

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Сибирское отделение
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И. Будкера

Н. Митянина

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНЫХ
КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ
МНОГОСГУСТКОВОГО ПУЧКА
(для параболических сгустков)

ИЯФ 2008-14

Новосибирск
2008

**Устойчивость продольных
когерентных колебаний многосгусткового пучка
(для параболических сгустков)**

Н. Митянина

Институт Ядерной Физики им. Будкера СО РАН
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

В предыдущих работах ([1], [2]) рассматривались методы расчета устойчивости когерентных колебаний многосгустковых пучков с произвольными токами сгустков. Так, в [1] приведен вывод матрицы, собственные числа которой определяют устойчивость продольных мультипольных когерентных колебаний в случае гауссовской формы сгустков (электронные сгустки). При этом выбранный вид используемых ортогональных полиномов (полиномы Лаггера) приводит к тому, что порядок матрицы задачи для коротких сгустков уменьшается до 1 на каждый сгусток, то есть, автоматически упрощается до решения, полученного в модели макрочастиц [2].

В данной работе получен аналогичный результат и для параболических сгустков (протоны, ионы): выбран базис ортогональных полиномов, при котором порядок матрицы задачи в пределе коротких сгустков также уменьшается до 1 на каждый сгусток.

© Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН

1. Результаты, полученные ранее для гауссовских сгустков

В [1] рассматривалось решение следующей системы уравнений для гармоник возмущения функций распределения сгустков пучка ([1], ур.(1)):

$$(s^2 + (n\Omega(J))^2)F_n^l(J, s) - 2in\Omega(J) \sum_{j=1}^{N_b} \sum_q \int K_{nq}^{lj}(J, J', s) F_q^j(J', s) dJ' = 0, \\ l = 1, \dots, N_b, \quad n, q = 1, 2, \dots \quad (1)$$

где N_b – число сгустков, $F_n^l(J, s)$ – n -я мультипольная гармоника синхротронных колебаний для возмущения функции распределения l -го сгустка. Ядро системы имеет вид:

$$K_{nq}^{lj}(J, J', s) = e^{\frac{\partial f_0^l}{\partial J} I_j} \sum_m \left\{ \frac{n}{m} Z(s - im\omega_0) \times e^{im(\theta_l - \theta_j)} J_n(m\phi_0 \sqrt{J/J_0}) J_q(m\phi_0 \sqrt{J'/J_0}) \right\}, \quad (2)$$

$f_0^l(J)$ – невозмущенная функция распределения l -го сгустка, независимая от времени и фазы и предполагающаяся одинаковой (гауссовской) для всех сгустков:

$$f_0^l(J) = (1/2\pi J_0) \exp(-J/J_0); \quad \phi_0 = \sigma_b \sqrt{2}/R, \\ J_0 = \phi_0^2 R M \Omega / 2, \quad (3)$$

R – радиус накопителя, σ_b – г.м.с. длина сгустка (одинаковая для всех сгустков); $Z(s)$ – импеданс резонатора, приведенный к узкому зазору (то есть с учетом пролетного фактора); ω_0 – частота обращения; I_j – средний ток j -го сгустка; $\Omega(J)$ – частота синхротронных колебаний (для малых токов), θ_j – азимутальное положение j -го сгустка относительно первого из них, например, (в случае встречных пучков с общей ВЧ системой θ_j

определены в [2] и зависят еще от расположения резонаторов относительно места встречи пучков).

Используя разложение $F_n^l(J, s)$ по полиномам Лаггера $L_k^{(|n|)}(x)$ [1] (как в [3], с.315), для которых весовая функция пропорциональна невозмущенной гауссовской функции распределения $f_0^l(J)$:

$$F_n^l(J) = W(x) \sum_{k \geq 0} a_k^{nl} f_k^{(|n|)}(x), \quad x = J/J_0, \quad W(x) = e^{-x}, \quad (4)$$

$$f_k^{(|n|)}(x) = \frac{x^{|n|/2}}{\sqrt{h_k(|n|)}} L_k^{(|n|)}(x), \quad \int_0^\infty e^{-x} f_k^{(|n|)}(x) f_m^{(|n|)}(x) dx = \delta_{km}. \quad (5)$$

$$L_k^{(|n|)}(x) = \sum_{m=0}^k x^m \frac{(-1)^m}{m!} \binom{k+|n|}{k-m}, \quad h_k(|n|) = \frac{(|n|+k)!}{k!}, \quad (5)$$

можно трансформировать систему интегральных уравнений (1) в линейную алгебраическую систему. С учетом амплитудной зависимости синхротронной частоты $\Omega(J) = \Omega_0(1 - \xi J/J_0)$, линейная алгебраическая система для коэффициентов разложения возмущения функции распределения $D_k^{nl} = (a_k^{nl} - a_k^{-nl})$ принимает вид:

$$\left\{ s^2 - (in\Omega_0)^2 (\hat{E} - 2\xi \hat{M}^n) \right\} \bar{D}^{nl} - 2An \sum_{j=1}^{n_0} I_j \sum_m Z_m (s - im\omega_0) \times e^{im(\theta_l - \theta_j) - \frac{m^2 \phi_0^2}{2}} \sum_{q>0} \hat{B}^{|n||q|} (-iq\Omega_0) \bar{D}^{qj} = 0, \quad (6)$$

$$B_{k'k}^{|n||q|}(m) = \frac{m(m\phi_0/2)^{2(k+k') + |q| + |n| - 2}}{\sqrt{(|n|+k')! k'! (|q|+k)! k!}}, \quad (7)$$

$$M_{km}^n = \int x W(x) f_k^{(|n|)}(x) f_m^{(|n|)}(x) dx = (|n|+2k+1) \delta_{km} - \sqrt{k(|n|+k)} \delta_{k-1,m} - \sqrt{m(|n|+m)} \delta_{k,m-1},$$

$$A = \frac{\Omega}{2q_{rf} V_{rf} \sin \phi_{s0}}, \quad J_0 = \phi_0^2 R M \Omega / 2, \quad \Omega^2 = \frac{q_{rf} V_{rf} \sin \phi_{s0}}{2\pi R^2 |M|},$$

где q_{rf} , V_{rf} и ϕ_{s0} – номер ВЧ гармоники, амплитуда ускоряющего ВЧ напряжения и синхронная фаза.

2. Необходимый порядок аппроксимации для гауссовских сгустков

При использовании разложения (4) для возмущения функции распределения встает вопрос о необходимом порядке аппроксимации, то есть конечном числе членов разложения, которым можно ограничить бесконечный ряд (4), не ухудшая точность решения. Очевидно, что если, начиная с некоторого номера $k_{\max} + 1$ элементы матрицы пренебрежимо малы по сравнению с максимальным по модулю элементом подматрицы ранга k_{\max} , то расширение ранга матрицы (то есть, повышение порядка аппроксимации) не приведет к заметному изменению максимальных (по модулю) собственных чисел.

Благодаря факториалам в знаменателе $B_{k'k}^{||n||q|}(m)$ (7), матричные элементы быстро уменьшаются с ростом k', k , и при любой верхней границе рассматриваемого спектра резонатора $\omega_{\max} = m_{\max} \omega_0$ необходимый порядок аппроксимации k_{\max} может быть оценен как (см. [1])

$$k_{\max} \approx (m_{\max} \phi_0 / 2)^2. \quad (8)$$

Для коротких сгустков, при $m_{\max} \phi_0 \ll 1$ (см. (7)), $B_{k'k}^{||n||q|}(m)$ дополнительно уменьшается степенным образом с ростом k', k . Уже нулевой порядок аппроксимации $k_{\max} = 0$ (то есть, когда принимается во внимание только один член разложения функции распределения) дает правильный результат – тот же, что и в модели макрочастиц (см., например, [2], без затухания Ландау).

Для параболического пучка также надо выбрать систему ортогональных функций, при которой необходимый порядок аппроксимации для коротких сгустков будет уменьшаться аналогичным образом.

3. Система уравнений для параболических сгустков

3.1. Весовая функция

Для параболических сгустков система уравнений имеет вид (1) с ядром (2), в котором $f_0'(J)$ – невозмущенная функция распределения l -го сгустка – описывает параболический пучок:

$$f_0(J) = \frac{3}{4\pi J_0} (1 - J/J_0)^{1/2}, \quad (9)$$

$$J_0 = \phi_0^2 RM\Omega/2, \quad \phi_0 = \tau_L \omega_0/2,$$

τ_L – полная длина сгустка (в сек), что соответствует приведенной, например, в [3] (с.308), функции распределения частиц в параболическом сгустке (обычной для протонных пучков).

$$\text{Нормировка функции распределения } 2\pi \int_0^{\infty} f_0(J) dJ = 1.$$

Для решения системы уравнений (1), аналогично рассмотренной ранее задаче с гауссовскими сгустками, используем разложение возмущения функции распределения по ортогональным полиномам вида (4).

Выбор подходящих ортогональных полиномов зависит от весовой функции и дополнительных требований к элементам получаемой с их помощью матрицы задачи (см. раздел 2).

Как видно из выражения для ядра системы, весовая функция для параболических сгустков имеет вид:

$$W'(x) = (1-x)^{-1/2} \propto J_0 \frac{\partial f_0}{\partial J} = -\frac{3}{8\pi J_0} (1-x)^{-1/2}. \quad (10)$$

На первый взгляд, для такой весовой функции ортогональными полиномами могут быть полиномы Чебышева (см. Приложение 1).

3.2. Решение с использованием полиномов Чебышева

При использовании ортогональных полиномов Чебышева система алгебраических уравнений для коэффициентов разложения возмущения функции распределения a_k^{qj} имеет вид (при $\xi = 0$)

$$(s + in\Omega_0) \sum_{k \geq 0} a_k^{nl} \delta_{sk} \frac{\pi}{2} - A \sum_{j=1}^{N_b} I_j \sum_q \sum_{k \geq 0} a_k^{qj} H_{nq,sk}^{lj} = 0,$$

где

$$H_{nq,sk}^{lj} = \frac{1}{2} \left(\tilde{H}_{nq,s(k+1)}^{lj} + \tilde{H}_{nq,s(k-1)}^{lj} \right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{nq,sk}^{lj} &= (1 + (-1)^{n+s})(1 + (-1)^{q+k}) \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \\ &\times \sum_m \left\{ \frac{n}{m} Z(s - im\omega_0) e^{im(\theta_l - \theta_j)} \left[J_{(n+s)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) J_{(n-s)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) \right] \right. \\ &\times \left. \left[J_{(q+k)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) J_{(q-k)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

– множители, зависящие от номеров ортогональных полиномов s, k .

Однако в этом случае при увеличении номеров k, s матричные элементы (при $|m_{\max} \phi_0| \ll 1$) не уменьшаются (вернее, не так, как для полиномов Лаггера). Покажем это.

Пусть $0 < s < n$ (n – порядок мультипольности рассматриваемых типов продольных колебаний)

Слагаемые суммы $\tilde{H}_{nq,sk}^{lj}$ зависит от номера s как

$$A_{n,s} = J_{(n+s)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) J_{(n-s)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) \approx \left(\frac{m\phi_0}{4} \right)^n \frac{1}{(n-s)!(n+s)!}.$$

Эти множители, хотя и уменьшаются с ростом номера s (см. рис.1), однако не зависят от длины сгустка (для коротких сгустков). То есть для сколь угодно малых сгустков требуется одинаковое (>1) число элементов разложения для хорошей аппроксимации решения.

Отметим, что слагаемые более высокого порядка ($s > n$) имеют степенную зависимость от длины сгустка:

$$\begin{aligned} A_{n,s} &= J_{(n+s)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) J_{(n-s)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) \\ &\approx \left(\frac{m\phi_0}{4} \right)^{(n+s)/2+(s-n)/2} \frac{(-1)^{s-n}}{(s-n)!(n+s)!} = \left(\frac{m\phi_0}{4} \right)^s \frac{(-1)^{s-n}}{(s-n)!(n+s)!}, \end{aligned}$$

то есть, этими слагаемыми можно пренебречь при $m_{\max} \phi_0 \ll 1$.

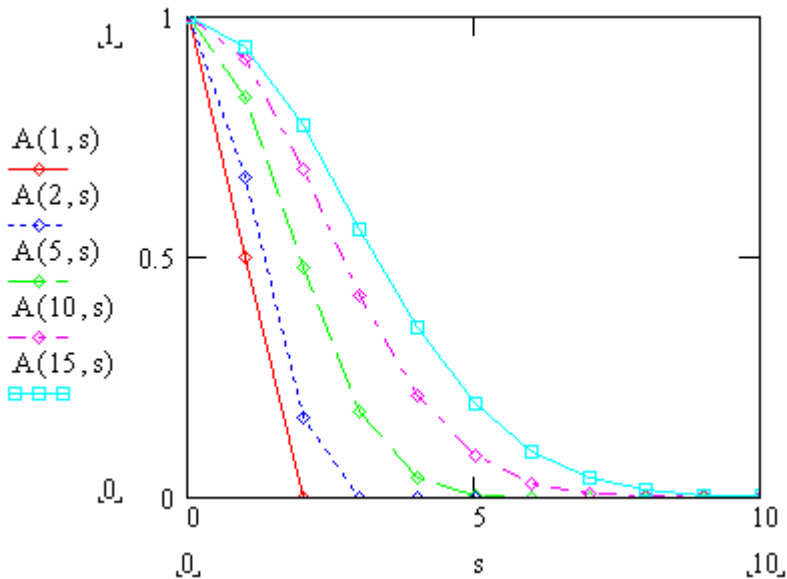


Рис. 1. Зависимость $A(n, s) = A_{n,s}$ от s для различных n .

Из приведенных оценок видно, что необходимый порядок аппроксимации для коротких сгустков равен (или немного меньше) n (то есть, рассматриваемому типу мультипольности) при любых, сколь угодно малых длинах сгустков (в отличие от нулевого порядка аппроксимации для любого n для гауссовского пучка). Таким образом, ортогональные полиномы Чебышева не являются нужным базисом для решения поставленной задачи.

Ниже предложен другой вид ортогональных полиномов.

3.3. Решение с помощью многочленов Якоби

Вспомним, что для гауссовских сгустков использовались ортогональные функции

$$f_k^{[n]}(x) = A_k x^{|n|/2} L_k^{(|n|)}(x),$$

имеющие степенную зависимость от x при малых x .

Имеет смысл и для параболического распределения использовать ортогональные функции, имеющие подобную зависимость при малых аргументах.

Такую зависимость от x при малых x имеют многочлены Якоби $G_n(p, q, x)$ с весовой функцией $w(x) = (1-x)^{p-q} x^q$, на отрезке $[0;1]$, при $p-q > -1, q > 0, x = J/J_0$ ([2], (22.2.2)).

Разложение возмущения функции распределения по ортогональным полиномам в данном случае имеет вид (4) с ортогональными функциями

$$f_k^{|n|}(x) = A_k x^{|n|/2} G_k(p, q, x),$$

$$w_0(x) = (1-x)^{-1/2}, \quad p-q = -1/2, \quad q = |n|, \quad p = |n| - 1/2, \quad (11)$$

$$f_k^{|n|}(x) = h_{nk}^{-1/2} x^{|n|/2} G_k(|n| - 1/2, |n|, x)$$

и весовой функцией для $G_k(|n| - 1/2, |n|, x)$

$$w(x) = (1-x)^{-1/2} x^{|n|}. \quad (12)$$

Подставив разложение (4) по ортогональным функциям (11) в исходную систему интегральных уравнений (1), домножив на ортогональную функцию $f_{k'}^{|n|}(x)$ (с произвольными номерами k') и выполнив интегрирование по x, x' , получаем матричное уравнение, аналогичное (6) для коэффициентов разложения функции распределения $D_k^{nl} = (a_k^{nl} - a_k^{-nl})$:

$$\left\{ s^2 - (in\Omega_0)^2 (\hat{E} - 2\xi\hat{M}^n) \right\} \bar{D}^{nl} - 2An \sum_{j=1}^{n_0} I_j \sum_m Z_m (s - im\omega_0) e^{im(\theta_l - \theta_j)} \sum_{q>0} \hat{B}^{|n||q|} (-iq\Omega_0) \bar{D}^{qj} = 0 \quad (13)$$

$$A = -\frac{3}{8\pi J_0}, \quad J_0 = (\tau_L \omega_0 / 2)^2 RM\Omega / 2,$$

$$(\hat{B}^{|n||q|})_{k,k'} = \frac{1}{m} I_{|n|,k} I_{|q|,k'}, \quad (14)$$

где

$$I_{n,k} = h_{nk}^{-1/2} \int_0^1 w_0(x) x^{|n|/2} J_n(m'\phi_0\sqrt{x}) G_k(p, q, x) dx. \quad (15)$$

Этот интеграл вычислен в Приложении 3:

$$\begin{aligned}
 I_{nk}(m\phi_0) &= \\
 &= h_{nk}^{-1/2} \int_0^1 w_0(x) x^{|n|/2} J_n(m\phi_0 \sqrt{x}) G_k(p=|n|+1/2, q=|n|+1, x) dx \\
 &= \left[\frac{(2k+|n|+1/2)\Gamma(k+|n|+1/2)\Gamma(k+1/2)}{k!(k+|n|)!} \right]^{1/2} \\
 &\times (-1)^k (m\phi_0/2)^{-1/2} J_{(|n|+2k+1/2)}(m\phi_0). \tag{16}
 \end{aligned}$$

Элементы матрицы \hat{M}^n , учитывающей амплитудную зависимость синхротронной частоты, выражаются как

$$\begin{aligned}
 M_{km}^n &= \int w_0(x) x f_k^{|n|}(x) f_m^{|n|}(x) dx \\
 &= (h_{nk} h_{km})^{-1/2} \int (1-x)^{-1/2} x^{|n|} x G_k(|n|-1/2, |n|, x) G_m(|n|-1/2, |n|, x) dx.
 \end{aligned}$$

С помощью рекуррентного соотношения ([2], (22.7.2)) и соотношения ортогональности ([2], (22.1.1)) получаем

$$\begin{aligned}
 M_{km}^n &= (h_{nm} / h_{nk})^{1/2} \\
 &\times \left(\delta_{k+1,m} + \delta_{km} \frac{[2k(k+|n|-1/2)+|n|(|n|-3/2)](2k+|n|-5/2)_3}{(2k+|n|-3/2)(2k+|n|-5/2-2)_4} \right. \\
 &\left. + \delta_{k-1,m} \frac{[k(k+|n|-1)(k+|n|-3/2)(k-1/2)(2k+|n|+1/2)]}{(2k+|n|-5/2)_4(2k+|n|-3/2)} \right).
 \end{aligned}$$

4. Сравнение формул для гауссовского пучка и параболического в пределе коротких сгустков

4.1. Короткие сгустки

Так как функции Бесселя при малых аргументах аппроксимируются как

$$J_\nu(z) \approx \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)},$$

то для $|m_{\max} \phi_0| \ll 1$

$$I_{nk}(m\phi_0) = \left[\frac{(2k+|n|+1/2)\Gamma(k+|n|+1/2)\Gamma(k+1/2)}{k!(k+|n|)! \Gamma^2(|n|+2k+3/2)} \right]^{1/2} (-1)^k \left(\frac{m\phi_0}{2} \right)^{n+2k}.$$

Для короткого параболического сгустка

$$A \cdot B_{00}^{nm} = -\frac{3}{8\pi J_0} \frac{1}{m} \left[\frac{2^{n+1}}{|n|!(2n+1)!!} \right] \left(\frac{m\phi_0}{2} \right)^{2n} \\ = \frac{\Omega}{2q_{rf} V_{rf} \sin \phi_{s0}} \frac{1}{|n|!} m \left(\frac{m\phi_0}{2} \right)^{2(n-1)} \cdot \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{(2n+1)!!}.$$

Для гауссовского сгустка (см. (7)):

$$A \cdot B_{00}^{[n|n]}(m) = \frac{\Omega}{2q_{rf} V_{rf} \sin \phi_{s0}} \frac{1}{|n|!} m \left(\frac{m\phi_0}{2} \right)^{2(|n|-1)},$$

Видно, что коэффициенты для дипольных колебаний ($n=1$) коротких сгустков одинаковы для параболического и гауссовского сгустков. Для дипольных колебаний так и должно быть, так как они не зависят ни от длины, ни от формы сгустков. Для более высоких членов разложения и для более высоких типов мультипольности $(\hat{B}^{[n|q]})_{k,k'}$ уже отличаются численными коэффициентами (как и должно быть для сгустков разной формы), однако степенная зависимость от длины сгустка одна и та же для

обеих моделей: $(\hat{B}^{[n|q]})_{k,k'} \propto \left(\frac{m\phi_0}{2} \right)^{|n|+|q|+2(k+k')-1}$.

4.2. Огибающая для оценки верхней границы спектра

Элементы матрицы задачи в общем случае имеют вид

$$\sum_m Z_m(s - im\omega_0) e^{im(\theta_I - \theta_J)} S(m\phi_0/2),$$

где $S(z)$ – огибающая функция, зависящая от формы сгустка и номера матричного элемента $(|n|, |q|, k, k')$. Она определяет полосу спектра, импеданс в которой дает вклад в этот матричный элемент.

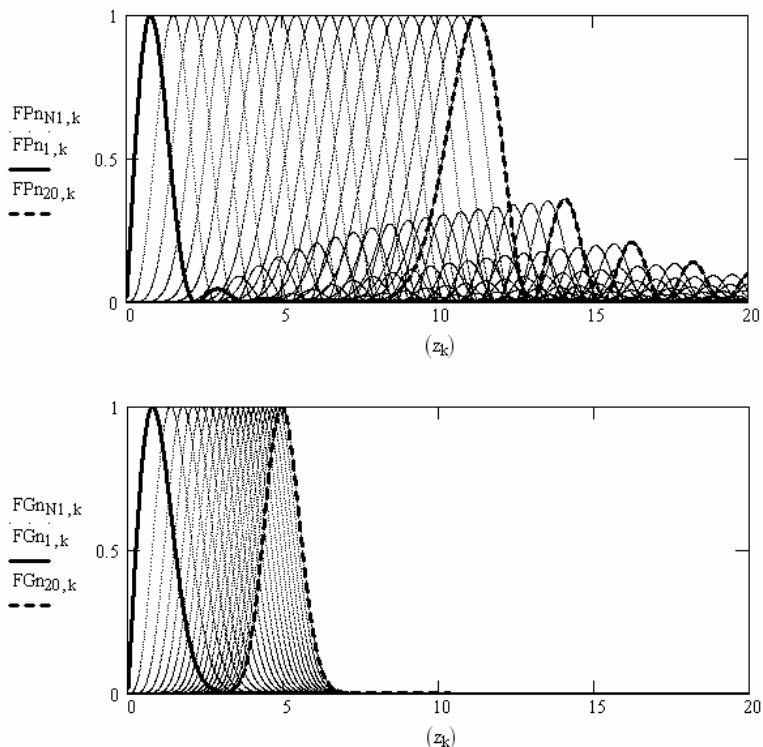


Рис. 2. Огибающие (нормированные на максимум) для параболического сгустка (FPn, верхний рисунок) и для гауссовского сгустка (FGn, нижний рисунок), для первых 20 диагональных элементов матрицы, для одинаковых среднеквадратичных длин сгустков, в зависимости от $z = m\phi_0 / 2$. Выделены графики с номерами 1 и 20.

На рис.2 показаны огибающие (нормированные на максимум) для параболического сгустка и для гауссовского сгустка, для первых 20 диагональных элементов матрицы, для одинаковых среднеквадратичных длин сгустков. Из рисунка видно, что

- 1) полоса спектра для первого диагонального элемента (описывающего дипольные колебания коротких сгустков) практически одинакова для параболического и для гауссовского сгустков;

- 2) если необходимое число мод для гауссовского сгустка оценивается как $2k_{\max} + |n_{\max}| > (m_{\max} \phi_0 / 2)^2$ (см. [1]), то для параболических сгустков это число пропорционально $(m_{\max} \phi_0)$, поэтому для параболических сгустков порядок аппроксимации может быть меньше, чем для гауссовских, при той же ширине спектра импеданса. Оценка, аналогичная сделанной в [1], дает $2k_{\max} + |n_{\max}| > (m_{\max} \phi_0)$.

5. Аналитическое суммирование рядов по азимутальным гармоникам

В том случае, если импеданс представляется в виде суммы резонансных импедансов вида

$$Z(s) = \frac{\rho s \omega_r}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{\rho \omega_r}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_1}{(s - s_1)} - \frac{s_2}{(s - s_2)} \right),$$

$$s_{1,2} = (\pm i v_2 - v_1) \omega_r, \quad v_1 = \frac{1}{2Q}, \quad v_2 = \sqrt{1 - v_1^2},$$

для элементов матрицы задачи можно выполнить суммирование по азимутальным гармоникам аналитически, при этом сумма по всем m_{\max} гармоникам превращается в сумму по резонансным модам. Выражение для

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m), \text{ где}$$

$$f(m) = Z(s - im\omega_0) e^{im\theta} \frac{1}{m} j_{n_1}(m\phi_0) j_{n_2}(m\phi_0), \quad n_{1,2} \geq 1,$$

(см. раздел 3.2) получено в Приложении 4 и содержит порядка $n_1 \cdot n_2$ слагаемых:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) &= -\pi \sum_c R_c^- (\operatorname{ctg}(z_c^- \pi) - i) - \int_{S^+} f(z) dz \\
&= -\frac{\pi i m_r \rho}{(m_1 - m_2)} \left(\left(1 + \frac{is}{m_1 \omega_0} \right) j_{n_1}(m_1 \phi_0) j_{n_2}(m_1 \phi_0) \frac{e^{-im_1(\pi-\theta)}}{\sin(m_1 \pi)} \right. \\
&\quad \left. - \left(1 + \frac{is}{m_2 \omega_0} \right) j_{n_1}(m_2 \phi_0) j_{n_2}(m_2 \phi_0) \frac{e^{-im_2(\pi-\theta)}}{\sin(m_2 \pi)} \right) \\
&- \delta_{\theta,0} i^{n_1+n_2+2} \frac{im_r \rho}{4(m_1 - m_2)} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \frac{(n_1 + k_1)!(n_2 + k_2)!}{k_1! \Gamma(n_1 - k_1 + 1) k_2! \Gamma(n_2 - k_2 + 1) (2i)^{k_1+k_2+2}} \\
&\times \left(H(m_1 \phi_0, N) \left(1 + \frac{is}{m_1 \omega_0} \right) - H(m_2 \phi_0, N) \left(1 + \frac{is}{m_2 \omega_0} \right) \right. \\
&\quad \left. - H(0, N) \left(\frac{is}{\omega_0 m_1} - \frac{is}{\omega_0 m_2} \right) \right) \Bigg|_{N=k_1+k_2+2},
\end{aligned}$$

где

$$H(z_0, n) = \frac{2\pi i}{z_0^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-2iz_0)^k}{(k)!} = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{z_0^n} e^{-2iz_0} - (-2i)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-2iz_0)^{k-n}}{(k)!} \right).$$

Это выражение имеет смысл использовать для низкодобротных резонансов, а также для несимметричных пучков, когда инкременты колебаний определяются не только действительными, но и мнимыми частями импеданса (имеющими более широкий спектр).

Вычисление матричных элементов для полиномов Чебышева

Обозначив $x = \sqrt{J/J_0}$, весовую функцию можно записать как:

$$W'(J/J_0) = W(x) = (1-x^2)^{-1/2}.$$

Для нее ортогональные полиномы – полиномы Чебышева (см. [2], (22.3.6)):

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m},$$

$$\int_{-1}^1 W(r) T_n(r) T_{n'}(r) dr = \delta_{nn'} h_n = \delta_{nn'} \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{0,n}),$$

Эти полиномы можно использовать для функций, определенных на отрезке $[-1,1]$. В нашем случае функция F_n определена на $[0,1]$. Доопределим ее на $[0,-1]$ как

$$\tilde{F}_q^j(-x, s) = \begin{cases} F_q^j(x, s), & x \geq 0 \\ F_q^j(x, s)(-1)^{q+1}, & x < 0 \end{cases}.$$

Для этой функции интегральное уравнение имеет тот же вид:

$$(s + in\Omega_0(1 - \xi x^2)) \tilde{F}_n^l(x, s) - A \sum_{j=1}^{N_b} I_j \sum_q \int_{-1}^1 \tilde{K}_{nq}^{lj}(x, x', s) \tilde{F}_q^j(x', s) dx' = 0, \tag{III.1}$$

$$A = -\frac{3}{8\pi J_0} = -\frac{3}{4\pi\phi_0^2 RM\Omega},$$

$$\tilde{K}_{nq}^{lj}(J, J', s) = (1-x^2)^{-1/2} \sum_m \left\{ \frac{n}{m} Z(s - im\omega_0) e^{im(\theta_l - \theta_j)} J_n(m\phi_0 x) J_q(m\phi_0 x') x' \right\}$$

$$w(x) = (1-x^2)^{-1/2}.$$

Представив функцию распределения в виде разложения по ортогональным полиномам

$$\tilde{F}_n^l(J) = w(x) \sum_{k \geq 0} a_k^{nl} T_k(x),$$

умножим уравнение (П1.1) на $T_s(x)$ и проинтегрируем по dx :

$$(s + in\Omega_0) \sum_{k \geq 0} a_k^{nl} \delta_{sk} h_n - in\Omega_0 \xi \sum_{k \geq 0} a_k^{nl} M_{sk} - \\ - A \sum_{j=1}^{N_b} I_j \sum_q \sum_m \left\{ \frac{n}{m} Z(s - im\omega_0) e^{im(\theta_l - \theta_j)} \sum_{k \geq 0} a_k^{qj} I_{ns}^0(m\phi_0) I_{qk}^1(m\phi_0) \right\} = 0,$$

или

$$(s + in\Omega_0) \sum_{k \geq 0} a_k^{nl} \delta_{sk} \frac{\pi}{2} - in\Omega_0 \xi \sum_{k \geq 0} a_k^{nl} M_{sk} - A \sum_{j=1}^{N_b} I_j \sum_q \sum_{k \geq 0} a_k^{qj} H_{nq,k}^{lj} = 0, \\ H_{nq,k}^{lj} = \sum_m \left\{ \frac{n}{m} Z(s - im\omega_0) e^{im(\theta_l - \theta_j)} I_{ns}^0(m\phi_0) I_{qk}^1(m\phi_0) \right\},$$

$$M_{sk} = \int_{-1}^1 x^2 w(x) T_k(x) T_s(x) dx,$$

$$I_{ns}^0(m\phi_0) = \int_{-1}^1 w(x) J_n(m\phi_0 x) T_s(x) dx,$$

$$I_{ns}^1(m\phi_0) = \int_{-1}^1 w(x) J_n(m\phi_0 x) T_s(x) \cdot x \cdot dx.$$

Вычислим эти интегралы.

$$1) I_{ns}^0(m\phi_0) = \int_{-1}^1 w(x) J_n(m\phi_0 x) T_s(x) dx \\ = \frac{\pi}{2} J_{(n+s)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) J_{(n-s)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) \cdot (1 + (-1)^{n+s}),$$

$$\operatorname{Re}(n) > 2[s/2] - s - 1,$$

(см. [6], (2.18.1.25)).

Для $n \geq 0$ условие $\operatorname{Re}(n) > 2[s/2] - s - 1$ выполняется всегда.

2) Используя рекуррентное соотношение ([2], (22.7.4)), можно представить $xT_n(x)$ как

$$xT_n(x) = \frac{1}{2}(T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)).$$

Отсюда

$$I_{ns}^1(m\phi_0) = \int_{-1}^1 w(x)J_n(m\phi_0x)T_s(x)xdx = \frac{1}{2}(I_{n,(s+1)}^0(m\phi_0) + I_{n,(s-1)}^0(m\phi_0))$$

3) Из того же рекуррентного соотношения следует:

$$x^2T_n(x) = \frac{1}{2}(xT_{n+1}(x) + xT_{n-1}(x)) = \frac{1}{4}(T_{n+2}(x) + 2T_n(x) + T_{n-2}(x)),$$

то есть

$$M_{sk} = \int_{-1}^1 x^2w(x)T_k(x)T_s(x)dx = \frac{\pi}{8}(1 + \delta_{k,0})(\delta_{k,s+2} + 2\delta_{k,s} + \delta_{k,s-2}).$$

Ряд $H_{nq,sk}^{lj}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} H_{nq,sk}^{lj} &= \sum_m \left\{ \frac{n}{m} Z(s - im\omega_0) e^{im(\theta_l - \theta_j)} I_{ns}^0(m\phi_0) I_{qk}^1(m\phi_0) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \left\{ \frac{n}{m} Z(s - im\omega_0) e^{im(\theta_l - \theta_j)} I_{ns}^0(m\phi_0) (I_{q,(k+1)}^0(m\phi_0) + I_{q,(k-1)}^0(m\phi_0)) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{H}_{nq,s(k+1)}^{lj} + \tilde{H}_{nq,s(k-1)}^{lj}), \\ \tilde{H}_{nq,sk}^{lj} &= \sum_m \left\{ \frac{n}{m} Z(s - im\omega_0) e^{im(\theta_l - \theta_j)} I_{ns}^0(m\phi_0) I_{qk}^0(m\phi_0) \right\} \\ &= (1 + (-1)^{n+s})(1 + (-1)^{q+k}) \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \\ &\quad \times \sum_m \left\{ \frac{n}{m} Z(s - im\omega_0) e^{im(\theta_l - \theta_j)} \left[J_{(n+s)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) J_{(n-s)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[J_{(q+k)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) J_{(q-k)/2} \left(\frac{m\phi_0}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Приложение 2

Вычисление матричных элементов для полиномов Якоби

Используются многочлены Якоби $G_n(p, q, x)$ с весовой функцией $w(x) = (1-x)^{p-q} x^{q-1}$, на отрезке $[0;1]$, при $p-q > -1$, $q > 0$, $x = J/J_0$.

$$G_k(p, q, x) = \frac{k! \Gamma(k+p)}{\Gamma(2k+p)} P_k^{(p-q, q-1)}(2x-1),$$

$$\int_0^1 w(x) G_k(p, q, x) G_{k'}(p, q, x) dx = \delta_{kk'} h_k,$$

$$h_k = \frac{k! \Gamma(k+q) \Gamma(k+p) \Gamma(k+p-q+1)}{(2k+p) \Gamma^2(2k+p)}$$

$$G_k(p, q, x) = \frac{\Gamma(q+k)}{k! \Gamma(p+2k)} \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \frac{\Gamma(p+2k-m)}{\Gamma(q+k-m)} x^{k-m}.$$

В данном приложении используются их свойства ([2], Глава 22).

Функция распределения представляется в виде

$$F_n^l(J) = w_0(x) \sum_{k \geq 0} a_k^{nl} f_k^{|n|}(x), \quad x = J/J_0,$$

$$f_k^{|n|}(x) = A_k x^{|n|/2} G_k(p, q, x),$$

$$w_0(x) = (1-x)^{-1/2}, \quad p-q = -1/2, \quad q = |n|+1, \quad p = |n|+1/2,$$

$$w(x) = (1-x)^{-1/2} x^{|n|},$$

$$G_k(p = |n|+1/2, q = |n|+1, x) = \frac{k! \Gamma(k+p)}{\Gamma(2k+p)} P_k^{(p-q, q-1)}(2x-1)$$

$$= \frac{k! \Gamma(k+|n|+1/2)}{\Gamma(2k+|n|+1/2)} P_k^{(-1/2, |n|)}(2x-1),$$

$$h_{nk} = \frac{k! \Gamma(k+|n|+1) \Gamma(k+|n|+1/2) \Gamma(k+1/2)}{(2k+|n|+1/2) \Gamma^2(2k+|n|+1/2)}$$

Коэффициенты матричного уравнения (13) в разделе 3.3 выражаются через интегралы вида (15), для вычисления которых можно использовать [6], (2.22.12.3):

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a (x+a)^{\alpha-1} (a-x)^\rho J_\nu(b\sqrt{x+a}) P_k^{(\rho, \sigma)}(x/a) dx = \\ & = \frac{(-1)^k (\sigma - \alpha - \nu/2 + 1)_n}{k! \Gamma(\nu + 1)} 2^{\alpha + \rho - \nu/2} B(\alpha + \nu/2, \rho + k + 1) a^{\alpha + \rho + \nu/2} b^\nu \\ & \times {}_2F_3 \left(\alpha + \nu/2, \alpha + \nu/2 - \sigma; \alpha + \nu/2 + \rho + k + 1, \alpha + \nu/2 - \sigma - k, \nu + 1; -\frac{ab^2}{2} \right) \\ & a > 0, \operatorname{Re}(2\alpha + \nu) > 0, \operatorname{Re}(\rho) > -1, k \geq 0, \\ & B(a, b) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)}. \end{aligned}$$

В данном случае

$$\begin{aligned} I_{nk}(m\phi_0) &= h_{nk}^{-1/2} \int_0^1 w_0(x) x^{|n|/2} J_n(m\phi_0 \sqrt{x}) \\ & \times G_k(p=|n|+1/2, q=|n|+1, x) dx = h_{nk}^{-1/2} \frac{k! \Gamma(k+|n|+1/2)}{\Gamma(2k+|n|+1/2)} \\ & \times \int_0^1 w_0(x) x^{|n|/2} J_n(m\phi_0 \sqrt{x}) P_k^{(-1/2, |n|)}(2x-1) dx \\ & = h_{nk}^{-1/2} \frac{k! \Gamma(k+|n|+1/2)}{\Gamma(2k+|n|+1/2)} \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-y}{2} \right)^{-1/2} \left(\frac{y+1}{2} \right)^{|n|/2} J_n \left(m\phi_0 \sqrt{\left(\frac{y+1}{2} \right)} \right) P_k^{(-1/2, |n|)}(y) dy \right\} \\ & = h_{nk}^{-1/2} \frac{k! \Gamma(k+|n|+1/2)}{\Gamma(2k+|n|+1/2)} \tilde{I}_{nk}(m\phi_0), \end{aligned}$$

где (см. [2], (15.1.1))

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_{nk} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-y}{2} \right)^{-1/2} \left(\frac{y+1}{2} \right)^{|n|/2} J_n \left(m\phi_0 \sqrt{\left(\frac{y+1}{2} \right)} \right) P_k^{(-1/2, |n|)}(y) dy \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2^{-|n|/2+1/2} \times \frac{(-1)^k (0)_k}{k! \Gamma(n+1)} 2^{1/2} B(n+1, k+1/2) \left(\frac{m\phi_0}{\sqrt{2}} \right)^n \\
 &\quad \times {}_2F_3 \left(n+1, 1; n+k+3/2, 1-k, n+1; -\left(\frac{m\phi_0}{2} \right)^2 \right) \\
 &= 2^{-|n|/2} \times \frac{(-1)^k (0)_k}{k! \Gamma(n+1)} B(n+1, k+1/2) \left(\frac{m\phi_0}{\sqrt{2}} \right)^n \\
 &\quad \times {}_1F_2 \left(1; n+k+3/2, 1-k; -\left(\frac{m\phi_0}{2} \right)^2 \right),
 \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned}
 I_{nk}(m\phi_0) &= h_{nk}^{-1/2} \frac{k! \Gamma(k+|n|+1/2)}{\Gamma(2k+|n|+1/2)} \tilde{I}_{nk} \\
 &= h_{nk}^{-1/2} \frac{\Gamma(k+|n|+1/2)}{\Gamma(2k+|n|+1/2)} \cdot 2^{-|n|/2} \frac{(-1)^k \Gamma(k)}{\Gamma(0)} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(n+k+3/2)} \left(\frac{m\phi_0}{\sqrt{2}} \right)^n \\
 &\quad \times {}_1F_2 \left(1; n+k+3/2, 1-k; -\left(\frac{m\phi_0}{2} \right)^2 \right).
 \end{aligned}$$

С учетом свойств гамма-функции ([6], стр. 720, 721)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad \Gamma(z+k) = (z)_k \Gamma(z), \quad \Gamma(z-k) = \frac{(-1)^k}{(1-z)_k} \Gamma(z)$$

и представления гипергеометрической функции ([2], (15.1.1))

$$\begin{aligned}
 I_{nk}(m\phi_0) &= \underset{z=\frac{m\phi_0}{2}}{h_{nk}^{-1/2}} \frac{\Gamma(k+|n|+1/2)}{\Gamma(2k+|n|+1/2)} \\
 &\quad \times \frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+3/2)} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(n+k+3/2)} (z)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1)_j (0)_k}{(n+k+3/2)_j (1-k)_j} \frac{(-z^2)^j}{j!}.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты ряда содержат неопределенность $\frac{(0)_k}{(1-k)_j}$, которая раскрывается при $j, k \geq 0$ как

$$\begin{aligned} \frac{(0)_k}{(1-k)_j} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{(1-\varepsilon)_k}{(\varepsilon-k)_j} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \left(\frac{\Gamma(1-(\varepsilon-k))\Gamma(\varepsilon-k)}{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon-1+(j-k)+1)} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \left(\frac{\pi}{\sin(\pi(\varepsilon-k))\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon-1+(j-k)+1)} \right). \end{aligned}$$

При $j \geq k$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{(1-\varepsilon)_k}{(\varepsilon-k)_j} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \left(\frac{\pi}{\sin(\pi(\varepsilon-k))\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)(\varepsilon)_{j-k}} \right) = \frac{(-1)^k}{(1)_{j-k}} = \frac{(-1)^k}{(j-k)!}.$$

При $j < k$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{(1-\varepsilon)_k}{(\varepsilon-k)_j} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \left(\frac{\pi}{\sin(\pi(\varepsilon-k))\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon-1+(j-k)+1)} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \left(\frac{\pi(-1)^k}{\sin(\pi\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon-|j-k|)} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \left(\frac{\pi(1-\varepsilon)_{|j-k|}}{\sin(\pi\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} (1-\varepsilon)_{|j-k|} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в сумме по j остаются только слагаемые с $j \geq k$:

$$\begin{aligned} I_{nk}(m\phi_0) &= \sum_{z=\frac{m\phi_0}{2}} h_{nk}^{-1/2} \frac{\Gamma(k+|n|+1/2)}{\Gamma(2k+|n|+1/2)} \\ &\times \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(n+k+3/2)} (z)^n \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+3/2)}{\Gamma(n+k+3/2+j)} \frac{(-z^2)^j}{(j-k)!} \Big|_{j'=j-k} = h_{nk}^{-1/2} \frac{\Gamma(k+|n|+1/2)}{\Gamma(2k+|n|+1/2)} \\ &\times \Gamma(k+1/2) (z)^{n+2k} (-1)^k \sum_{j'=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+2k+3/2+j')} \frac{(-z^2)^{j'}}{(j')!}. \end{aligned}$$

Согласно ([7], (5.2.10.7)):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm x^2)^k}{\Gamma(k+\nu+1)k!} = x^{-\nu} \left\{ \begin{array}{l} I_{\nu}(2x) \\ J_{\nu}(2x) \end{array} \right\}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I_{nk}(m\phi_0) &= \\ &= h_{nk}^{-1/2} \frac{\Gamma(k+|n|+1/2)\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(2k+|n|+1/2)} (-1)^k (m\phi_0/2)^{-1/2} J_{(n+2k+1/2)}(m\phi_0). \end{aligned}$$

Так как

$$h_{nk} = \frac{k!(k+|n|)!\Gamma(k+|n|+1/2)\Gamma(k+1/2)}{(2k+|n|+1/2)\Gamma^2(2k+|n|+1/2)},$$

то

$$\begin{aligned} I_{nk}(m\phi_0) &= \left[\frac{(2k+|n|+1/2)\Gamma(k+|n|+1/2)\Gamma(k+1/2)}{k!(k+|n|)!} \right]^{1/2} \\ &\times (-1)^k (m\phi_0/2)^{-1/2} J_{(n+2k+1/2)}(m\phi_0). \end{aligned}$$

Приложение 3

Суммирование по азимутальным гармоникам

Формула Ватсона-Зоммерфельда (см. [8]) позволяет выполнить аналитическое суммирование ряда по азимутальным гармоникам:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = P \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz - \pi \sum_r R_r \operatorname{ctg}(z_r \pi) + \frac{1}{2i} \left(\int_{S^+} \varphi^+(z) dz + \int_{S^-} \varphi^-(z) dz \right) - \pi \left(\sum_c R_c^+ (\operatorname{ctg}(z_c^+ \pi) + i) + \sum_c R_c^- (\operatorname{ctg}(z_c^- \pi) - i) \right), \quad (\text{ПЗ.1})$$

где

$$\varphi^{\pm}(z) = f(z) \frac{e^{\pm i\pi z}}{\sin(\pi z)},$$

z_c^{\pm}, z_r обозначают полюсы функции $f(z)$ в верхней и нижней полуплоскостях и на действительной оси, с вычетами в этих точках R_c^{\pm}, R_r ; S^{\pm} – полуокружности в верхней/нижней полуплоскости, с радиусом, стремящимся к бесконечности.

В данном случае

$$f(m) = Z(s - im\omega_0) e^{im\theta} \frac{1}{m} j_{n_1}(m\phi_0) j_{n_2}(m\phi_0), \quad n_{1,2} \geq 1,$$

$$Z(s) = \frac{\rho s \omega_r}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{\rho \omega_r}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_1}{(s - s_1)} - \frac{s_2}{(s - s_2)} \right),$$

$$s_{1,2} = (\pm i\nu_2 - \nu_1) \omega_r, \quad \nu_1 = \frac{1}{2Q}, \quad \nu_2 = \sqrt{1 - \nu_1^2}.$$

$$Z(s - im\omega_0) = im_r \rho \frac{(m + is / \omega_0)}{(m - m_1)(m - m_2)}.$$

Отметим, что при $n_{1,2} \geq 1$ у этой функции в нуле особенности нет.

Вычислим слагаемые правой части (ПЗ.1).

1)

$$\left| \int_{S^\pm} \varphi^\pm(z) dz \right| \leq \int_{S^\pm} |\varphi^\pm(z)| \cdot |dz| = \frac{m_r \rho}{\phi_0^2} \int_{S^\pm} \left| \frac{1}{z^4} e^{-(2\pi - \theta - 2\phi_0) \text{Im}(z)} \right| \cdot |dz| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

при $\theta + 2\phi_0 < 2\pi$.

2)

$$R_r = \mathbf{Res}_{z=0} f(z) = 0 \quad \text{при } n_{1,2} \geq 1.$$

3)

$$R_c^- = \mathbf{Res}_{z=m_{1,2}} f(z) = \pm i m_r \rho \frac{(m_{1,2} + is / \omega_0)}{(m_1 - m_2)} e^{im_{1,2}\theta} \frac{1}{m_{1,2}} j_{n_1}(m_{1,2}\phi_0) j_{n_2}(m_{1,2}\phi_0)$$

4)

$$\begin{aligned} P \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz &= P \int_{-\infty}^{\infty} Z(s - iz\omega_0) e^{iz\theta} \frac{1}{z} j_{n_1}(z\phi_0) j_{n_2}(z\phi_0) dz \\ &= \oint_{C^+} f(z) dz + \pi i \mathbf{Res}_{z=0} f(z) - \int_{S^+} f(z) dz, \end{aligned}$$

C^+ – полуокружность в верхней полуплоскости, с радиусом, стремящимся к нулю, с центром в нуле.

4.1) Так как полюсов в верхней полуплоскости функция $f(z)$ не имеет,

$$\oint_{C^+} f(z) dz = 0.$$

4.2) $z_r = 0$, $z_c^- = m_{1,2}$, в верхней плоскости нет полюсов.

$$R_r = \mathbf{Res}_{z=0} f(z) = 0.$$

4.3)

Отметим, что $f(z) = \frac{(z + is / \omega_0)}{(z - m_1)(z - m_2)z} j_{n_1}(z\phi_0) j_{n_2}(z\phi_0)$ однозначна на

всей плоскости z , не имеет разрывов и скачков, для нее

$$\int_{S^+} f(z) dz = \left[\int_R^{iR+0} + \int_{iR-0}^{-R} \right] f(z) dz.$$

Далее для каждого из этих слагаемых (интегралов по четверти окружности) делаем переход $R \rightarrow \infty$, при котором в верхней полуплоскости

$$j_n(z) = \frac{1}{2} \left[h_n^{(1)}(z) + h_n^{(2)}(z) \right] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} h_n^{(2)}(z) \propto e^{-iz},$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{S^+} f(z) dz &\approx im_r \rho \left[\int_R^{iR+0} + \int_{iR-0}^{-R} \right] \frac{(z + is / \omega_0)}{(z - m_1)(z - m_2)z} j_{n_1}(z\phi_0) j_{n_2}(z\phi_0) dz \\ &= \frac{im_r \rho}{4(m_1 - m_2)} \left[\int_R^{iR+0} + \int_{iR-0}^{-R} \right] \left(\frac{1}{(z - m_1)} - \frac{1}{(z - m_2)} \right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{is}{\omega_0 z} \right) h_{n_1}^{(2)}(z\phi_0) h_{n_2}^{(2)}(z\phi_0) dz \\ &= \frac{im_r \rho}{4(m_1 - m_2)} \left(\left(1 + \frac{is}{\omega_0 m_1} \right) I(m_1) - \left(1 + \frac{is}{\omega_0 m_2} \right) I(m_2) - \frac{is}{\omega_0} \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) I(0) \right). \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I(m_i) &= \left[\int_R^{iR+0} + \int_{iR-0}^{-R} \right] \frac{1}{(z - m_i)} h_{n_1}^{(2)}(z\phi_0) h_{n_2}^{(2)}(z\phi_0) dz, \\ m_i &= m_1, m_2, 0 \end{aligned}$$

Используя выражение функции $h_n^{(2)}(z)$ через элементарные функции (см. [2], (10.1.17))

$$h_n^{(2)}(z) = i^{n+1} z^{-1} e^{-iz} \sum_{k=0}^n (n+1/2, k) (2iz)^{-k},$$

можно представить $I(m_i)$ как

$$I(m_i) = \left[\int_R^{iR+0} + \int_{iR-0}^{-R} \right] \frac{1}{(z - m_i)} h_{n_1}^{(2)}(z\phi_0) h_{n_2}^{(2)}(z\phi_0) dz$$

$$\begin{aligned}
&= i^{n_1+n_2+2} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \frac{(n_1+k_1)!(n_2+k_2)!}{k_1! \Gamma(n_1-k_1+1) k_2! \Gamma(n_2-k_2+1) (2i)^{k_1+k_2+2}} \\
&\times II(m_i \phi_0, k_1+k_2+2), \\
II(z_0, N) &= \left[\int_R^{iR+0} + \int_{iR-0}^{-R} \right] \frac{1}{(z-z_0)(z)^N} e^{-2iz} dz \\
&= \frac{1}{z_0} \sum_{k=1}^{\infty} z_0^k \left[\int_R^{iR+0} + \int_{iR-0}^{-R} \right] \frac{1}{z^{N+k}} e^{-2iz} dz.
\end{aligned}$$

Слагаемые, составляющие $II(z_0, N)$, выражаются через интегральную показательную функцию:

$$\begin{aligned}
\left[\int_{R_1}^{iR_1+0} + \int_{iR_1-0}^{-R_1} \right] \frac{1}{z^N} e^{-2iz} dz & \underset{\substack{w=2iz, \\ R=2R_1}}{=} (2i)^{N-1} \left[\int_{iR}^{-R+i0} + \int_{-R-i0}^{-iR} \right] \frac{1}{w^N} e^{-w} dw \\
&= (2i)^{N-1} \left[\frac{1}{(iR)^{N-1}} E_N(iR) - \frac{1}{(-R)^{N-1}} E_N(-R+i0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(-R)^{N-1}} E_N(-R-i0) - \frac{1}{(-iR)^{N-1}} E_N(-iR) \right] \\
&= (2i)^{N-1} \left[\frac{1}{(iR)^{N-1}} \left(E_N(iR) - (-1)^{N-1} E_N(-iR) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(-R)^{N-1}} \left(E_N(-R-i0) - E_N(-R+i0) \right) \right].
\end{aligned}$$

На рис.3 показаны контуры интегрирования в переменных z и $w = iz$.

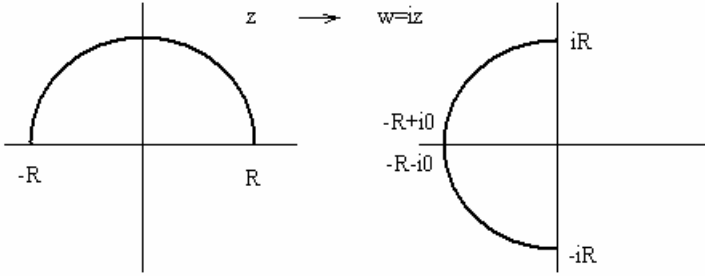


Рис.3. Контур S^+ на плоскости z и \tilde{S}^+ на плоскости $w = iz$.

В дальнейших преобразованиях используются свойства интегральной показательной функции и интегрального синуса ([2], формулы (5.1.4), (5.1.11), (5.1.14), (5.2.21) и (5.2.25)). Из (5.1.14) следует

$$\frac{E_n(z)}{z^{n-1}} = e^{-z} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} (-z)^{k-n} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} E_1(z),$$

откуда

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_N(iR)}{(iR)^{N-1}} - \frac{E_N(-iR)}{(-iR)^{N-1}} \right) &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!} E_1(iR) - \frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!} E_1(-iR) \right) \\ &= \frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!} (E_1(iR) - E_1(-iR)) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} E_n(-R+i0) - E_n(-R-i0) &= \frac{R^{n-1}}{(n-1)!} (E_1(-R+i0) - E_1(-R-i0)) \\ &= \frac{R^{n-1}}{(n-1)!} (-2\pi i). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left[\int_R^{iR+0} + \int_{iR-0}^{-R} \right] \frac{1}{z^N} e^{-2iz} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2\pi i \frac{(-2i)^{N-1}}{(N-1)!}.$$

Подставив это выражение в $II(z_0, n)$, получаем для $\text{Im}(z_0) < 0$:

$$\begin{aligned}
H(z_0, n) &= \left[\int_R^{iR+0} + \int_{iR-0}^{-R} \right] \frac{1}{(z-z_0)z^n} e^{-2iz} dz \\
&= \frac{1}{z_0} \sum_{k=1}^{\infty} z_0^k 2\pi i \frac{(-2i)^{k+n-1}}{(k+n-1)!} = \frac{2\pi i}{z_0^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-2iz_0)^k}{(k)!} \\
&= 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{z_0^n} e^{-2iz_0} - (-2i)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-2iz_0)^{k-n}}{(k)!} \right).
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
P \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz &= - \int_{S^+} f(z) dz = -\delta_{\theta,0} i^{n_1+n_2+2} \frac{im_r \rho}{4(m_1 - m_2)} \\
&\quad \times \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \frac{(n_1 + k_1)!(n_2 + k_2)!}{k_1! \Gamma(n_1 - k_1 + 1) k_2! \Gamma(n_2 - k_2 + 1) (2i)^{k_1+k_2+2}} \\
&\quad \times \left((H(m_1\phi_0, N) - H(m_2\phi_0, N)) - \frac{is}{\omega_0 m_1} (H(0, N) - H(m_1\phi_0, N)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{is}{\omega_0 m_2} (H(0, N) - H(m_2\phi_0, N)) \right) \Bigg|_{N=k_1+k_2+2}.
\end{aligned}$$

Окончательно, для

$$f(m) = Z(s - im\omega_0) e^{im\theta} \frac{1}{m} j_{n_1}(m\phi_0) j_{n_2}(m\phi_0), \quad n_{1,2} \geq 1,$$

получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) &= -\pi \sum_c R_c^- (\text{ctg}(z_c^- \pi) - i) - \int_{S^+} f(z) dz \\
&= -\frac{\pi im_r \rho}{(m_1 - m_2)} \left(\left(1 + \frac{is}{m_1 \omega_0} \right) j_{n_1}(m_1\phi_0) j_{n_2}(m_1\phi_0) \frac{e^{-im_1(\pi-\theta)}}{\sin(m_1\pi)} \right. \\
&\quad \left. - \left(1 + \frac{is}{m_2 \omega_0} \right) j_{n_1}(m_2\phi_0) j_{n_2}(m_2\phi_0) \frac{e^{-im_2(\pi-\theta)}}{\sin(m_2\pi)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\delta_{\theta,0} i^{n_1+n_2+2} \frac{im_r \rho}{4(m_1-m_2)} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \frac{(n_1+k_1)!(n_2+k_2)!}{k_1! \Gamma(n_1-k_1+1) k_2! \Gamma(n_2-k_2+1) (2i)^{k_1+k_2+2}} \times \\
& \times \left(H(m_1 \phi_0, N) \left(1 + \frac{is}{m_1 \omega_0} \right) - H(m_2 \phi_0, N) \left(1 + \frac{is}{m_2 \omega_0} \right) \right. \\
& \left. - H(0, N) \left(\frac{is}{\omega_0 m_1} - \frac{is}{\omega_0 m_2} \right) \right) \Big|_{N=k_1+k_2+2} .
\end{aligned}$$

где

$$H(z_0, n) = \frac{2\pi i}{z_0^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-2iz_0)^k}{(k)!} = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{z_0^n} e^{-2iz_0} - (-2i)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-2iz_0)^{k-n}}{(k)!} \right).$$

Список литературы

- [1] *N.V. Mityanina*. Multibunch beam instability in the case of long bunch, Preprint Budker INP 2001-3, Novosibirsk, 2001. [1].
- [2] *М. Абрамовиц, И. Стиган*. Справочник по специальным функциям. Москва, 1979.
- [3] *A. Chao*. Physics of collective beam instabilities in high energy accelerators, раздел 6.4. NY, 1993. [3].
- [4] *N.V. Mityanina*. The stability of multipole longitudinal oscillations of multi-bunch beams in storage rings with the account of beam coupling with the environment. Preprint Budker INP 99-46, Novosibirsk, 1999. [2].
- [6] *А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев*. Интегралы и ряды. Специальные функции. Москва, 1983.
- [7] *А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев*. Интегралы и ряды. Элементарные функции. Москва, 1981.
- [8] *M. Month, R.F. Peierls*. Coupling impedance structure above the tube cut off frequency, NIM, 137 (1976), p.299 (Appendix A).