-\xi) = 0.$$

Функция $F = \xi(1 + \xi) \exp(-\xi)$ показана на рис. а. Ее максимум $F_{\text{max}} \approx 0,84$ достигается при $\xi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.



При $\frac{L^2}{m\sigma r_0} < F_{\max}$ зависимость эффективного потенциала от расстояния до центра имеет два экстремума E_1 и E_2 , как это показано на рис. *b*, причем один из экстремумов является минимумом. Если энергия частицы E удовлетворяет условию $E_1 < E < E_2$, то возможно финитное движение частицы вокруг центра в окрестности минимума потенциала. При условии $E_2 > E > 0$ также возможно инфинитное движение во внешней области за барьером E_2 (рассеяние). При энергии $E > E_2$ возможно только рассеяние.

8.111. За одно столкновение легкий шарик теряет в среднем энергию

$$\Delta E_{\text{средн}} = -2 \frac{m}{M} E.$$

Шарик сечением σ , скоростью V испытывает $N = n\sigma V$ столкновений в единицу времени, т. е. скорость потери энергии будет

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = -2 \frac{m}{M} EN = -2 \frac{m}{M} En\sigma \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Отсюда найдем

$$E = E_0 \left(1 + V_0 \frac{n\sigma t}{M} \right)^{-2} \quad \text{и} \quad \frac{dE}{dt} = -2n\sigma \frac{m}{M} V_0 E_0 \left(1 + V_0 \frac{n\sigma t}{M} \right)^{-3}.$$

Энергия шарика уменьшается вдвое за время

$$\tau_{1/2} = (\sqrt{2} - 1) \frac{M}{n\sigma V_0}.$$

8.113. Обдирка отрицательных ионов при прохождении слоя мишени толщиной dx описывается уравнением

$$dN^- = -\sigma_{-0} N^- n dx,$$

где N^- — поток отрицательных ионов на входе в слой. Уравнения для изменения количества атомов dN^0 и положительных ионов dN^+ в пучке имеют вид

$$dN^0 = (\sigma_{-0} N^- - \sigma_{0+} N^0) n dx, \quad dN^+ = \sigma_{0+} N^0 n dx.$$

Совместное решение уравнений дает для доли отрицательных ионов

$$k^- = \frac{N^-}{N^0}, \quad \text{доли атомов } k^0 = \frac{N^0}{N^0} \quad \text{и доли положительных ионов } k^+ = \frac{N^+}{N^0}$$

выражения

$$k^- = \exp(-\sigma_{-0} N),$$

$$k^0 = \frac{\sigma_{-0}}{\sigma_{-0} - \sigma_{0+}} \left\{ \exp(-\sigma_{0+} N) - \exp(-\sigma_{-0} N) \right\},$$

$$k^+ = 1 - k^- - k^0.$$

Выход атомов k^0 максимален при толщине мишени $N = \frac{\ln(\sigma_{-0}/\sigma_{0+})}{\sigma_{-0} - \sigma_{0+}}$.

9. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

9.1. Равновесие тел

9.1. При виртуальном перемещении Δh цепочки вниз по конусу ее радиус увеличится на $\Delta R = \Delta h \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, а работа силы натяжения цепочки равна работе силы тяжести $2\pi \cdot \Delta R \cdot T = mg \Delta h$. Отсюда найдем силу натяжения

$$T = \frac{mg}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

9.2. $T = \frac{P r}{2\pi \sqrt{R^2 - r^2}}.$

9.3. $T = P \frac{\alpha R}{\pi}.$

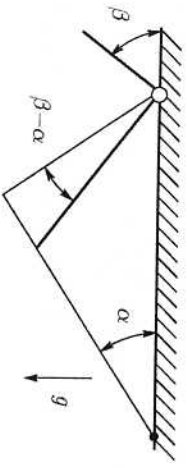
9.4. $T = \frac{P r}{2\pi \sqrt{R^2 - r^2}}.$

9.5. $T = 2P.$

9.6. $T = 2P.$

9.7. В равновесии суммарный момент сил тяжести и натяжения нити относительно точки подвеса палочки равен нулю (см. рисунок):

$$\frac{PL}{2} \cos \beta - 2PL \sin \beta + T2L \cos(\beta - \alpha) = 0.$$



Сила натяжения равна $T = P \frac{4 \sin \beta - \cos \beta}{4 \cos(\beta - \alpha)}.$ Она становится отрицательной, т. е. нить надо заменить на стержень, при

$$\operatorname{tg} \beta < \frac{1}{4} \text{ или } \beta < 14^\circ.$$

9.8. В равновесии центр тяжести K системы лежит на вертикали в центре средней линии MM (см. рисунок). Угол $\Delta MK = 120^\circ$, и так как

$$\frac{AK}{\sin 120^\circ} = \frac{KM}{\sin(90^\circ - \theta)}, \text{ то } \cos \theta = \frac{KM}{AK} \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \text{ (здесь учтено, что}$$

$$KM = \frac{L}{4}, AM = \frac{L}{2}, \text{ и по теореме косинусов } AK = \frac{\sqrt{7}}{4} L). \text{ Отсюда}$$

$$\theta = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \approx 71^\circ.$$

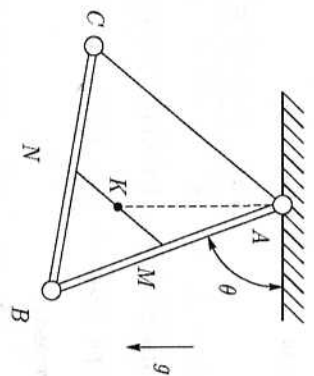
В равновесии моменты силы веса стержня CB и натяжения нити относительно точки B одинаковы:

$$P \frac{L}{2} \cos(\theta - 60^\circ) = Th,$$

здесь $h = \frac{\sqrt{3}}{2} L$ - высота треугольника

ка ABC . Но $\cos(\theta - 60^\circ) = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$, так что для натяжения нити получим

$$T = \frac{3}{2\sqrt{7}} P \approx 0,57 P.$$



9.9. Пусть координаты левого конца палочки x_1, y_1 , правого - x_2, y_2 , а угол наклона палочки φ (см. рисунок). Координаты и угол связаны соотношением

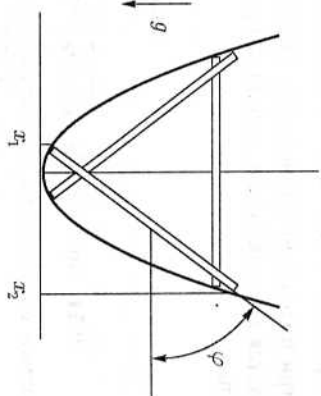
$$x_2 - x_1 = L \cos \varphi, \\ y_2 - y_1 = \alpha(x_2^2 - x_1^2) = L \sin \varphi.$$

Центр тяжести палочки находится на высоте

$$H = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi + (\alpha L \cos \varphi)^2}{4\alpha}.$$

В положении равновесия $\frac{dH}{d\varphi} = 0$, или

$$\frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} = (\alpha L)^2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi.$$



1) Если $\alpha > \frac{1}{L}$, то возможны три положения равновесия: горизон-

тальное при $\sin \varphi = 0$ и наклонные – при $\cos \varphi = \pm \frac{1}{\alpha L}$. Горизонтальное

положение равновесия неустойчиво, так как при $\varphi = 0$ вторая производ-

$$\frac{d^2 H}{d\varphi^2} \propto \frac{3 - 2 \cos^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} + (\alpha L)^2 (1 - 2 \cos^2 \varphi) \propto 1 - (\alpha L)^2$$

отрицательна. Наклонные положения равновесия устойчивы, поскольку при $\cos \varphi = \pm \frac{1}{\alpha L}$ вторая производная $\frac{d^2 H}{d\varphi^2} \propto 4(\alpha L)^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha L}\right)$ положи-

тельна.
2) Для $\alpha \leq \frac{1}{L}$ («пологая» парабола) наклонные положения равнове-

сия отсутствуют, а единственное горизонтальное положение равновесия

устойчиво.
9.10. Если $L > h \geq L\sqrt{\rho/\rho_g}$ (ρ_g – плотность воды, ρ – плотность палочки), то существует только вертикальное положение равновесия, которое устойчиво. Для меньших глубин, при $h < L\sqrt{\rho/\rho_g}$, существуют три положения равновесия. Вертикальное положение равновесия становится неустойчивым, устойчивы равновесия с углом наклона θ к вертика-

$$\sin \theta = \pm \frac{h}{L} \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho}}$$

9.11. При $h \geq L(1 - \sqrt{\rho/\rho_g})$ вертикальное положение равновесия палочки единственно и отвечает устойчивому равновесию. Для меньшей высоты подвеса $h < L(1 - \sqrt{\rho/\rho_g})$ существуют три положения равновесия. Вертикальное положение равновесия становится неустойчивым, устойчивы равновесия с углом наклона $\pm \theta$ к вертикали, отвечающим условию

$$\cos \theta = \frac{h}{L} \frac{1}{1 - \sqrt{\rho/\rho_g}}$$

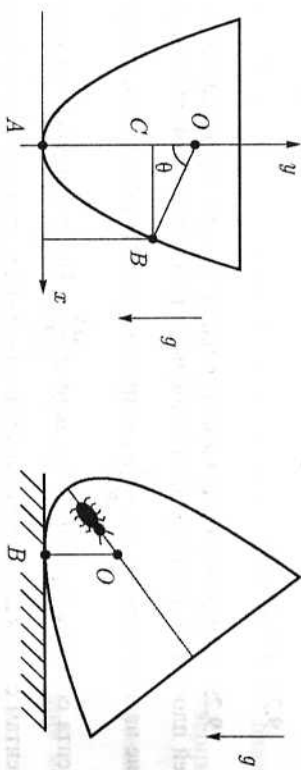
9.12. Уравнение параболы $y = \alpha x^2 = \frac{4H}{L^2} \cdot x^2$. В точке (x, y) пара-

$$\frac{dy}{dx} = 2\alpha x$$

бола (B на рис. а) касательная к параболе имеет наклон $\frac{dy}{dx} = 2\alpha x$. Нормаль OB к касательной пересекает ось y в точке O, как это показано на рис. а, и расстояние

$$|OC| = x \cdot \operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L^2}{8H}$$

не зависит от величины $x \neq 0$. Следовательно, пока жук находится на небольшой высоте, при случайном небольшом наклоне качалки момент силы веса жука будет возвращать качалку в вертикальное положение (см. рис. б).



Если же жук находится на большей высоте

$$h > \frac{L^2}{8H} = 5 \text{ см.}$$

то вертикальное положение равновесия системы становится неустойчивым, и при малом наклоне качалки момент силы веса жука может повлечь качалку к наклонному положению равновесия.

9.2. Вращение с неизменной ориентацией оси. Момент инерции, момент импульса

9.14. $I = \frac{mL^2}{3}$, m – масса креста, L – длина стержня.

9.15. $I = \frac{11}{72} ma^2$.

9.16. $H = 2R$.

9.19. $T \approx 10^{-3} \text{ с}$.

9.21. $\omega = \frac{V \cos \alpha}{R \left[1 + \frac{\cos \alpha}{3\pi N} \right]}$.

9.22. $\omega = \frac{m\sqrt{6gH}}{R\sqrt{m^2 + 5Mm + 4M^2}}$.

9.23. $V_A = \Omega L \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}$, $V_B = \frac{\Omega L}{\sqrt{3}}$, $V_C = \Omega L \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}$.

9.24. $\omega = 2\omega_0/3$.

9.25. Выделим малый элемент с площадью dS , находящийся на нижней плоскости цилиндра и отстоящий на расстоянии r от его оси. Давление на этот элемент $mg \frac{dS}{\pi R^2}$, и при повороте на угол φ сила трения элемента совершает работу $dA = \mu mg r \varphi \frac{dS}{\pi R^2}$. Просуммировав по всем элементам соприкасающейся поверхности, найдем полную работу силы трения при таком повороте:

$$A = \frac{2}{3} \mu mg R \varphi.$$

Энергия вращения цилиндра полностью израсходуется при повороте на угол $\varphi = \frac{3\omega^2 R}{8 \mu g}$, при этом число оборотов будет

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{3\omega^2 R}{16\pi \mu g}.$$

9.26. $\omega = \frac{\omega_0}{2}$, $Q = \frac{T_0}{2}$.

9.27. $\omega = \omega_0/3$.

9.28. $\omega = \frac{\omega_0}{2}$, $Q = \frac{T_0}{2}$.

9.29. $\omega = \frac{m r^2}{MR^2 + m(r^2 + 2\rho^2)} \cdot \omega_0$.

9.3. Физический маятник

9.30. $\omega = \sqrt{\frac{g}{x + (L^2/12x)}}$.

9.31. $X = \frac{L}{\sqrt{12}}$, $T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g\sqrt{3}}}$.

9.34. Вода при колебаниях сосуда не вращается, и частота колебаний маятника $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2R}}$. Когда вода превратится в лед, момент инерции маятника станет равен $I = \frac{2}{5} mR^2 + 4mR^2$, а частота колебаний уменьшится $\omega = \sqrt{\frac{2mgR}{I}} = \sqrt{\frac{5g}{11R}}$. При замерзании воды момент инерции ме-

няется медленно, поэтому величина $\frac{E}{\omega}$ (где E — энергия системы) будет адiabатическим инвариантом. Т. е. энергия колебаний после замерзания воды уменьшится в $\sqrt{\frac{11}{10}}$ раз, а амплитуда колебаний станет меньше в $\left(\frac{11}{10}\right)^{1/4} = 1,02$ раза.

9.35. $\omega = \sqrt{\frac{g}{R(3\pi + 2)}}$.

9.36. $\omega^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{g}{L}$.

9.37. а) $\omega^2 = \frac{g}{L} \frac{\sqrt{41}}{10}$; б) $\omega^2 = \frac{g}{L} \frac{\sqrt{17}}{6}$.

9.38. $\omega = \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2l}}$.

9.39. Номерок можно представить как сумму двух дисков, меньший из которых имеет отрицательную массу. При отклонении на малый угол от положения равновесия на номерок действует возвращающий момент $N = (M_R R - M_r r) g \varphi$. Момент инерции номерка относительно точки подвеса равен $I = \frac{3}{2} (M_R R^2 - M_r r^2)$, а частота малых колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{N}{I \varphi}} = \sqrt{\frac{2g}{3} \frac{M_R R - M_r r}{M_R R^2 - M_r r^2}} = \sqrt{\frac{2g}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^4 - r^4}}$$

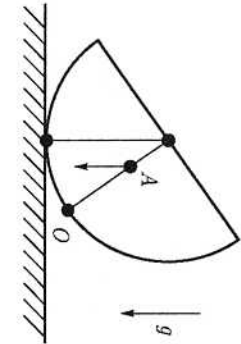
9.40. $\omega = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{m}{M}} \frac{g}{R}$.

9.41. Обруч поворачивается относительно оси, проходящей через центр сферы, причем центр обруча отстоит от оси вращения на расстоянии $l = R\sqrt{3}$. Момент инерции обруча относительно оси вращения $I = \frac{7}{2} mR^2$, а частота малых колебаний

$$\omega^2 = \frac{mgL}{I} = \frac{g}{R} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

9.42. $\omega^2 = 4 \frac{g}{R} \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{13\rho_1 + 2\rho_2}$.

9.43. $\omega^2 = \frac{10R}{g} \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{57\rho_1 + 5\rho_2}$.



9.44. Момент инерции относительно точки O (см. рисунок) равен $I_0 = \frac{13}{20} MR^2$, где M — масса полушара.

Центр масс полушара находится в точке A на расстоянии $\frac{3}{8}R$ от его плоской грани.

При малом отклонении на угол φ от положения равновесия момент возвращающей силы относительно точки опоры равен $Mgd \sin \varphi =$

$= \frac{3}{8} MgR\varphi$, и уравнение колебаний имеет вид

$$I_0 \ddot{\varphi} + \frac{3}{8} MgR\varphi = 0$$

(изменением момента инерции I_0 относительно точки опоры пренебрегаем). Частота малых колебаний будет равна

$$\omega = \sqrt{\frac{15}{26}} \frac{g}{R}$$

9.45. $\omega = \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}}$.

9.46. Выразим поступательную скорость центра шарика через его угловую скорость $\dot{\varphi}$ и скорость поворота $\dot{\alpha}$ относительно центра сферы (см. рисунок):

$$r\dot{\varphi} = (R-r)\dot{\alpha}$$

Потенциальная энергия шарика при малых отклонениях:

$$mg(R-r)(1 - \cos \alpha) \approx mg(R-r) \frac{\alpha^2}{2}$$

Кинетическая энергия:

$$m(R-r)^2 \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{2}{5} m r^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{7}{5} m (R-r)^2 \frac{\dot{\alpha}^2}{2}$$

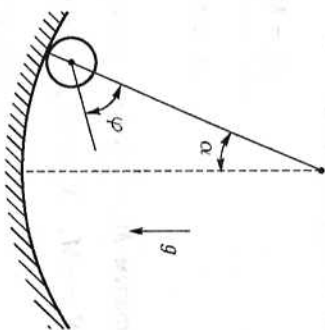
где первый член учитывает поступательное движение, а второй член — вращение шарика относительно центра. Сравнивая энергию шарика

$$\frac{7}{5} m (R-r)^2 \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + mg(R-r) \frac{\alpha^2}{2}$$

с энергией гармонического осциллятора $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$, найдем частоту колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{5}{7}} \frac{g}{(R-r)}$$

9.47. $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L} + 6 \frac{k}{m}}$.



9.48. $\omega = \sqrt{\frac{3g}{H}}$, H — длина нити.

9.49. $\omega = \sqrt{\frac{g}{H}}$, H — длина нити.

9.50. Расположим начало системы координат в центре масс системы так, чтобы в положении равновесия ось x была параллельна пружине. Пусть левый стержень AB составляет угол φ_1 , а правый стержень BC — угол φ_2 с осью x . Введем относительно координату $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Если система в целом не вращается, то угловые скорости стержней равны по величине $\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_2$ и $\dot{\varphi} = 2\dot{\varphi}_2$. Координаты средних точек стержней M и N связаны уравнениями

$$N_x = M_x + \frac{L}{2} \cos \varphi_1 + \frac{L}{2} \cos (\pi - \varphi_2)$$

$$N_y = M_y + \frac{L}{2} \sin \varphi_1 - \frac{L}{2} \sin (\pi - \varphi_2),$$

причем $M_x = \frac{L}{4} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)$, $M_y = \frac{L}{4} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$ и, следовательно, $N_x = -M_x$, $N_y = -M_y$. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m}{2} (\dot{M}_x^2 + \dot{M}_y^2 + \dot{N}_x^2 + \dot{N}_y^2) + \frac{mL^2}{24} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2).$$

Выражая $\dot{M}_x, \dot{N}_x, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ через φ , для кинетической энергии получим

$$T = \left(\frac{5}{96} + \frac{\cos \varphi}{32} \right) mL^2 \dot{\varphi}^2.$$

Длина пружины $|AC| = \sqrt{2L^2(1 - \cos \varphi)} = 2L \sin \frac{\varphi}{2}$. Ее потенциальная

энергия $U = \frac{k}{2} (|AC| - L)^2 = \frac{kL^2}{2} (2 \sin \frac{\varphi}{2} - 1)^2$. При малых колебаниях $\varphi =$

$= 60^\circ + \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi \ll 1$, при этом $\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta\varphi$, $\cos \frac{\varphi}{2} \approx \frac{1}{2}$, и с точностью до членов второго порядка энергия системы запишется в виде

$$E = T + U = \frac{13}{192} mL^2 \left(\frac{d\Delta\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{3}{8} kL^2 (\Delta\varphi)^2.$$

Полная энергия сохраняется: $\frac{dE}{dt} \propto \frac{13}{96} m \frac{d^2\Delta\varphi}{dt^2} + \frac{3}{4} k\Delta\varphi = 0$. Из полученного уравнения найдем частоту колебаний системы:

$$\omega = \sqrt{\frac{72k}{13m}}$$

Если точка B закреплена, то кинетическая энергия системы будет

$$T = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) = \frac{mL^2}{12} \dot{\varphi}^2. \text{ Полная энергия при малых колебаниях имеет вид } E = \frac{mL^2}{12} \left(\frac{d\Delta\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{3}{8} kL^2 (\Delta\varphi)^2, \text{ т. е. частота колебаний равна}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{9k}{2m}}$$

9.4. Глоское движение тел

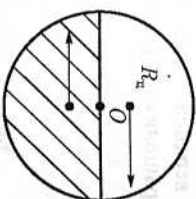
9.52. $V_{н.ц.} = \frac{2}{3}V$, $\omega = \frac{4V}{3(R+2r)}$.

9.53. $x = \frac{L}{18}$.

9.55. $x = \frac{L}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{M}{m}} - 1$.

9.57. Считаем, что диск распался на две половинки вдоль горизонтального диаметра (см. рисунок). Центр масс каждой из половинок удален от центра диска O на расстояние $R_{ц} = \frac{4}{3\pi}R$ (для нахождения положения центра масс удобно воспользоваться 2-ой теоремой Гюльдена). В момент разделения центра масс каждой из половинок имел горизонтальную скорость $V_x = \omega R_{ц}$. После разделения половинки будут продолжать двигаться в противоположные стороны с такой же поступательной скоростью

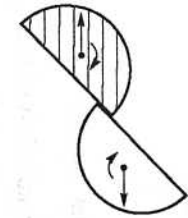
$$V_x = \pm \frac{4}{3\pi} \omega R.$$



и вращаться вокруг своих центров масс с угловой скоростью ω' . В момент разделения точка O половинок имела нулевую скорость, т. е.

$V_x - \omega' R_{ш} = 0$. Отсюда найдем, что угловая скорость вращения половиннок после разъединения не изменится:

$$\omega' = \omega.$$



Заметим, что после поворота на угол $\varphi \sim 134^\circ$ (определяемым уравнением $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \varphi$) половинки задедут друг друга, как это показано на рисунке слева.

$$9.58. V_{шм} = \frac{V}{2}; \quad \Omega = \frac{3V}{2L}.$$

$$9.59. V_{шм} = 0; \quad \omega = \frac{3}{4}\Omega.$$

9.60. В Ц-системе шайбы движутся навстречу со скоростью $V/2$ каждая, а их моменты импульса относительно центра равны $L = MVR/2$, где M – масса, а R – радиус шайбы. В Л-системе после сближения шайбы движутся поступательно со скоростью $V/2$ и вращаются вокруг центра масс суммарным моментом импульса $2I\omega$, где $I = \frac{3}{2}MR^2$ – момент инерции каждой шайбы относительно точки склеивания. Момент импульса сохраняется $2L = 2I\omega$, так что угловая скорость вращения шайб равна $\omega = \frac{V}{3R}$. Максимальную скорость вторая шайба получит при отрыве в верхней точке, в которой скорость центра масс и линейная скорость вращения направлены в одну сторону:

$$V_{шм}^{\max} = \omega R + \frac{V}{2} = \frac{5}{6}V.$$

$$9.61. V = V_0 \cdot \left(1 - \frac{2\rho V_0 t}{m + \rho L}\right)^{-1/2}$$

9.62. Направим ось y вдоль борта, а ось x – перпендикулярно ему. При ударе о борт y -компонента силы трения $F_y^{тр}$ гасит y -компоненту скорости шайбы и раскручивает ее относительно центра масс. Уравнения движения можно записать в виде

$$m\dot{V}_y = F_y^{тр}, \quad \frac{d(I\omega)}{dt} = F_y^{тр} R,$$

где $F_y^{тр} R$ – момент силы трения, I – момент инерции шайбы относительно центра инерции. Пренебрегая деформацией при ударе и полагая $I = \frac{mR^2}{2}$, $\rho = R$, получим

$$\omega = \frac{V\sqrt{2}}{R}.$$

$$9.63. N = \frac{3L}{4\pi R} \approx 24 \text{ оборота.}$$

9.64. После первого (и нечетного) числа отскоков

$$V_1 = \frac{3}{7}V_0 + \frac{4}{7}\omega R, \quad \omega_1 = \frac{10V_0}{7R} - \frac{3}{7}\omega.$$

После второго (и четного числа) отскоков горизонтальная и угловая скорости равны первоначальным значениям:

$$V_2 = V_0, \quad \omega_2 = \omega.$$

9.65. а) В отсутствие трения по горизонтальной поверхности стержень не действует, центр масс стержня продолжает двигаться вертикально, и законы сохранения энергии и момента импульса относительно края плиты запишутся в виде

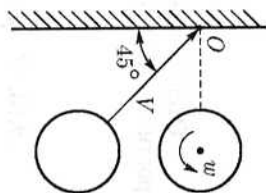
$$\begin{aligned} \frac{mV^2}{2} &= \frac{mV'^2}{2} + \frac{mL^2\omega^2}{2}, \\ \frac{mVL}{2} \sin \alpha &= \frac{mV'L}{2} \sin \alpha + \frac{mL^2\omega}{2}, \end{aligned}$$

где V' – вертикальная поступательная скорость центра масс стержня после удара, а ω – его угловая скорость вращения. Отсюда угловая скорость и вертикальная компонента скорости нижнего конца стержня после удара

$$\omega = \frac{12V}{L} \frac{\sin \alpha}{3 \sin^2 \alpha + 1}, \quad V'_{\text{нижн}} = V' - \frac{\omega L}{2} \sin \alpha = -V.$$

б) В отсутствие проскальзывания $V'_x = \frac{\omega L}{2} \cos \alpha$ (ось x направлена горизонтально), а законы сохранения энергии и момента импульса имеют вид

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mV'^2}{2} + \frac{mL^2\omega^2}{2}$$



$$mV \frac{L}{2} \sin \alpha = \frac{mL}{2} (V'_x \cos \alpha + V'_y \sin \alpha) + \frac{mL^2}{12} \omega.$$

Отсюда найдем угловую скорость и вертикальную компоненту скорости нижнего конца стержня после удара:

$$\omega = \frac{3V}{L} \sin \alpha, \quad V'_{\text{нижн}} = -V.$$

9.66. У вращающейся шайбы силы трения большинства участков, соприкасающихся с плоскостью, непараллельны поступательной скорости шайбы и при векторном сложении они частично вычитаются. В результате сила трения, действующая на вращающуюся шайбу, будет меньше, чем у шайбы, движущейся поступательно, и при одинаковых начальных поступательных скоростях вращающаяся шайба пройдет больший путь.

$$9.67. \quad N = \frac{P}{\alpha \pi^2 R^3}, \quad L = \frac{P}{\alpha S}.$$

$$9.68. \quad Q = \frac{2}{3} T_{\text{вращения}}.$$

9.69. Пусть обруч брошен со скоростью V_0 и закручен против движения с угловой скоростью ω_0 . Сила трения уменьшает поступательную и угловую скорость обруча:

$$V = V_0 - \mu g t \quad \text{и} \quad \omega = -\omega_0 + \frac{\mu g t}{R},$$

где μ — коэффициент трения, R — радиус обруча. При выравнивании скоростей $V = \omega R$ через время $T = \frac{V_0 + \omega_0 R}{2\mu g}$ проскальзывание прекратится, и обруч будет двигаться с неизменной скоростью

$$V_{\text{уст}} = \frac{V_0 - \omega_0 R}{2}.$$

Обруч покатится назад, если угловая скорость закрутки

$$\omega_0 > \frac{V_0}{R}.$$

$$9.71. \quad a = \frac{m+M}{2m+M} g \sin \alpha.$$

9.72. Если $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{2} \mu$, то $f_t = \frac{2}{7} Mg \sin \alpha$, $f_n = Mg \cos \alpha$.

Для $\operatorname{tg} \alpha > \frac{1}{2} \mu$ $f_t = \mu Mg \cos \alpha$, $f_n = Mg \cos \alpha$.

$$9.73. \quad \omega = \frac{32}{47} \frac{V}{R}.$$

$$9.74. \quad \dot{\omega} = \frac{32}{47} \frac{g \sin \alpha}{R}.$$

$$9.76. \quad l = \frac{\omega R}{2g \sin \alpha}.$$

$$9.77. \quad N = \frac{T}{mg} \frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{3\mu \cos \alpha - \sin \alpha}.$$

9.79. Угол поворота α относительно цилиндрической горки (см. рисунок) связан с углом поворота скатывающегося цилиндра относительно своей оси φ соотношением

$$\alpha R = (\varphi - \alpha) r.$$

Кинетическая энергия скатываемого цилиндра определяется энергией поступательного движения

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{m\dot{\alpha}^2 (R+r)^2}{2} = \frac{mr^2 \dot{\varphi}^2}{2}$$

и вращательного движения

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{mr^2 \dot{\varphi}^2}{4}.$$

Закон сохранения энергии запишется в виде

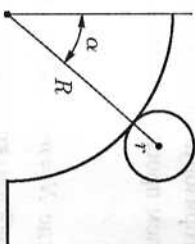
$$\frac{3}{4} mr^2 \dot{\varphi}^2 = mg (R+r) (1 - \cos \alpha).$$

В точке отрыва сила реакции опоры равна нулю, а центростремительное ускорение создается нормальной компонентой силы тяжести

$$\frac{mr^2 \dot{\varphi}^2}{R+r} = mg \cos \alpha.$$

Отсюда $\cos \alpha = \frac{4}{7}$, и высота точки отрыва равна

$$H = (R+r) \cos \alpha = \frac{4}{7} (R+r).$$



9.80. Когда палочка повернется без проскальзывания на угол φ , ее угловая скорость станет $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos \varphi)}$, а угловое ускорение $-\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2L} \sin \varphi$ (угол отсчитывается от вертикали). Скорость центра палочки будет иметь составляющие

$$V_x = \frac{L}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \quad \text{и} \quad V_y = \frac{L}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi$$

(если направить ось y вниз, вдоль поля тяжести). Горизонтальная и вертикальная компоненты ускорения центра палочки будут иметь величину

$$a_x = \frac{L}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \quad \text{и} \quad a_y = \frac{L}{2} \ddot{\varphi} \sin \varphi + \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi.$$

Проскальзывание начнется, когда сила трения не сможет обеспечить горизонтальное ускорение a_x палочки. В предельном случае перед началом проскальзывания

$$F_{\text{тр}} = \mu N = ma_x,$$

где $N = mg - ma_y$ — сила нормального давления палочки на стол. Отсюда найдем коэффициент трения

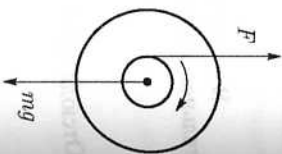
$$\mu = \frac{a_x}{g - a_y} = \frac{3 \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin^3 \varphi}{(1/3) - 2 \cos \varphi + 3 \cos^3 \varphi}.$$

В случае $\varphi = 45^\circ$ коэффициент трения равен $\mu \approx 0,2$.

9.81. а) $f_n = \frac{Mg}{4}$, $f_r = 0$; б) $f_n = \frac{Mg}{4}$, $f_r = \frac{3}{2} Mg$.

9.83. Если нить тянуть вверх с силой F (см. рисунок), то катушка будет вращаться с угловым ускорением $\dot{\omega} = \frac{Fr}{I}$, где I — момент инерции катушки относительно оси симметрии r — ее малый радиус. Нить будет разматываться с ускорением $a = \dot{\omega} \cdot r$. Поскольку катушка не падает, то $F = mg$, и ускорение нити

$$a = \frac{mr^2}{I} g = \frac{10}{9} g.$$



Здесь использовано, что для указанных размеров катушки ее масса и момент инерции при плотности ρ имеют величину $m = \frac{29}{3} \pi r$ и $I = \frac{87}{10} \pi r$.

9.84. Если нити магнетика натянуты с суммарной силой T , то при движении вниз уравнения движения имеют вид

$$m\dot{V} = mg - T, \quad I\dot{\omega} = T \cdot r,$$

где V — поступательная скорость магнетика, ω — угловая скорость его вращения, r — радиус оси магнетика (см. рис. *d*). Поскольку $V = \omega r$, то ускорение магнетика

$$\dot{V} = \frac{g}{1 + (I/mr^2)} = \text{const},$$

и натяжение нитей при движении магнетика вниз

$$T = mg \frac{1}{1 + (mr^2/I)}.$$

В нижней точке нить перебрасывается на другую сторону, скорость магнетика меняет знак, и магнетик начинает подниматься (см. рис. *b*). Уравнение движения имеет вид $m\dot{V} = T - mg$, а натяжение нитей становится равным

$$T = mg \frac{1}{1 - (mr^2/I)}.$$

9.5. Вращение с изменением ориентации оси. Гирокон

9.85. $\omega_{\text{уст}} = \frac{3}{8} \omega \cos \alpha.$

9.86. $\omega_{\text{уст}} = \omega \frac{\sqrt{34}}{8} \approx 0,73 \omega.$

9.88. $\Omega = \frac{gL}{\omega R^2} \approx 0,9 \text{ рад/с}.$

9.89. Устойчиво при $\omega > \sqrt{\frac{g}{4r}}$.

9.90. Вращение устойчиво при $\omega > \sqrt{\frac{2g}{3r}}$.

9.91. Пусть моменты инерции относительно главных осей 1, 2 и 3 имеют величину I_1, I_2 и I_3 , а волчок закручен относительно оси 1 с угловой скоростью ω_1 . Небольшое возмущение вращения $\omega_2, \omega_3 \ll \omega_1$ описываются уравнениями Эйлера:

$$\omega_2 + \left(\frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega_1 \right) \omega_3 = 0,$$

$$\dot{\omega}_3 + \left(\frac{I_2 - I_1}{I_3} \omega_1 \right) \omega_2 = 0.$$

Считая $\omega_1 = \text{const}$, продифференцируем первое уравнение по времени и, подставив в него $\dot{\omega}_3$ из второго уравнения, для ω_2 получим

$$\ddot{\omega}_2 + \left[\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 \right] \cdot \omega_2 = 0. \quad (1)$$

Если $I_2 < I_1 < I_3$, то коэффициент

$$\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 = -\gamma^2$$

отрицателен, и решение уравнения (1) имеет вид

$$\omega_2 \approx \omega_2(0) \cdot e^{\pm \gamma t},$$

т. е. случайное отклонение вращения от оси со средним значением момента инерции приводит к экспоненциальному нарастанию скорости ω_2 (и ω_3), и система становится неустойчивой.

При начальной закрутке ω_1 вокруг оси с экстремальными значениями момента инерции ($I_1 < I_2 < I_3$ или $I_1 > I_2 > I_3$) коэффициент

$$\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 = \omega^2$$

положителен, и случайные возмущения ω_2, ω_3 в последующем меняются по гармоническому закону вида

$$\omega_2 \approx \omega_2(0) \cdot e^{\pm i \omega t}.$$

Экспоненциального нарастания случайных отклонений нет, и вращение относительно оси с экстремальными значениями момента устойчиво.



10. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

10.3. Пусть \hat{i}_0 и \hat{j}_0 — орты Л-системы координат, \hat{i} и \hat{j} — орты, связанные с диском, а вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси z. Проекции вращающихся ортов на оси Л-системы равны

$$\begin{aligned} i_x &= \hat{i} \cdot \hat{i}_0 = \cos \omega t, & i_y &= \hat{i} \cdot \hat{j}_0 = \sin \omega t, \\ j_x &= -\sin \omega t, & j_y &= \cos \omega t. \end{aligned}$$

Скорость изменения ортов можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{i}_x &= -\omega \sin \omega t = -\omega i_y = (\vec{\omega} \times \hat{i})_x, \\ \dot{i}_y &= \omega \cos \omega t = \omega i_x = (\vec{\omega} \times \hat{i})_y. \end{aligned}$$

Отсюда получим связь между ортами и их производными по времени:

$$\dot{\hat{i}} = \vec{\omega} \times \hat{i} \quad \text{и} \quad \dot{\hat{j}} = \vec{\omega} \times \hat{j}.$$

Радиус-вектор точки на диске в проекции на вращающиеся орты имеет вид $\vec{r}_0(t) = x(t)\hat{i}(t) + y(t)\hat{j}(t) =$
 $= (x \cos \omega t - y \sin \omega t)\hat{i}_0 + (x \sin \omega t + y \cos \omega t)\hat{j}_0,$
 так что закон ее движения в Л-системе будет

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x(t) \cos \omega t - y(t) \sin \omega t, \\ y_0(t) &= x(t) \sin \omega t + y(t) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Для скорости точки в Л-системе соответственно имеем

$$\vec{V}_0(t) = \dot{x}_0(t) \hat{i}_0 + \dot{y}_0(t) \hat{j}_0 = \vec{V}(t) + x \vec{\omega} \times \hat{i} + y \vec{\omega} \times \hat{j} = \vec{V}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}(t).$$

Полученное соотношение типа

$$\vec{V}_0(t) = \dot{\vec{r}}_0(t) = \vec{V}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}(t)$$

справедливо для производной по времени любого вектора. В частности, для связи ускорений в инерциальной и вращающейся системах отсчета можно записать

$$\vec{a}_0(t) = \dot{\vec{V}}_0(t) = \dot{\vec{V}}(t) + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t) + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}(t) + \vec{\omega} \times [\vec{V}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}(t)].$$

Т. е.

$$\vec{a}_{\text{ин}} = \vec{a}_{\text{вп}} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{вп}} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

10. Неинерциальные системы отсчета

10.4. При угловой скорости вращения Земли $\omega = 7.3 \cdot 10^{-5}$ рад/с и максимальной скорости падения $V_{\text{макс}} \approx \sqrt{2gh} \approx 10^2$ м/с ускорение Кориолиса

$$2(\vec{V} \times \vec{\omega})_{\text{макс}} \approx 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2 \ll g,$$

т. е. можно считать, что в вертикальном направлении тело движется с ускорением g , а под действием силы Кориолиса отклоняется к востоку. Направив в системе Земли ось y к востоку, найдем ускорение для ширины $\varphi = 60^\circ$:

$$a_y = V\omega \approx g\omega t,$$

(здесь использована зависимость $V \approx gt$). Интегрируя, найдем, что за время падения $t = \sqrt{2h/g} \approx 10$ с тело отклонится к востоку на

$$y(t) \approx \frac{1}{6} g\omega t^3 \approx 0,12 \text{ м.}$$

10.5. Поверхность воды перпендикулярна к равнодействующей силы тяжести и силы Кориолиса (центробежная сила на наклон воды выйдет несущественно). Сила Кориолиса направлена на запад и по модулю равна

$$F = 2mV\omega |\sin(180^\circ - \varphi)| = 2mV\omega \sin \varphi.$$

На западном берегу уровень воды будет выше, и угол наклона воды θ определяется соотношением

$$\text{tg } \theta \sim \frac{F}{mg} = \frac{2}{g} V\omega \sin \varphi.$$

Но $V\omega \ll g$, поэтому $\theta \approx \text{tg } \theta$. Для угла наклона получаем

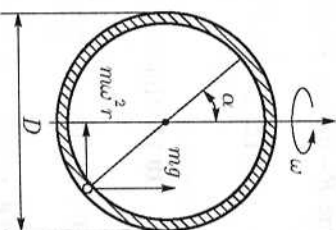
$$\theta \approx \frac{2V\omega \sin \varphi}{g}.$$

10.6. Отклонение $\Delta y = \frac{4}{3} \frac{\Omega V^3}{g^2} \cos \varphi$ к западу.

10.8. Из рассмотрения сил, возникающих при малом смещении пузрычка из нижнего положения равновесия (см. рис., $\text{tg } \alpha \ll 1$), найдем условие устойчивости равновесия $m\omega^2 r \cos \alpha > mg \sin \alpha$,

т. е.

$$\omega > \sqrt{\frac{2g}{D}}.$$



10.9. $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$.

10.10. В СО Земли полный (гравитационный и центробежный) потенциал имеет вид

$$U = -\frac{GM}{r} + \frac{a_2}{2} \frac{GM}{r} \left[\frac{R^2}{r^2} (3\cos^2\theta - 1) \right] - \frac{\omega^2 r^2 \sin^2\theta}{2}$$

На северном полюсе ($r = R_p$, $\theta = 0$) потенциал имеет величину

$$U_p \approx -\frac{GM}{R} \left(1 + \frac{R - R_p}{R} a_2 \right),$$

на экваторе

$$U_E \approx -\frac{GM}{R} \left(1 + \frac{a_2}{2} \right) - \frac{\omega^2 R^2}{2}$$

Из равенства $U_E = U_p$ получим соотношение

$$\frac{R - R_p}{R} \approx \frac{3a_2}{2} + \frac{\omega^2 R^3}{2GM}$$

Подставляя $\frac{\omega^2 R^3}{GM} = \frac{\omega^2 R^2}{g} \approx 3,5 \cdot 10^{-3}$, $a_2 = 1,1 \cdot 10^{-3}$, найдем разность экваториального и полярного радиусов:

$$R - R_p \approx 3,4 \cdot 10^{-3} \cdot R \approx 20 \text{ км.}$$

10.11. Разность глубин океана

$$\Delta H = \frac{\omega^2 R H}{g} \approx 10 \text{ м,}$$

где R — радиус Земли, $H = 3$ км — средняя глубина океана.

10.12. $x = \left(L - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2} \right) ch \frac{\omega l}{\sqrt{2}} + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}$.

10.13. При $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ закон движения имеет вид $x = \frac{k}{2m} L t^2 + L$,

при $\omega > \omega_0$ $x = \frac{L}{\omega^2 - \omega_0^2} \left[\omega^2 ch \left(\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} \right) - \omega_0^2 \right]$,

при $\omega < \omega_0$ $x = \frac{L}{\omega_0^2 - \omega^2} \left[\omega_0^2 - \omega^2 \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \right]$.

10.14. $T = \frac{1}{\omega} \ln \left(\frac{L}{x_0} + \sqrt{\frac{L^2}{x_0^2} - 1} \right)$, $V = x_0 \omega \operatorname{sh} \omega T$.

10.15. $T = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} - \mu \frac{\Omega}{\omega} \right)$, $V = \omega R \operatorname{Exp} \left(-\frac{\mu R \Omega}{2\omega} \right)$, где $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$.

10.16. $\ddot{x} = x \cdot (\omega \sin \alpha)^2 - \mu \omega \frac{\dot{x}}{|x|} \sqrt{4x^2 + (x\omega \cos \alpha)^2} \cdot \sin \alpha$.

10.17. Рассмотрим равновесие стержня в неинерциальной системе отсчета, относительно которой стержень неподвижен. Момент силы тяжести относительно точки подвеса $\frac{MgL}{2} \sin \alpha$. Момент центробежной силы

$$\int_0^L \omega^2 l \sin \alpha \cdot l \cos \alpha \cdot \frac{M}{L} dl = \frac{M \omega^2 L^2}{3} \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Равновесие возможно, если

$$\frac{m \omega^2 L^2}{3} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{mgL}{2} \sin \alpha,$$

при этом угол наклона определяется условиями

$$1) \sin \alpha = 0 \text{ или } 2) \cos \alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{\omega^2 L}.$$

Если $\omega^2 \leq \frac{3g}{2L}$, то равновесие возможно только при $\alpha = 0$.

Если $\omega^2 > \frac{3g}{2L}$, то равновесие при $\alpha = 0$ становится неустойчивым,

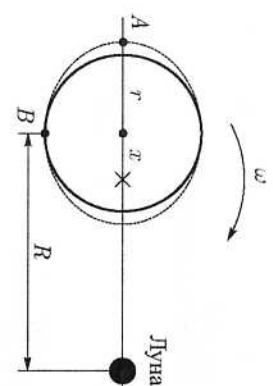
тогда как устойчивому равновесию отвечает $\cos \alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{\omega^2 L}$.

10.18. $t = \frac{\ln 3}{\omega}$.

10.19. Оценим высоту прилива на экваторе, считая, что Земля и Луна вращаются вокруг оси, удаленной от центра Земли на расстоянии x и перпендикулярной к плоскости экватора (см. рисунок). В системе центра масс Земля-Луна, вращающейся с угловой скоростью ω , потенциал в точках A и B обусловлен гравитационными потенциалами Земли и Луны, а также центробежным потенциалом относительно оси вращения:

$$U_A = -\frac{GM}{r+h} - \frac{Gm}{R+r+h} - \frac{\omega^2(x+r+h)^2}{2},$$

$$U_B = -\frac{GM}{r} - \frac{Gm}{\sqrt{R^2+r^2}} - \frac{\omega^2(r^2+x^2)}{2},$$



где M , r – масса и радиусе Земли, m – масса Луны, R – расстояние между Лунной и Землей, $x = \frac{m}{m+M}R$ – координата центра масс, h – искомая разность уровней океана в точках A и B . Так как $h \ll r \ll R$, то считаем

$$\frac{1}{r+h} \approx \frac{1}{r} - \frac{h}{r^2},$$

$$\frac{1}{R+r+h} \approx \frac{1}{R} - \frac{r+h}{R^2} + \frac{r^2}{R^3}.$$

Поверхность воды эквипотенциальна $U_A = U_B$, откуда

$$\frac{GM}{r^2}h - \frac{3Gm}{2R^3}r^2 + \frac{Gm}{R^2}(r+h) \approx \omega^2(rx+r+h+xh).$$

Из соотношения $M\omega^2x = \frac{GmM}{R^2}$ найдем $\omega^2 = G\frac{m+M}{R^3}$ и высоту прилива

$$h \approx \frac{3}{2} \frac{m}{M} \frac{r^4}{R^3} = 0,6 \text{ м.}$$

Высота прилива, вызванного Солнцем:

$$h_c = h_{\text{л}} \cdot \frac{M_c}{m} \left(\frac{R}{R_{\text{с}}} \right)^3 \approx 0,2 \text{ м,}$$

где M_c – масса Солнца, $R_{\text{с}}$ – расстояние Земля – Солнце.

10.20. Представим станцию как гантель из двух тел массой m_1 и m_2 , которые вращаются вокруг общего центра масс с угловой скоростью ω . При перекачке топлива полный момент количества движения сохраняется:

$$L = m_1 \left(\frac{m_2 d}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega + m_2 \left(\frac{m_1 d}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega = \mu d^2 \omega = I \omega,$$

здесь $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса, $I = \mu d^2$ – момент инерции станции.

В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью ω , действует центробежный потенциал и энергия станции в этой СО запишется как

$$E = -\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2 d}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega^2 - \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1 d}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega^2 = -\frac{I \omega^2}{2} = -\frac{L^2}{2I}.$$

При перекачке топлива момент инерции станции I достигает максимума при равном количестве топлива в резервуарах, а потом убывает до первоначального значения. Необходимы затраты на перекачку только половины топлива, потом оно потечет само. Затраты энергии на перекачку топлива равны

$$A = \frac{L^2}{2} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) = \frac{M d^2 \Omega^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{M}{m} \right) \left(1 + 2 \frac{M}{m} \right)^{-3}.$$

10.21. В установившемся режиме трубка будет вращаться равномерно. Перейдем в систему отсчета, вращающуюся вместе с трубкой с угловой скоростью Ω . В этой СО на трубку со стороны воды, текущей со скоростью $\frac{V}{2}$, действует сила Кориолиса

$$F_K = 2\Omega \rho S L \frac{V}{2},$$

а также действует реактивная сила

$$F_p = \rho S \left(\frac{V}{2} \right)^2.$$

Трубка в выбранной системе отсчета покоится, и суммарная сила равна нулю. Отсюда получаем

$$\Omega = \frac{V}{4L}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. Берксовский курс физики // *Механика*. – Наука, 1971.
- [2] А. Н. Матвеев. *Механика и теория относительности*. – Высшая школа, 1976.
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. *Теория поля*. – Наука, 1988.
- [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. *Механика*. – Наука, 1988.
- [5] Г. И. Копылов. *Всего лишь кинематика*. – Наука, 1981.
- [6] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. *Фейнмановские лекции по физике*. – Мир, 1977.
- [7] Э. Тэйлор, Дж. А. Уиллер. *Физика пространства-времени*. – Мир, 1971.
- [8] В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. *Сборник задач по электродинамике*. – Наука, 1970.
- [9] А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Токольски. *Сборник задач по теории относительности и гравитации*. – Мир, 1979.
- [10] Л. Б. Окунь. *Понятие массы* // УФН, **158**, 511 (1989).
- [11] В. Вайскопф. *Видимая форма быстродвижущихся тел* // УФН, **84**, 183 (1964)
- [12] Д. В. Сивухин. *Общий курс физики*. – Т.1. – Наука, 1989.
- [13] Г. Л. Коткин и В. Г. Сербо. *Сборник задач по классической механике*. – Наука, 1977.
- [14] С. М. Козел, Э. И. Рашба, С. А. Славягинский // *Сборник задач по физике*. – Наука, 1987.
- [15] И. Е. Иродов, И. В. Савельев, О. И. Замша. *Сборник задач по общей физике*. – Наука, 1975.
- [16] С. П. Стрелков, Д. А. Сивухин, В. А. Угаров, И. А. Яковлев // *Сборник задач по общему курсу физики. Механика*. – Наука, 1977.
- [17] Е. С. Патянский, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханжаев, Г. Н. Яковенко // *Сборник задач по аналитической механике*. – Наука, Физматлит, 1996.

- [18] И. В. Мещерский. *Задачи по теоретической механике.* – СПб.: Лань, 1998.
- [19] К. Т. McDonald. *Motion of a leaky tank cap* // American Journal of Phys., **59**, 813 (1991).
- [20] М. Д. Спектор. *Об изменении энергии осциллятора с переменной массой* // Сибирский физический журнал, № 2, 6 (1993).

Бельченко Юрий Иванович
Гильё Евгений Александрович
Сигаидзе Зураб Карлович

МЕХАНИКА ЧАСТИЦ И ТЕЛ В ЗАДАЧАХ
Учебное пособие

Рисунки Е. А. Гильёва, В. В. Разоренова
Технический редактор А. В. Широбокко
Компьютерный набор и верстка А. В. Моторин
Корректор Г. Г. Теркина

Подписано в печать 31.07.2008. Формат 60×84^{1/16}.
Усл. печ. л. 14,42. Уч. изд. л. 14,12. Гарнитура Таймс.
Бумата офсетная №1. Печать офсетная. Заказ №41.
Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
<http://shop.rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru