

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина Сибирское отделение  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
им. Г.И. Будкера СО РАН

А.Д. Букин

О НЕОДНОЗНАЧНОСТИ  
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ  
ИНТЕРФЕРИРУЮЩИХ РЕЗОНАНСОВ

ИЯФ 2007-24

НОВОСИБИРСК  
2007

## **О неоднозначности определения параметров интерферирующих резонансов**

*А.Д. Буккин*

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера  
630090, Новосибирск, Россия

### **Аннотация**

В работе рассмотрена проблема неоднозначности определения параметров резонансов при наличии интерференции с произвольными фазами. Для случая двух резонансов найдено аналитическое решение, для случая двух и трех резонансов проведены численные эксперименты, подтверждающие неоднозначность определения параметров резонансов.

## **On the ambiguity of the parameters of interfering resonances**

*A.D. Bukin*

Budker Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, Russia

### **Abstract**

In the paper a problem of ambiguity of the resonance parameters determination is considered under the condition of resonances interference with arbitrary phases. For the case of two resonances the analytical solution is derived, numeric experiments for the cases of two and three resonances are analyzed, which confirmed ambiguity of resonance parameters determination.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Интерференция двух резонансов с простой формой амплитуды</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Релятивистская форма амплитуды резонанса</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Зависимость ширины резонанса от энергии</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Численные эксперименты</b>	<b>23</b>
5.1	Приближенное выражение для резонансной амплитуды . . . . .	24
5.2	Релятивистская форма амплитуды резонанса . . . . .	26
5.3	Зависимость ширины резонанса от энергии . . . . .	28
5.4	Три резонанса . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>38</b>



---

## 1 Введение

Одной из типичных задач при обработке экспериментальных данных является определение параметров нескольких резонансов в предположении их интерференции с произвольными фазами по экспериментальным измерениям сечения какого-либо процесса. Часто бывает, что для параметров резонансов со свободной фазой интерференции находится несколько почти равноправных решений. В работе предпринята попытка разобраться в этой проблеме более подробно на простом примере.

## 2 Интерференция двух резонансов с простой формой амплитуды

Рассмотрим простое сечение процесса

$$\sigma(E) = \left| \frac{A}{E - m_1 + i\frac{\Gamma_1}{2}} + \frac{B}{E - m_2 + i\frac{\Gamma_2}{2}} \right|^2, \quad (1)$$

где  $A, B$  — некоторые комплексные числа,  $m_1, m_2, \Gamma_1, \Gamma_2$  — набор действительных чисел.

Сначала разберемся, можно ли получить совершенно одинаковую функцию сечения от энергии при различных значениях параметров. Две тождественные функции должны иметь и тождественные Фурье-образы. Для этой функции Фурье-образ [1] легко вычисляется:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(E) e^{itE} dE = \\ &= 2\pi \begin{cases} \left[ \frac{A^*A}{\Gamma_1} + \frac{iA^*B}{m_1 - m_2 + \frac{i}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)} \right] e^{it(m_1 + \frac{i\Gamma_1}{2})} + \\ \quad + \left[ \frac{iB^*A}{m_2 - m_1 + \frac{i}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)} + \frac{B^*B}{\Gamma_2} \right] e^{it(m_2 + \frac{i\Gamma_2}{2})}, \quad t > 0, \\ \left[ \frac{A^*A}{\Gamma_1} - \frac{iAB^*}{m_1 - m_2 - \frac{i}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)} \right] e^{it(m_1 - \frac{i\Gamma_1}{2})} + \\ \quad + \left[ -\frac{iBA^*}{m_2 - m_1 - \frac{i}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)} + \frac{B^*B}{\Gamma_2} \right] e^{it(m_2 - \frac{i\Gamma_2}{2})}, \quad t < 0 \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Для того, чтобы функция

$$\sigma_x(E) = \left| \frac{A_x}{E - m_{1x} + i\frac{\Gamma_{1x}}{2}} + \frac{B_x}{E - m_{2x} + i\frac{\Gamma_{2x}}{2}} \right|^2 \quad (3)$$

была равна  $\sigma(E)$  в каждой точке  $E$ , очевидно, должны быть справедливы равенства

$$\begin{aligned} m_{1x} &= m_1, & \Gamma_{1x} &= \Gamma_1, \\ \frac{A_x^* A_x}{\Gamma_{1x}} + \frac{iA_x^* B_x}{m_{1x} - m_{2x} + \frac{i}{2}(\Gamma_{1x} + \Gamma_{2x})} &= \frac{A^* A}{\Gamma_1} + \frac{iA^* B}{m_1 - m_2 + \frac{i}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)}, \\ m_{2x} &= m_2, & \Gamma_{2x} &= \Gamma_2, \\ \frac{iB_x^* A_x}{m_{2x} - m_{1x} + \frac{i}{2}(\Gamma_{1x} + \Gamma_{2x})} + \frac{B_x^* B_x}{\Gamma_{2x}} &= \frac{iB^* A}{m_2 - m_1 + \frac{i}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)} + \frac{B^* B}{\Gamma_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Естественно, здесь должно быть использовано дополнительное условие упорядоченности масс, иначе получаются дополнительные решения, являющиеся просто перестановкой резонансов.

Для амплитуд  $A_x, B_x$  у нас есть четыре уравнения с четырьмя неизвестными (отдельные уравнения для действительной и мнимой частей). Однако, уравнения нелинейные, поэтому возможны несколько решений. Абсолютные значения фаз не определены, смысл имеют только относительные фазы. Поэтому мы можем положить, например, что  $A_x$  является действительным числом, а  $B_x$  определяет их относительную фазу, или в другом варианте:

$$A_x = |A_x| e^{i\psi}, \quad B_x = |B_x| e^{-i\psi},$$

Если принять последнее определение, то

$$A_x = a_x e^{i\psi_x}, \quad B_x = b_x e^{-i\psi_x}, \quad A = a e^{i\psi}, \quad B = b e^{-i\psi}, \quad (5)$$

где  $a, b, \psi, a_x, b_x, \psi_x$  — действительные числа.

Теперь можно написать систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_x^2}{\Gamma_1} + \frac{a_x b_x \cdot \left[ \frac{\cos(2\psi_x)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) + (m_1 - m_2) \sin(2\psi_x) \right]}{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2} = \\ = \frac{a^2}{\Gamma_1} + \frac{ab \cdot \left[ \frac{\cos(2\psi)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) + (m_1 - m_2) \sin(2\psi) \right]}{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2} \\ \frac{b_x^2}{\Gamma_2} + \frac{a_x b_x \cdot \left[ \frac{\cos(2\psi_x)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) - (m_2 - m_1) \sin(2\psi_x) \right]}{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2} = \\ = \frac{b^2}{\Gamma_2} + \frac{ab \cdot \left[ \frac{\cos(2\psi)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) - (m_2 - m_1) \sin(2\psi) \right]}{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2} \\ \frac{a_x b_x \cdot \left[ (m_1 - m_2) \cos(2\psi_x) - \frac{\sin(2\psi_x)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \right]}{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2} = \\ = \frac{ab \cdot \left[ (m_1 - m_2) \cos(2\psi) - \frac{\sin(2\psi)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \right]}{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2} \\ \frac{a_x b_x \cdot \left[ (m_2 - m_1) \cos(2\psi_x) + \frac{\sin(2\psi_x)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \right]}{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2} = \\ = \frac{ab \cdot \left[ (m_2 - m_1) \cos(2\psi) + \frac{\sin(2\psi)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \right]}{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2} \end{array} \right. \quad (6)$$

Очевидно, последние два уравнения тождественны, поэтому для трех неизвестных  $a_x, b_x, \psi_x$  мы имеем три уравнения.

Тривиальное решение:  $a_x = a, b_x = b, \psi_x = \psi$ . Попробуем проверить, есть ли другие решения. Сначала попробуем исключить  $\psi_x$ . Одно уравнение без  $\psi_x$  легко получается вычитанием первых двух уравнений друг из друга:

$$\frac{a_x^2}{\Gamma_1} - \frac{b_x^2}{\Gamma_2} = \frac{a^2}{\Gamma_1} - \frac{b^2}{\Gamma_2}. \quad (7)$$

Введем новую переменную:

$$y = \frac{a_x^2 - a^2}{\Gamma_1} = \frac{b_x^2 - b^2}{\Gamma_2} \Leftrightarrow a_x = \sqrt{a^2 + y\Gamma_1}, \quad b_x = \sqrt{b^2 + y\Gamma_2}. \quad (8)$$

Теперь для двух переменных  $\psi_x$  и  $y$  мы имеем два уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x b_x \cdot \left[ \frac{\cos(2\psi_x)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) + (m_1 - m_2) \sin(2\psi_x) \right] = \\ \quad = ab \cdot \left[ \frac{\cos(2\psi)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) + (m_1 - m_2) \sin(2\psi) \right] - \\ \quad - y \cdot \left[ (m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2 \right], \\ a_x b_x \cdot \left[ (m_1 - m_2) \cos(2\psi_x) - \frac{\sin(2\psi_x)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \right] = \\ \quad = ab \cdot \left[ (m_1 - m_2) \cos(2\psi) - \frac{\sin(2\psi)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \right]. \end{array} \right. \quad (9)$$

Линейное уравнение для  $\text{tg}(2\psi_x)$  мы получаем, если разделим уравнения (9) друг на друга:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} + (m_1 - m_2) \text{tg}(2\psi_x)}{(m_1 - m_2) - \frac{\text{tg}(2\psi_x)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2)} &= \\ &= \frac{ab \cdot \left[ \frac{\cos(2\psi)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) + (m_1 - m_2) \sin(2\psi) \right] - y \cdot \left[ (m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2 \right]}{ab \cdot \left[ (m_1 - m_2) \cos(2\psi) - \frac{\sin(2\psi)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \right]}. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение получается удивительно простое:

$$\text{tg} 2\psi_x = \frac{ab \sin(2\psi) + (m_2 - m_1) y}{ab \cos(2\psi) - \frac{y}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2)}. \quad (11)$$

Теперь надо проверить, действительно ли это является решением системы (9). Надо проверить следующие величины:

$$S_1 = \frac{a_x b_x \cdot \left[ \frac{\cos(2\psi_x)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) + (m_1 - m_2) \sin(2\psi_x) \right]}{ab \cdot \left[ \frac{\cos(2\psi)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) + (m_1 - m_2) \sin(2\psi) \right] - y \cdot \left[ (m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2 \right]}, \quad (12)$$

$$S_2 = \frac{a_x b_x \cdot \left[ (m_1 - m_2) \cos(2\psi_x) - \frac{\sin(2\psi_x)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \right]}{ab \cdot \left[ (m_1 - m_2) \cos(2\psi) - \frac{\sin(2\psi)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \right]}.$$

Для истинного решения должно быть  $S_1 = 1$ ,  $S_2 = 1$ . После подстановки  $\psi_x$  получаем:

$$S_1 = S_2 = \frac{a_x b_x \cos(2\psi_x)}{ab \cos(2\psi) - \frac{y}{2} \cdot (\Gamma_1 + \Gamma_2)}. \quad (13)$$

Из равенства  $S_{1,2} = 1$  получаем

$$\frac{\cos(2\psi_x)}{ab \cos(2\psi) - \frac{y}{2} \cdot (\Gamma_1 + \Gamma_2)} = \frac{1}{a_x b_x} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + y\Gamma_1)(b^2 + y\Gamma_2)}}, \quad (14)$$



а из выражения (11) получается

$$\begin{aligned} & \frac{\cos(2\psi_x)}{ab \cos(2\psi) - \frac{y}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{a^2 b^2 + y^2 \cdot \left[ (m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2 \right] + 2ab y \cdot \left[ (m_2 - m_1) \sin(2\psi) - \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \cos(2\psi) \right]}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда получаем уравнение для  $y$ :

$$\begin{aligned} & y \cdot \left\{ y \cdot \left[ (m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2 - \Gamma_1 \Gamma_2 \right] + \right. \\ & \left. + 2ab \cdot \left[ (m_2 - m_1) \sin(2\psi) - \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \cos(2\psi) \right] - a^2 \Gamma_2 - b^2 \Gamma_1 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда получаем два возможных решения для  $y$ :

$$\boxed{y = 0}$$

$$a_x = a, \quad b_x = b, \quad \text{tg}(2\psi_x) = \text{tg}(2\psi), \quad S_1 = S_2 = \frac{\cos(2\psi_x)}{\cos(2\psi)}.$$

Ясно, что значения  $\sin(2\psi_x)$  и  $\cos(2\psi_x)$  должны полностью совпадать с  $\sin(2\psi)$  и  $\cos(2\psi)$ , соответственно.

$$\boxed{y = \frac{a^2 \Gamma_2 + b^2 \Gamma_1 + 2ab \cdot \left[ \frac{\cos(2\psi)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) + (m_1 - m_2) \sin(2\psi) \right]}{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} \right)^2}}$$

$$a_x = \sqrt{a^2 + y\Gamma_1}, \quad b_x = \sqrt{b^2 + y\Gamma_2}, \quad (17)$$

$$\cos(2\psi_x) = \frac{ab \cos(2\psi) - \frac{y}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2)}{a_x b_x}, \quad (18)$$

$$\sin(2\psi_x) = \frac{ab \sin(2\psi) + (m_2 - m_1)y}{a_x b_x}. \quad (19)$$

Если формально подставить это решение, то резонансные кривые получаются тождественные. Однако, попутно должны выполняться некоторые условия, чтобы полученное решение было приемлемым:

1.  $y \geq -\frac{a^2}{\Gamma_1} \iff a_x^2 \geq 0$ ,
2.  $y \geq -\frac{b^2}{\Gamma_2} \iff b_x^2 \geq 0$ ,
3.  $|\cos(2\psi_x)| \leq 1$ ,
4.  $|\sin(2\psi_x)| \leq 1$ .

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
a_x^2 &= a^2 + \Gamma_1 y = \\
&= \frac{b^2 \Gamma_1^2 + a^2 \cdot \left[ (m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2 \right] + 2ab\Gamma_1 \cdot \left[ \frac{\cos(2\psi)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) + (m_1 - m_2) \sin(2\psi) \right]}{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} \right)^2} = \\
&= \frac{\left[ a \sqrt{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} \right)^2} + b\Gamma_1 \sin \left( 2\psi + \arctg \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2(m_1 - m_2)} \right) \right]^2}{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} \right)^2} \\
&+ \frac{b^2 \Gamma_1^2 \cos^2 \left( 2\psi + \arctg \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2(m_1 - m_2)} \right)}{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} \right)^2} \geq 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Аналогично проверяется, что  $b_x^2 \geq 0$ . Последние два условия проще всего доказываются проверкой, что полученные по своим формулам  $\sin(2\psi_x)$  и  $\cos(2\psi_x)$  удовлетворяют теореме Пифагора  $\cos^2(2\psi_x) + \sin^2(2\psi_x) = 1$ .

Итак, получено решение, которое означает: любой паре резонансов можно поставить в соответствие другую пару резонансов с такими же массами и ширинами, но другими амплитудами и фазами, такими что резонансные кривые с учетом их интерференции будут тождественны.

Используя эти формулы, можно получить решение для случая интерференции резонансной амплитуды с комплексной константой, заменив

$$b \rightarrow c \cdot i \frac{\Gamma_2}{2}$$

и устремив  $\Gamma_2 \rightarrow \infty$ . Сечение процесса при этом записывается в виде

$$\sigma(E) = \left| \frac{ae^{i\psi}}{E - m_1 + i \frac{\Gamma_1}{2}} + ce^{-i\psi} \right|^2. \tag{21}$$

Получаем

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{\Gamma_2 \rightarrow \infty} \frac{a^2 \Gamma_2 + (c \cdot i \frac{\Gamma_2}{2})^2 \Gamma_1 + a \cdot c \cdot i \cdot \Gamma_2 \cdot \left[ \frac{\cos(2\psi)}{2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) + (m_1 - m_2) \sin(2\psi) \right]}{(m_1 - m_2)^2 + \left( \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} \right)^2} = \\
&= 2iac \cos 2\psi - c^2 \Gamma_1,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$a_x = \sqrt{a^2 + 2iac\Gamma_1 \cos 2\psi - c^2\Gamma_1^2}, \quad c_x = c,$$

$$\operatorname{tg} 2\psi_x = \frac{a \sin 2\psi}{a \cos 2\psi + i \frac{a}{c}}.$$

Переменная  $y$ , которая раньше по определению должна была быть действительной, сейчас стала комплексной, как и переменная  $a_x$ . Если перераспределить в этом решении мнимые и действительные части или с самого начала решить задачу с сечением вида (21), то получится

$$a_x = \sqrt{a^2 + 2ac\Gamma_1 \sin 2\psi + c^2\Gamma_1^2} = \sqrt{(c\Gamma_1 + a \sin 2\psi)^2 + a^2 \cos^2 2\psi}, \quad (23)$$

$$\sin 2\psi_x = -\frac{a \sin 2\psi + c\Gamma_1}{a_x}, \quad \cos 2\psi_x = \frac{a \cos 2\psi}{a_x}.$$

Посмотрим, во что это выливается в частном случае, например, интерференции  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов в канале  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ . Возьмем приближенные значения параметров резонансов:  $m_1 = m_\omega = 782.6$ ,  $\Gamma_\omega = 8.4$ ,  $a = 1$ ,  $m_2 = m_\phi = 1019.4$ ,  $\Gamma_\phi = 4.46$ ,  $b = 0.1$ ,  $\psi = -\frac{155^\circ}{2} = -77.5^\circ$ .

Подставляя в формулы, получим

$$y = 0.00042; \quad a_x = 1.0018; \quad b_x = 0.109; \quad \psi_x = 74.4^\circ. \quad (24)$$

Итак, получилась совершенно другая фаза, а амплитуды изменились мало.

Возникает законный вопрос: эта неоднозначность — уникальное свойство именно этой простой резонансной формы, или и в более сложном случае такая неопределенность фазы будет иметь место? Дело в том, что в реальной обработке экспериментальных данных используются гораздо более сложные формулы для описания резонансного сечения.

### 3 Релятивистская форма амплитуды резонанса

Немного более сложный вариант формулы Брейт-Вигнера (релятивистский):

$$\sigma(E) = \left| \frac{A}{s - m_1^2 + i\Gamma_1 m_1} + \frac{B}{s - m_2^2 + i\Gamma_2 m_2} \right|^2, \quad (25)$$

где  $s = E^2$ , очевидно, обладает тем же свойством, потребуются только некоторое переобозначение переменных.

Также очевидно, что добавление общего множителя, зависящего от энергии, не меняет решения.

Однако, в более точном варианте в этой формуле вместо констант  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  подставляются более сложные выражения, содержащие фазовые объемы конечных состояний, в которые есть переходы этих резонансов.

## 4 Зависимость ширины резонанса от энергии

Для многочастичных конечных состояний, таких как  $\pi^+\pi^-\pi^0$ , нет простых формул для фазового объема, поэтому для нашего упражнения выберем более простую формулу:

$$\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i \cdot \left( \frac{s - 4\mu^2}{m_i^2 - 4\mu^2} \right)^{\frac{3}{4}}, \quad (26)$$

где некоторая масса  $\mu$  определяет порог реакции, так что при  $s < 4\mu^2$  сечение равно нулю. Новое сечение можно записать в следующем виде

$$\sigma(s) = \frac{(s - 4\mu^2)^{\frac{3}{2}}}{s^2} \times \left| \frac{A}{s - m_1^2 + i\Gamma_1 m_1 \cdot \left( \frac{s - 4\mu^2}{m_1^2 - 4\mu^2} \right)^{\frac{3}{4}}} + \frac{B}{s - m_2^2 + i\Gamma_2 m_2 \cdot \left( \frac{s - 4\mu^2}{m_2^2 - 4\mu^2} \right)^{\frac{3}{4}}} \right|^2. \quad (27)$$

Для этой функции трудно найти Фурье-образ, чтобы применить тот же прием, что мы использовали для приближенной резонансной кривой. Сделаем замену:

$$s = 4\mu^2 + \rho^4, \quad \rho = (s - 4\mu^2)^{\frac{1}{4}}, \quad (28)$$

$$\rho_1 = (m_1^2 - 4\mu^2)^{\frac{1}{4}}, \quad \rho_2 = (m_2^2 - 4\mu^2)^{\frac{1}{4}}.$$

Зависимость сечения от новой переменной выглядит так:

$$\sigma(\rho) = \frac{\rho^6}{(\rho^4 + 4\mu^2)^2} \times \left| \frac{A}{\rho^4 + 4\mu^2 - m_1^2 + i\Gamma_1 m_1 \cdot \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^3} + \frac{B}{\rho^4 + 4\mu^2 - m_2^2 + i\Gamma_2 m_2 \cdot \left( \frac{\rho}{\rho_2} \right)^3} \right|^2. \quad (29)$$

Найти Фурье-образ этой функции уже посильная задача, если удастся определить все ее особые точки. Только сначала упростим функцию, так как общий множитель, не содержащий свободных параметров, не влияет на решение задачи.

Итак, изучаемая функция переменной  $\rho$ :

$$f(\rho) = \left| \frac{A}{\rho^4 + 4\mu^2 - m_1^2 + i\Gamma_1 m_1 \cdot \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^3} + \frac{B}{\rho^4 + 4\mu^2 - m_2^2 + i\Gamma_2 m_2 \cdot \left( \frac{\rho}{\rho_2} \right)^3} \right|^2. \quad (30)$$

16 особых точек определяются уравнениями

$$\rho^4 + 4\mu^2 - m_j^2 \pm i\Gamma_j m_j \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_j}\right)^3 = 0, \quad j = 1, 2. \quad (31)$$

Перепишем уравнение в виде

$$\rho^4 + R_1\rho^3 + R_2 = 0, \quad (32)$$

где  $R_1 = \pm i\frac{\Gamma_j m_j}{\rho_j^3}$ ,  $R_2 = 4\mu^2 - m_j^2 = -\rho_j^4$ .

Если решать это уравнение стандартным способом, то по-видимому, решение будет иметь сложное выражение. Попробуем применить идею решения Феррари непосредственно к уравнению (32).

$$\rho^4 + R_1\rho^3 + R_2 = (\rho^2 + \lambda_1\rho + \lambda_2) \cdot (\rho^2 + \lambda_3\rho + \lambda_4) \quad (33)$$

Такое равенство справедливо, если

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = R_1 \\ \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_1\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2\lambda_4 = R_2 \end{cases} \quad (34)$$

Исключаем  $\lambda_1$   $\lambda_3$ :

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_4} R_1, \quad \lambda_3 = \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_2} R_1. \quad (35)$$

Для переменных  $\lambda_2$  и  $\lambda_4$  получаются два уравнения:

$$\begin{cases} (\lambda_2 + \lambda_4) \cdot (\lambda_2^2 + \lambda_4^2 - 2R_2) - R_1^2 R_2 = 0, \\ \lambda_2\lambda_4 = R_2. \end{cases} \quad (36)$$

Если обозначить  $\lambda_2 + \lambda_4 = y$ , то

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{y + \sqrt{y^2 + 4\rho_j^4}}{2\sqrt{y^2 + 4\rho_j^4}} R_1, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left( y + \sqrt{y^2 + 4\rho_j^4} \right), \\ \lambda_3 &= -\frac{y - \sqrt{y^2 + 4\rho_j^4}}{2\sqrt{y^2 + 4\rho_j^4}} R_1, \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2} \left( y - \sqrt{y^2 + 4\rho_j^4} \right), \end{aligned} \quad (37)$$

а  $y$  должен удовлетворять уравнению

$$y^3 - 4R_2y - R_1^2R_2 = 0. \quad (38)$$

Здесь также удобнее не пользоваться готовыми формулами, а использовать идею решения Кардано для уравнения третьей степени [1]:

$$y = \alpha + \beta \implies \alpha^3 + \beta^3 + (\alpha + \beta) \cdot (3\alpha\beta - 4R_2) - R_1^2R_2 = 0. \quad (39)$$

Полагая  $\beta = \frac{4R_2}{3\alpha}$ , получим

$$\alpha^6 - R_1^2R_2\alpha^3 + \left(\frac{4R_2}{3}\right)^3 = 0, \quad (40)$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2}R_1^2R_2 + \sqrt{\left(\frac{R_1^2R_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{4R_2}{3}\right)^3}}, \quad (41)$$

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{1}{2}R_1^2R_2 - \sqrt{\left(\frac{R_1^2R_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{4R_2}{3}\right)^3}}.$$

Подставляя значения  $R_1, R_2$ , получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt[3]{\frac{\Gamma_j^2 m_j^2}{2\rho_j^2} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma_j^2 m_j^2}{2\rho_j^2}\right)^2 + \left(\frac{4\rho_j^4}{3}\right)^3}} = \\ &= \rho_j^2 \sqrt[3]{\frac{\Gamma_j^2 m_j^2}{2\rho_j^8} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma_j^2 m_j^2}{2\rho_j^8}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Легко убедиться, что  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ ,  $y > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_4 < 0$  — действительные числа,  $\lambda_1, \lambda_3$  — мнимые числа.

Два корня определяются уравнением

$$\rho^2 + \lambda_1\rho + \lambda_2 = 0, \quad (43)$$

и еще два корня — уравнением

$$\rho^2 + \lambda_3\rho + \lambda_4 = 0. \quad (44)$$

Ни один из корней не может быть действительным числом, что видно из исходного уравнения 4-ой степени:  $\rho = 0$  не является корнем, а при любом действительном  $\rho \neq 0$  функция имеет ненулевую мнимую часть при ненулевой ширине  $\Gamma_j > 0$  и массе  $m_j > 0$ . Для вычисления интегралов

в бесконечных пределах методом вычетов нас интересует знак мнимой части корней. Введем обозначения для всех корней.

$$R_1 = i \frac{\Gamma_1 m_1}{\rho_1^3}, R_2 = -\rho_1^4,$$

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= i \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 + 4\rho_1^4}}{2\sqrt{y_1^2 + 4\rho_1^4}} \frac{\Gamma_1 m_1}{\rho_1^3}, \\ \lambda_{21} &= \frac{1}{2} \left( y_1 + \sqrt{y_1^2 + 4\rho_1^4} \right), \\ \lambda_{31} &= -i \frac{y_1 - \sqrt{y_1^2 + 4\rho_1^4}}{2\sqrt{y_1^2 + 4\rho_1^4}} \frac{\Gamma_1 m_1}{\rho_1^3}, \\ \lambda_{41} &= \frac{1}{2} \left( y_1 - \sqrt{y_1^2 + 4\rho_1^4} \right), \\ y_1 &= \rho_1^2 \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{\Gamma_1^2 m_1^2}{2\rho_1^8} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma_1^2 m_1^2}{2\rho_1^8}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3}} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt[3]{\frac{\Gamma_1^2 m_1^2}{2\rho_1^8} - \sqrt{\left(\frac{\Gamma_1^2 m_1^2}{2\rho_1^8}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3}} \right), \\ z_{11} &= -\frac{\lambda_{11}}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_{11}^2}{4} - \lambda_{21}}, \\ z_{21} &= -\frac{\lambda_{11}}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_{11}^2}{4} - \lambda_{21}}, \\ z_{31} &= -\frac{\lambda_{31}}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_{31}^2}{4} - \lambda_{41}}, \\ z_{41} &= -\frac{\lambda_{31}}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_{31}^2}{4} - \lambda_{41}}. \end{aligned} \tag{45}$$

Легко заметить, что  $\Re(z_{11}) = \Re(z_{21}) = 0$ ,  $\Im(z_{11}) > 0$ ,  $\Im(z_{21}) < 0$ ,  $\Im(z_{31}) < 0$ ,  $\Im(z_{41}) < 0$ .

Еще четыре корня соответствуют уравнению с индексом  $j = 2$ :

$$\begin{aligned}
\lambda_{12} &= i \frac{y_2 + \sqrt{y_2^2 + 4\rho_2^4}}{2\sqrt{y_2^2 + 4\rho_2^4}} \frac{\Gamma_2 m_2}{\rho_2^3}, \\
\lambda_{22} &= \frac{1}{2} \left( y_2 + \sqrt{y_2^2 + 4\rho_2^4} \right), \\
\lambda_{32} &= -i \frac{y_2 - \sqrt{y_2^2 + 4\rho_2^4}}{2\sqrt{y_2^2 + 4\rho_2^4}} \frac{\Gamma_2 m_2}{\rho_2^3}, \\
\lambda_{42} &= \frac{1}{2} \left( y_2 - \sqrt{y_2^2 + 4\rho_2^4} \right), \\
y_2 &= \rho_2^2 \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{\Gamma_2^2 m_2^2}{2\rho_2^8} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma_2^2 m_2^2}{2\rho_2^8}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3}} + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt[3]{\frac{\Gamma_2^2 m_2^2}{2\rho_2^8} - \sqrt{\left(\frac{\Gamma_2^2 m_2^2}{2\rho_2^8}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3}} \right), \\
z_{12} &= -\frac{\lambda_{12}}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_{12}^2}{4} - \lambda_{22}}, \\
z_{22} &= -\frac{\lambda_{12}}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_{12}^2}{4} - \lambda_{22}}, \\
z_{32} &= -\frac{\lambda_{32}}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_{32}^2}{4} - \lambda_{42}}, \\
z_{42} &= -\frac{\lambda_{32}}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_{32}^2}{4} - \lambda_{42}}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Здесь также  $\Re(z_{12}) = \Re(z_{22}) = 0$ ,  $\Im(z_{12}) > 0$ ,  $\Im(z_{22}) < 0$ ,  $\Im(z_{32}) < 0$ ,  $\Im(z_{42}) < 0$ .

Теперь функция  $f(\rho)$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
f(\rho) &= \left( \frac{A}{(\rho - z_{11})(\rho - z_{21})(\rho - z_{31})(\rho - z_{41})} + \frac{B}{(\rho - z_{12})(\rho - z_{22})(\rho - z_{32})(\rho - z_{42})} \right) \times \\
&\quad \times \left( \frac{A^*}{(\rho - z_{11}^*)(\rho - z_{21}^*)(\rho - z_{31}^*)(\rho - z_{41}^*)} + \frac{B^*}{(\rho - z_{12}^*)(\rho - z_{22}^*)(\rho - z_{32}^*)(\rho - z_{42}^*)} \right),
\end{aligned} \tag{47}$$

где символом \* отмечается комплексно-сопряженное число. Фурье-образ  $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho) e^{it\rho} d\rho$  действительной функции обладает тем свойством, что  $F(-t) = F^*(t)$ , поэтому достаточно вычислить Фурье-образ только при положительном значении  $t$ , что определяется суммой вычетов по



особым точкам выше оси абсцисс, т.е.  $z_{11}^*$ ,  $z_{21}^*$ ,  $z_{31}^*$ ,  $z_{41}^*$ ,  $z_{12}^*$ ,  $z_{22}^*$ ,  $z_{32}^*$ ,  $z_{42}^*$ .

$$F(t) = 2\pi i \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{Ae^{itz_{11}}}{(z_{11}-z_{21})(z_{11}-z_{31})(z_{11}-z_{41})} \cdot \left( \frac{A^*}{2z_{11}(z_{11}-z_{21}^*)(z_{11}-z_{31}^*)(z_{11}-z_{41}^*)} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{B^*}{(z_{11}-z_{12}^*)(z_{11}-z_{22}^*)(z_{11}-z_{32}^*)(z_{11}-z_{42}^*)} \right) + \right. \\ & + \frac{A^*e^{itz_{21}^*}}{(z_{21}^*-z_{11}^*)(z_{21}^*-z_{31}^*)(z_{21}^*-z_{41}^*)} \cdot \left( \frac{A}{(z_{21}^*-z_{11})(z_{21}^*-z_{31})(z_{21}^*-z_{41})} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B}{(z_{21}^*-z_{12})(z_{21}^*-z_{22})(z_{21}^*-z_{32})(z_{21}^*-z_{42})} \right) + \\ & + \frac{A^*e^{itz_{31}^*}}{(z_{31}^*-z_{11}^*)(z_{31}^*-z_{21}^*)(z_{31}^*-z_{41}^*)} \cdot \left( \frac{A}{(z_{31}^*-z_{11})(z_{31}^*-z_{21})(z_{31}^*-z_{31})(z_{31}^*-z_{41})} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B}{(z_{31}^*-z_{12})(z_{31}^*-z_{22})(z_{31}^*-z_{32})(z_{31}^*-z_{42})} \right) + \\ & + \frac{A^*e^{itz_{41}^*}}{(z_{41}^*-z_{11}^*)(z_{41}^*-z_{21}^*)(z_{41}^*-z_{31}^*)} \cdot \left( \frac{A}{(z_{41}^*-z_{11})(z_{41}^*-z_{21})(z_{41}^*-z_{31})(z_{41}^*-z_{41})} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B}{(z_{41}^*-z_{12})(z_{41}^*-z_{22})(z_{41}^*-z_{32})(z_{41}^*-z_{42})} \right) + \\ & + \frac{Be^{itz_{12}}}{(z_{12}-z_{22})(z_{12}-z_{32})(z_{12}-z_{42})} \cdot \left( \frac{A^*}{(z_{12}-z_{11}^*)(z_{12}-z_{21}^*)(z_{12}-z_{31}^*)(z_{12}-z_{41}^*)} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B^*}{2z_{12}(z_{12}-z_{22}^*)(z_{12}-z_{32}^*)(z_{12}-z_{42}^*)} \right) + \\ & + \frac{B^*e^{itz_{22}^*}}{(z_{22}^*-z_{12}^*)(z_{22}^*-z_{32}^*)(z_{22}^*-z_{42}^*)} \cdot \left( \frac{A}{(z_{22}^*-z_{11})(z_{22}^*-z_{21})(z_{22}^*-z_{31})(z_{22}^*-z_{41})} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B}{(z_{22}^*-z_{12})2z_{22}^*(z_{22}^*-z_{32})(z_{22}^*-z_{42})} \right) + \\ & + \frac{B^*e^{itz_{32}^*}}{(z_{32}^*-z_{12}^*)(z_{32}^*-z_{22}^*)(z_{32}^*-z_{42}^*)} \cdot \left( \frac{A}{(z_{32}^*-z_{11})(z_{32}^*-z_{21})(z_{32}^*-z_{31})(z_{32}^*-z_{41})} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B}{(z_{32}^*-z_{12})(z_{32}^*-z_{22})(z_{32}^*-z_{32})(z_{32}^*-z_{42})} \right) + \\ & + \frac{B^*e^{itz_{42}^*}}{(z_{42}^*-z_{12}^*)(z_{42}^*-z_{22}^*)(z_{42}^*-z_{32}^*)} \cdot \left( \frac{A}{(z_{42}^*-z_{11})(z_{42}^*-z_{21})(z_{42}^*-z_{31})(z_{42}^*-z_{41})} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B}{(z_{42}^*-z_{12})(z_{42}^*-z_{22})(z_{42}^*-z_{32})(z_{42}^*-z_{42})} \right) \left. \right\}. \end{aligned} \tag{48}$$

Так как координаты особых точек определяют функциональную зависимость Фурье-образа от параметра  $t$ , то они при любом решении должны остаться неизменными. А это, в свою очередь, означает справедливость тождеств:

$$\rho^4 + 4\mu_x^2 - m_{jx}^2 \pm i\Gamma_{jx}m_{jx} \left(\frac{\rho}{\rho_{jx}}\right)^3 \equiv \rho^4 + 4\mu^2 - m_j^2 \pm i\Gamma_j m_j \left(\frac{\rho}{\rho_j}\right)^3 \quad (49)$$

для  $j = 1, 2$ . Отсюда получается система уравнений:

$$\begin{cases} 4\mu_x^2 - m_{1x}^2 = 4\mu^2 - m_1^2, \\ \frac{\Gamma_{1x}m_{1x}}{\rho_{1x}^3} = \frac{\Gamma_1 m_1}{\rho_1^3}, \\ 4\mu_x^2 - m_{2x}^2 = 4\mu^2 - m_2^2, \\ \frac{\Gamma_{2x}m_{2x}}{\rho_{2x}^3} = \frac{\Gamma_2 m_2}{\rho_2^3}, \end{cases} \quad (50)$$

где  $\rho_1 = (m_1^2 - 4\mu^2)^{1/4}$ ,  $\rho_2 = (m_2^2 - 4\mu^2)^{1/4}$ . Для пяти переменных  $\mu_x, \Gamma_{1x}, \Gamma_{2x}, m_{1x}, m_{2x}$  получается система из четырех уравнений. Однако, если вспомнить исходную функцию, то множитель  $\rho^3$  в ней определял пороговое поведение сечения, а так как  $\rho = (s - 4\mu^2)^{1/4}$ , то очевидно, что  $\mu$  не должно меняться, поэтому

$$\mu_x = \mu \quad (51)$$

и получается четыре уравнения для четырех неизвестных. Учитывая, что  $m_{jx} > 0$ , получаем  $m_{jx} = m_j$ . Отсюда сразу следует, что  $\rho_{jx} = \rho_j$ , а затем и  $\Gamma_{jx} = \Gamma_j$ .

Попробуем упростить знаменатели в этих формулах. Очевидно, что

$$\begin{aligned} 2z_{11} (z_{11} - z_{21}^*) (z_{11} - z_{31}^*) (z_{11} - z_{41}^*) &= \\ &= z_{11}^4 + 4\mu^2 - m_1^2 - i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{z_{11}}{\rho_1}\right)^3 = \\ &= z_{11}^4 + 4\mu^2 - m_1^2 - i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{z_{11}}{\rho_1}\right)^3 - \\ &\quad - \left[ z_{11}^4 + 4\mu^2 - m_1^2 + i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{z_{11}}{\rho_1}\right)^3 \right] = -2i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{z_{11}}{\rho_1}\right)^3. \end{aligned} \quad (52)$$

Аналогично

$$(z_{21}^* - z_{11}) 2z_{21}^* (z_{21}^* - z_{31}) (z_{21}^* - z_{41}) = 2i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{z_{21}^*}{\rho_1}\right)^3. \quad (53)$$

$$(z_{31}^* - z_{11})(z_{31}^* - z_{21})(z_{31}^* - z_{31})(z_{31}^* - z_{41}) = 2i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{31}^*}{\rho_1} \right)^3. \quad (54)$$

$$(z_{41}^* - z_{11})(z_{41}^* - z_{21})(z_{41}^* - z_{31})(z_{41}^* - z_{41}) = 2i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{41}^*}{\rho_1} \right)^3. \quad (55)$$

$$2z_{12}(z_{12} - z_{22}^*)(z_{12} - z_{32}^*)(z_{12} - z_{42}^*) = -2i\Gamma_2 m_2 \left( \frac{z_{12}}{\rho_2} \right)^3. \quad (56)$$

$$(z_{22}^* - z_{12})2z_{22}^*(z_{22}^* - z_{32})(z_{22}^* - z_{42}) = 2i\Gamma_2 m_2 \left( \frac{z_{22}^*}{\rho_2} \right)^3. \quad (57)$$

$$(z_{32}^* - z_{12})(z_{32}^* - z_{22})(z_{32}^* - z_{32})(z_{32}^* - z_{42}) = 2i\Gamma_2 m_2 \left( \frac{z_{32}^*}{\rho_2} \right)^3. \quad (58)$$

$$(z_{42}^* - z_{12})(z_{42}^* - z_{22})(z_{42}^* - z_{32})(z_{42}^* - z_{42}) = 2i\Gamma_2 m_2 \left( \frac{z_{42}^*}{\rho_2} \right)^3. \quad (59)$$

Не такие компактные получаются выражения для других восьми знаменателей:

$$\begin{aligned} (z_{11} - z_{12}^*)(z_{11} - z_{22}^*)(z_{11} - z_{32}^*)(z_{11} - z_{42}^*) &= \\ &= -i\Gamma_2 m_2 \left( \frac{z_{11}}{\rho_2} \right)^3 - i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{11}}{\rho_1} \right)^3 - m_2^2 + m_1^2. \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} (z_{21}^* - z_{12})(z_{21}^* - z_{22})(z_{21}^* - z_{32})(z_{21}^* - z_{42}) &= \\ &= i\Gamma_2 m_2 \left( \frac{z_{21}^*}{\rho_2} \right)^3 + i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{21}^*}{\rho_1} \right)^3 - m_2^2 + m_1^2. \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} (z_{31}^* - z_{12})(z_{31}^* - z_{22})(z_{31}^* - z_{32})(z_{31}^* - z_{42}) &= \\ &= i\Gamma_2 m_2 \left( \frac{z_{31}^*}{\rho_2} \right)^3 + i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{31}^*}{\rho_1} \right)^3 - m_2^2 + m_1^2. \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} (z_{41}^* - z_{12})(z_{41}^* - z_{22})(z_{41}^* - z_{32})(z_{41}^* - z_{42}) &= \\ &= i\Gamma_2 m_2 \left( \frac{z_{41}^*}{\rho_2} \right)^3 + i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{41}^*}{\rho_1} \right)^3 - m_2^2 + m_1^2. \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} (z_{12} - z_{11}^*)(z_{12} - z_{21}^*)(z_{12} - z_{31}^*)(z_{12} - z_{41}^*) &= \\ &= -i\Gamma_2 m_2 \left( \frac{z_{12}}{\rho_2} \right)^3 - i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{12}}{\rho_1} \right)^3 - m_1^2 + m_2^2. \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned}
& (z_{22}^* - z_{11})(z_{22}^* - z_{21})(z_{22}^* - z_{31})(z_{22}^* - z_{41}) = \\
& = i\Gamma_2 m_2 \left( \frac{z_{22}^*}{\rho_2} \right)^3 + i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{22}^*}{\rho_1} \right)^3 - m_1^2 + m_2^2.
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
& (z_{32}^* - z_{11})(z_{32}^* - z_{21})(z_{32}^* - z_{31})(z_{32}^* - z_{41}) = \\
& = i\Gamma_2 m_2 \left( \frac{z_{32}^*}{\rho_2} \right)^3 + i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{32}^*}{\rho_1} \right)^3 - m_1^2 + m_2^2.
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
& (z_{42}^* - z_{11})(z_{42}^* - z_{21})(z_{42}^* - z_{31})(z_{42}^* - z_{41}) = \\
& = i\Gamma_2 m_2 \left( \frac{z_{42}^*}{\rho_2} \right)^3 + i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{42}^*}{\rho_1} \right)^3 - m_2^2 + m_1^2.
\end{aligned} \tag{67}$$

Но и здесь можно несколько сократить выражения, если ввести обозначения:

$$G = \frac{\Gamma_1 m_1}{\rho_1^3} + \frac{\Gamma_2 m_2}{\rho_2^3}, \quad D_m^2 = m_2^2 - m_1^2. \tag{68}$$

Для оставшихся свободных параметров  $A_x = a_x e^{i\psi_x}$ ,  $B_x = b_x e^{-i\psi_x}$  получается система из восьми комплексных уравнений:

$$\begin{aligned}
& a_x e^{i\psi_x} \left( \frac{a_x e^{-i\psi_x}}{-2i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{11}}{\rho_1} \right)^3} + \frac{b_x e^{i\psi_x}}{-iG z_{11}^3 - D_m^2} \right) = \\
& = a e^{i\psi} \left( \frac{a e^{-i\psi}}{-2i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{11}}{\rho_1} \right)^3} + \frac{b e^{i\psi}}{-iG z_{11}^3 - D_m^2} \right).
\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
& a_x e^{-i\psi_x} \left( \frac{a_x e^{i\psi_x}}{2i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{21}^*}{\rho_1} \right)^3} + \frac{b_x e^{-i\psi_x}}{iG z_{21}^{*3} - D_m^2} \right) = \\
& = a e^{-i\psi} \left( \frac{a e^{i\psi}}{2i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{21}^*}{\rho_1} \right)^3} + \frac{b e^{-i\psi}}{iG z_{21}^{*3} - D_m^2} \right).
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
& a_x e^{-i\psi_x} \left( \frac{a_x e^{i\psi_x}}{2i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{31}^*}{\rho_1} \right)^3} + \frac{b_x e^{-i\psi_x}}{iG z_{31}^{*3} - D_m^2} \right) = \\
& = a e^{-i\psi} \left( \frac{a e^{i\psi}}{2i\Gamma_1 m_1 \left( \frac{z_{31}^*}{\rho_1} \right)^3} + \frac{b e^{-i\psi}}{iG z_{31}^{*3} - D_m^2} \right).
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
a_x e^{-i\psi_x} \left( \frac{a_x e^{i\psi_x}}{2i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{z_{41}^*}{\rho_1}\right)^3} + \frac{b_x e^{-i\psi_x}}{iGz_{41}^{*3} - D_m^2} \right) &= \\
&= a e^{-i\psi} \left( \frac{a e^{i\psi}}{2i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{z_{41}^*}{\rho_1}\right)^3} + \frac{b e^{-i\psi}}{iGz_{41}^{*3} - D_m^2} \right). \tag{72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_x e^{-i\psi_x} \left( \frac{a_x e^{-i\psi_x}}{-iGz_{12}^3 + D_m^2} + \frac{b_x e^{i\psi_x}}{-2i\Gamma_2 m_2 \left(\frac{z_{12}}{\rho_2}\right)^3} \right) &= \\
&= b e^{-i\psi} \left( \frac{a e^{-i\psi}}{-iGz_{12}^3 + D_m^2} + \frac{b e^{i\psi}}{-2i\Gamma_2 m_2 \left(\frac{z_{12}}{\rho_2}\right)^3} \right). \tag{73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_x e^{i\psi_x} \left( \frac{a_x e^{i\psi_x}}{iGz_{22}^{*3} + D_m^2} + \frac{b_x e^{-i\psi_x}}{2i\Gamma_2 m_2 \left(\frac{z_{22}^*}{\rho_2}\right)^3} \right) &= \\
&= b e^{i\psi} \left( \frac{a e^{i\psi}}{iGz_{22}^{*3} + D_m^2} + \frac{b e^{-i\psi}}{2i\Gamma_2 m_2 \left(\frac{z_{22}^*}{\rho_2}\right)^3} \right). \tag{74}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_x e^{i\psi_x} \left( \frac{a_x e^{i\psi_x}}{iGz_{32}^{*3} + D_m^2} + \frac{b_x e^{-i\psi_x}}{2i\Gamma_2 m_2 \left(\frac{z_{32}^*}{\rho_2}\right)^3} \right) &= \\
&= b e^{i\psi} \left( \frac{a e^{i\psi}}{iGz_{32}^{*3} + D_m^2} + \frac{b e^{-i\psi}}{2i\Gamma_2 m_2 \left(\frac{z_{32}^*}{\rho_2}\right)^3} \right). \tag{75}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_x e^{i\psi_x} \left( \frac{a_x e^{i\psi_x}}{iGz_{42}^{*3} + D_m^2} + \frac{b_x e^{-i\psi_x}}{2i\Gamma_2 m_2 \left(\frac{z_{42}^*}{\rho_2}\right)^3} \right) &= \\
&= b e^{i\psi} \left( \frac{a e^{i\psi}}{iGz_{42}^{*3} + D_m^2} + \frac{b e^{-i\psi}}{2i\Gamma_2 m_2 \left(\frac{z_{42}^*}{\rho_2}\right)^3} \right). \tag{76}
\end{aligned}$$

Переобозначим неизвестные переменные:

$$\xi = \frac{a_x b_x}{ab}, \quad \nu_x = \frac{a_x}{b_x}, \quad \nu = \frac{a}{b}. \tag{77}$$

Тривиальное решение этой системы уравнений очевидно:  $\psi_x = \psi$ ,  $a_x = a$ ,  $b_x = b$ ,  $\xi = 1$ ,  $\nu_x = \nu$ . Новый набор неизвестных переменных  $\psi_x$ ,  $\nu_x$ ,  $\xi$ . Старые переменные связаны с новыми следующими соотношениями:  $a_x = \sqrt{ab\xi\nu_x}$ ,  $b_x = \sqrt{\frac{ab\xi}{\nu_x}}$ .

Перепишем систему уравнений с новыми неизвестными  $\xi$ ,  $\nu_x$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{2i\psi_x} = \frac{e^{-2i\psi}}{\xi} + \frac{iGz_{11}^3 + D_m^2}{2i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{z_{11}}{\rho_1}\right)^3} \cdot \left(\frac{\nu}{\xi} - \nu_x\right), \\ e^{-2i\psi_x} = \frac{e^{-2i\psi}}{\xi} + \frac{iGz_{21}^{*3} - D_m^2}{2i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{z_{21}^*}{\rho_1}\right)^3} \cdot \left(\frac{\nu}{\xi} - \nu_x\right), \\ e^{-2i\psi_x} = \frac{e^{-2i\psi}}{\xi} + \frac{iGz_{31}^{*3} - D_m^2}{2i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{z_{31}^*}{\rho_1}\right)^3} \cdot \left(\frac{\nu}{\xi} - \nu_x\right), \\ e^{-2i\psi_x} = \frac{e^{-2i\psi}}{\xi} + \frac{iGz_{41}^{*3} - D_m^2}{2i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{z_{41}^*}{\rho_1}\right)^3} \cdot \left(\frac{\nu}{\xi} - \nu_x\right), \\ e^{-2i\psi_x} = \frac{e^{-2i\psi}}{\xi} + \frac{iGz_{12}^3 - D_m^2}{2i\Gamma_2 m_2 \left(\frac{z_{12}}{\rho_2}\right)^3} \cdot \left(\frac{1}{\xi\nu} - \frac{1}{\nu_x}\right), \\ e^{2i\psi_x} = \frac{e^{2i\psi}}{\xi} + \frac{iGz_{22}^{*3} + D_m^2}{2i\Gamma_2 m_2 \left(\frac{z_{22}^*}{\rho_2}\right)^3} \cdot \left(\frac{1}{\xi\nu} - \frac{1}{\nu_x}\right), \\ e^{2i\psi_x} = \frac{e^{2i\psi}}{\xi} + \frac{iGz_{32}^{*3} + D_m^2}{2i\Gamma_2 m_2 \left(\frac{z_{32}^*}{\rho_2}\right)^3} \cdot \left(\frac{1}{\xi\nu} - \frac{1}{\nu_x}\right), \\ e^{2i\psi_x} = \frac{e^{2i\psi}}{\xi} + \frac{iGz_{42}^{*3} + D_m^2}{2i\Gamma_2 m_2 \left(\frac{z_{42}^*}{\rho_2}\right)^3} \cdot \left(\frac{1}{\xi\nu} - \frac{1}{\nu_x}\right). \end{array} \right. \quad (78)$$

Вычитая третье уравнение из второго, получим

$$\left( \frac{iGz_{21}^{*3} - D_m^2}{2i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{z_{21}^*}{\rho_1}\right)^3} - \frac{iGz_{31}^{*3} - D_m^2}{2i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{z_{31}^*}{\rho_1}\right)^3} \right) \cdot \left(\frac{\nu}{\xi} - \nu_x\right) = 0, \quad (79)$$

что может быть, только если один из сомножителей равен нулю. Таким образом, одно из решений приводит к

$$\nu_x = \frac{\nu}{\xi}. \quad (80)$$

Легко убедиться, что первый сомножитель не может быть равен нулю при произвольных параметрах резонансов. Действительно, равенство нулю первой скобки эквивалентно

$$iG - \frac{D_m^2}{z_{21}^{*3}} = iG - \frac{D_m^2}{z_{31}^{*3}}, \quad (81)$$

а это, в свою очередь, эквивалентно равенству  $z_{21} = z_{31}$ . Аналогично, используя пары уравнений «второе – четвертое», «третье – четвертое»,

и предполагая, что  $\nu_x \neq \frac{\nu}{\xi}$ , получим  $z_{21} = z_{31} = z_{41}$ . Посмотрим, к чему приводит равенство трех корней уравнения

$$\begin{aligned} \rho^4 + 4\mu^2 - m_1^2 + i\Gamma_1 m_1 \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^3 &= (\rho - z_{11})(\rho - z_{21})^3 = \\ &= \rho^4 - (z_{11} + 3z_{21})\rho^3 + \\ &\quad + 3z_{21}(z_{11} + z_{21})\rho^2 - z_{21}^2(3z_{11} + z_{21})\rho + z_{11}z_{21}^3. \end{aligned} \quad (82)$$

Так как ни один из корней не равен нулю, то из сравнения двух представлений одного и того же уравнения следует, что

$$\begin{cases} z_{11} + z_{21} = 0, \\ 3z_{11} + z_{21} = 0, \end{cases} \quad (83)$$

из чего следует, что  $z_{11} = z_{21} = 0$ , что невозможно. Отсюда получаем, что предположение  $\nu_x \neq \frac{\nu}{\xi}$  неверно, и решением уравнения (79) является

$$\nu_x = \frac{\nu}{\xi}. \quad (84)$$

Аналогичным анализом 6–8 уравнений в (78) получим

$$\nu_x = \xi\nu. \quad (85)$$

Отсюда сразу следует, что

$$\xi = 1, \quad \nu_x = \nu. \quad (86)$$

Теперь из любого уравнения системы (78) получается

$$e^{2i\psi_x} = e^{2i\psi} \implies \psi_x = \psi. \quad (87)$$

В итоге получаем, что при наличии зависимости ширины от энергии вырождение снимается, и имеется только один набор параметров резонансов, точно воспроизводящий зависимость сечения от энергии.

## 5 Численные эксперименты

Для дополнительной проверки полученных выводов полезно провести численные эксперименты. Кроме того, такие эксперименты покажут роль статистики эксперимента.

Во всех случаях мы будем предполагать некоторую истинную функцию сечения реакции  $\sigma(E)$  от энергии встречных пучков  $E$ , затем в конечном числе точек  $E_k$  по энергии генерировать в соответствии с этим сечением и некоторой «интегральной светимостью»  $L$ , одинаковой для всех точек, количество экспериментальных событий  $n_k$  в соответствии с распределением Пуассона. Для получения параметров резонансов, входящих в данную модель процесса, будем минимизировать функцию правдоподобия вида

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N 2 \left( p_k - n_k + n_k \ln \frac{n_k}{p_k} \right), \quad (88)$$

которая, вообще говоря, совпадает с точностью до постоянного слагаемого с удвоенной логарифмической функцией правдоподобия с обратным знаком. Здесь  $p_k = \sigma(E_k) \cdot L$ . При большой статистике эта функция стремится к  $\chi^2$ , что может быть использовано для проверки статистического согласия «эксперимента» и «моделирования». Минимизировать функцию будем с помощью программы численной минимизации MINUIT [2].

Для изображения на рисунках экспериментального измеренного сечения, числу событий в точке по энергии приписываются несимметричные ошибки:

$$\Delta n_i^{(+)} = \sqrt{n_i + 1}, \quad \Delta n_i^{(-)} = \sqrt{n_i}. \quad (89)$$

## 5.1 Приближенное выражение для резонансной амплитуды

$$\sigma(E) = \left| \frac{a}{E - m_1 + i \frac{\Gamma_1}{2}} + \frac{b e^{i\psi}}{E - m_2 + i \frac{\Gamma_2}{2}} \right|^2 \quad (90)$$

с «истинными» значениями параметров

$$\begin{aligned} m_1 &= 782.6, \quad \Gamma_1 = 8.4, \quad a = 1, \\ m_2 &= 1019.4, \quad \Gamma_2 = 4.5, \quad b = 0.3, \quad \psi = 155^\circ. \end{aligned} \quad (91)$$

В такой записи  $\sigma(m_1) \approx \frac{1}{4.2^2} = 0.057$ ,  $\sigma(m_2) \approx \frac{0.09}{2.25^2} = 0.018$ . Для того, чтобы в максимуме второго резонанса была хотя бы 5%-я точность, выберем  $L = 2 \cdot 10^4$ . На рис. 1 приведен набор точек по энергии в нашем «численном эксперименте».

График функции правдоподобия и зависимость оптимальных значений параметров от фазы второго резонанса  $\psi_{2x}$  приведены на рис. 2. Получены два совершенно равноправных минимума с



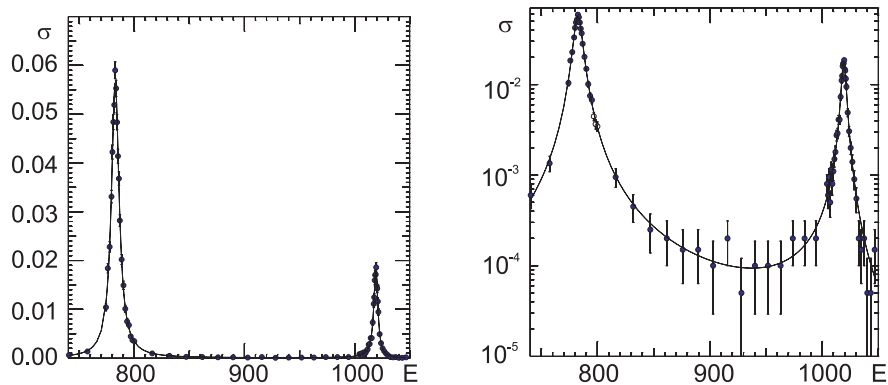


Рис. 1: Результат подгонки «экспериментальных» точек. Модель сечения реакции описывается формулой (90).  $\chi^2/n_D = 64.3/(74 - 7)$ .

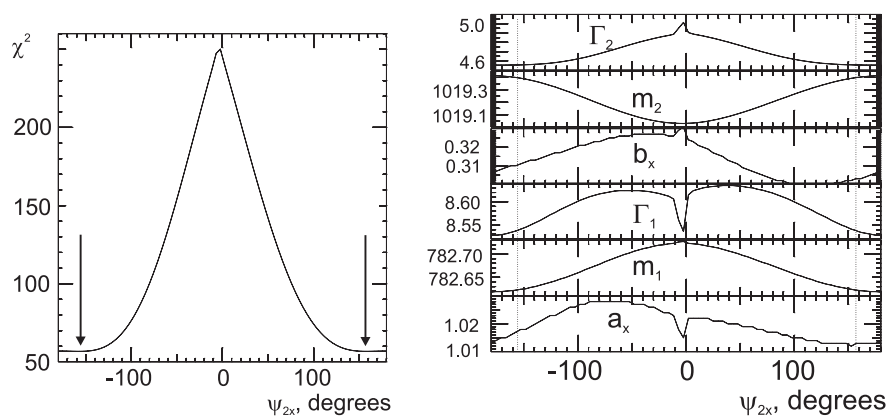


Рис. 2: График функции правдоподобия (слева) и зависимость оптимальных значений параметров резонансов от значения фазы второго резонанса  $\psi_{2x}$  (справа)

$\chi^2/n_D = 56.703/(74 - 7)$  при  $\psi_{2x} = -157.14^\circ$  и  $\psi_{2x} = 157.51^\circ$ . И хотя разделяющий их максимум невысок ( $\chi^2 = 56.907$  при  $\psi_{2x} = \pm 180^\circ$ ), все же это разные решения. Значения всех параметров в этих минимумах приведены в табл. 1.

Таблица 1: Параметры резонансов в двух минимумах функции правдоподобия.

$a_x$	$m_{1x}$	$\Gamma_{1x}$	$b_x$	$m_{2x}$	$\Gamma_{2x}$	$\psi_{2x}^\circ$	$\chi^2$
1.0125	782.62	8.5371	0.30284	1019.4	4.5554	157.815	56.703
1.0167	782.62	8.5371	0.31033	1019.4	4.5554	-157.065	56.703

Этот численный эксперимент подтвердил справедливость аналитического вывода — при фитировании данных приближенной формулой резонанса имеет место двузначность фазы резонансов и амплитуд.

## 5.2 Релятивистская форма амплитуды резонанса

Рассмотрим более точную зависимость амплитуды резонанса от энергии:

$$\sigma(E) = \frac{m_1^4 \sqrt{E^2 - 4\mu^2}^3}{E^4 \sqrt{m_1^2 - 4\mu^2}^3} \cdot \left| \frac{2m_1 a}{E^2 - m_1^2 + i\Gamma_1 m_1} + \frac{2m_2 b e^{i\psi}}{E^2 - m_2^2 + i\Gamma_2 m_2} \right|^2 \quad (92)$$

с теми же «истинными» значениями параметров

$$\begin{aligned} m_1 &= 782.6, \quad \Gamma_1 = 8.4, \quad a = 1, \\ m_2 &= 1019.4, \quad \Gamma_2 = 4.5, \quad b = 0.3, \quad \psi = 155^\circ, \end{aligned} \quad (93)$$

где множители  $2m_i$  добавлены для того, чтобы не изменились максимальные значения амплитуд, общий множитель имитирует пороговое поведение сечения с  $\mu \approx \frac{3m_\pi}{2} \approx \frac{140+140+135}{2} \approx 208$ . Для того, чтобы минимумы функции правдоподобия были более определенными, увеличим интегральную светимость до  $L = 10^6$ .

На рис. 3 приведен набор точек по энергии и оптимальное сечение вида (92).

График функции правдоподобия и зависимость оптимальных значений параметров от фазы второго резонанса  $\psi_{2x}$  приведены на рис. 4.

Как и ожидалось, здесь снова имеются два равноправных минимума. Значения параметров в точках минимума  $\mathcal{L}$  приведены в табл. 2.

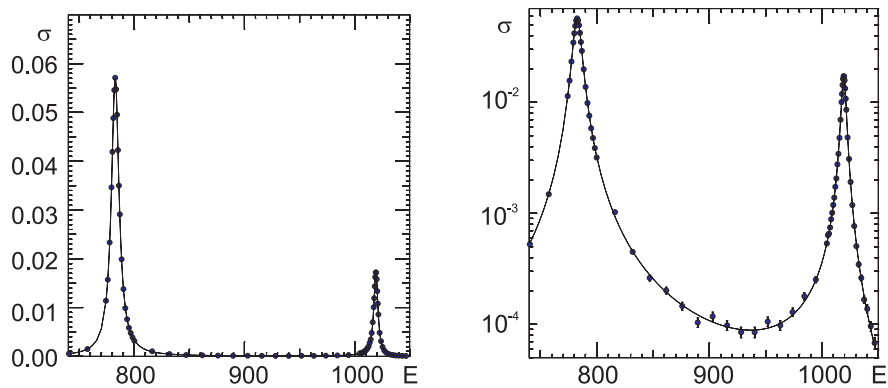


Рис. 3: Результат подгонки «экспериментальных» точек. Модель сечения реакции описывается формулой (92).  $\chi^2/n_D = 74.6/(74 - 7)$ .

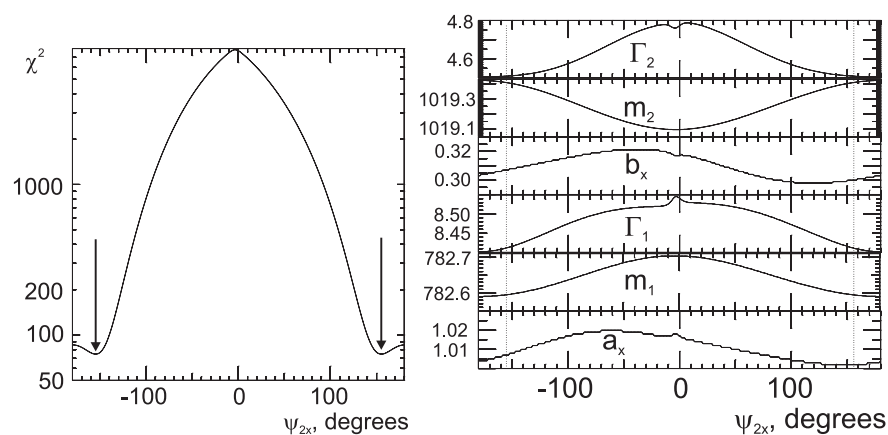


Рис. 4: График функции правдоподобия (слева) и зависимость оптимальных значений параметров резонансов от значения фазы второго резонанса  $\psi_{2x}$  (справа)

Таблица 2: Параметры резонансов в двух минимумах функции правдоподобия.

$a_x$	$m_{1x}$	$\Gamma_{1x}$	$b_x$	$m_{2x}$	$\Gamma_{2x}$	$\psi_{2x}^{\circ}$	$\chi^2$
1.0020	782.60	8.4116	0.30007	1019.4	4.5093	155.283	74.58624
1.0071	782.60	8.4116	0.30708	1019.4	4.5093	-154.807	74.58624

### 5.3 Зависимость ширины резонанса от энергии

Наконец, рассмотрим случай, где ожидается снятие вырождения, и будет только один глобальный минимум:

$$\sigma(E) = \frac{m_1^4 \sqrt{E^2 - 4\mu^2}^3}{E^4 \sqrt{m_1^2 - 4\mu^2}^3} \times \left| \frac{2m_1 a}{E^2 - m_1^2 + i\Gamma_1 m_1 \cdot \left(\frac{E^2 - 4\mu^2}{m_1^2 - 4\mu^2}\right)^{\frac{3}{4}}} + \frac{2m_2 b e^{i\psi}}{E^2 - m_2^2 + i\Gamma_2 m_2 \cdot \left(\frac{E^2 - 4\mu^2}{m_2^2 - 4\mu^2}\right)^{\frac{3}{4}}} \right|^2. \quad (94)$$

На рис. 5 приведен набор точек по энергии и оптимальное сечение вида (94).

График функции правдоподобия и зависимость оптимальных значений параметров от фазы второго резонанса  $\psi_{2,x}$  приведены на рис. 6.

Действительно, минимумы теперь не совпадают (см. табл. 3), однако, различие незначительное и, что оказалось неожиданным, меньшее значение функции правдоподобия получено для «неправильного» минимума.

Посмотрим, что изменится, если статистику эксперимента увеличить в 100 раз ( $L = 10^8$ ). В табл. 4 приведены параметры резонансов в двух минимумах функции правдоподобия. По-прежнему оказывается, что разность функций в двух минимумах незначительна и опять «неправильный» минимум получается немного предпочтительней, хотя суммарная статистика очень большая, практически недостижимая в реальных экспериментах.

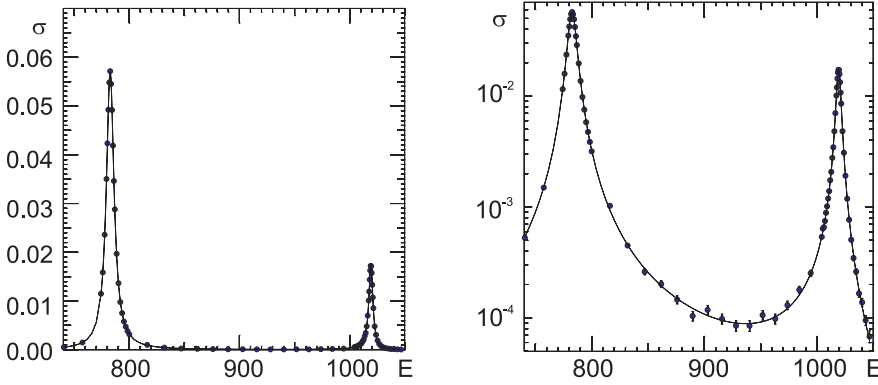


Рис. 5: Результат подгонки «экспериментальных» точек. Модель сечения реакции описывается формулой (94).  $\chi^2/n_D = 74.8/(74 - 7)$ .

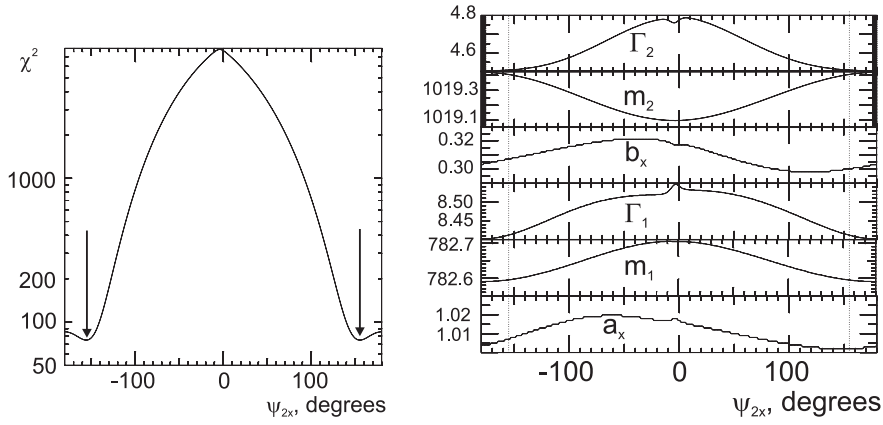


Рис. 6: График функции правдоподобия (слева) и зависимость оптимальных значений параметров резонансов от значения фазы второго резонанса  $\psi_{2x}$  (справа)

Таблица 3: Параметры резонансов в двух минимумах функции правдоподобия.

$a_x$	$m_{1x}$	$\Gamma_{1x}$	$b_x$	$m_{2x}$	$\Gamma_{2x}$	$\psi_{2x}^\circ$	$\chi^2$
1.0020	782.60	8.4117	0.30007	1019.4	4.5093	155.289	74.82254
1.0071	782.60	8.4117	0.30699	1019.4	4.5093	-155.529	74.81663

Таблица 4: Параметры резонансов в двух минимумах функции правдоподобия.

$a_x$	$m_{1x}$	$\Gamma_{1x}$	$b_x$	$m_{2x}$	$\Gamma_{2x}$	$\psi_{2x}^\circ$	$\chi^2$
0.99982	782.60	8.3977	0.30015	1019.4	4.5025	154.985	70.085
1.0050	782.60	8.3977	0.30711	1019.4	4.5025	-155.237	70.060

Таблица 5: Параметры резонансов в двух минимумах функции правдоподобия.

$a_x$	$m_{1x}$	$\Gamma_{1x}$	$b_x$	$m_{2x}$	$\Gamma_{2x}$	$\psi_{2x}^\circ$	$\chi^2$
0.99946	782.61	8.3931	0.30013	1019.4	4.5202	151.335	63.799
1.0051	782.61	8.3935	0.30777	1019.4	4.5203	-153.908	63.711

Вернемся к предыдущему уровню статистики ( $L = 10^6$ ), но изменим пороговый фактор  $\mu = 350$  вместо 208. И опять оба минимума (табл. 5) различаются статистически недостоверно. Очевидно, что чем уже резонансы, тем меньше влияет на их форму зависимость ширины от энергии. Возьмем значения обеих ширин большие —  $\Gamma_{1,2} = 100$ . Чтобы при этом сечение процесса в максимуме резонансов не сильно уменьшилось, увеличим при этом амплитуды:  $a = 10$ ,  $b = 5$ . Рис. 7 демонстрирует «экспериментальные» измерения и результат подгонки.

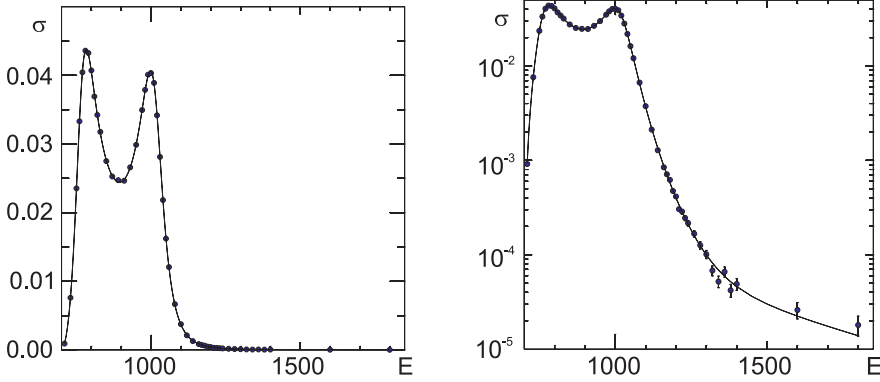


Рис. 7: Результат подгонки «экспериментальных» точек. Модель сечения реакции описывается формулой (94).  $\chi^2/n_D = 46.8/(50 - 7)$ .

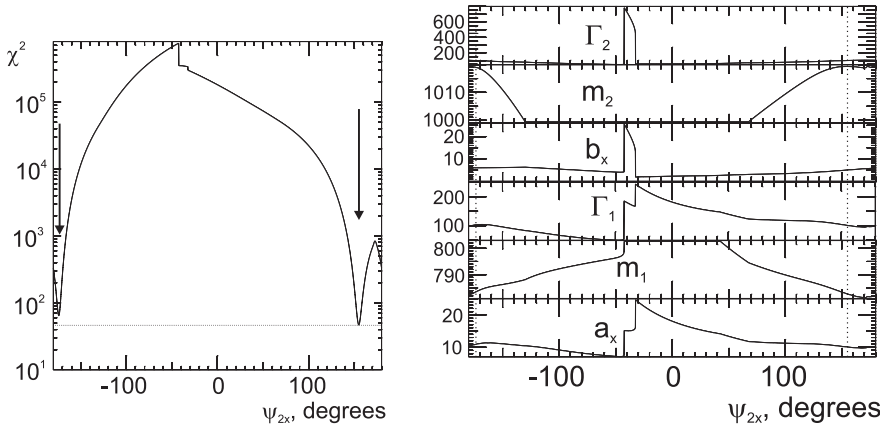


Рис. 8: График функции правдоподобия (слева) и зависимость оптимальных значений параметров резонансов от значения фазы второго резонанса  $\psi_{2x}$  (справа)

Таблица 6: Параметры резонансов в двух минимумах функции правдоподобия.

$a_x$	$m_{1x}$	$\Gamma_{1x}$	$b_x$	$m_{2x}$	$\Gamma_{2x}$	$\psi_{2x}^\circ$	$\chi^2$
10.050	782.71	100.61	5.0111	1019.4	100.22	154.985	46.844
10.848	783.39	102.03	5.9767	1019.1	99.816	-173.990	64.428

График функции правдоподобия и зависимость оптимальных значений параметров от фазы второго резонанса  $\psi_{2x}$  приведены на рис. 8. На этот раз два минимума существенно неравноправны, причем более предпочтительный минимум находится при «правильной» фазе. В табл. 6 приведены все параметры резонансов в этих минимумах. Статистическое согласие первого минимума с «экспериментальными» данными равно  $P_{50-7}(46.844) = 0.318$ , второго минимума —  $P_{50-7}(64.428) = 0.0188$ .

Для полноты картины рассмотрим некоторый промежуточный случай:  $\Gamma_{1,2} = 30$ ,  $a = 3$ ,  $b = 1$ . Рис. 9 демонстрирует «экспериментальные» измерения и результат подгонки.

Снова два минимума (табл. 7) получились статистически равноправные (разность функций в минимуме много меньше 1).

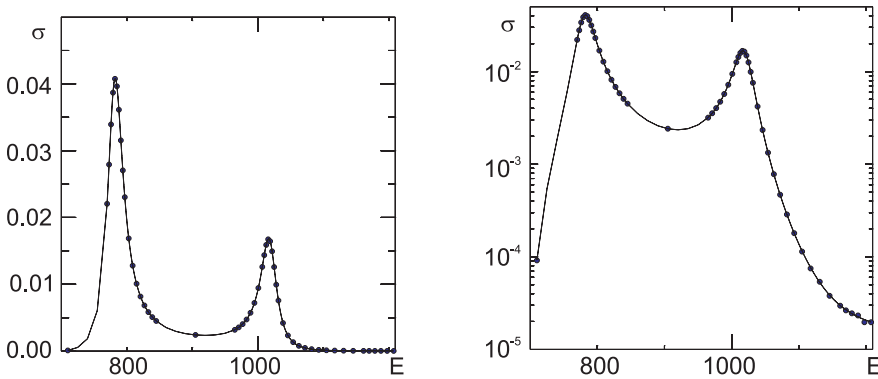


Рис. 9: Результат подгонки «экспериментальных» точек. Модель сечения реакции описывается формулой (94),  $\chi^2/n_D = 52.05/(53 - 7)$ .

Таблица 7: Параметры резонансов в двух минимумах функции правдоподобия.

$a_x$	$m_{1x}$	$\Gamma_{1x}$	$b_x$	$m_{2x}$	$\Gamma_{2x}$	$\psi_{2x}^\circ$	$\chi^2$
3.0103	782.62	30.128	0.9986	1019.5	30.013	155.128	52.054
3.0745	782.63	30.172	1.1311	1019.4	30.019	-158.262	51.714

В итоге этого эксперимента можно сделать следующий вывод: если есть зависимость ширины резонанса от энергии, то два минимума функции правдоподобия, в принципе, описывают не одну и ту же оптимальную функцию сечения процесса от энергии. Однако, реально использовать это различие для отбраковки ложного минимума можно только при благоприятных обстоятельствах: высокая статистика, покрытие достаточно большого интервала энергии, захватывающего оба резонанса, ширины резонансов должны составлять значительную часть расстояния между резонансами. Окончательный ответ может быть получен только после сравнения минимумов функции  $\chi^2$ : если разность уровней больше 1, то можно выбрать статистически более правдоподобную модель процесса, иначе надо привлекать дополнительные соображения для выбора фазы интерференции.

## 5.4 Три резонанса

Рассмотрим случай трех резонансов с постоянными ширинами:

$$\sigma(E) = \frac{m_1^4 \sqrt{E^2 - 4\mu^2}^3}{E^4 \sqrt{m_1^2 - 4\mu^2}^3} \cdot \left| \frac{2m_1 a}{E^2 - m_1^2 + i\Gamma_1 m_1} + \frac{2m_2 b e^{i\psi_2}}{E^2 - m_2^2 + i\Gamma_2 m_2} + \frac{2m_3 c e^{i\psi_3}}{E^2 - m_3^2 + i\Gamma_3 m_3} \right|^2 \quad (95)$$

с «истинными» значениями параметров

$$\begin{aligned} m_1 &= 782.6, \quad \Gamma_1 = 8.4, \quad a = 1, \\ m_2 &= 1019.4, \quad \Gamma_2 = 4.5, \quad b = 0.3, \quad \psi_2 = 155^\circ, \\ m_3 &= 1200, \quad \Gamma_3 = 100, \quad c = 3, \quad \psi_3 = 30^\circ, \end{aligned} \quad (96)$$

$\mu = 350$ , величину интегральной светимости в каждой точке возьмем  $L = 10^6$ . Рис. 10 демонстрирует «экспериментальные» измерения и результат подгонки.

График функции правдоподобия по фазе второго резонанса  $\psi_{2x}$  приведен на рис. 11.

На этом графике видны два минимума (табл. 8).

Несмотря на то, что в случае трех резонансов не удалось получить аналитического решения, похоже, что здесь имеется как минимум два абсолютно равноправных решения. Попробуем уточнить количество таких минимумов, сканируя пространство двух параметров:  $\psi_{2x}$  и  $\psi_{3x}$ . Найденные локальные минимумы приведены в табл. 9. Локальных миниму-



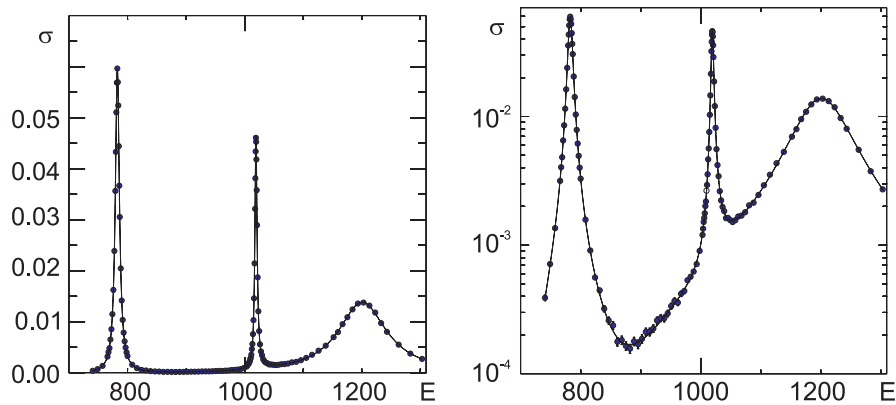


Рис. 10: Результат подгонки «экспериментальных» точек. Модель сечения реакции описывается формулой (95).  $\chi^2/n_D = 126.0/(123 - 7)$ .

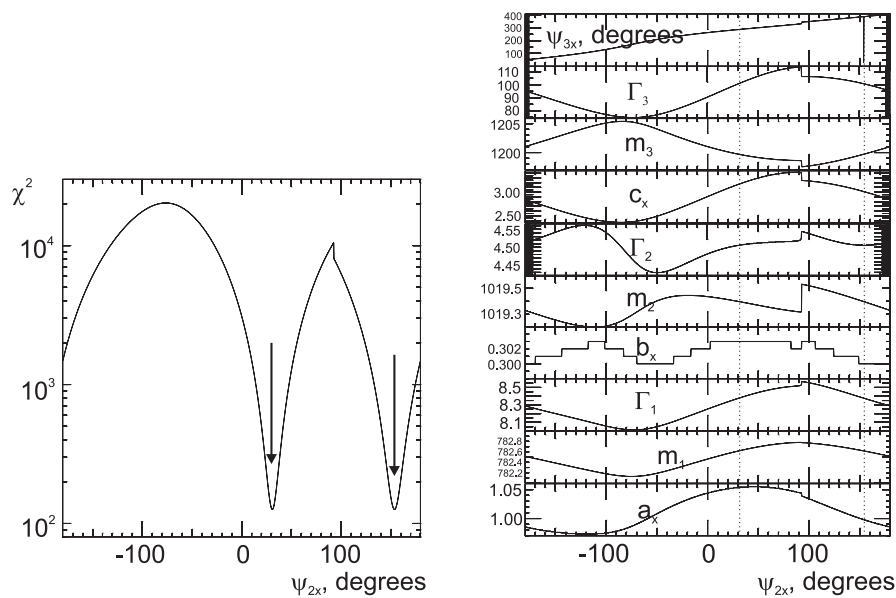


Рис. 11: График функции правдоподобия (слева) и зависимость оптимальных значений параметров резонансов от значения фазы второго резонанса  $\psi_{2x}$  (справа).

Таблица 8: Параметры резонансов в двух минимумах функции правдоподобия.

$a_x$	$m_{1x}$	$\Gamma_{1x}$	$b_x$	$m_{2x}$	$\Gamma_{2x}$	$\psi_{2x}^\circ$	$c_x$	$m_{3x}$	$\Gamma_{3x}$	$\psi_{3x}^\circ$	$\chi^2$
0.99805	782.62	8.3768	0.30038	1019.4	4.5055	153.925	3.0128	1199.7	100.75	28.634	125.969
1.0535	782.62	8.3768	0.30323	1019.4	4.5055	30.931	3.1673	1199.7	100.75	-72.318	125.969

Таблица 9: Параметры резонансов в локальных минимумах функции правдоподобия.

$a_x$	$m_{1x}$	$\Gamma_{1x}$	$b_x$	$m_{2x}$	$\Gamma_{2x}$	$\psi_{2x}^\circ$	$c_x$	$m_{3x}$	$\Gamma_{3x}$	$\psi_{3x}^\circ$	$\chi^2$
1.0535	782.62	8.3768	0.30323	1019.4	4.5055	30.931	3.1673	1199.7	100.75	-72.319	125.969
1.0508	782.62	8.3768	0.23505	1019.4	4.5055	-144.655	3.0147	1199.7	100.75	-53.143	125.969
0.99805	782.62	8.3768	0.30038	1019.4	4.5055	153.925	3.0128	1199.7	100.75	28.634	125.969
0.99545	782.62	8.3768	0.23284	1019.4	4.5055	-21.661	2.8676	1199.7	100.75	47.811	125.969

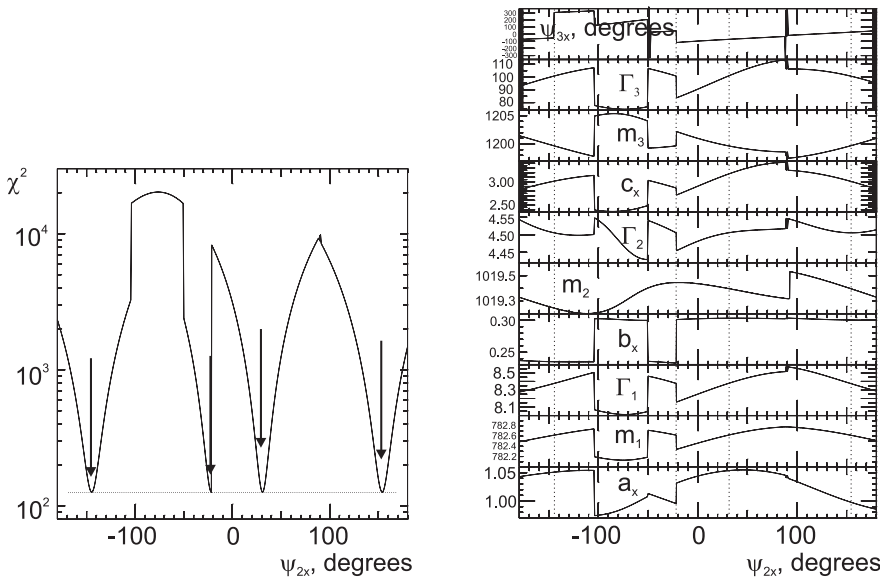


Рис. 12: График функции правдоподобия (слева) и зависимость оптимальных значений параметров резонансов от значения фазы второго резонанса  $\psi_{2x}$  (справа).

Таблица 10: Параметры резонансов в локальных минимумах функции правдоподобия.

$a_x$	$m_{1x}$	$\Gamma_{1x}$	$b_x$	$m_{2x}$	$\Gamma_{2x}$	$\psi_{2x}^0$	$c_x$	$m_{3x}$	$\Gamma_{3x}$	$\psi_{3x}^0$	$\chi^2$
1.0497	782.62	8.3787	0.30316	1019.4	4.5061	39.985	3.1635	1199.7	100.79	-64.366	127.005
1.0470	782.62	8.3790	0.23583	1019.4	4.5058	-148.442	3.0063	1199.7	100.71	-45.063	126.529
0.99824	782.62	8.3792	0.30038	1019.4	4.5057	153.914	3.0122	1199.7	100.71	28.687	126.522
0.99559	782.62	8.3795	0.23365	1019.4	4.5054	-34.675	2.8630	1199.8	100.65	47.871	126.218

мов с совпадающими значениями масс, ширин и функции правдоподобия нашлось четыре. Сюрпризом оказалось, что значения фазы  $\psi_2$  во всех минимумах оказались разными. То есть на графике функции правдоподобия мы должны были видеть четыре минимума. В принципе, это объяснимо. В каждой новой точке мы стартовые значения всех параметров брали из предыдущей точки. При этом могло оказаться, что минимизация функции сходилась к «плохому» локальному минимуму. Попробуем построить новый график функции правдоподобия, выбирая в каждой точке по  $\psi_2$  исходные значения параметров с учетом нашего знания «хороших» минимумов (рис. 12).

Теперь на графике видны все четыре минимума. Однако, графики не гладкие, поэтому, возможно, в каждой точке по  $\psi_{2x}$  не удалось достичь глобального минимума, несмотря на то, что в данном случае после достижения минимума программе MINUIT давалась команда *IMPROVE*, которая инициирует попытку найти нижележащий минимум.

Посмотрим, как изменится набор минимумов, если ширина резонансов зависит от энергии:

$$\sigma(E) = \frac{m_1^4 \sqrt{E^2 - 4\mu^2}^3}{E^4 \sqrt{m_1^2 - 4\mu^2}^3} \times \left| \frac{2m_1 a}{E^2 - m_1^2 + i\Gamma_1 m_1 \cdot \left(\frac{E^2 - 4\mu^2}{m_1^2 - 4\mu^2}\right)^{\frac{3}{4}}} + \frac{2m_2 b e^{i\psi_2}}{E^2 - m_2^2 + i\Gamma_2 m_2 \cdot \left(\frac{E^2 - 4\mu^2}{m_2^2 - 4\mu^2}\right)^{\frac{3}{4}}} + \frac{2m_3 c e^{i\psi_3}}{E^2 - m_3^2 + i\Gamma_3 m_3 \cdot \left(\frac{E^2 - 4\mu^2}{m_3^2 - 4\mu^2}\right)^{\frac{3}{4}}} \right|^2 \quad (97)$$

Снова подтвердился тот факт, что при зависящей от энергии ширине резонансов вырождение снимается (табл. 10).

И снова, из-за того, что для узких резонансов формула с постоянной шириной хорошо описывает резонансную кривую, это различие со статистической точки зрения пренебрежимо. Изменим следующие параметры

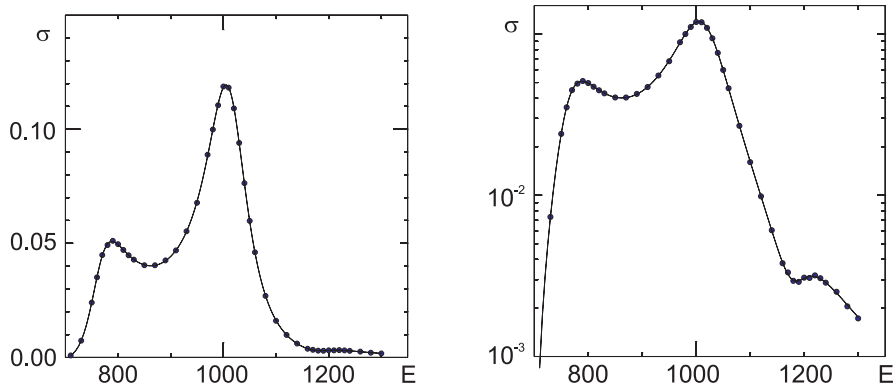


Рис. 13: Результат подгонки «экспериментальных» точек. Модель сечения реакции описывается формулой (97).  $\chi^2/n_D = 37.7/(43 - 11)$ .

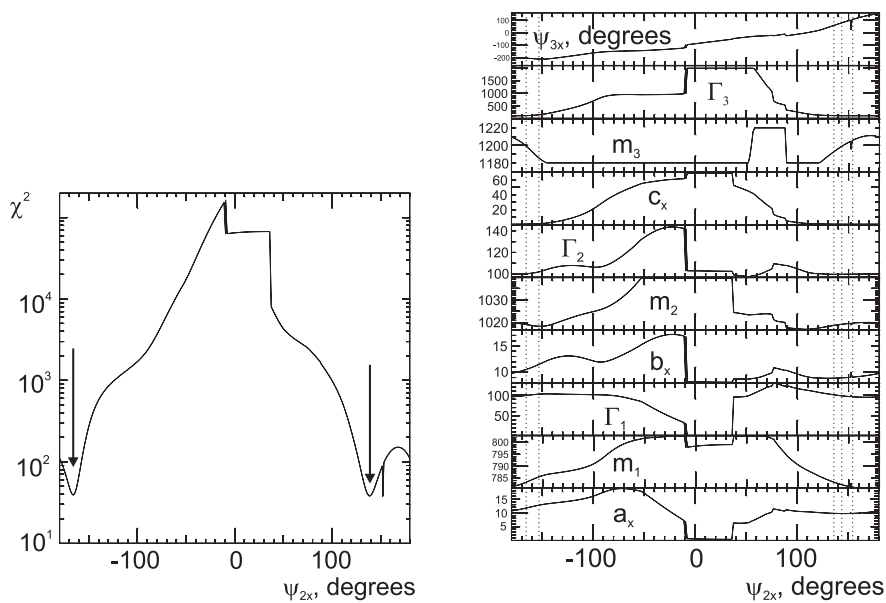


Рис. 14: График функции правдоподобия (слева) и зависимость оптимальных значений параметров резонансов от значения фазы второго резонанса  $\psi_{2x}$  (справа).

первых двух резонансов:

$$\Gamma_1 = 100, \Gamma_2 = 100, a = 10, b = 10. \quad (98)$$

«Экспериментальные» измерения и результат подгонки показаны на рис. 13.

При построении графика функции правдоподобия по  $\psi_{2x}$  (рис. 14) видны минимумы, приведенные в табл. 11.

Табл. 12 описывает локальные минимумы, найденные сканированием по углам  $\psi_{2x}$  и  $\psi_{3x}$ .

При таком поиске нашлось 5 локальных минимумов. Различие между минимальным и «максимальным» минимумами здесь значительное —  $\Delta\chi^2 = 4.27$ . Однако, различие между глобальным минимумом и ближайшим не такое большое —  $\Delta\chi^2 = 0.28$ . Статистически эти два минимума почти равноправны. Все же глобальный минимум имеет параметры резонансов, наиболее совпадающие с истинными.

Таблица 11: Параметры резонансов в двух минимумах функции правдоподобия.

$a_x$	$m_{1x}$	$\Gamma_{1x}$	$b_x$	$m_{2x}$	$\Gamma_{2x}$	$\psi_{2x}^\circ$	$c_x$	$m_{3x}$	$\Gamma_{3x}$	$\psi_{3x}^\circ$	$\chi^2$
11.685	783.30	99.681	10.503	1019.2	100.61	-166.020	0.75199	1199.5	104.28	157.901	38.983
9.9572	782.86	100.31	10.013	1019.0	100.10	152.298	3.138	1195.7	102.44	25.172	37.682

Таблица 12: Параметры резонансов в локальных минимумах функции правдоподобия.

$a_x$	$m_{1x}$	$\Gamma_{1x}$	$b_x$	$m_{2x}$	$\Gamma_{2x}$	$\psi_{2x}^\circ$	$c_x$	$m_{3x}$	$\Gamma_{3x}$	$\psi_{3x}^\circ$	$\chi^2$
9.9572	782.86	100.31	10.013	1019.0	100.10	152.298	3.138	1195.7	102.45	25.172	37.682
9.769	782.84	100.34	8.8903	1019.0	100.08	138.747	0.64948	1195.5	102.39	68.199	37.964
9.7644	782.48	99.576	8.9027	1019.2	99.970	141.698	0.62815	1198.7	100.53	77.349	41.951
11.881	783.31	99.608	11.810	1019.2	100.63	-153.260	3.5041	1199.8	104.31	108.19	39.608
11.685	783.30	99.681	10.503	1019.2	100.61	-166.026	0.75197	1199.5	104.28	157.901	38.983

## 6 Заключение

В результате аналитического решения задачи определения параметров двух резонансов по экспериментальным данным при наличии интерференции показано, что при параметризации сечения с постоянной шириной резонансов всегда имеется два абсолютно равноправных решения (при разных наборах параметров резонансов получается тождественная функция сечения от энергии). Если учитывается зависимость ширины резонансов от энергии, то вырождение снимается, хотя численно решения различаются слабо, и это различие определяется многими факторами.

Для иллюстрации аналитических выводов проведен ряд численных экспериментов. Выводы для случая двух резонансов подтвердились, хотя статистическое различие разных решений даже при учете зависимости ширины от энергии, как правило, невысокое. В каждом конкретном случае эту проблему следует исследовать отдельно.

В случае трех резонансов при неучете зависимости ширины от энергии получено уже четыре равноправных минимума. Аналитически эту задачу не удалось решить из-за технических трудностей. Можно предположить, что число таких минимумов равно  $2^{n-1}$ , где  $n$  — число резонансов. И в случае трех резонансов учет зависимости ширины от энергии формально снимает вырождение, однако, для узких резонансов статистическое различие разных решений невелико.

## Список литературы

- [1] *Г.Корн и Т.Корн.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: «Наука», 1973.
- [2] *F. James, M. Roos.* 'MINUIT' A System for Function Minimization and Analysis of the Parameter Errors and Correlations, Computer Physics Communications 10 (1975) 343.  
*F. James.* MINUIT. Function Minimization and Error Analysis. Reference Manual. CERN Program Library Long Writup D506, March 1994.

*А.Д. Букин*

**О неоднозначности определения параметров  
интерферирующих резонансов**

*A.D. Bukin*

**On the ambiguity of the parameters  
of interfering resonances**

ИЯФ 2007-24

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 18.07.2007 г.

Сдано в набор 19.07.2007 г.

Подписано в печать 20.07.2007 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.5 печ.л., 2.0 уч.-изд.л.

Тираж 85 экз. Бесплатно. Заказ № 24

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН

*Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*