

# О квазипериодических осцилляциях материальной точки в эллиптической бильярдной системе относительно малой оси

*Попов С.С*

*Институт ядерной физики СО РАН*

*Динамическая система эллиптического бильярда сводится к ступенчатому преобразованию внутри замкнутой кривой четвертого порядка, обладающей симметриями прямоугольника. Построенная аналогия позволяет «наглядно» доказывать некоторые свойства изначальной динамической системы и получить простую форму для периода осцилляций относительно малой оси с заданными начальными условиями траектории.*

## Введение

Задача появилась в ходе исследования проблемы накопления лучистой энергии в ограниченной области пространства. Практическая реализация такого накопления представляет значительный интерес, например, для фотохимического или лазерного разделения изотопов [1]. Иногда при малых значениях скоростей реакций и ключевых сечений важно получать значительные величины плотностей фотонов в пространственной области реакций. Еще одним возможным применением лучистого концентратора является фотонный нейтрализатор мощных пучков отрицательных ионов [2,3]. Главная идея исследуемого в этих работах накопителя состоит в отказе от традиционного внутрирезонаторного накопления фотонов (см. например [4]). В [2,3] многократный возврат фотонов обусловлен последовательными отражениями от вогнутых зеркальных поверхностей без требований на синхронизацию фаз большого числа лучей. Последнее очень сложно для практической реализации, но обязательно для резонаторных подходов.

При теоретическом обосновании эффективности нерезонансного накопителя лучистой энергии удобно использовать модели бильярдных систем с участками границы близкими к эллиптическим формам в силу интегрируемости таких систем. В ходе рассмотрения данной проблемы возникает вопрос о временном поведении луча в области с эллиптическими границами. Частный аспект такой эволюции - задача вычисления среднего периода или частоты квазипериодического движения фотона или материальной точки с заданными параметрами траектории.

В данной работе после общих сведений об эллиптических бильярдах излагается расчет периода, основанный на описании несколько отличном от общепринятого двумерных бильярдных систем.

## Общие сведения о эллиптических бильярдах

Рассмотрим бильярдную систему, образованную эллиптической границей с законом зеркального отражения от нее для материальной точки, двигающейся с единичной по модулю скоростью. Расположим бильярд в декартовой системе координат отсчета, как показано на Рис. 1.

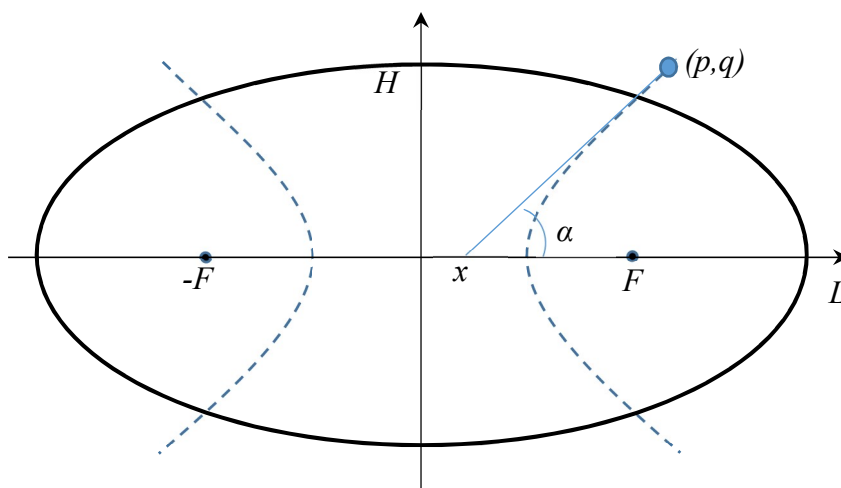


Рис. 1. Эллиптическая кривая с фокусами  $F, -F$ , полуосями  $H, L$ ; прерывистые линии одна из софокусных гипербол. Прямой отрезок – касательный луч к софокусной гиперболе, выпущенный из некоторой точки на оси абсцисс.

Граница описывается эквивалентными формами уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{L^2} + \frac{y^2}{H^2} = 1 \quad \frac{x^2}{F^2 + H^2} + \frac{y^2}{H^2} = 1 \quad (1)$$

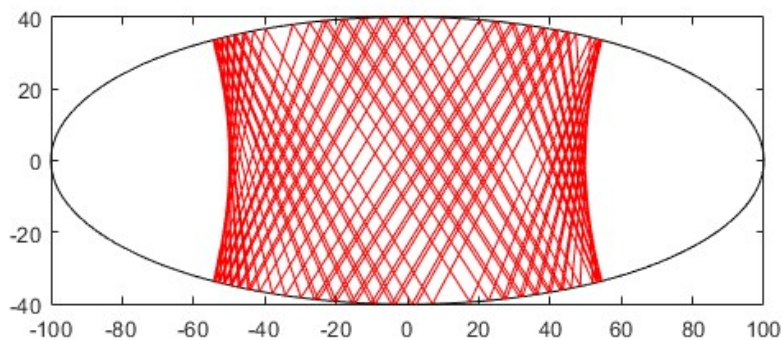
Пример участка бильярдной траектории представлен на Рис. 2.

Существенное место будет иметь третье бильярдное свойство эллипса [5,6]: все звенья бильярдной траектории касаются одной софокусной с ним коники (гиперболы или эллипса).

Семейство софокусных коник является однопараметрическим семейством, описываемые соответственно

$$\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{F^2 - a^2} = 1 \quad , \quad (2)$$

где  $p$  и  $q$  - абсцисса и ордината точки коники. При  $a \leq F$  уравнение (2) задает гиперболу, при обратном соотношении эллипс..



*Рис. 2. Пример участка устойчивой траектории внутри эллиптического бильярдного стола.*

Далее устойчивой будем называть траекторию (см Рис. 2), ограничиваемую софокусной гиперболой. В альтернативном случае, ограничения софокусным эллипсом, траекторию будем считать неустойчивой.

Устойчивость здесь следует понимать в том смысле, что частицу или луч возможно вечно удерживать в ограниченной области пространства при незамкнутой границе бильярда.

#### Выбор координат для описания движения в эллиптическом бильярде

В общем случае бильярдные системы задают, как правило, последовательностью точек отражения от границы и углами между выходящими из точек отражения звеньями и касательными к границе в точке отражения (см., например [7]). Параметризация границы выбирается пропорциональной естественной. Периметр при этом нормируется на единицу или на  $2\pi$ . В конкретных случаях оказывается удобно использовать другое задание траектории. Например, лаконичное изложение динамики эллиптического бильярда приведено в [6] с использованием эллиптических координат.

В настоящей работе автор предлагает описывать состояние луча или сегмента в эллиптическом бильярде положением точки его пересечения с осью абсцисс  $x$  и котангенсом угла наклона относительно горизонтали  $\xi = \text{ctg}(\alpha)$ . Во-первых, это кажется более простым для восприятия чем эллиптические координаты. Во-вторых, как оказалось, весьма просто выражается связывающий их интеграл движения. Последним, очевидно, можно взять параметр  $a^2$  в софокусной конике (2). В-третьих, эти координаты позволяют до поры избегать эллиптических интегралов и их обращений.

Точку  $x$  будем также называть абсциссой сегмента или звена траектории. Очевидно существует взаимно-однозначное соответствие с традиционным формализмом. Как видно

из Рис. 1 можно связать «новые» координаты с декартовыми координатами точек касания сегмента или его продолжения и коники.

$$\frac{1}{\xi} = \frac{q}{p-x} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\xi} = \frac{dq}{dp}$$

Вычислив из (2) значение  $q$  и ее производную  $\frac{dq}{dp}$ , а затем подставив результат в (3),

получим

$$\xi = \frac{(p-x)a}{\sqrt{F^2 - a^2} \sqrt{p^2 - a^2}} = \frac{a\sqrt{p^2 - a^2}}{p\sqrt{F^2 - a^2}} \quad (4)$$

или после упрощений

$$px = a^2 \quad (5)$$

Теперь можем исключить из второго уравнения системы (3) абсциссу  $p$ . Получим

следующее выражение  $\frac{1}{\xi} = \frac{\sqrt{F^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ , приводимое к каноническому виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\xi^2}{a^2/(F^2 - a^2)} = 1 \quad (6)$$

Как видим, интеграл движения луча в эллиптическом бильярде

$$a^2 = \frac{F^2 \xi^2 + x^2}{1 + \xi^2} \quad (7)$$

несложно выражается в переменных  $x, \xi$ . Заметим, что  $a^2$  является супремумом для квадратов отклонений абсциссы сегмента от центра.

Каждая бильярдная траектория задает некоторую двумерную последовательность сегментов  $-\{(x_n, \xi_n)\}_{-\infty}^{+\infty}$ . Выделим следующие точки для рассматриваемой динамической

системы:  $(x_{\max}, 0)$  – сегменты с максимально возможным отклонением абсциссы от центра

бильярда;  $(x_c, \xi_c)$  – сегмент, упирающийся в границу под прямым углом. Величина

$x_{\max} = \pm a$ ,  $x_c$  так же имеет два значения, отличающиеся знаком. В пары последним

поставим  $\pm|\xi_a|$ . Каждая из обозначенных точек не обязательно принадлежит траектории  $\{(x_n, \xi_n)\}_{-\infty}^{+\infty}$ .

Парами  $\{t(x_n, a^2), s(x_n, a^2)\}_{-\infty}^{+\infty}$  обозначим последовательность декартовых координат концов сегментов траектории удовлетворяющих (1). Поскольку конца два, то каждая такая пара двузначна. При необходимости снятия неоднозначности будут использоваться порядковые индексы  $\{t_n(x_n, a^2), s_n(x_n, a^2)\}_{-\infty}^{+\infty}$  и  $\{t_{n-1}(x_n, a^2), s_{n-1}(x_n, a^2)\}_{-\infty}^{+\infty}$ , порядок которых соответствует порядку отражений.

Для функции  $t(x_n, a^2)$  выполнена следующая лемма

Лемма 1: Каждая ветвь функции  $t(x_n, a^2)$  на своей области определения  $[-a, a]$  имеет ровно один экстремум и они гладко переходят друг в друга на границах области определения.

Доказательство

Рассмотри некоторый сегмент траектории, для которого

$$0 \leq x \leq x_{\max} \quad (8)$$

и правую относительно  $x$  его общую с границей точку  $(t, s)$ . Как видно из Рис. 3 а, при

$$0 \leq x \leq x_c$$

$$\frac{\partial t(x, a^2)}{\partial x} \geq 0, \quad (9)$$

а при  $x_c \leq x \leq x_{\max}$  будет верно обратное

$$\frac{\partial t(x, a^2)}{\partial x} \leq 0. \quad (10)$$

Действительно, в первом случае при малом положительном изменении  $x$  изменение  $\delta t(x, a^2)$  также может быть только положительным, иначе прямая, проведенная через новые точки никогда не коснется заданной интегралом (7) гиперболы. Вне бильярда это невозможно поскольку она будет всегда выше начальной касательной, которая очевидно является мажорантой гиперболы. Касание ограничивающей гиперболы внутри эллипса

возможно только на промежутке  $x_c \leq x \leq a$ , что противоречит условию  $0 \leq x \leq x_c$ , то есть такое касание не возможно. Значит неравенство (9) верно.

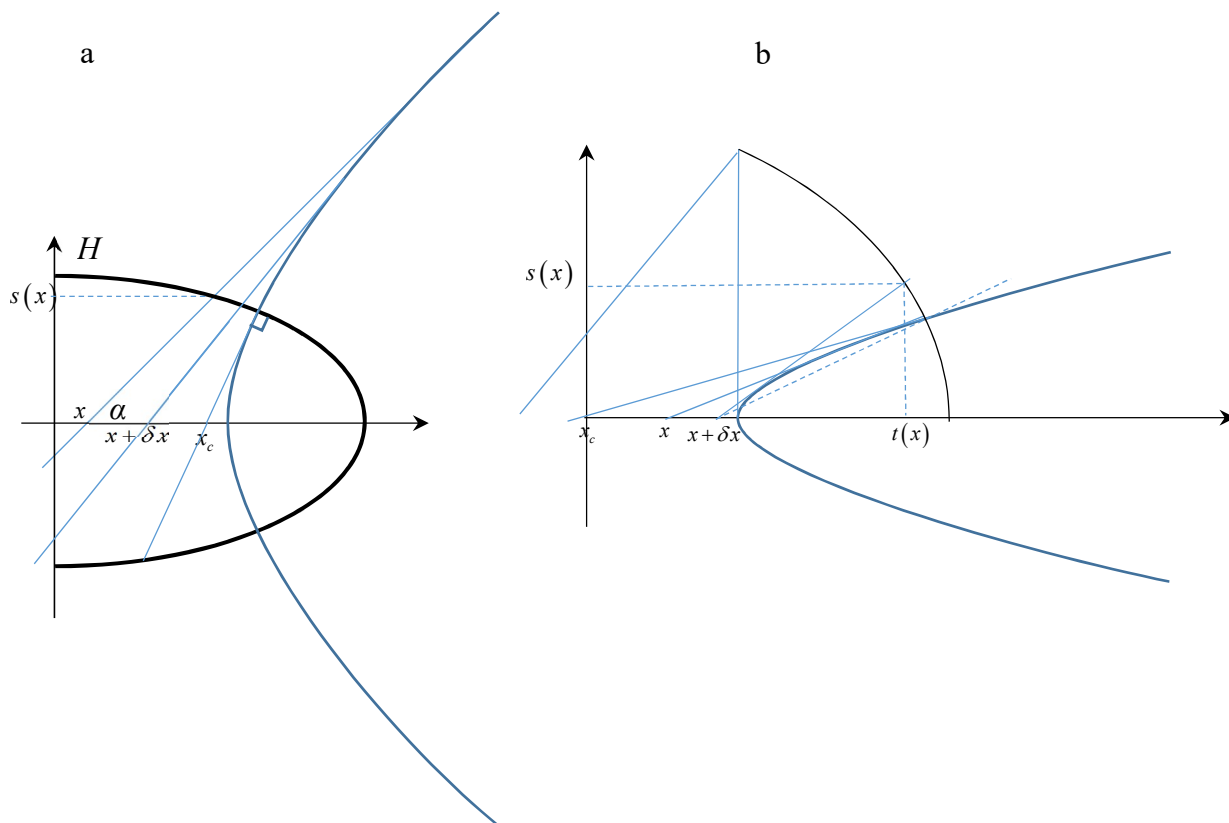


Рис. 3. К доказательству леммы 1. (а) – случай  $x < x_c$ ; (б) – случай  $x_c < x < x_{max}$ .

В втором случае производная меняет знак. В самом деле, в противном случае, для мало отстоящего правее сегмента существует интервал с левой границей  $x_{max}$ , в котором значения ординат на проведенной через новые точки касательной строго больше таковых для гиперболы, а также существует интервал с обратным соотношением, поскольку по допущению новая прямая внутри эллипса строго ниже начальной, которая в свою очередь имеет общую точку с гиперболой. В то же время при каком-то значении абсциссы эта прямая превысит гиперболу, поскольку растет она быстрее чем ограничивающая ее асимптота. Следовательно, новая касательная имеет по крайней мере 2 общие точки со всюду выпуклой кривой, что невозможно. То есть производные меняют знак. Неравенства (9), (10) становятся равенствами в критической точке  $x_c$ , при  $x \neq x_c$  они строгие.

Для левого конца сегмента при (8) выполнено

$$\frac{\partial t(x, a^2)}{\partial x} > 0 \quad (11)$$

в силу очевидного строго монотонного роста разности  $t(x, a^2) - x$ .

Таким образом мы получили при (8) двузначную зависимость  $t(x, a^2)$ , нижняя ветвь строго монотонно растет, а верхняя имеет ровно один максимум. Ветви гладко плавно совпадают в точке  $x_{\max}$  с вертикальной касательной (см. Рис. 4), поскольку производная обратной функции  $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_a = 0$ . Очевидно, при условии  $-x_{\max} \leq x \leq 0, 0 \leq \alpha \leq \pi/2$  эта двузначная зависимость отражается относительно нулевой точки, т.е.

$$t(-x, a^2) = -t(x, a^2) \quad (12)$$

Лемма доказана

Комбинируя уравнения (1) и (7) в новых обозначениях с уравнением сегмента, получим

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{L^2} + \frac{s^2}{H^2} &= 1 \\ s^2 \xi^2 &= (t - x)^2 \\ a^2 &= \frac{F^2 \xi^2 + x^2}{1 + \xi^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Исключив  $s$  и  $\xi$ , получим связывающее  $t$  и  $x$  уравнение четвертого порядка

$$t^2 \left( L^2 + H^2 \frac{a^2 - x^2}{F^2 - a^2} \right) - 2xtL^2 - L^2 \frac{H^2 a^2 - x^2 (L^2 - a^2)}{F^2 - a^2} = 0 \quad (14)$$

Величины  $t_c = t(x_c, a^2)$ ,  $x_c$ , очевидно определяются только параметрами эллипса и величиной  $a$ . Первая по сути абсцисса общих точек эллипса и ограничивающей траекторию гиперболы, вторая пересечение касательной к последней в этих точках с горизонтальной осью. Тогда, принимая во внимание (1), (2) и (5) запишем

$$\begin{aligned} \frac{t_c^2}{L^2} + \frac{s_c^2}{H^2} &= 1 \\ \frac{t_c^2}{a^2} - \frac{s_c^2}{F^2 - a^2} &= 1 \\ x_c t_c &= a^2 \end{aligned} \quad (15)$$

В итоге имеем

$$x_{\max}^2 = a^2; x_c^2 = a^2 \frac{F^2}{L^2}; t_c^2 = a^2 \frac{L^2}{F^2} \quad (16)$$

Как мы увидим далее, удобно перейти к нормированным величинам

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}; \tilde{t} = \frac{t}{a} \frac{F}{L}. \quad (17)$$

В новых переменных уравнение (14) сводится к симметричному виду

$$F^2 (L^2 - a^2) (\tilde{x}^2 + \tilde{t}^2) - a^2 H^2 \tilde{t}^2 \tilde{x}^2 - 2LF (F^2 - a^2) \tilde{t}\tilde{x} - F^2 H^2 = 0 \quad (18)$$

В новом пространстве изначальную динамическую систему можно описать «ступенчатой» последовательностью  $\{(\tilde{x}_n, \tilde{t}_n)\}_{-\infty}^{+\infty}$ , заданной на квадрате со стороной 2. В ней величина  $\tilde{x}_n$  является нормированной абсциссой сегмента траектории в эллипсе, переводящего его один конец в другой  $\tilde{t}_{n-1} \rightarrow \tilde{t}_n$ , а соответственно через  $\tilde{t}_n$  отображается  $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}_{n+1}$ .

Согласно решениям (18)

$$\tilde{t} = F \frac{L\tilde{x}(F^2 - a^2) \pm H \sqrt{(L^2 - a^2)(F^2 - a^2\tilde{x}^2)(1 - \tilde{x}^2)}}{F^2(L^2 - a^2) - a^2 H^2 \tilde{x}^2}, \quad (19)$$

$$\tilde{x} = F \frac{L\tilde{t}(F^2 - a^2) \pm H \sqrt{(L^2 - a^2)(F^2 - a^2\tilde{t}^2)(1 - \tilde{t}^2)}}{F^2(L^2 - a^2) - a^2 H^2 \tilde{t}^2} \quad (20)$$

Такой перевод может идти и справа налево, т.к. уравнение (14) не содержит знаков компонент вектора скорости. Кроме того теряется информация от знака  $\xi$ . То есть траектории симметричные относительно большой оси эллипса здесь не различимы.



Примеры участков динамического отображения  $\{(\tilde{x}_n, \tilde{t}_n)\}_{-\infty}^{+\infty}$  показаны на Рис. 4

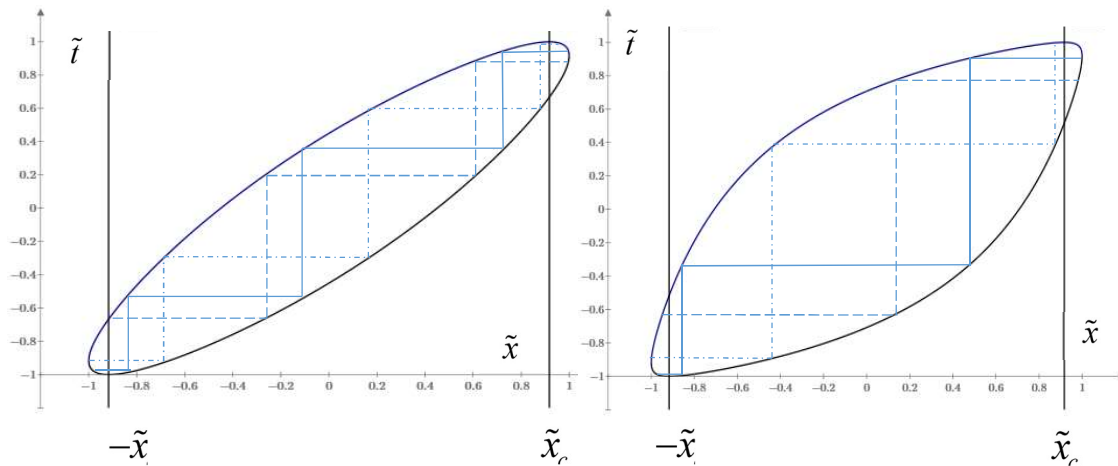


Рис. 4. Динамическая система эллиптического бильярда в координатах  $(\tilde{x}_n, \tilde{t}_n)$ . а) --  $a=0.5F$ , б) --  $a=0.9F$ . Вертикальные маркеры показывают экстремумы нижней и верхней ветвей границы. Оси эллипса взяты 20 и 100.

Разные типы линий соответствуют разным траекториям.

Квазиериод траектории и его однопараметрическая зависимость

Определение 1: Точкой поворота на бильярдной границе будем называть точку отражения, в которой горизонтальная проекция скорости луча меняет знак или становится равной нулю.

Пусть  $\{t_{n_m}, s_{n_m}\}_0^\infty$  задает точки поворота для  $\{(x_n, \xi_n)\}_0^\infty$ , тогда обозначим

$$T_m(x_0, \xi_0) = n_{m+2} - n_m \quad (21)$$

Определение 2: Периодом обращения или квазипериодом бильярдной траектории назовем следующий предел, если таковой существует,

$$T(x_0, \xi_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^m T_k}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n_{2m} - n_0}{m}, \quad (22)$$

где  $n_m$  – номер пересечения луча оси абсцисс перед m-м поворотом. Сдвиг индекса на 2 в формуле (21) выражает наличие двух поворотов на одном таком квазипериоде. Очевидно

$$T = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n_{2m}}{m} \quad (23)$$

Паре  $(\tilde{x}_n, \tilde{t}_n)$  поставим в соответствие пару векторов, построенную на вертикальной и горизонтальной хордах,  $(\vec{V}_n, \vec{G}_n)$ . Их направления пусть соответствуют движению бильярдной частицы в координатах  $(\tilde{x}_n, \tilde{t}_n)$ . Отдельному отражению от границы эллипса поставим в соответствие излом линии между концом вертикального сегмента и началом горизонтального. На промежутке  $[-\tilde{x}_c, \tilde{x}_c]$  число отражений, очевидно, ограничено. В концевых участках  $[-1, -\tilde{x}_c)$  и  $(\tilde{x}_c, 1]$  имеем всего по одному отражению для всякой траектории. Эти отражения соответствуют поворотам траектории слева и справа. В вырожденном случае перпендикулярного падения на границу, будем считать следующий сегмент ступеньки и вектор на нем нулевой длины, но с концами, расположенными по разные стороны от линии  $\tilde{x} = \tilde{x}_c$  для горизонтального сегмента и от прямой  $\tilde{t} = \tilde{t}_c$  для вертикального.

Выделим траекторию с вертикальным сегментом, исходящим вверх из точки  $-\tilde{x}_c$  и присвоим ему индекс 1. Пусть горизонтальный сегмент  $\vec{G}_1$  упирается дальним концом в возрастающую нижнюю ветвь границы (см. Рис. 5.)

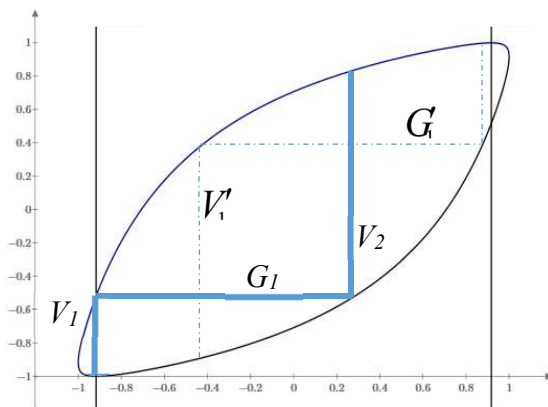


Рис. 5. Способ «синхронной» нумерации звеньев траекторий.

Очевидно у любой траектории, при очередном выходе из области  $\tilde{x} \in [-1, -\tilde{x}_c)$ , найдется и

только один положительно направленный сегмент между  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ . Начиная с него перенумеруем все остальные сегменты для каждой траектории.

Замечание: Если скалярное произведение  $(\vec{V}_m \vec{V}_{m+1}) \leq 0$  то, очевидно, точка  $(t_m, s_m)$  в координатах  $(x, y)$  является поворотной в смысле определения 1. В координатах  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  точка поворота задается  $(\tilde{x}_m, \tilde{t}_m)$ . Случай  $(\vec{V}_m \vec{V}_{m+1}) = 0$  приводит к двужначности в порядковом номере поворота для траекторий с точками отражения  $(\tilde{x}_{m+1}, \tilde{t}_{m+1}) = (1, \tilde{t}_c)$ . Условимся за порядковый номер поворота брать наименьшее значение из двух.

Определение 3: Траекторию  $\{\vec{V}_n, \vec{G}_n\}_{-\infty}^{+\infty}$  будем называть опережающей  $\{\vec{C}_n, \vec{D}_n\}_{-\infty}^{+\infty}$  при движении с лева на право (координаты векторов  $\vec{V}_n$  и  $\vec{C}_n$  неотрицательны) если вертикальный сегмент первой стоит правее сегмента второй с тем же номером. Траекторию  $\{\vec{V}_n, \vec{G}_n\}_{-\infty}^{+\infty}$  будем называть опережающей  $\{\vec{C}_n, \vec{D}_n\}_{-\infty}^{+\infty}$  при движении с права на лево (координаты векторов  $\vec{V}_n$  и  $\vec{C}_n$  неположительные) если вертикальный сегмент первой стоит левее сегмента второй с тем же номером. В остальных случаях отношение не определено.

Пусть в траектории нашлись соседние вертикальные сегменты траектории принадлежащие участку монотонности обеих ветвей границы  $[-\tilde{x}_c, \tilde{x}_c]$ . Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 2

Любая траектория с заданным интегралом (7) при проходе от одной точки поворота до другой имеет одно и только одно горизонтальное и вертикальное звено между соседними соответственно горизонтальными и вертикальными звеньями любой траектории того же направления, если таковые имеются.

Доказательство

Как видно из Рис. 6, направления соседних вертикальных сегментов траектории совпадают, если конец предыдущего и начало следующего лежат на разных ветвях решения (19).

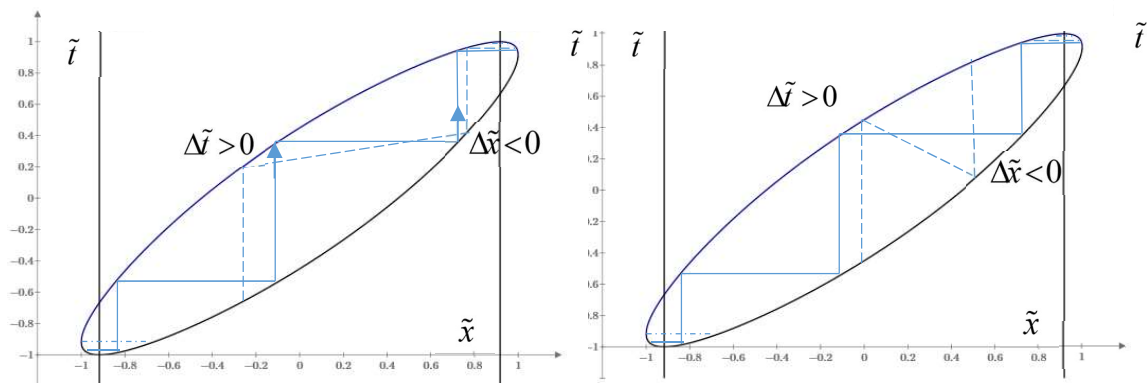


Рис. 6. К доказательству леммы 2.

Очевидно это возможно только если они принадлежат промежуткам монотонности  $[-1, \tilde{x}_c)$  и  $(-\tilde{x}_c, 1]$  соответствующих ветвей. Отсутствие сегмента какой-либо траектории между соседними любой другой или существование двух и более противоречит этой монотонности.

Лемма 2 доказана.

Таким образом, каждый горизонтальный сегмент  $\bar{G}_n$  каждой траектории пересекается и только с одним, вертикальным сегментом любой другой траектории, проходящей между ближайшими поворотами. А каждый вертикальный сегмент соответственно пересекается и только с одним, горизонтальным сегментом любой другой траектории.

Лемма 3. Отношение опережения двух траекторий с одинаковым интегралом движения (7) инвариантно.

Доказательство

Для интервала  $\tilde{t} \in [-\tilde{t}_c, \tilde{t}_c]$  утверждение следует из леммы 2. Рассмотрим правую

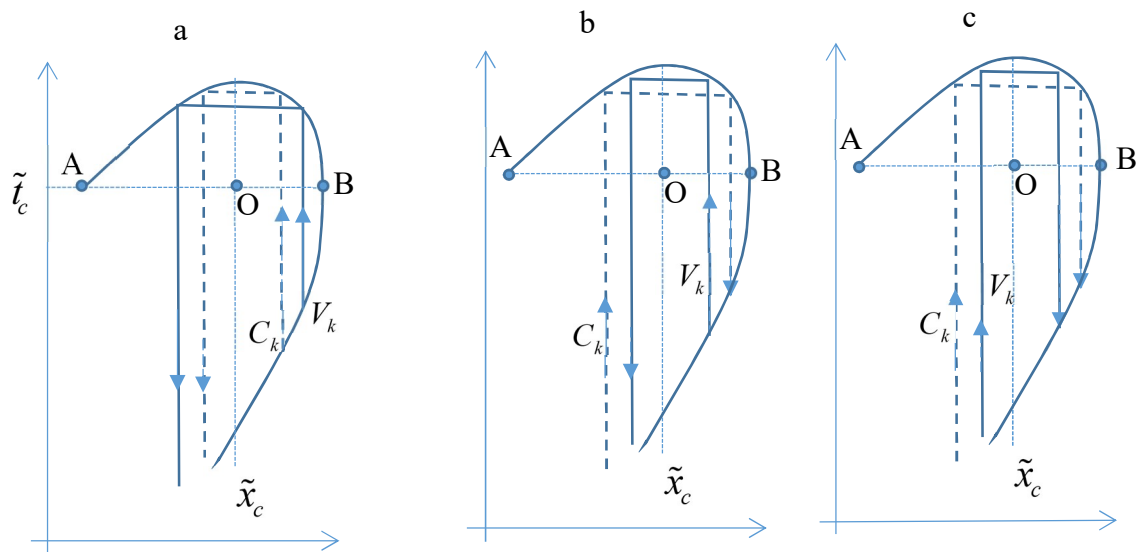


Рис. 7. Варианты поворота траекторий. Сплошная ломаная соответствует опережающей траектории.

область поворота  $\tilde{t} \in (\tilde{t}_c, 1]$  (см Рис. 7). Проведем горизонтальную хорду  $AB$  на уровне  $\tilde{t}_c$ .

Для всякой траектории при повороте некоторый вертикальный сегмент  $\vec{V}_k$  пересекает отрезок  $AB$  и переходит в нисходящий  $\vec{V}_{k+1}$ . Для всякой запаздывающей относительно первой траектории или восходящий  $\vec{C}_k$  пересекает  $AB$  или  $\vec{C}_{k+1}$ . В первом случае после поворота вертикальные сегменты с одинаковыми номерами меняются взаимным расположением из-за экстремума в точке  $\tilde{x}_c$  и отношение опережения сохраняется. Варианты поворотов показаны на Рис. 7. Во втором случае у запаздывающей до поворота траектории сегмент  $\vec{C}_{k+1}$  окажется обязательно правее  $\vec{V}_k$  по лемме 2. А, следовательно, после поворота  $\vec{C}_{k+2}$  будут левее  $\vec{V}_{k+1}$ . Но по той же лемме  $\vec{C}_{k+2}$  окажется обязательно правее  $\vec{V}_{k+2}$ . То есть опережение опять сохранится.

Лемма 3 доказана.

Следствие 1 леммы 3: Если какая-либо траектория была отстающей от одной, но опережающей другую, то она вечно будет оставаться между ними на участках с определенным (слева направо или наоборот) направлением движения.

Следствие 2 леммы 3: Для любой пары элементов последовательности периодов траектории выполнено неравенство

$$|T_m - T_l| \leq 1, \quad (24)$$

и определяемый (22) квазипериод существует.

Доказательство

Пусть числа  $n_m, n'_m$  - очередные номера точек поворота опережающей и запаздывающей траекторий соответственно. Тогда повторяя рассуждения доказательства леммы 3, имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq n'_m - n_m \leq 1 \\ 1 &\geq n'_{m+2} - n_{m+2} \geq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Вычитая из второго неравенства первое, получим.

$$-1 \leq T'_m - T_m \leq 1. \quad (26)$$

Поскольку два разных участка траектории можно рассматривать как две разные, идущие в одном направлении с соответствующей перенумерацией сегментов, то (26) влечет (24).

Второе утверждение вытекает из первого, поскольку общий член  $T_m$  может принимать только два значения, отличающиеся на единицу, и всегда можно ввести частоты их появления по выборке любого размера

$$T(x_0, \xi_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^m T_k}{m} = \eta T_{\max} + \lambda T_{\min} \quad (27)$$

Следствие 2 леммы 3 доказано.

### Совокупности периодических траекторий

Теорема 1: Если в эллиптическом бильярде нашлась периодическая траектория с заданным интегралом движения (7) и минимальным периодом по числу отражений  $N$ , то почти все траектории с таким же интегралом – периодические.

Доказательство

Пусть найдется периодическая траектория с минимальным периодом  $N$ . Рассмотрим участок ее траектории вблизи поворота (см Рис. 8).

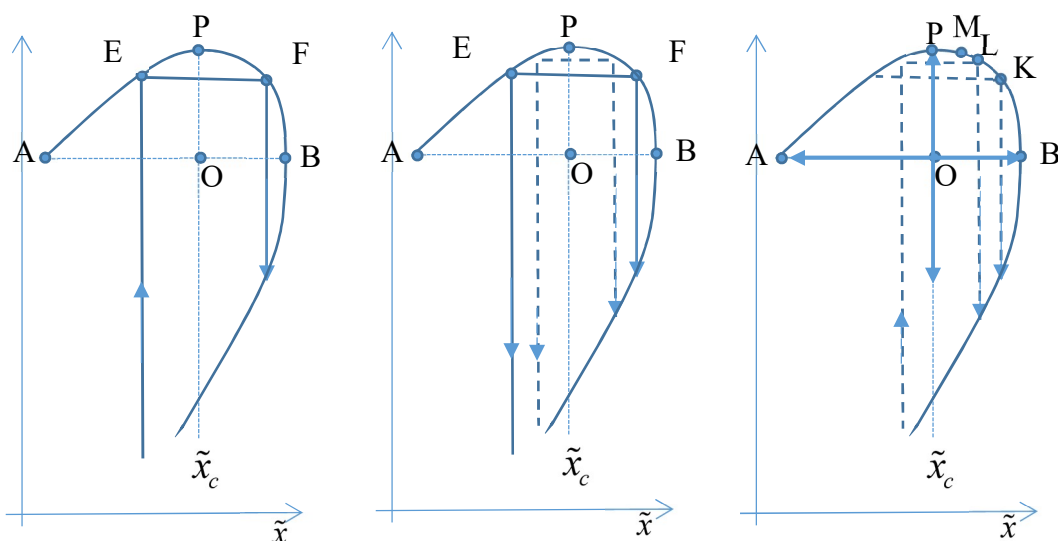


Рис. 8. Периодическая траектория вблизи поворота.

Сформируем две выходящих соответственно из точек  $E$  и  $F$  траектории. Через период  $N$  отрезок  $EF$  перейдет сам в себя по условию. По следствию 1 леммы 3 стартовавшие внутри отрезка  $EF$  траектории останутся также внутри, а стартовавшие снаружи внутрь не зайдут. Пусть не все из них периодические. Тогда мы получили разбиение множества всех траекторий на пару непересекающихся инвариантных для рассматриваемой динамической системы подпространств конечной меры каждое (если  $0 < |EF| < |AB|$ ). Это требует дополнительного интеграла движения, но в эллиптическом бильярде его не существует. В случае  $|EF| = 0$  (см. Рис. 8с.) заданная периодическая траектория имеет горизонтальное звено нулевой длины и вертикально, выходящее по нормали из точки  $(\tilde{x}_c, 1)$ . Очевидно есть аналогичная периодическая траектория из точки  $B$  с координатами  $(1, \tilde{t}_c)$ . У ней нулевое вертикальное звено и горизонтальное на хорде  $AB$ . Любая орбита, стартовавшая из дуги  $PB$ , через  $N$  отражений придет снова на эту дугу, так как ограничивающие ее периодические траектории придут туда же. Пусть такая траектория с периодом  $N < N' \leq \infty$  двигаясь из точки  $K$  через  $N$  шагов возвращается в  $L$ , лежащую ближе к  $(\tilde{x}_c, 1)$  чем  $K$ , тогда еще через  $N$  шагов мы получим еще более близкую к  $(\tilde{x}_c, 1)$  точку  $M$ . Тое есть, мы получили сжимающее преобразование для всех траекторий с минимальным периодом больше  $N$ . В случае если точка  $M$  лежит далее чем  $K$ , мы получим сжимающее преобразование к точке  $B$ . Но бильярд это гамильтонова система и не может содержать

множество ненулевой меры сжимающихся к предельным точкам траекторий. Значит почти все траектории -- периодические с минимальным периодом  $N$ .

Теорема доказана.

### Расчет квазипериода

При заданном интеграле движения (7) и непериодичности траектории последовательность  $\{\tilde{x}_n\}_{-\infty}^{+\infty}$  всюду плотна на интервале  $[-1,1]$ . Соответственно порождается непрерывная плотность распределения пересечений траектории с главной осью эллипса.

Рассмотрим следующий мысленный эксперимент. Пусть вдоль всей бильярдной траектории равномерно распределены материальные точки. И пусть траектория стартует в нулевой момент времени со звена под номером ноль. Тогда получим внутри бильярда двумерное распределение их плотности

$\rho(x, y, t)$  и плотности их тока

$$\vec{J} = c \rho(x, y, t) (\overline{\cos \alpha}, \overline{\sin \alpha}), \quad (28)$$

где  $c$  -- модуль скорости материальных точек. В каждый момент времени будем сохранять нормировку распределения

$$A(t) \int \rho(x, y, t) dx dy = 1 \quad (29)$$

Очевидно это распределение будет стремиться к стационарному при  $t \rightarrow \infty$  по эргодической теореме Биркгофа-Хинчина [8]. Тогда для плотности из (29) будет иметь место уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0. \quad (30)$$

Зеркальная симметрия позволяет отдельно рассматривать уравнение (30) для ансамбля частиц,двигающихся слева направо и с права налево. Разобьем ансамбль, перемещающийся слева направо, на суммудвигающегося вверх и вниз

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \rho_+(x, y) + \rho_-(x, y) \\ \vec{J}(x, y) &= \vec{J}_+(x, y) + \vec{J}_-(x, y) \end{aligned} \quad (31)$$

С учетом стационарности получим



$$\begin{aligned} & \rho_+ \frac{\partial \sin \alpha_+}{\partial y} + \sin \alpha_+ \frac{\partial \rho_+}{\partial y} + \rho_+ \frac{\partial \cos \alpha_+}{\partial x} + \cos \alpha_+ \frac{\partial \rho_+}{\partial x} + \\ & + \rho_- \frac{\partial \sin \alpha_-}{\partial y} + \sin \alpha_- \frac{\partial \rho_-}{\partial y} + \rho_- \frac{\partial \cos \alpha_-}{\partial x} + \cos \alpha_- \frac{\partial \rho_-}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Опять же из-за симметрии относительно главной оси при  $y = 0$  имеем

$$\begin{aligned} & \rho_+ = \rho_- \\ & \frac{\partial \rho_+}{\partial y} = \frac{\partial \rho_-}{\partial y} = 0, \\ & \alpha_- = -\alpha_+ \end{aligned} \quad (33)$$

тогда уравнение (32) перейдет в следующее выражение

$$\rho_+ \left( \frac{\partial \sin \alpha_-}{\partial y} + \frac{\partial \sin \alpha_+}{\partial y} \right) + 2\rho_+ \frac{\partial \cos \alpha_+}{\partial x} + 2 \cos \alpha_+ \frac{\partial \rho_+}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

для точки на главной оси  $(x, 0)$ , лежащей на пересечении звеньев с углами наклона  $\alpha_+$  и  $\alpha_-$ .

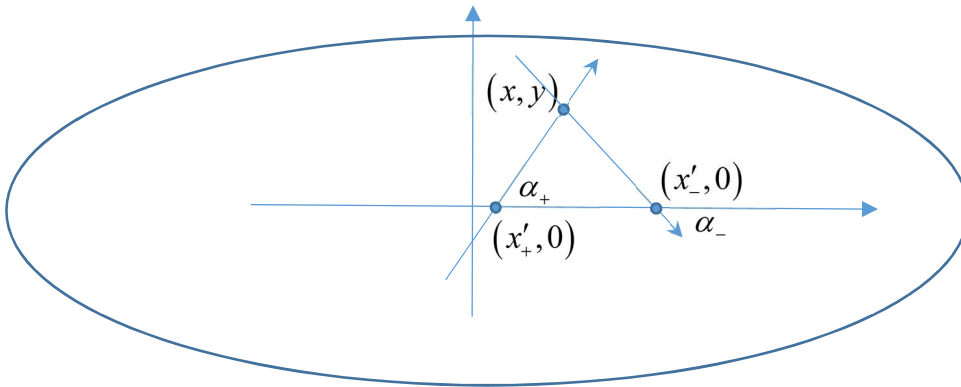


Рис. 9. К расчету периода бильярдной траектории

Для произвольной точки внутри эллипса, как видно из Рис. 9, можем записать

$$\begin{aligned} x - x'_+ &= y \cdot \operatorname{ctg}(\alpha_+) = y \xi_+(x', a) \\ x - x'_- &= y \cdot \operatorname{ctg}(\alpha_-) = -y \xi_+(x', a) \end{aligned} \quad (35)$$

где также индекс «+» означает «восходящий сегмент траектории, «-» соответственно нисходящий,  $x'$  – абсцисса звена траектории. На главной оси эллипса

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial y}{\partial x'_+} \right)_{x'_+=x} &= -\frac{1}{\xi_+(x,a)} \\ \left( \frac{\partial y}{\partial x'_-} \right)_{x'_-=x} &= \frac{1}{\xi_+(x,a)} \end{aligned}, \quad (36)$$

тогда очевидно

$$\left( \frac{\partial \sin \alpha_-}{\partial y} \right)_{y=0} = \left( \frac{\partial \sin \alpha_+}{\partial y} \right)_{y=0} = -\xi_+(x,a) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\xi_+(x,a)^2 + 1}}. \quad (37)$$

Полученные с учетом симметрии равенства (37) позволяют свести уравнение непрерывности (34) к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} -\rho_+(x,a) \xi_+(x,a) \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{\xi_+(x,a)^2 + 1}} + \rho_+(x,a) \frac{d}{dx} \frac{\xi_+(x,a)}{\sqrt{\xi_+(x,a)^2 + 1}} + \\ + \frac{\xi_+(x,a)}{\sqrt{\xi_+(x,a)^2 + 1}} \frac{d}{dx} \rho_+(x,a) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Первый член частично компенсирует второй, приводя (38) через равенство

$$\frac{\rho_+(x,a)}{\sqrt{\xi_+(x,a)^2 + 1}} \frac{d}{dx} \xi_+(x,a) + \frac{\xi_+(x,a)}{\sqrt{\xi_+(x,a)^2 + 1}} \frac{d}{dx} \rho_+(x,a) = 0 \quad (39)$$

к сохранению на оси абсцисс произведения

$$\rho_+(x,a) \xi_+(x,a) = const \quad (40)$$

На этой же горизонтали для вертикальной компоненты вектора плотности тока двигающихся вверх частиц имеем

$$J_{+y}(x,a) = \rho_+(x,a) c \frac{1}{\sqrt{\xi_+(x,a)^2 + 1}} \quad (41)$$

С другой стороны

$$J_{+y}(x,a) \propto cf(x,a), \quad (42)$$

где  $f(x,a)$  -- плотность распределения вдоль оси абсцисс точек пересечения звеньев траектории. В итоге из (40), (41), (42) получаем

$$f(x, a) \propto \frac{1}{\xi_+(x, a) \sqrt{\xi_+(x, a)^2 + 1}} \quad (43)$$

Учитывая линейную связь (17) и соотношение (7), имеем следующую плотность распределения

$$f(\tilde{x}, a) = B(a) \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{x}^2} \sqrt{1-\frac{a^2}{F^2}\tilde{x}^2}} \quad (44)$$

с, например, единичной нормировкой, определяемой полным эллиптическим интегралом первого рода

$$B(a)^{-1} = 2 \int_0^1 \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{1-\tilde{x}^2} \sqrt{1-\frac{a^2}{F^2}\tilde{x}^2}}. \quad (45)$$

Доля или частота поворотов траектории в левой или правой части бильярда равна доли сегментов на множестве  $(\tilde{x}_c, 1]$  и составляет

$$\omega = \frac{1}{T} = \frac{\int_{\tilde{x}_c}^1 \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{1-\tilde{x}^2} \sqrt{1-\frac{a^2}{F^2}\tilde{x}^2}}}{2 \int_0^1 \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{1-\tilde{x}^2} \sqrt{1-\frac{a^2}{F^2}\tilde{x}^2}}}. \quad (46)$$

Примечательно, что период одинаков для всех софокусных эллипсов при заданной величине максимально-возможного отклонения траектории от центра.

Определение 4. Набегом фазы нашей системы при отображении  $(x_n, \xi_n) \rightarrow (x_{n+1}, \xi_{n+1})$  будем называть величину

$$\Delta\varphi_n = \frac{1}{4} \begin{cases} |\tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n|, & \tilde{x}_n \in [-\tilde{x}_c, \tilde{x}_c] \\ 2a - |x_{n+1}| - |x_n|, & x_n \in [-1, -\tilde{x}_c] \cup (\tilde{x}_c, 1] \end{cases} \quad (47)$$

а фазой на шаге  $n$

$$\Phi_n = \left( \frac{\tilde{x}_0 + \sum_{i=0}^n \Delta\varphi_i}{4} \right) \bmod 1. \quad (48)$$

Тогда последовательность (48) – суть ориентируемый гомеоморфизм окружности, а частота (46) соответственно его число вращения.

Последствию 1 леммы 3 между двумя близкими траекториями число других, «зажатых» между ними, сохраняется, значит и сохраняется и «одномерная» мера

$$d\mu = \frac{|d\tilde{x}|}{\sqrt{1-\tilde{x}^2} \sqrt{1-\frac{a^2}{F^2}\tilde{x}^2}} B(a) \quad (49)$$

Как видно из (47) и (48), отображение  $\Phi_n \rightarrow \Phi_{n+1}$  непрерывно и, по крайней мере, дважды дифференцируемо на отрезке  $[0,1]$ . Значит, в силу теоремы Данжуа о диффеоморфизме окружности [9,10], непериодическим всюду плотным траекториям соответствуют значения параметра  $a$ , приводящие к иррациональным числам вращения (46). Но, поскольку, рациональное число сколь угодно точно можно приблизить иррациональным, то формула (46) остается верной и для периодических траекторий.

#### Численное моделирование

Простой вид плотности распределения (44) и полученного периода позволяет легко провести сравнение с численным экспериментом. На Рис. 10 показана гистограмма распределения плотности сегментов траектории на горизонтальной оси и наложенная на нее функция плотности распределения, полученная из (44). В данном расчете учтено  $N=200000$  отражений. В гистограмме 1000 столбцов одинаковой ширины.

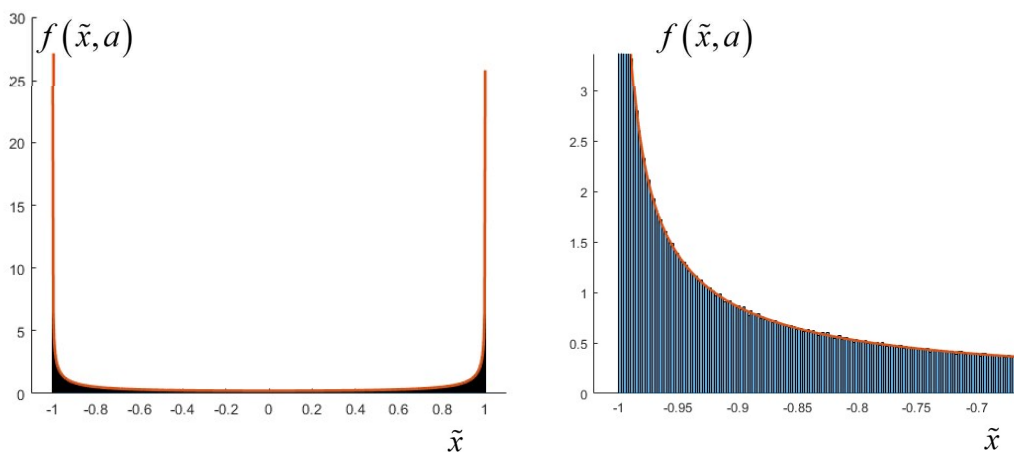


Рис. 10. Экспериментальная гистограмма распределения точек пересечения сегментов траектории с осью абсцисс и распределение (44). Расчет и численный эксперимент выполнены для параметров эллипса  $L=100$ ,  $H=20$ . Интеграл движения

Рассчитанный по (46) средний период траектории составил  $T_s = 9.919924930353959$ ,

экспериментальный соответственно –  $T_e = 9.919944447200040$ . Несоответствие, по-видимому, определяется статистической погрешностью из-за конечной ширины распределения  $T_n(\tilde{x}_0)$ . Согласно следствию 2 леммы 3, такое несоответствие ограничивается величиной  $\Delta T < \frac{1}{N} \square 10^{-5}$ .

Для наглядности разрешим численно (46) относительно  $a$  при  $T=10$ , получим  $a \approx 88.7130906635464036577999273336$ . Соответствующие варианты траектории в координатах последовательности  $\{\tilde{x}_n, \tilde{t}_n\}_0^{2000}$  приведены на Рис. 11. Таким образом, результат (46) хорошо согласуется с численным экспериментом.

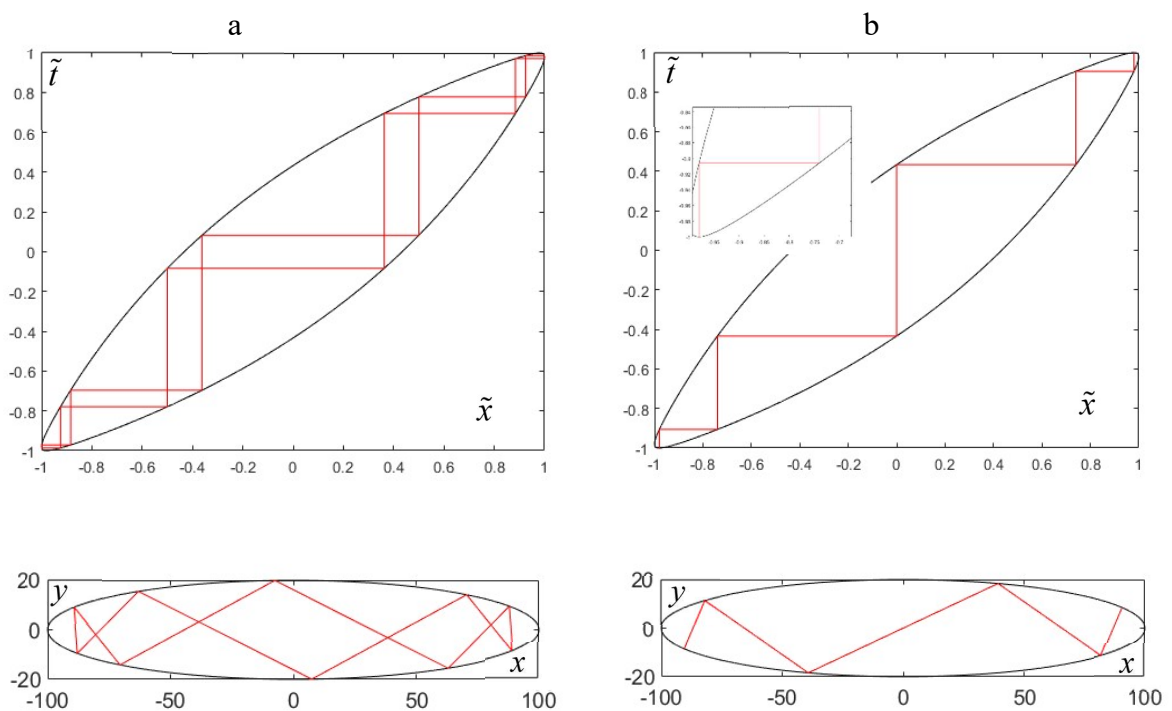


Рис. 11. Траектории с периодом 10 в координатах  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  сверху,  $(x, y)$  внизу. а)  $\tilde{x}_0 = 0.5$ ; б)  $\tilde{x}_0 = -F/L$

#### Асимптотика числа вращения

Из формулы (46) определим предельные значения числа вращения. Наиболее просто это сделать при  $a \rightarrow F$ . В этом случае оба интеграла в (46) становятся расходящимися на верхнем пределе, поэтому, вклад в нижний интеграл отрезка  $(0, \tilde{x}_c)$  становится несущественным. Число вращения стремится к  $1/2$ , что в точности соответствует траекториям проходящим через фокусы  $\pm F$ .

Противоположный случай  $a \rightarrow 0$  позволяет легко выписать асимптотику для числа вращения. Ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим

$$\int \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{1-\tilde{x}^2} \sqrt{1-\frac{a^2}{F^2}\tilde{x}^2}} \xrightarrow{a^2 \rightarrow 0} \int \frac{1+\frac{a^2}{2F^2}\tilde{x}^2}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} d\tilde{x} + o(a^2) =$$

$$= \arcsin(\tilde{x}) \left(1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{F^2}\right) - \frac{1}{4} \frac{a^2}{F^2} \tilde{x} \sqrt{1-\tilde{x}^2} + o(a^2) \quad (50)$$

Тогда (46) при малом  $a^2$  перейдет в

$$\omega = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\tilde{x}_c)\right) \left(1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{F^2}\right) + \frac{1}{4} \frac{a^2}{F^2} \tilde{x}_c \sqrt{1-\tilde{x}_c^2}}{\pi \left(1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{F^2}\right)} + o(a^2) \quad (51)$$

При разработке идеи нерезонансного накопления фотонов рассматривались системы с большими радиусами кривизны зеркал по сравнению с расстояниями между зеркал [2,3], когда хорошо работает линеаризованное бильярдное отображение с параболической границей. В эллиптическом бильярде это соответствует условию

$$H \ll L, \quad (52)$$

учитывая, что  $\tilde{x}_c = \frac{F}{L} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{H^2}{L^2}$  и  $\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\tilde{x}_c)\right) \approx \sqrt{2(1-\tilde{x}_c)}$ , для круговой частоты осцилляций траектории при малой амплитуде отклонения имеет место

$$2\pi\omega = \frac{2H}{L} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{F^2}\right). \quad (53)$$

Таким образом, формула (53) содержит первую ангармоническую поправку к частоте, получаемой при линейном рассмотрении устойчивых траекторий [3].

В традиционном формализме бильярдной системы как ориентированного (например, по часовой стрелке) отображения границы в себя число вращения  $\omega_r$  по сути есть средняя длина дуги между соседними отражениями, отнесенная к периметру бильярда. Но как видно из Рис. 12, каждому сегменту траектории с заданным интегралом движения найдется в пару параллельный ему с абсциссой противоположного знака. Плотность распределения для них, как следует из симметрии фигуры или явно из (44), одинакова. При этом оба

сегмента «отбивают» дуги  $S(-x)$  и  $S(x)$  справа от себя, дающие в сумме полный периметр границы  $P$ . Тогда для всякого  $a \leq F$  число вращения равно

$$\omega_r = \frac{\int_{-1}^1 f(\tilde{x}, a) S(a\tilde{x}) d\tilde{x}}{P} = \int_0^1 f(\tilde{x}, a) d\tilde{x} = \frac{1}{2} \quad (54)$$

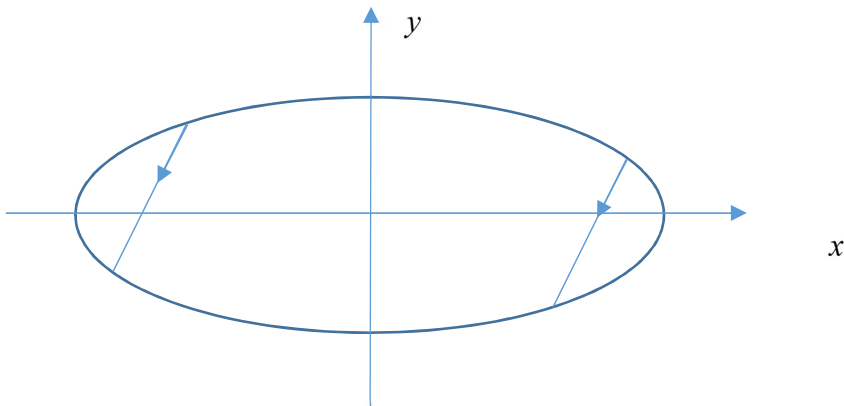


Рис. 12. К вычислению средней длины дуги ориентированного бильярдного отображения.

### Заключение

Полученное распределение плотности фотонов (40) позволит упростить подбор начальных условий инжекции при проектировании фотонного нейтрализатора для получения приемлемых границ области удержания фотонов и достаточно равномерного распределения внутри нее.

Найденная явная зависимость числа вращения (46) от начальных условий траектории и ее асимптотика будет использована для интерпретации экспериментов по удержанию излучения в нерезонансном накопителе.

Динамическая система, связанная со ступенчатым отображением (19), (20) координат звеньев приводит к дополнительным деталям (например, если сравнить числа вращения) в описании бильярда, по крайней мере для случая устойчивых (в смысле этой работы) траекторий.

Также такое отображение можно использовать для классификации периодических орбит, которые должны, по всей видимости, обладать симметриями, входящими в группу квадрата  $D_4$ , поскольку взаимное отображение любой пары из выделенных «в некотором смысле»

точек  $(-1, -\tilde{t}_c)$ ,  $(1, \tilde{t}_c)$ ,  $(-\tilde{x}_c, -1)$ ,  $(\tilde{x}_c, 1)$  входят в нее. Скорее всего, в зависимости от четности периода траектория обладает определенной симметрией из  $D_4$ . При этом сама граница очевидно обладает симметриями прямоугольника, повернутого на 45 градусов.

Использованный здесь подход к поиску периода или числа вращения для устойчивых в смысле этой работы траекторий может быть адаптирован и к задаче о неустойчивых траекториях, касающихся софокусного эллипса.

Автор выражает благодарность Куркучеву В.В. за помощь в математическом моделировании бильярда, Сковородину Д.И. за ряд ценных замечаний по тексту.

## Литература

- 
- 1 П. А. Бохан, В. В. Бучанов, Д. Э. Закревский, М. А. Казарян, М. М. Калугин, А. М. Прохоров, Н. В. Фатеев, Некоторые новые тенденции в лазерном разделении изотопов в атомарных парах, *Квантовая электроника*, 2002, том 32, номер 7, 570–586.
  - 2 Попов С.С., Атлукханов М.Г., Бурдаков А.В., Иванов А.А., Куркучев В.В., Санин А.Л., Сковородин Д.И., Трунев Ю.А., Шиховцев И.В. Исследование метода фотонной нейтрализации мощных пучков отрицательных ионов в ИЯФ СО РАН // *Физика плазмы*. - 2024. - Т. 50. - №4. - С. 491-501.  
doi: [10.31857/S0367292124040091](https://doi.org/10.31857/S0367292124040091).
  - 3 S.S. Popov, M.G. Atlukhanov, A.V. Burdakov, et al Neutralization of negative hydrogen and deuterium ion beams using non-resonance adiabatic photon trap. 2018 *Nucl. Fusion* 58 096016 DOI 10.1088/1741-4326/aacb0218
  - 4 Fiorucci, D., Fassina, A. Overview of photo-neutralization techniques for negative ion-based neutral beam injectors in future fusion reactors. *Eur. Phys. J. D* **76**, 141 (2022). <https://doi.org/10.1140/epjd/s10053-022-00457-9>
  - 5 Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды. — М.: Наука, 1990, 288с
  - 6 Козлов ВВ, Трещев ДВ. Биллиарды. Генетическое введение в динамику с ударами. — М.: МГУ, 1991, 168с.
  - 7 Биркгоф Д. Динамические системы. Ижевск: УдГУ, 1999. 408 с.
  - 8 Корнфельд И.П, Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория – М.: Наука. Главная редакция физико-математической науки, 1980.
  - 9 В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, “Математические аспекты классической и небесной механики”, *Динамические системы – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **3**, ВИНТИ, М., 1985, 5–290
  - 10 [Каток А. Б.](#), [Хассельблат Б.](#). Введение в современную теорию динамических систем / пер. с англ. А. Кононенко при участии С. Ферлегера. — М.: Факториал, 1999. — 768 с..