

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра **ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ**

Направление подготовки **03.03.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **БАКАЛАВРИАТ**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

Устюжанин Виктор Олегович

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы Дисперсионный интерферометр для токамака «Глобус

**«К защите допущена»**

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., профессор

зам. директора ИЯФ СО РАН по научной работе

Иванов А. А./.....  
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....2018 г.

**Научный руководитель**

к. ф.-м. н

с. н. с. лаб. №9.1 ИЯФ СО РАН

Соломахин А. Л./.....  
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....2018 г.

Дата защиты: «.....».....2018 г.

Новосибирск, 2018

## Оглавление

Введение.....	1
1. Дисперсионный интерферометр.....	3
Интерферометрия плазмы.....	3
Дисперсионный интерферометр.....	5
2. Генерация второй гармоники .....	7
Гауссовы пучки .....	7
Нелинейный кристалл .....	9
Генерация второй гармоники.....	15
3. Тепловая линза .....	18
Эффект тепловой линзы .....	18
Фотоупругий эффект .....	19
4. Моделирование и расчёты .....	21
Распределение температуры в кристалле.....	21
Учёт эффекта тепловой линзы.....	23
Добавка от фотоупругого эффекта.....	25
Влияние эффекта тепловой линзы на генерацию второй гармоники.....	30
5. Выводы и заключение .....	33
Список литературы .....	34

## Введение

В исследованиях, связанных с физикой плазмы и УТС, широко используется интерферометрия. С её помощью можно определять такой параметр как линейная плотность плазмы -  $\int n_e dl$ , где  $n_e$  – концентрация электронов плазмы. Линейная плотность плазмы – это интегральная по направлению зондирования электронная плотность. Традиционно в интерферометрии плазмы используются интерферометры с пространственным разделением каналов (Майкельсона или Маха-Цандера, рис. 1) [1, 2].

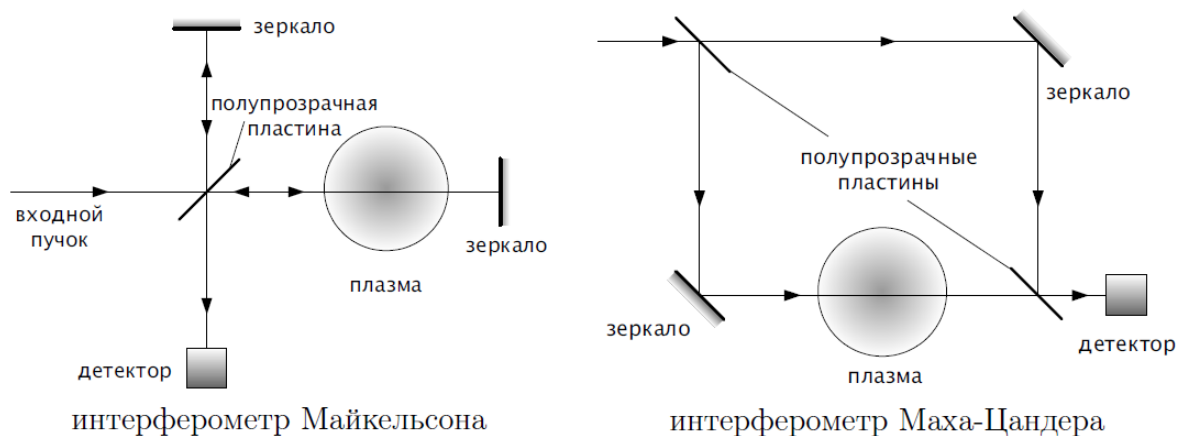


Рис. 1. Интерферометры с пространственным разделением каналов

Но у таких систем есть важный недостаток - высокая чувствительность к вибрациям. Для компенсации подобного паразитного эффекта, влияющего на результат измерения линейной плотности, был предложен дисперсионный интерферометр. Дисперсионный интерферометр – это интерферометр, оптические каналы которого разделены по частотам, причём излучение в коротковолновом канале формируется методом удвоения частоты зондирующего излучения [3]. Такая схема чувствительна только к дисперсии среды, находящейся между удвоителями частоты.

**Цель данной работы** - разработка оптической схемы дисперсионного интерферометра для установки «Глобус-М2» в ФТИ им. А. Ф. Иоффе.

В качестве основы был взят дисперсионный интерферометр на установке газодинамической ловушки (ГДЛ) в Институте ядерной физики им. Г. И.

Будкера [4]. Для реализации данной цели были поставлены следующие **задачи**:

Провести моделирование и анализ эффектов, влияющих на распространение зондирующего излучения через удвоитель частоты (нелинейный кристалл).

# 1. Дисперсионный интерферометр

## Интерферометрия плазмы

Рассмотрим в одной точке пространства две волны одинаковой частоты:

$$E_1 = E_{01} \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$E_2 = E_{02} \sin(\omega t + \varphi_2),$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — начальные фазы волн.

Усреднённая по периоду волны величина  $E^2 = (E_1 + E_2)^2$  является интенсивностью суммарной волны в данной точке:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi),$$

где  $I_{1,2} = E_{01,02}^2/2$ ,  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Получаем, что интенсивность суммарной волны отлична от суммы интенсивностей составляющих волн. В результирующей формуле имеется дополнительное (интерференционное) слагаемое, зависящее от разности фаз волн. Фаза волны состоит из начальной фазы и фазы, приобретенной в процессе распространения, равной  $\Delta\varphi = k \int n(l) dl$ , где  $n(l)$  — показатель преломления вдоль пути волны. Если рассмотреть две волны с одинаковыми начальными фазами, то получится, что разность фаз зависит от разности оптических путей:

$$\Delta\varphi = k \int_1 n(l) dl - k \int_2 n(l) dl.$$

Таким образом, если одна волна будет распространяться через исследуемую среду, а другая вне среды, как эталонная, то, измеряя результат интерференции этих волн (интенсивность результирующей волны), можно

восстановить разность фаз волн и сделать вывод о показателе преломления среды.

В данном случае исследуемой средой является плазма. Показатель преломления для плазмы при условии, что частота волны  $\omega$  много больше плазменной  $\omega_{pe}$  и циклотронной  $\omega_{ce}$  частот, и без учета столкновений равен [4]:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}},$$

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e},$$

где  $n_e$  — электронная плотность,  $m_e$  — масса электрона,  $e$  — заряд электрона.

Тогда:

$$n \approx 1 - \frac{2\pi n_e e^2}{m_e \omega^2}. \quad (1)$$

Подставив значение показателя преломления (1) в формулу для разности фаз двух волн, получаем:

$$\Delta\varphi = \frac{e^2}{mc^2} \lambda \int n_e dl + \varphi_0,$$

где  $\lambda$  — длина волны,  $\varphi_0$  — набег фаз, не связанный с плазмой,  $\int n_e dl$  — линейная плотность плазмы. Таким образом, есть связь между разностью фаз волн и линейной плотностью плазмы. Этот факт позволяет измерять линейную плотность плазмы путем измерения интенсивности результата интерференции двух волн.

## Дисперсионный интерферометр

Дисперсионный интерферометр (ДИ) - это интерферометр, оптические каналы которого разделены по частотам, причём излучение в коротковолновом канале формируется методом удвоения частоты зондирующего излучения. Сформулируем принцип работы ДИ (рис. 2). Излучение источника (в качестве источника используется лазер) проходит через первый удвоитель частоты, где волна первой гармоники частично преобразуется в волну второй гармоники. Далее обе гармоники проходят через плазму, где каждая волна получает свой набег фазы. После прохождения через плазму первая и вторая гармоники попадают во второй удвоитель частоты, где излучение первой гармоники вновь частично преобразуется в излучение второй гармоники. После второго удвоителя частоты излучение первой гармоники поглощается фильтром. В результате на выходе фильтра остаются две волны второй гармоники: одна получена в первом удвоителе частоты, другая — во втором. Наконец, результат интерференции волн второй гармоники регистрируется детектором.

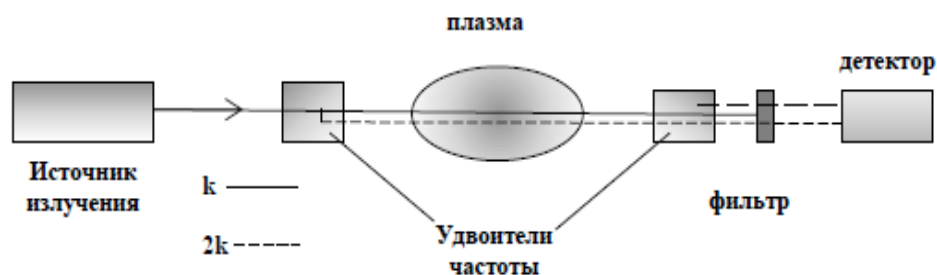


Рис. 2. Качественная схема дисперсионного интерферометра

Определим набег фаз в схеме ДИ и его зависимость от параметров плазмы. Набег фазы для волны второй гармоники, сгенерированной в первом удвоителе частоты:

$$\varphi_2 = (2k) \int N_{2k} dl ,$$

где  $N_{2k}$ -показатель преломления волны второй гармоники,  $k = \omega/c$  - волновой вектор первой гармоники. У второй гармоники удваивается частота, поэтому удваивается  $k$ .

Набег фазы для волны второй гармоники, сгенерированной во втором удвоителе, получается путём удвоения фазы для первой гармоники:

$$\varphi_1 = 2(k \int N_{1k} dl),$$

где  $N_{1k}$  — показатель преломления для волны первой гармоники.

Подставив в разность фаз между гармониками показатель преломления плазмы (1), получаем:

$$\Delta\varphi = 2k \int (N_{2k} - N_{1k}) dl = \frac{3e^2}{2mc^2} \lambda \int n_e dl,$$

где  $\lambda$  - длина волны первой гармоники.



## 2. Генерация второй гармоники

### Гауссовы пучки

Для разработки оптической схемы ДИ необходимо знать, как распространяется излучение источника. Для этого разберём процесс распространения э/м волны в изотропной среде. В общем случае он описывается волновым уравнением, получающимся из уравнений Максвелла:

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

В качестве зондирующего луча в схеме ДИ используется лазерный пучок, поле которого сконцентрировано около оси пучка. Данный факт учитывается следующим образом. Предположим, что по оси  $oz$  распространяется световая монохроматическая волна с амплитудой, медленно уменьшающейся вдоль оси  $oz$  и быстро уменьшающейся в поперечных направлениях. Тогда любую из компонент поля волны можно представить в виде:

$$u = A(x, y, z) \exp(i\omega t - ikr),$$

где амплитуду поля волны  $A$  считаем медленно меняющейся во времени и в пространстве:  $\partial A / \omega \partial t \ll A$ ,  $\partial A / k \partial \vec{r} \ll A$ . Подставляя это в волновое уравнение (2), пренебрегая вторым порядком дифференцирования амплитуды поля волны по времени и используя дисперсионное отношение  $k^2 = \omega^2 \varepsilon / c^2$ , получаем следующее уравнение для поля волны [5]:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Получившееся дифференциальное уравнение (3) для амплитуды поля волны называется параболическим. Простейшим решением такого уравнения, обладающим круговой симметрией, является нулевая мода гауссова пучка, которая выглядит следующим образом [5]:

$$A(x, y, z) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega} \exp\left(-i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R} - \frac{x^2 + y^2}{\omega^2} + i \arctg\left(\frac{2(z - z_0)}{k\omega_0^2}\right)\right). \quad (4)$$

Рассмотрим слагаемые в экспоненте. Первое слагаемое описывает волновой фронт пучка, второе - поперечный размер пучка, третье – отличие фазы пучка от фазы плоской волны.

$\omega_0$  – минимальный поперечный радиус пучка, который находится в точке  $z = z_0$ . Текущий радиус  $\omega$  пучка нулевой моды определяется по формуле:

$$\omega^2(z) = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{4(z-z_0)^2}{k^2\omega_0^4} \right). \quad (5)$$

Радиус кривизны  $R$  волнового фронта пучка равен:

$$R(z) = (z - z_0) \left( 1 + \frac{k^2\omega_0^4}{4(z-z_0)^2} \right). \quad (6)$$

Далее рассмотрим преобразование гауссовых пучков. Основные свойства такого пучка определяются комплексным параметром  $q(z)$  [5]:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{2}{k\omega^2}. \quad (7)$$

При распространении пучка из точки 1 в точку 2 на расстояние  $d$  его параметр  $q$  преобразуется следующим образом:

$$q_2 = q_1 + d = -i \frac{k\omega_0^2}{2};$$

$$q_1 = d + i \frac{k\omega_0^2}{2};$$

$$\frac{1}{q_1} = \frac{d - i \frac{k\omega_0^2}{2}}{d^2 + \frac{k^2\omega_0^4}{4}} = \frac{1}{R} - i \frac{2}{k\omega^2};$$

$$R = d + \frac{k^2\omega_0^4}{4d} = d \left( 1 + \frac{k^2\omega_0^4}{4d^2} \right); \quad (8)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{4d^2}{k^2\omega_0^4} \right). \quad (9)$$

Таким образом, видим, что (9) совпадает с (5), и (8) совпадает с (6).

В оптических схемах для фокусировки пучка обычно применяются линзы. В случае идеальной линзы преобразуется только радиус кривизны фронта пучка. Сферическая волна радиуса  $R_1$  преобразуется линзой с фокусным расстоянием  $F$  в сферическую волну радиуса  $R_2$  по закону:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{F}. \quad (10)$$

Поскольку гауссов пучок имеет сферическую фазовую поверхность, его радиус кривизны преобразуется по такому же закону. Поэтому, используя (10) и (7), получаем закон преобразования параметра  $q$  тонкой линзой с фокусным расстоянием  $f$  [5]:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f},$$

где  $q_1$  – параметр  $q$  перед линзой,  $q_2$  – после преобразования линзой.

## Нелинейный кристалл

Удвоитель частоты является важнейшей компонентой в ДИ. В роли удвоителя частоты в ДИ выступает нелинейный кристалл. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Для начала необходимо рассмотреть эффект поляризации диэлектрика. Суть его состоит в смещении электронных оболочек атомов диэлектрика при наложении на него внешнего электрического поля, что приводит к возникновению наведенного дипольного момента. Электрический дипольный момент единицы объема, наведенный внешним полем  $\vec{E}$ , описывается вектором поляризованности  $\vec{P}$ . Поляризованность есть «отклик» среды на внешнее воздействие, т.е. на воздействие внешнего э/м поля с вектором электрической напряжённости  $\vec{E}$ .

В линейном приближении:

$$P_i = \alpha_{ik} E_k, \quad (11)$$

где  $\alpha_{ik}$  — тензор диэлектрической восприимчивости среды.

Далее запишем выражение (11) в общем виде, учитывая зависимость тензора восприимчивости среды от напряженности поля:

$$P_i = \alpha_{ik}(\vec{E})E_k.$$

Разложим  $\alpha_{ik}(\vec{E})$  в ряд Тейлора по степеням  $E$  и удержим только первые два члена:

$$\alpha_{ik}(\vec{E}) = \alpha_{ik} + \chi_{ikj}E_j,$$

где  $\alpha_{ik}$  — тензор линейной восприимчивости,  $\chi_{ikj}$  — тензор квадратичной нелинейной восприимчивости.

Разложим теперь  $\vec{P}$  на линейную часть  $P_{\text{Ли}}$  и нелинейную  $P_{\text{НЛи}}$ :

$$P_i = P_{\text{Ли}} + P_{\text{НЛи}},$$

$$P_{\text{Ли}} = \alpha_{ik}E_k,$$

$$P_{\text{НЛи}} = \chi_{ikj}E_kE_j, \quad (12)$$

где вектор  $P_{\text{НЛи}}$  отвечает за генерацию второй гармоники, т.е. если в среде с ненулевым  $P_{\text{НЛи}}$  появилась волна с частотой  $\omega$ , тогда за счет произведения  $E_kE_j$  в среде появится волна с частотой  $2\omega$ . Из выражения (12) следует, что тензор квадратичной нелинейности симметричен относительно перестановки двух последних индексов [6]:

$$\chi_{ijk} = \chi_{ikj}.$$

Данное свойство тензора  $\chi_{ijk}$  позволяет перейти от системы трёх индексов ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) к системе двух индексов ( $i = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ). При этом выражение (12) принимает вид:

$$P_{\text{НЛи}} = d_{il}F_l,$$

где

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1^2 \\ E_2^2 \\ E_3^2 \\ 2E_2E_3 \\ 2E_1E_2 \\ 2E_1E_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{111} & \chi_{122} & \chi_{133} & \chi_{123} & \chi_{113} & \chi_{112} \\ \chi_{211} & \chi_{222} & \chi_{233} & \chi_{223} & \chi_{213} & \chi_{212} \\ \chi_{311} & \chi_{322} & \chi_{333} & \chi_{323} & \chi_{313} & \chi_{312} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Теперь оценим интенсивность волны второй гармоники. Пусть в среде с квадратичной нелинейной восприимчивостью по оси  $z$  распространяется волна с частотой  $\omega$  [6]:

$$E_\omega = A \cos(\omega t - kz).$$

Эта волна наводит в среде локальные дипольные моменты, переизлучающие на удвоенной частоте. Переизлученные в разных точках среды волны распространяются вдоль оси  $z$  и интерферируют друг с другом. Интерференция этих волн может привести к пространственному накоплению нелинейного эффекта.

Зададим границу нелинейной среды в точке  $z = 0$ . Тогда фаза волны квадратичной поляризованности в некоторой точке  $z'$  есть:

$$\Phi(z') = 2\omega t - 2kz'.$$

Рассмотрим в точке  $z$  фазу переизлученной волны, возникшей в точке  $z'$ . Она отличается от  $\Phi(z')$  на величину  $K(z - z')$ :

$$\varphi(z') = 2\omega t - 2kz' - K(z - z'),$$

где  $K = \frac{2\omega}{c} n(2\omega)$ . Полная волна второй гармоники на расстоянии  $z$  получается суммированием по всем переизлученным волнам:

$$E_{2\omega} = C \int_0^z \cos(\varphi(z')) dz' =$$

$$= \frac{2C}{K-2k} \sin\left(\frac{(K-2k)z}{2}\right) \cos\left(2\omega t - kz + \frac{(K-2k)z}{2}\right).$$

Тогда определим интенсивность второй гармоники:

$$A_{2\omega}^2 = C^2 z^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta kz}{2}\right), \quad (14)$$

где величина  $\Delta k$  - волновая расстройка:

$$\Delta k = K - 2k. \quad (15)$$

Кривая, определяемая соотношением (14), - так называемая кривая синхронизма. Это есть типичная интерференционная кривая. Наибольший позитивный интерференционный эффект (наибольшая интенсивность второй гармоники) выполняется при условии:

$$\Delta k = 0, \quad (16)$$

или, из (15) в случае:

$$n(2\omega) = n(\omega). \quad (17)$$

Данное условие называется условием синхронизма.

Когда выполняется это условие, волны первой и второй гармоник распространяются в среде с одинаковой фазовой скоростью. В изотропных средах выполнить это условие очень сложно из-за наличия дисперсии. Однако в анизотропных средах это вполне достижимо.

Пусть в анизотропной среде в выделенном направлении распространяются две линейно-поляризованные волны одной частоты, с разными скоростями, с взаимно перпендикулярными векторами поляризации [6]. Для каждой волны есть своя индикатриса показателя преломления (поверхность значений

показателя преломления), наглядно объясняющая, как зависит показатель преломления данной волны от направления волнового вектора. В одноосных кристаллах одна из индикатрис показателей преломления есть сфера, другая — эллипсоид вращения вокруг оптической оси кристалла (рис. 3). Первая индикатриса соответствует обыкновенной волне; ее показатель преломления  $n_o$  не зависит от угла между волновым вектором и оптической осью кристалла. Вторая индикатриса соответствует необыкновенной волне; ее показатель преломления зависит от угла  $\theta$  между направлением волнового вектора  $\vec{k}$  и оптической осью кристалла следующим образом:

$$\frac{n_z^2}{n_o^2} + \frac{n_x^2}{n_e^2} = 1,$$

где  $n_o$  и  $n_e$  — главные значения показателя преломления (параметр  $n_o$  определяет скорость обыкновенной волны в любом направлении,  $v_o = c/n_o$ ; параметр  $n_e$  определяет скорость необыкновенной волны в направлении, перпендикулярном оптической оси), а  $n_z, n_x$  — компоненты вектора  $\vec{n}^e(\theta)$ , которые равны с точностью до  $\frac{\omega}{c}$  соответствующим компонентам вектора  $\vec{k}$ . Модуль вектора  $\vec{n}^e$  определяет показатель преломления необыкновенной волны. Стоит отметить, что если в кристалле  $n_e < n_o$ , то это отрицательный одноосный кристалл, а если  $n_e > n_o$ , то положительный. Далее будут рассматриваться только положительные кристаллы.

На рис. 4 представлен пример фазового синхронизма для положительного одноосного кристалла, причём сечения индикатрис показателя преломления для первой гармоники — штриховые линии, а для второй гармоники — сплошные [7]. В направлениях, указанных стрелками выполняется условие синхронизма. Для выполнения условия синхронизма (16) волновые векторы обеих гармоник должны быть ориентированы по направлениям, указанным стрелками, и составлять угол  $\theta_{syn}$  с оптической осью кристалла. При этом первая гармоника — необыкновенная волна, вторая гармоника — обыкновенная волна. Угол  $\theta_{syn}$  называется углом синхронизма, направления,

указанные стрелками, - направления синхронизма. Такой синхронизм, наблюдаемый в положительном кристалле, называется скалярным  $eeo$  – синхронизм.

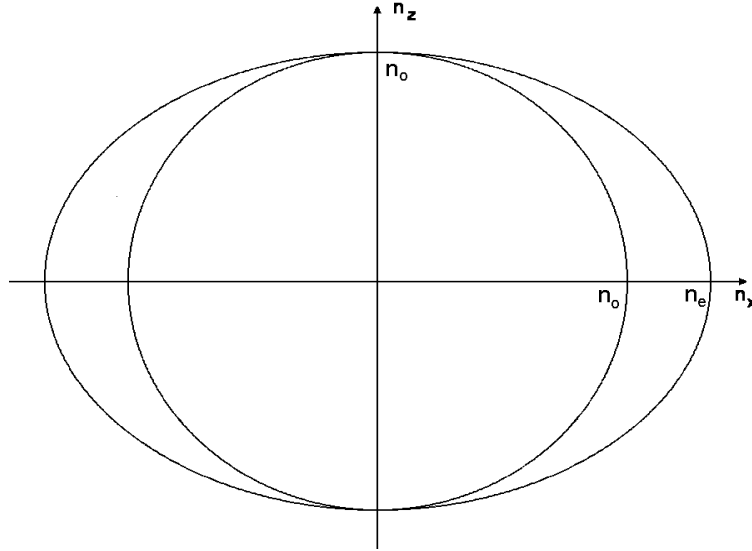


Рис. 3. Индикатрисы показателя преломления в одноосных положительных кристаллах. Оптическая ось направлена по оси  $z$ .

Найдём угол синхронизма. Распишем  $n_z, n_x$  через  $n_1^e$  и угол  $\theta$ :

$$\frac{(n_1^e)^2 \cos^2 \theta}{n_{o1}^2} + \frac{(n_1^e)^2 \sin^2 \theta}{n_{e1}^2} = 1$$

Отсюда получаем:

$$n_1^e(\theta) = \frac{n_{o1} n_{e1}}{\sqrt{n_{o1}^2 + (n_{e1}^2 - n_{o1}^2) \cos^2 \theta}} \quad (18)$$

Показатель преломления обыкновенной волны не зависит от  $\theta$ , поэтому:

$$n_{o2}(\theta) = n_{o2}$$

Использував (17), получаем:

$$\cos \theta_{syn} = \frac{n_{o1}}{n_{o2}} \sqrt{\frac{n_{o2}^2 - n_{e1}^2}{n_{o1}^2 - n_{e1}^2}}. \quad (19)$$



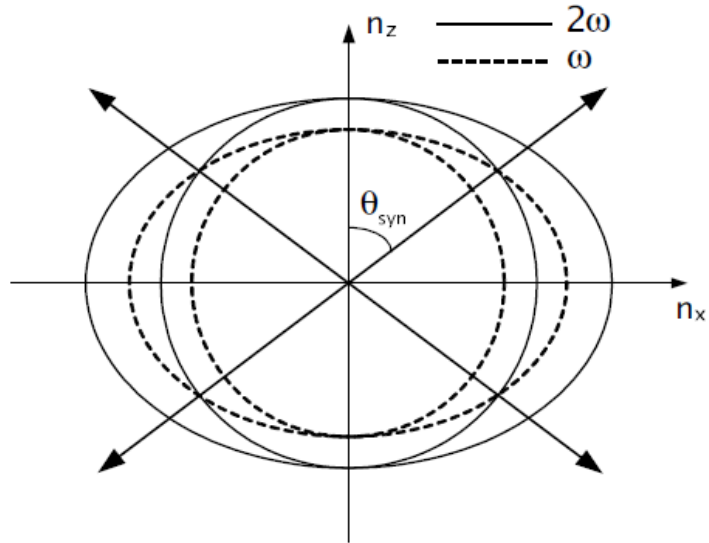


Рис. 4. Фазовый синхронизм в положительном одноосном кристалле. Оптическая ось направлена по оси z.

## Генерация второй гармоники

Как уже было рассмотрено выше, вторая гармоника является результатом распространения электромагнитной волны через среду с квадратичной нелинейной восприимчивостью. Зная распределение поля зондирующего пучка, можно получить поток мощности (вектор Пойнтинга):

$$S = cn \frac{E^2}{4\pi}.$$

Проинтегрировав поток мощности излучения по поперечным координатам, можно вычислить полную мощность.

Мощность второй гармоники в сфокусированном гауссовом пучке даётся следующим выражением [6, 7]:

$$P_2 = \frac{32\pi^2 (\vec{e}_2 \chi : \vec{e}_1 \vec{e}_1)^2 P_1^2 l \omega^3}{c^4 n_2 n_1} \exp(-\delta' l) h. \quad (20)$$

Дадим пояснение обозначениям в формуле (20).

Здесь  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  – векторы поляризации волн первой и второй гармоник,  $\chi$  – тензор квадратичной нелинейной восприимчивости кристалла;  $(\vec{e}_2 \chi : \vec{e}_1 \vec{e}_1)$  – условно-векторная запись, включающая ненулевую компоненту тензора

нелинейной восприимчивости  $\chi$ , угол пучка с оптической осью и угол с кристаллографической осью в плоскости перпендикулярной оптической оси [7].

$P_1$  – мощность волны первой гармоники;

$l$  – длина кристалла;

$\omega$  – частота волны первой гармоники;

$c$  – скорость света;

$n_1$  и  $n_2$  – показатели преломления кристалла для волн первой и второй гармоник.

$$\delta' = \delta_1 + \frac{\delta_2}{2},$$

$$\delta = \delta_1 - \frac{\delta_2}{2},$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – коэффициенты линейного поглощения по интенсивности для волн первой и второй гармоник.

За  $h$  в формуле (20) обозначено:

$$h = \frac{2\sqrt{\pi^3}}{\xi} \exp(i\mu l \delta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-4s^2) |H(s)|^2 ds. \quad (21)$$

Поясним входящие в формулу (21) обозначения.

$\xi$  – параметр фокусировки пучка:

$$\xi = \frac{l}{b} = \frac{l}{k\omega_0^2},$$

где  $l$  – длина нелинейного кристалла, а  $b = k\omega_0^2$  – конфокальный параметр;

$\mu$  – определяет относительное положение фокуса внутри кристалла:

$$\mu = \frac{l-2z_0}{l},$$

$H$  – так называемая апертурная функция [6]:

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi(1-\mu)}^{\xi(1+\mu)} \frac{\exp\left(\left(iv - \frac{b\delta}{2}\right)T\right)}{1-iT} dT. \quad (22)$$

Разберём входящие в формулу (22) обозначения:

$$\nu = \frac{k\omega^2 \Delta k}{2} + 4\alpha s,$$

где  $\Delta k$  – волновая расстройка между первой и второй гармониками,  $\alpha = \frac{\beta k \omega_0}{2}$ ;  
 $\beta$  – угол между лучевым вектором (направление вектора Пойнтинга) и волновым вектором в кристалле, который определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\left(\frac{n_e^2}{n_o^2} - 1\right) \operatorname{tg} \theta_k}{\frac{n_e^2}{n_o^2} + \operatorname{tg}^2 \theta_k}, \quad (23)$$

где  $\theta_k$  – угол между оптической осью и волновым вектором.

### 3. Тепловая линза

#### Эффект тепловой линзы

При прохождении пучка через среду происходит частичное поглощение зондирующего излучения. При поглощении излучения среда нагревается; в результате меняется её показатель преломления, поскольку при увеличении температуры увеличивается подвижность диполей в молекулах среды и облегчается их ориентация под воздействием внешнего поля (в нашем случае поле излучения), что приводит к изменению диэлектрической проницаемости и, как следствие, влияет на прохождение излучения через среду. Пусть  $n(0)$  – показатель преломления среды в некоторой её точке в отсутствии проходящего через неё излучения. Если при наличии излучения температура среды в данной точке повышается на величину  $\Delta T$ , то показатель преломления становится равным [8]:

$$n(\Delta T) = n(0) + \left(\frac{dn}{dT}\right) \Delta T + \Delta n_u. \quad (24)$$

Получается, что полное изменение показателя преломления в некоторой точке среды состоит из чисто температурного изменения  $\Delta n_T = (dn/dT)\Delta T$  (где  $dn/dT$  – физическая характеристика среды, называемая температурным коэффициентом её показателя преломления) и изменения  $\Delta n_u$ , обусловленного возникновением в неравномерно нагретом кристалле температурных напряжений, а точнее фотоупругим эффектом (об этом подробнее будет рассмотрено в следующем пункте). Рассмотрим вклад  $\Delta n_T$  в показатель преломления.

При неравномерном нагреве активного элемента и охлаждении его боковой поверхности температура образца достигает максимальной величины в его приосевой области (где распространяется излучение) и

постепенно понижается в направлении от оси к периферии. Отсюда следует, что при выполнении неравенства

$$dn/dT > 0,$$

приосевая часть образца оказывается согласно (24) оптически более плотной по сравнению с периферийной областью. Если же, напротив, получается неравенство

$$dn/dT < 0,$$

то приосевая область оказывается оптически менее плотной.

В оптически неоднородных средах световые лучи отклоняются в область с более высоким значением показателя преломления [8]; поэтому при  $dn/dT > 0$  распространяющееся вдоль активного образца излучение будет фокусироваться, тогда как при  $dn/dT < 0$  оно будет, напротив, дефокусироваться. В первом случае активный образец уподобляется собирающей, а во втором – рассеивающей линзе.

### **Фотоупругий эффект**

Фотоупругий эффект состоит в том, что механические деформации в веществе и оптический показатель преломления связаны друг с другом. Этот эффект возможен для любых состояний вещества и обычно записывается в виде [9]:

$$\Delta\eta_{ij} = \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_{ij} = p_{ijkl} u_{kl}, \quad (25)$$

где  $\Delta\eta_{ij}$  – изменение тензора диэлектрической непроницаемости,  $n$  – показатель преломления среды, а  $u_{kl}$  – тензор упругих деформаций. Коэффициенты  $p_{ijkl}$  образуют тензор фотоупругости.

Опираясь на выражение (25), можно записать формулу для изменения показателя преломления под действием внешней силы [10]:

$$\Delta n_{ij} = -\frac{1}{2} (n_0)^3 p_{ijkl} u_{kl}, \quad (26)$$

где  $n_0$  – показатель преломления для невозмущенной среды.

## 4. Моделирование и расчёты

### Распределение температуры в кристалле

В результате распространения излучения в удвоителе частоты (нелинейном кристалле) происходит частичное поглощение излучения и неравномерный нагрев кристалла, который приводит к эффекту тепловой линзы и температурным напряжениям. Необходимо знать распределение температуры в кристалле. Для этого было решено уравнение теплопроводности. Считаем, что излучение распространяется по оси  $oz$ , торцы кристалла, через которые проходит излучение, теплоизолированы. Значит вдоль  $oz$  нет градиента температуры, неоднородное температурное распределение есть только в поперечной плоскости (плоскость  $xy$ ). Тогда:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{q(x, y, z)}{\lambda},$$

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $q(x, y, z)$  – функция тепловыделения в кристалле:

$$q(x, y, z) = \frac{\partial I}{\partial z},$$

$$I = I_0 \exp\left(-\delta z - 2 \frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2}\right),$$

где  $\omega_0$  – радиус лазерного луча,  $\delta$  – коэффициент поглощения по интенсивности. Далее всё рассматривается для нелинейного кристалла  $\text{ZnGeP}_2$  в приближении цилиндрического кристалла. Поэтому уравнение теплопроводности переводится в цилиндрическую систему координат:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{q(r, z)}{\lambda},$$

граничные условия:

- 1)  $T(R) = 0$ ,
- 2) при  $r = 0$  в функции  $T(r)$  не должно быть особенностей,

где  $R$  – радиус кристалла (в нашем случае  $R=2.5$  мм),  $\lambda = 35$  Вт/(м · К) [11]. Температура на периферии поддерживается постоянной системой охлаждения, её задаём как ноль (идеальный контакт).

В результате решения данного уравнения было получено распределение температуры в поперечной плоскости кристалла:

$$T(r) = 2,72975 \times \left( \int_R^r \frac{e^{-2\left(\frac{r'}{\omega_0}\right)^2} - 1}{r'} dr' \right),$$

где  $\omega_0 = 0.039$  см,  $\delta = 0,3$  см<sup>-1</sup>,  $P = 20$  Вт,

$$P = \frac{1}{2} I_0 (\pi \omega_0^2).$$

Также получен график температурного распределения:

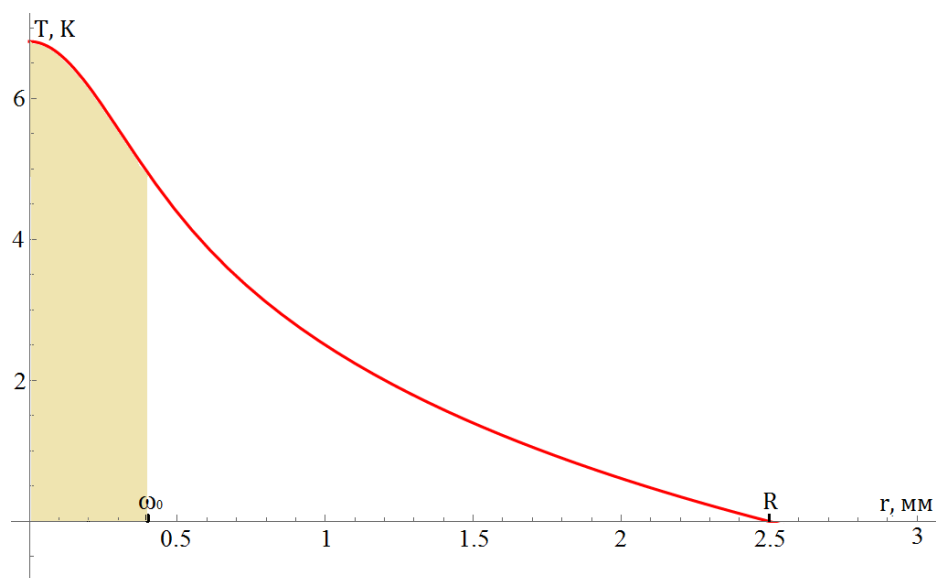


Рис. 5. Распределение температуры в поперечной плоскости нелинейного кристалла **ZnGeP<sub>2</sub>**. Закрашенная область – область лазерного пучка.

Данное распределение было получено на длине волны 9.6 мкм.

Также необходимо знать, за какое время в кристалле могут появляться термооптические эффекты, поскольку эксперименты на установке «Глобус – М2» могут длиться порядка секунды [12]. Для этого оценили время выхода на стационар. При этом потери за счёт теплопроводности не учитываем. Оценка делалась из следующего выражения:

$$\Delta U = Q,$$



$$cm\Delta T = qVt,$$

где  $\Delta T$  – стационарная температура,  $Q$  – энергия в кристалле, полученная за время  $t$ ,  $\Delta U$  – изменение внутренней энергии кристалла в результате поглощения излучения,  $V$ ,  $m$  – объём и соответственно масса нагреваемого элемента (занимаемого зондирующим пучком),  $c$  – удельная теплоёмкость кристалла,  $\rho$  – плотность кристалла,  $q$  – тепловыделение в кристалле,  $c = 392$  Дж/(кг · К),  $\rho = 4160$  кг/м<sup>3</sup> [11],  $q = 5.85 \times 10^6$  Вт/м<sup>3</sup>. Получилось, что за  $t \approx 50$  мс кристалл прогреется до стационарной температуры. Таким образом, термооптические эффекты должны учитываться.

### Учёт эффекта тепловой линзы

В нелинейном кристалле ввиду анизотропии может быть как обыкновенная, так и необыкновенная волна. В нелинейном кристалле ZnGeP<sub>2</sub> для каждого из главных значений показателя преломления имеется свой температурный коэффициент  $dn/dT$  [11]:

$$dn_o/dT = (11.4188/\lambda^3 - 12.8971/\lambda^2 + 7.2947/\lambda + 14.2082) \times 10^{-5} \times [1 + 3.36 \times 10^{-3}T]$$

$$dn_e/dT = (10.3798/\lambda^3 - 10.1785/\lambda^2 + 6.3877/\lambda + 15.6688) \times 10^{-5} \times [1 + 3.28 \times 10^{-3}T]$$

Тогда для второй гармоники:

$$n_{o2}(T) = n_{o2}(0) + (dn_o/dT)T,$$

где  $n_{o2}(0) = 3.1165$  из уравнения Sellmeiera для волны с  $\lambda = 4.8$  мкм [11]:

$$n_o^2 = 11.6413 + \frac{0.69363}{\lambda^2 - 0.21967} + \frac{1586.06}{\lambda^2 - 832.75},$$

$$n_e^2 = 12.1438 + \frac{0.75255}{\lambda^2 - 0.21913} + \frac{2061.68}{\lambda^2 - 951.07},$$

а для первой гармоники с учётом зависимости показателей преломления от температуры и от угла  $\theta$   $n_1^e(\theta)$  выражается по формулам (18) и (24).

Был определён знак этого коэффициента для каждой из волн. В случае кристалла  $\text{ZnGeP}_2$  температурный коэффициент для обеих гармоник положительный ( $dn/dT > 0$ ). Т.е. в кристалле  $\text{ZnGeP}_2$ , который будет устанавливаться в схеме ДИ как удвоитель частоты, при неравномерном нагреве, будет наводиться собирающая линза. Это было проиллюстрировано графически. Видно на рис.6, что в приосевой области (где распространяется излучение), среда оптически более плотная, чем на периферии. Закрашенная на графиках область – область зондирующего пучка:

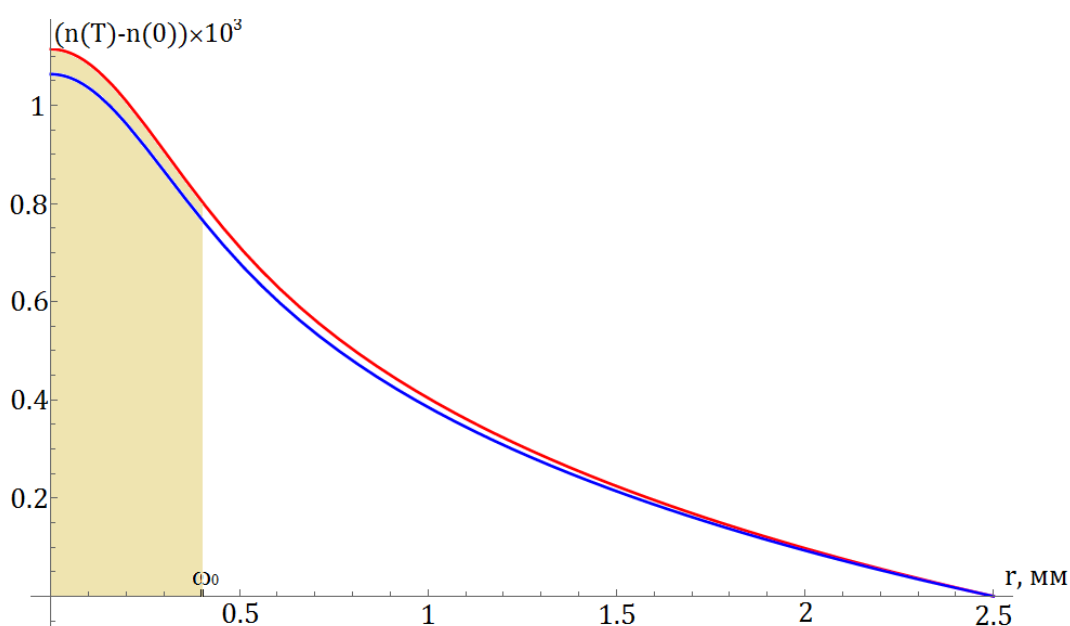


Рис. 6. Добавка к показателю преломления кристалла  $\text{ZnGeP}_2$ , возникающая при неравномерном нагреве. Красный – первая гармоника, синий – вторая гармоника.

Таким образом, в разрабатываемом ДИ появляется дополнительный фокусирующий элемент с неизвестным фокусным расстоянием, который может влиять на распространение зондирующего излучения и генерацию второй гармоники.

Для определения фокусного расстояния тепловой линзы использовался закон преобразования комплексного параметра гауссова пучка  $q$  – так называемый закон ABCD [5, 13]:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D},$$

который также можно свести к простому матричному преобразованию параметра  $q$  матрицей  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ . При подсчёте фокусного расстояния тепловой линзы в кристалле использовалась оптическая матрица преобразования в среде с поперечной оптической неоднородностью. В такой среде показатель преломления в поперечной плоскости (в первом приближении) меняется следующим образом [13]:

$$n(r) = n_0 - \sigma r^2 / 2,$$

где  $\sigma$  – мера оптической неоднородности в среде, определяемая как вторая производная  $n(r)$  по  $r$ . Такая среда называется квадратичной. Оптическая матрица преобразования пучка в такой среде [13]:

$$M(z) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi z/m) & (m/2\pi) \sin(2\pi z/m) \\ -(2\pi/m) \sin(2\pi z/m) & \cos(2\pi z/m) \end{pmatrix},$$

где  $m = 2\pi\sqrt{n_0/|\sigma|}$ ,  $z$  – положение на оси, вдоль которой распространяется пучок.

В оптической схеме все преобразования пучка можно описать с помощью произведения оптических матриц. При появлении тепловой линзы в этот матричный ряд добавляется ещё одна матрица,  $M(z)$ , представленная выше. Используя законы преобразования параметра  $q$  (см. выше), параметры среды с тепловой линзой и матрицу  $M(z)$ , вычислили фокусное расстояние тепловой линзы. При  $n_0 = 3,1165$  и полученном распределении  $n(T)$  фокусное расстояние наведённой тепловой линзы получилось  $f=2.5$  см.

### **Добавка от фотоупругого эффекта**

Фотоупругий эффект возникает в удвоителе частоты за счёт температурных напряжений, вызванных неравномерным нагревом кристалла.

Рассматривались два крайних случая:

- 1) Случай зажатого цилиндра
- 2) Случай свободного цилиндра

причём торцы кристалла зажаты в обоих случаях.

Были получены компоненты вектора смещений и тензора упругих деформаций в приближении цилиндрического кристалла. В нашем приближении у тензора деформаций имеются ненулевые диагональные компоненты -  $u_{rr}$  и  $u_{\varphi\varphi}$ , у вектора смещений есть ненулевая компонента  $u_r$ , компонента  $u_\varphi = 0$  в виду аксиально симметричного распределения температуры. Вектор смещения находится из уравнения равновесия с учётом градиента температуры [14]:

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma} \text{grad div } \vec{u} = \alpha \nabla T,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(u_r r)}{\partial r} \right) = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \frac{\partial T}{\partial r},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial(u_z)}{\partial z} \right) = 0,$$

$$u_r = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \frac{1}{r} \int_0^r T(r') r' dr' + \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r},$$

$$u_z = Az + B,$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения,  $\sigma$  – коэффициент Пуассона.

Для каждого из двух случаев должны выполняться следующие граничные условия:

- 1) Случай полностью зажатого цилиндра:

$$u_r(R) = u_r(0) = 0 \text{ – нет смещения как в центре, так и на границе}$$

$$u_z(l/2) = u_z(-l/2) = 0 \text{ – торцы зажаты.}$$

- 2) Случай свободного цилиндра:

$u_r(0) = 0$  – в центре цилиндра нет смещения,  
 $u_z(l/2) = u_z(-l/2) = 0$  – торцы закреплены,  
 $\sigma_{rr}(R) = 0$  – боковая стенка свободная.

Тогда получается: в обоих случаях  $C_2 = 0$ , и граничные условия для  $u_z$  выполняются только при  $A = B = 0$ , т.е.  $u_z = 0$  – смещения по оси  $oz$  нет.

Далее

Случай зажатого цилиндра:

$$C_1 = -\alpha \frac{2(1+\sigma)}{3(1-\sigma)R^2} \int_0^R T(r')r' dr',$$

$$u_r = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r T(r')r' dr' - \frac{r}{R^2} \int_0^R T(r')r' dr' \right\},$$

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ T(r) - \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r')r' dr' - \frac{1}{R^2} \int_0^R T(r')r' dr' \right\},$$

$$u_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r')r' dr' - \frac{1}{R^2} \int_0^R T(r')r' dr' \right\},$$

Случай свободного цилиндра:

$$C_1 = \alpha \frac{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{3(1-\sigma)R^2} \int_0^R T(r')r' dr',$$

$$u_r = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r T(r')r' dr' + (1-2\sigma) \frac{r}{R^2} \int_0^R T(r')r' dr' \right\},$$

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ T(r) - \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r')r' dr' + \frac{1-2\sigma}{R^2} \int_0^R T(r')r' dr' \right\},$$

$$u_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = \alpha \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \left\{ \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r')r' dr' + \frac{1-2\sigma}{R^2} \int_0^R T(r')r' dr' \right\},$$

где  $\alpha = 16 \times 10^{-6} \text{K}^{-1}$  [11],  $\sigma = 0,24155$  [15]. Далее, всё это подставляется в выражение (26) при  $n_0 = 3,1165$ . Точных значений компонент тензора фотоупругости  $p_{ijkl}$  для кристалла  $\text{ZnGeP}_2$  не было найдено, но значения компонент данного тензора для различных кристаллов одного порядка,

поэтому в формулу (26) было подставлены компоненты тензора для кристалла Ge [9].

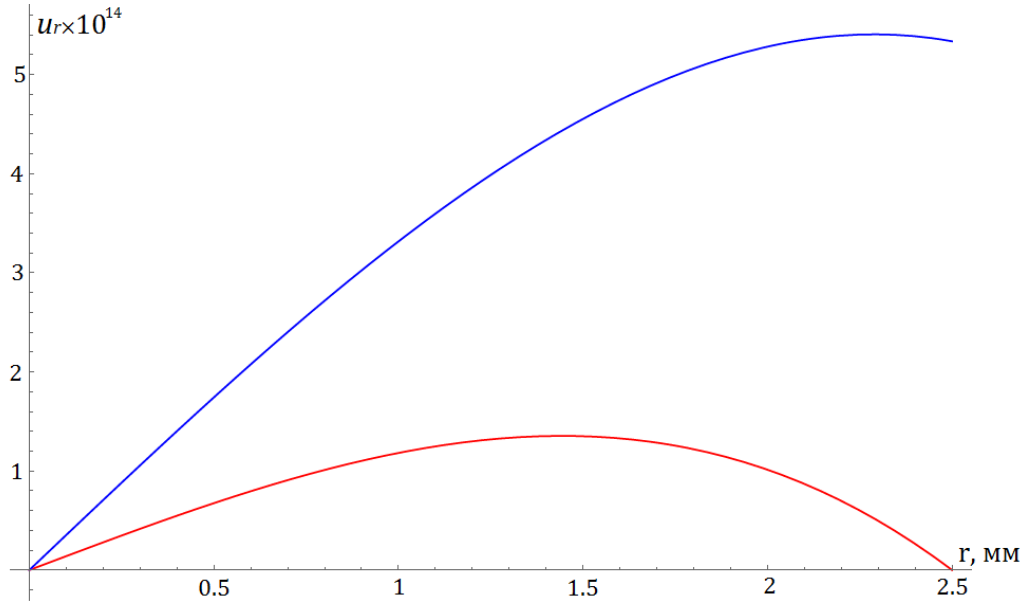


Рис. 7. Компонента  $u_r$  вектора смещения для закреплённого кристалла  $\text{ZnGeP}_2$  (красный) и для свободного кристалла  $\text{ZnGeP}_2$  (синий)

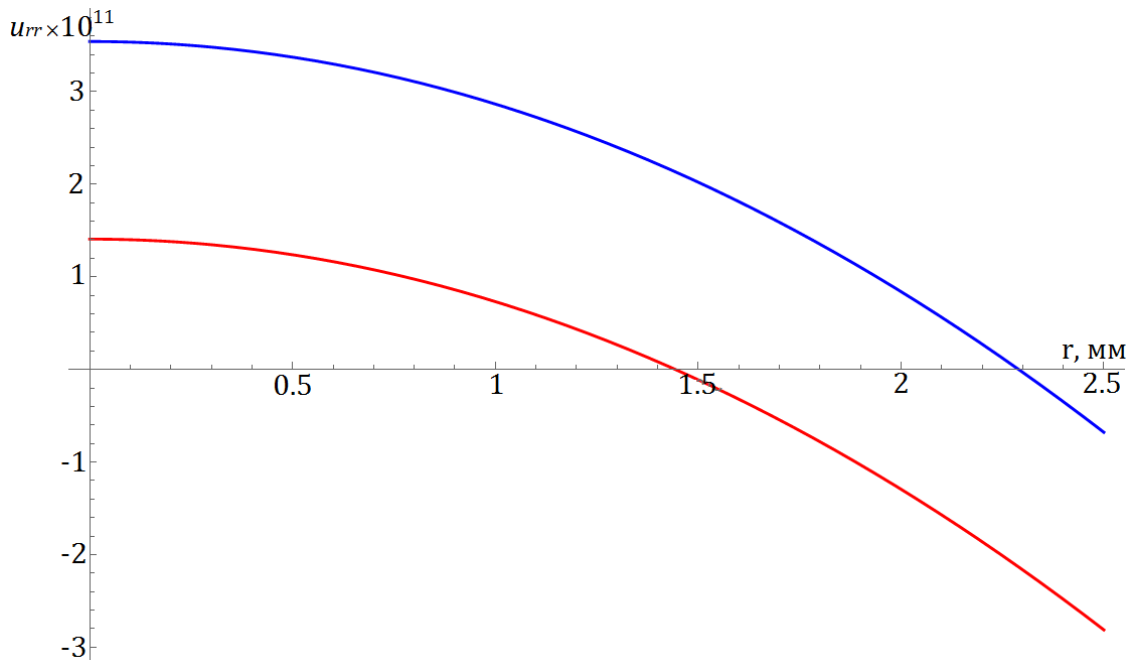


Рис. 8. Компонента  $u_{rr}$  тензора деформаций для закреплённого кристалла  $\text{ZnGeP}_2$  (красный) и для свободного кристалла  $\text{ZnGeP}_2$  (синий)

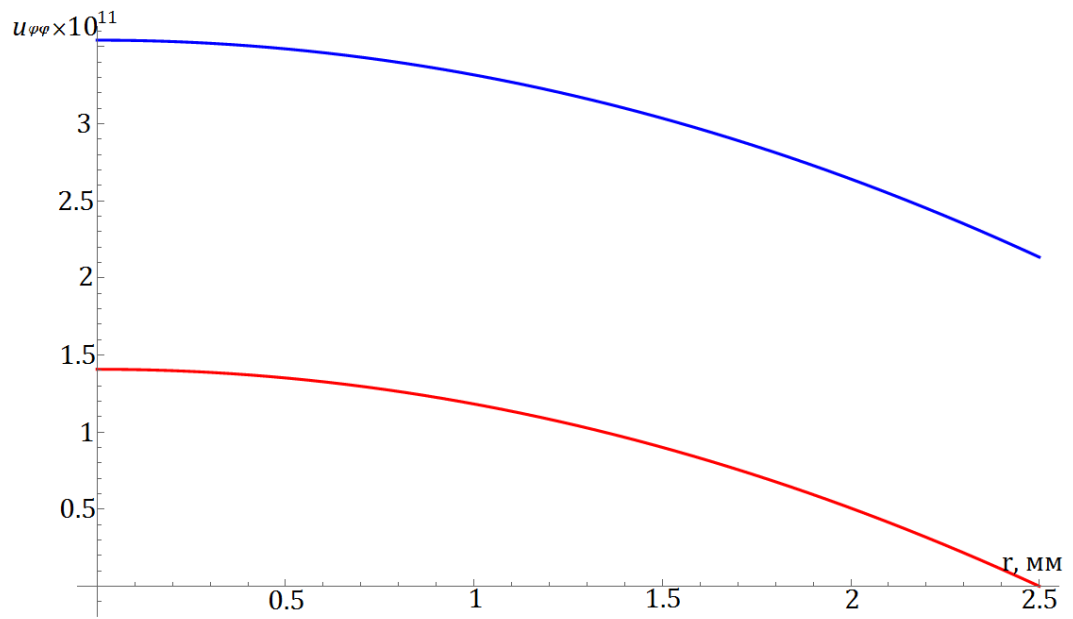


Рис. 9. Компонента  $u_{\varphi\varphi}$  тензора деформаций для закреплённого кристалла  $\text{ZnGeP}_2$  (красный) и для свободного кристалла  $\text{ZnGeP}_2$  (синий)

Полученные добавки к показателю преломления кристалла, возникающие за счёт фотоупругого эффекта (оба случая) и температурного изменения показателя преломления представлены далее:

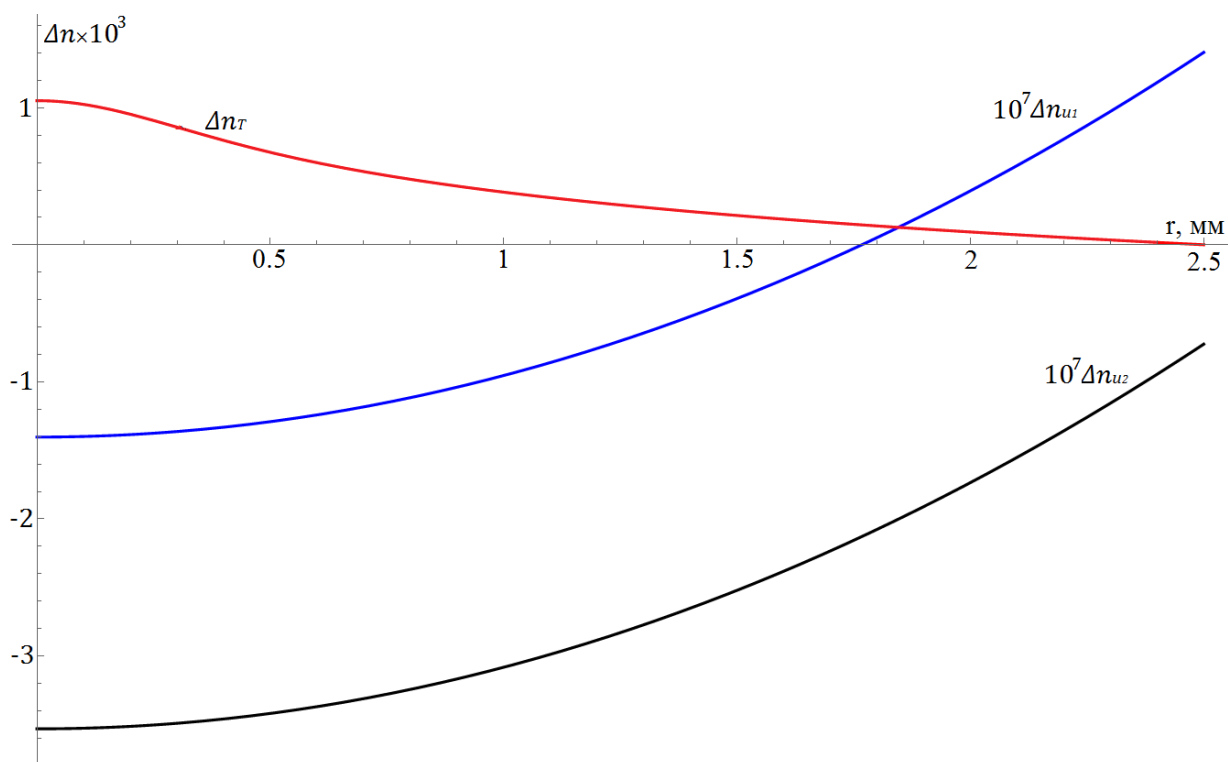


Рис. 10. Добавки к коэффициенту преломления кристалла  $\text{ZnGeP}_2$ , возникающие при эффекте тепловой линзы. Красный - температурное изменение,  $\Delta n_T$ ; синий - фотоупругий эффект, случай зажатого кристалла,  $\Delta n_{u1}$ ; чёрный - фотоупругий эффект, случай свободного кристалла,  $\Delta n_{u2}$

Добавки к показателю преломления, вызванные температурными напряжениями, оказались на 7 порядков меньше добавки, вызванной температурной зависимостью показателя преломления. Поэтому при проектировании оптической схемы фотоупругим эффектом в удвоителе частоты можно будет пренебречь.

### **Влияние эффекта тепловой линзы на генерацию второй гармоники**

Мощность второй гармоники с учётом эффекта тепловой линзы выражалась по формуле (20) при соблюдении условия фазового синхронизма (17), в приближении круговых гауссовых пучков. Зададим параметры зондирующего излучения и кристалла:

комбинация коэффициентов поглощения первой и второй гармоник -

$$\delta' = \delta_1 + \frac{\delta_2}{2} = 0.38 \text{ см}^{-1};$$



$$\delta = \delta_1 - \frac{\delta_2}{2} = 0.22 \text{ см}^{-1};$$

длина кристалла -  $l=5$  мм;

мощность первой гармоники -  $P_1 = 20$  Вт;

длина волны первой гармоники -  $\lambda = 9.6$  мкм;

минимальный поперечный радиус пучка -  $\omega_0 = 0.039$  см.

Для нахождения коэффициента  $(\vec{e}_2\chi:\vec{e}_1\vec{e}_1)$  необходимо знать компоненты тензора квадратичной нелинейной восприимчивости. Общий вид этого тензора уже был представлен в формуле (13). Кристалл  $\text{ZnGeP}_2$  относится к тетрагональной системе, кристаллографическому классу  $\bar{4}2m - D_{2d}$  и имеет в области прозрачности следующий тензор квадратичной нелинейности [4, 6]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix},$$

$d_{14} = d_{36} = 75$  пм/В для  $\lambda = 9.6$  мкм [11].

Необходимо знать угол  $\beta$  - угол между лучевым вектором (направление вектора Пойнтинга) и волновым вектором в кристалле. Для этого были выражены главные значения показателей преломления первой и второй гармоники из уравнений Селлмейера, получен угол синхронизма с учётом тепловой линзы с помощью выражения (19),  $\theta_{syn} = 66.7869^\circ$ . Получилось из выражения (23):

$$\text{tg } \beta = \frac{\left(\frac{n_e^2}{n_o^2} - 1\right) \text{tg } \theta_{syn}}{\frac{n_e^2}{n_o^2} + \text{tg}^2 \theta_{syn}},$$

что  $\beta = 1.2578^\circ$ .

Используя все представленные выше величины и законы преобразования пучка в среде, по формуле (20) вычислили мощность второй гармоники,  $P_2 = 72$  мВт. После полученный результат сравнили со случаем фокусировки пучка в кристалл без тепловой линзы. В этом случае мощность второй гармоники,  $P_2 = 50$  мВт. Таким образом, получили, что наведённая тепловая линза увеличивает мощность второй гармоники.

## 5. Выводы и заключение

Сформулируем основные результаты и выводы проделанной работы.

1. Было проведено моделирование эффекта тепловой линзы в удвоителе частоты (на основе кристалла  $\text{ZnGeP}_2$ ) для оптической схемы дисперсионного интерферометра токамака «Глобус – М2». Этот эффект необходимо учитывать.
2. Проанализировано влияние фотоупругого эффекта на распространение излучения через удвоитель частоты. Этим эффектом можно пренебречь.
3. Получено фокусное расстояние тепловой линзы и время её формирования.
4. Вычислена мощность второй гармоники с учётом тепловой линзы.

## Список литературы

- [1] «EFDA-JET:Report of Activities,» 1 Jan 2000 - 31 Mar 2001. [В Интернете]. Available: <http://www.jet.efda.org/pages/rep-of-activ.html>.
- [2] H. R. Kolowski и H. Soltwisch, «Electron density and q profile measurements with the far-IR interferometer-polarimeter on the TEXTOR tokamak,» *Fusion Engineering and Design*, № 34-35, pp. 143-150, 1997.
- [3] К. Р. Alum, Y. V. Kovalchuk и G. V. Ostrovskaya, *Pisma Zh. Tekh*, № 7, p. 1359, 1981.
- [4] А. Л. Соломахин, П. А. Багрянский и Р. В. Воскобойников, «Дисперсионный интерферометр на основе СО<sub>2</sub> лазера,» *Приборы и техника эксперимента*, № 5, pp. 96-106, 2005.
- [5] А. М. Гончаренко, Гауссовы пучки света, Минск: Наука и техника, 1977.
- [6] В. Г. Дмитриев и Л. В. Тарасов, Прикладная нелинейная оптика, Москва: ФИЗМАТ - ЛИТ, 2004.
- [7] А. В. Львовский, Измерение линейной плотности плазмы в ГДЛ с помощью дисперсионного интерферометра: квалиф. работа бакалавра, Новосибирск, 2009.
- [8] Л. В. Тарасов, Физика процессов в генераторах когерентного оптического излучения, Москва: Радио и связь, 1981.
- [9] А. Ярив и П. Юх, Оптические волны в кристаллах: Пер. с англ., Москва: Мир, 1987.
- [10] С. В. Богданов, Акустооптические методы измерения скорости звука, Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2013.
- [11] D. N. Nikogosyan, *Nonlinear Optical Crystals: A Complete Survey*, New York: Springer, 2005.
- [12] V. K. Gusev, *Nucl. Fusion*, № 9, p. 53, 2013.
- [13] Е. Ф. Ищенко, Открытые оптические резонаторы: Некоторые вопросы

теории и расчёта, Москва: Сов. Радио, 1980.

[14] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория упругости, Москва: Наука, 1987.

[15] «ELATE: Elastic tensor analysis,» [В Интернете]. Available:  
<http://progs.coudert.name/elate/mp?query=mp-4524>.