

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И.Будкера СО РАН

В.В. Вечеславов

ХАОС В ДИНАМИКЕ МАЯТНИКА  
ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ВОЗМУЩЕНИИ

ИЯФ 2003-75

НОВОСИБИРСК  
2003

**Хаос в динамике маятника  
при несимметричном возмущении**

*В.В. Вечеславов<sup>1</sup>*

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера  
630090 Новосибирск, СО РАН

**Аннотация**

Продолжено исследование хаотического слоя маятника, находящегося под воздействием несимметричного высокочастотного возмущения. Найдены аналитические выражения для амплитуд возникающих во втором порядке гармоник при различных комбинациях параметров системы и получены оценки их вкладов в амплитуду сепаратрисного отображения. Подтвержден установленный ранее факт наличия областей, где именно вторичные гармоники полностью определяют размер хаотического слоя. Отмечены существенные отличия формирования хаоса в окрестности нулей интегралов Мельникова-Арнольда по сравнению с изученным случаем симметричного возмущения.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg

© *Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН*

---

<sup>1</sup>Email: [vecheslavov@inp.nsk.su](mailto:vecheslavov@inp.nsk.su)

---

# 1 Введение

Фазовое пространство типичных (т.е. неинтегрируемых) нелинейных гамильтоновых систем оказывается разделенным на хаотическую и регулярную компоненты. Механизмом, ответственным за образование динамического хаоса является, как известно, взаимодействие нелинейных резонансов. Обычно один из резонансов считается основным и вблизи него выбираются начальные условия, а остальные рассматриваются как возмущение. Наиболее интересной (а часто и неожиданной) оказалась динамика в окрестности сепаратрис основного резонанса – особых траекторий, отделяющих области с вращающейся (вне резонанса) и колеблющейся (внутри резонанса) фазой.

Долгое время считалось, что хаос всегда возникает именно вблизи сепаратрис, поскольку период движения по ним бесконечен и взаимодействия резонансов здесь всегда существенно. Оказалось, что это так только для систем с аналитическим потенциалом, фурье-амплитуды которого убывают экспоненциально. Возмущение при этом расщепляет сепаратрисы на две отдельные ветви, свободные концы которых заполняют узкую область, образуя хаотический слой [1,2,3].

В случае гладкого потенциала со степенным законом убывания фурье-амплитуд ситуация может быть качественно иной. Поразительные примеры сохранившихся сепаратрис и отсутствия хаотического слоя в кусочно-линейных системах, несмотря на наличие возмущения и сильного локального хаоса, приведены и обсуждаются в работах [4,5,6].

Выяснилось также, что на процесс образования хаоса существенно влияет характер самого возмущения, в первую очередь, его спектральный состав. При нескольких (минимум двух) частотах возмущения хаос может формироваться совсем не так, как в хорошо изученном к настоящему времени случае одной частоты. Уместно кратко напомнить историю этого вопроса.

Система с двумя симметричными гармониками возмущения высокой частоты впервые была исследована Чириковым [1], который показал, что амплитуда сепаратрисного отображения и энергетический размер слоя с

ростом частоты убывают экспоненциально. В недавней работе [7] для той же самой симметричной системы рассматривалась низкочастотная асимптотика и было найдено, что в этом пределе амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, а размер слоя вообще от нее не зависит. Обе эти асимптотики устроены относительно просто и наиболее трудной для анализа является область средних частот, где отсутствует какой-либо малый (или большой) параметр адиабатичности. Весьма полезными здесь оказались так называемые резонансные инварианты, которые неплохо передают топологию отдельных резонансов. Такие инварианты первых трех порядков, соответствующие резонансам 1:1, 1:2 и 1:3, построены для стандартного отображения Чирикова в работе [8] и для одночастотного сепаратрисного отображения в [9]. Достаточно полное представление о структуре хаотического слоя маятника при симметричном возмущении во всем диапазоне частот получено недавно в [10].

Несимметричное возмущение впервые, насколько нам известно, изучалось в работах [11,12], где исследовался гамильтониан маятника при воздействии на него двух гармоник

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \cos(x) + V(x, t), \quad (1)$$

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t). \quad (2)$$

Амплитуды этих гармоник  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$  считались малыми, а частоты (по сравнению с принятой за единицу частотой малых колебаний маятника) высокими  $|\Omega_1|, |\Omega_2| \gg 1$ .

Как известно, в образующемся на месте расщепленной сепаратрисы хаотическом слое следует различать три части: верхнюю (фаза  $x$  вращается сверху  $p > 0$ ), среднюю (фаза колеблется) и нижнюю (фаза  $x$  вращается снизу  $p < 0$ ). Уже первые численные эксперименты с системой (1),(2) показали, что в спектре сепаратрисного отображения помимо явно входящих в гамильтониан первичных частот появляются также комбинационные гармоники на их сумме и разности, а размеры различных частей слоя существенно различны. Еще более удивительным оказался тот факт, что при определенных условиях именно эти вторичные гармоники полностью определяют размер хаотического слоя. Недавно эта важная роль вторичных гармоник на сумме частот была подтверждена и для гладких систем [13].

Возникающая в возмущении вторичная гармоника на сумме частот имеет вид

$$\varepsilon_+ \cos(2x - \Delta\Omega_+ t), \quad \varepsilon_+ = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right], \quad \Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2 > 0 \quad (3)$$

и порождает в сепаратрисном отображении гармонику той же частоты  $\Delta\Omega_+$  с амплитудой

$$W_+ = \frac{4\pi}{3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \frac{e^{\pi\Delta\Omega_+/2}}{\sinh(\pi\Delta\Omega_+)} \Delta\Omega_+^2 (\Delta\Omega_+^2 - 2). \quad (4)$$

На разности частот в возмущении появляются две симметричные гармоники

$$\begin{aligned} & \varepsilon_- [\cos(x - \Delta\Omega_- t) - \cos(x + \Delta\Omega_- t)], \\ \varepsilon_- = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4} \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \frac{1}{\Delta\Omega_-^2}, \quad \Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1 > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

которые создают в сепаратрисном отображении гармонику частоты  $\Delta\Omega_-$  с амплитудой

$$W_- = -\frac{\pi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\cosh(\pi\Delta\Omega_-/2)} \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right]. \quad (6)$$

В настоящей работе мы продолжим изучение обстоятельств образования хаоса в случае двух высоких частот, но рассмотрим возмущение более сложного по сравнению с (2) вида

$$V(x, t) = \varepsilon_1 \cos(m_1 x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(m_2 x - \Omega_2 t), \quad (7)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – произвольные положительные целые числа. Напомним, что именно эти параметры возмущения  $m_1$  и  $m_2$  определяют структуру (в частности, число нулей) интегралов Мельникова-Арнольда. Именно в окрестности этих нулей динамический хаос обнаруживает свои новые свойства, описание которых содержится в разделе 3.

## 2 Амплитуды вторичных гармоник

Рассмотрим гамильтониан маятника (1) с единственной гармоникой возмущения

$$V(x, t) = \varepsilon \cos\left(\frac{n}{2} x - \Omega t\right), \quad (8)$$

и положительными параметрами  $n, \Omega$ . Эта гармоника также является резонансом, на фазовой плоскости она располагается выше основного резонанса маятника и потому ее удобно назвать верхней гармоникой.

Как показал Чириков [1], амплитуда сепаратрисного отображения верхней части хаотического слоя, порожденная верхней гармоникой возмущения (8) связана соотношением

$$W_T(\Omega, n) = \varepsilon \Omega A_n(\Omega), \quad (9)$$

с интегралами Мельникова-Арнольда

$$A_n(\Omega > 0) = \frac{2\pi}{(n-1)!} \frac{\exp(\pi\Omega/2)}{\sinh(\pi\Omega)} (2\Omega)^{n-1} [1 + f_n(\Omega)], \quad (10)$$

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_{n+1} = f_n - (1 + f_{n-1}) \frac{n(n-1)}{4\Omega^2}, \quad n \geq 3. \quad (11)$$

Параметр  $n$  будем называть индексом интеграла Мельникова-Арнольда.

Замена в (8)  $\Omega$  на  $-\Omega$  превращает верхнюю гармонику в нижнюю и при вычислении ее вклада в амплитуду сепаратрисного отображения верхней части слоя надо в формуле (9) использовать существенно иное выражение

$$A_n(\Omega < 0) = (-1)^n A_n(|\Omega|) \exp(-\pi|\Omega|). \quad (12)$$

Следует особо подчеркнуть, что при выводе соотношений (9)-(12) в работе [1] не делалось никаких упрощающих предположений и допущений и они справедливы при любой величине  $\Omega$  из интервала  $0 < |\Omega| < \infty$ . Заметим также, что мы будем иметь дело с интегралами (10) четных индексов  $n$ , поскольку в рассматриваемое нами возмущение (7) входят только целые значения параметров  $m_1$  и  $m_2$ .

Вернемся к соотношению (7) и получим оценки неизвестных заранее амплитуд вторичных гармоник. Следуя работе [11], сделаем в (1),(7) замену переменных, введя вместо координаты  $x(t)$  и импульса  $p(t)$  их отклонения от значений на невозмущенной сепаратрисе  $x_s(t) = 4 \arctan(e^t)$ ,  $p_s(t) = 2 \sin(x_s(t))$ :

$$y(t) = x(t) - x_s(t), \quad u(t) = p(t) - p_s(t), \quad (13)$$

и с помощью производящей функции

$F_2(u, x, t) = [p_s(t) - u][x - x_s(t)]$  построим новый гамильтониан

$$H(y, u, t) = \frac{u^2}{2} + \cos y \cos x_s(t) - \sin y \sin x_s(t) + y \sin x_s(t) + \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k [\cos m_k y \cos(m_k x_s(t) - \Omega_k t) - \sin m_k y \sin(m_k x_s(t) - \Omega_k t)]. \quad (14)$$

Учитывая слабость возмущения, полагаем  $|y(t)| \ll 1$ , производим в (14) замены  $\cos(m y) \rightarrow 1 - (m y)^2/2$ ,  $\sin(m y) \rightarrow m y$  и находим уравнение

$$d^2 y/dt^2 = y \left[ \cos x_s + \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k m_k^2 \cos(m_k x_s - \Omega_k t) \right] + \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k m_k \sin(m_k x_s - \Omega_k t).$$

Обозначим через  $\Delta y_\varepsilon$  разность между левой и правой частями этого уравнения

$$\Delta y_\varepsilon = \frac{d^2 y}{dt^2} - y \left[ \cos x_s + \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k m_k^2 \cos(m_k x_s - \Omega_k t) \right] - \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k m_k \sin(m_k x_s - \Omega_k t). \quad (15)$$

Нас интересует только вынужденное (исчезающее при  $\varepsilon = 0$ ) решение  $y_\varepsilon$ , которое удобно находить последовательными приближениями, стремясь свести  $\Delta y_\varepsilon$  к нулю [11]. После двух приближений имеем

$$y_\varepsilon^{(2)}(t) \approx - \sum_{k=1}^2 \frac{\varepsilon_k m_k}{(m_k p_s - \Omega_k)^2} \sin(m_k x_s - \Omega_k t) - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2}{2} \left\{ \left[ \frac{m_2}{(m_1 p_s - \Omega_1)^2} + \frac{m_1}{(m_2 p_s - \Omega_2)^2} \right] \frac{\sin(m_+ x_s - \Delta \Omega_+ t)}{(m_+ p_s - \Delta \Omega_+)^2} + \left[ \frac{m_1}{(m_2 p_s - \Omega_2)^2} - \frac{m_2}{(m_1 p_s - \Omega_1)^2} \right] \frac{\sin(m_- x_s - \Delta \Omega_- t)}{(m_- p_s - \Delta \Omega_-)^2} \right\} + \dots, \quad (16)$$

где не выписаны второстепенные члены и, по аналогии с (3),(4) для частот, введены обозначения для суммы и разности параметров возмущения  $m_+ = m_1 + m_2$ ,  $m_- = m_2 - m_1$ .

На основании неравенства  $|\Omega_{1,2}| \gg p_{s,max} \approx 2$  и для упрощения дальнейших формул опустим в содержащих эти частоты знаменателях формулы (16) члены  $m p_s$ . Точно так же, но уже без всяких оснований, поступим со знаменателями, содержащими суммы и разности частот, рассчитывая в окончательных зависимостях поправить дело введением эмпирических числовых коэффициентов (см. раздел 3).

Возвращаясь к системе (1),(7), положим в ней  $x = x_s(t) + y_\varepsilon^{(2)}(t)$ . Поскольку движение происходит вблизи невозмущенной сепаратрисы используем замены  $\cos my \rightarrow 1$ ,  $\sin my \approx m y_\varepsilon^{(2)}$  и перепишем выражение для возмущения (7)

$$V(y, t) \approx -y_\varepsilon^{(2)} \left[ \sin x_s + \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k m_k \sin(m_k x_s - \Omega_k t) \right]. \quad (17)$$

Подставив (16) в (17), убеждаемся, что низкочастотные гармоники на сумме и разности частот (только они представляют интерес) могут проникнуть в возмущение двумя путями. Один из них реализуется при взаимодействии суммы в (16) с первичными гармониками в (17). Это приводит к появлению в возмущении гармоник как на сумме частот

$$\varepsilon_+ \cos(m_+ x_s - \Delta\Omega_+ t), \quad \varepsilon_+ = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2}{2} \left[ \frac{m_2}{\Omega_1^2} + \frac{m_1}{\Omega_2^2} \right], \quad (18)$$

так и на их разности

$$\varepsilon_- [\cos(m_- x_s - \Delta\Omega_- t), \quad \varepsilon_- = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2}{2} \left[ \frac{m_2}{\Omega_1^2} - \frac{m_1}{\Omega_2^2} \right]. \quad (19)$$

Второй путь – взаимодействие членов  $\sim \varepsilon_1 \varepsilon_2$  в (16) с  $\sin x_s$  в (17). Здесь возникают по две вторичных гармоники возмущения на сумме частот

$$\frac{\varepsilon_+}{2 \Delta\Omega_+^2} [\cos((m_+ - 1)x_s - \Delta\Omega_+ t) - \cos((m_+ + 1)x_s - \Delta\Omega_+ t)], \quad (20)$$

где значение  $\varepsilon_+$  дается формулой (18), и на разности частот

$$\frac{\varepsilon_-}{2 \Delta\Omega_-^2} [\cos((m_- - 1)x_s - \Delta\Omega_- t) - \cos((m_- + 1)x_s - \Delta\Omega_- t)], \quad (21)$$

где значение  $\varepsilon_-$  дается формулой (19).

Знание амплитуд вторичных гармоник в возмущении позволяет с помощью соотношения (9) записать их приведенные амплитуды  $W^* = W/\varepsilon_1 \varepsilon_2$  в сепаратрисном отображении через интегралы Мельникова-Арнольда (10):

$$W_\pm^* = \frac{W_\pm}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \tilde{\varepsilon}_\pm \left[ \Delta\Omega_\pm A_{2m_\pm}(\Delta\Omega_\pm) \right]$$

$$+ \frac{A_{2m_{\pm}-2}(\Delta\Omega_{\pm}) - A_{2m_{\pm}+2}(\Delta\Omega_{\pm})}{2 \Delta\Omega_{\pm}} \Big], \quad (22)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\pm} = \frac{a_{\pm} m_1 m_2}{2} \left[ \frac{m_2}{\Omega_1^2} \pm \frac{m_1}{\Omega_2^2} \right], \quad (23)$$

где в нижних индексах верхние знаки относятся к сумме частот, нижние к разности и в зависимости (23) введены подгоночные эмпирические коэффициенты  $a_+$  и  $a_-$ . Практика применения формулы (22) показала, что главная роль в ней принадлежит первому члену в квадратных скобках.

В следующем разделе приводятся результаты численной проверки формул (22),(23) и отмечаются некоторые любопытные детали образования хаотической компоненты.

### 3 Сопоставление результатов теории и численного эксперимента

Сепаратрисное отображение, впервые введенное в работе [14], описывает поведение движущейся вблизи сепаратрисы динамической системы и в случае маятника имеет вид

$$\bar{w} = w + \sum_l W_l \sin \Omega_l t_{\pi}, \quad \bar{t}_{\pi} = t_{\pi} + \ln \left( \frac{32}{|\bar{w}|} \right), \quad l = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где  $w = H(x, p, t) - 1$  – относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии и  $t_{\pi}$  – моменты прохождения системой положения устойчивого равновесия  $x = \pi$ . Под знаком суммы должны быть перечислены все существенные для исследуемой части хаотического слоя гармоники, как первичные (явно входящие в возмущение (7)), так и вторичные (которых в (7) нет).

При несоизмеримых частотах  $\Omega_l$  моменты  $t_{\pi}$  отсчитываются в шкале непрерывного времени. Если же частоты кратны некоторой опорной частоте  $\Omega_0$ , то последнее соотношение в (24) можно (но не обязательно) переписать в виде

$$\bar{\psi}_{\pi} = \psi_{\pi} + \Omega_0 \ln \left( \frac{32}{|\bar{w}|} \right), \quad \psi_{\pi} = \Omega_0 t_{\pi} \pmod{2\pi}. \quad (25)$$

Итерации сепаратрисного отображения являются, как известно, самым быстрым способом определения размеров отдельных частей хаотического слоя и это оправдывает усилия, направленные на его построение.

Нам предстоит сравнить между собой величины теоретически и численно найденных амплитуд сепаратрисного отображения и уместно кратко напомнить алгоритм численного построения этого отображения (подробности в [11]).

Прежде всего, на линии симметрии  $x = \pi$  с высокой точностью отыскивается центральная гомоклиническая точка  $p_{fb}$  как граница между вращением и колебанием фазы. Вблизи этой точки гарантированно в исследуемой части слоя выбирается узкий по импульсу интервал  $x = \pi$ ,  $p_{fb} < p < p_{fb} + \delta p$ , из которого запускается случайная траектория. Эта траектория либо совершает предписанное число периодов движения, либо прерывается из-за перехода в другую часть слоя. В обоих случаях из того же интервала запускается новая случайная траектория, пока не наберется требуемое число периодов  $N$ . Для каждого периода определяется отклонение от сепаратрисы по энергии

$$w = 32 \exp(-T), \quad (26)$$

где  $T$  – интервал времени между двумя последовательными прохождениями положения устойчивого равновесия  $x = \pi$ . Определяя изменение  $\delta w = \bar{w} - w$  энергии для каждой пары соседних периодов и приписывая его к общему для этой пары моменту времени  $t_\pi$  можно построить сепаратрисное отображение (24)  $(\delta w)_k, t_{\pi,k}, k = 1, 2, \dots, N - 1$ . Мы будем для определенности всегда исследовать верхнюю часть слоя. Именно внешние части (верхняя и нижняя) представляют основной интерес, поскольку участвуют в перекрытии соседних резонансов и возникновении глобального хаоса.

В настоящей работе рассматривается возмущение (7) с фиксированными параметрами

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 3 \quad (27)$$

при различных значениях первичных частот  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Заметим, что вклад в амплитуды сепаратрисного отображения первичных гармоник определяется, согласно (9), интегралами Мельникова-Арнольда с индексами  $n_1 = 2m_1 = 2$  и  $n_2 = 2m_2 = 6$  соответственно, в то время как для вторичных гармоник эти индексы равны на разности частот  $n_- = 2(m_2 - m_1) = 4$  и на их сумме  $n_+ = 2(m_1 + m_2) = 8$ .

По-видимому, самым главным и важным результатом в исследовании возмущения общего вида (7) явилось подтверждение того установленного в [11,12] факта, что существуют достаточно широкие области параметров, где именно вторичным гармоникам принадлежит решающий

вклад в образование хаоса. Рассмотрим систему (1),(7),(27) с частотами  $\Omega_1 = 15, \Omega_2 = -12$ . Они соизмеримы и в качестве опорной частоты в (25) можно принять  $\Omega_0 = 3.0$ . Построение сепаратрисного отображения по описанному выше алгоритму позволяет найти амплитуды этих частот в сепаратрисном отображении для верхней части слоя:

$$W(3) \approx 1.35 \cdot 10^{-4}, \quad W(15) \approx 2.09 \cdot 10^{-7}, \quad W(-12) \approx 6.18 \cdot 10^{-7}. \quad (28)$$

В рассмотренном случае вклад вторичной гармоники на сумме частот  $\Delta\Omega_+ = 3$  существенно (на порядки) превышает вклады от первичных гармоник и само отображение верхней части слоя можно с высокой точностью считать одночастотным, но с низкой частотой  $\Omega = 3$ . Возникает впечатление, что две слабые первичные гармоники возмущения породили в сепаратрисном отображении мощную вторичную гармонику и на этом их участие в формировании хаоса закончилось.

Из формул (10),(11) следует, что начиная с  $n = 3$  и выше интегралы (10) вместе с множителем в квадратных скобках, проходят через нуль со сменой знака.  $A_2$  вообще не имеет нулей,  $A_4$  имеет единственный нуль в точке  $\Omega_1^{(4)} = \sqrt{2}$ ,  $A_6$  - два нуля в точках  $\Omega_1^{(6)} \approx 1.1514\dots, \Omega_2^{(6)} \approx 2.9452\dots$ ,  $A_8$  - три нуля в точках  $\Omega_1^{(8)} \approx 1.0248\dots, \Omega_2^{(8)} \approx 2.4495\dots$  и  $\Omega_3^{(8)} \approx 4.5771\dots$  и т.д.. Удобно, как и в отношении гармоник возмущения, различать первичные и вторичные интегралы (10). Отметим, что в нашем случае все четыре (два первичных и два вторичных) интеграла отличаются друг от друга количеством нулей.

В качестве примера на рис.1 показано поведение первичного интеграла  $A_2(\Omega)$  и вторичного  $A_8(\Omega)$ , а также найденных по (9) соответствующих им приведенных амплитуд  $W_T^* = W/\varepsilon$  сепаратрисных отображений (все величины отложены по модулю). Этот рисунок, в частности, иллюстрирует упоминавшиеся выше теоретические асимптотические зависимости  $W_T^*(\Omega)$  - линейный рост при  $\Omega \ll 1$  и экспоненциальный спад при  $\Omega \gg 1$ .

Если за понятием вторичного интеграла на сумме частот  $A_8(\Omega_+)$  стоит какая-то реальность, то в зависимости амплитуды сепаратрисного отображения  $W^*(\Delta\Omega_+)$  от частоты должны проявиться характерные только для этого интеграла три нуля. Так оно и оказывается на самом деле. На рис.2 рассмотрен случай  $\Omega_1 = 14.0, \Omega_2 = var$ , где теория по формулам (22),(23) представлена сплошной линией, а найденные экспериментально с помощью сепаратрисного отображения (24) величины изображены кружками. Видно, что обе зависимости трижды проходят через нуль практически там, где и должно быть. Значение подгоночного параметра при этом оказалось равно  $a_+ \approx 0.25$ , хотя природа его неясна.

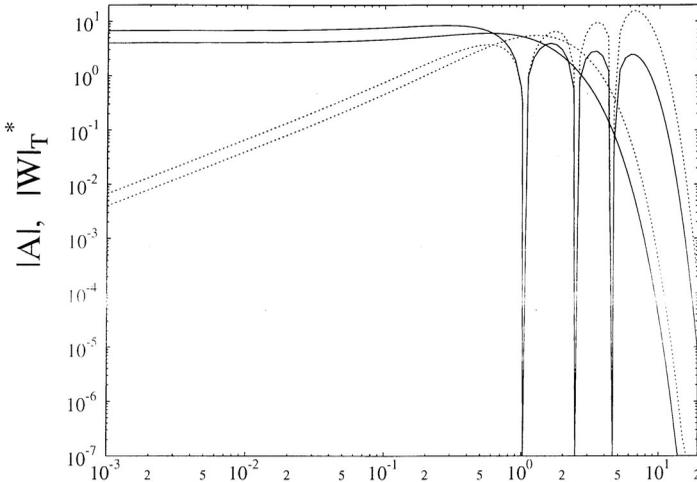


Рис. 1: Модули интегралов Мельникова-Арнольда  $A_2, A_8$  (сплошные линии) и отвечающие им по формуле (9) приведенные теоретические амплитуды  $W_T^* = W_T/\varepsilon$  (пунктир).

Именно в окрестности нулей интегралов Мельникова-Арнольда в поведении вторичных гармоник сепаратрисного отображения обнаружилось серьезное отличие от исследованного в работе [7] случая симметричного возмущения. В [7] было найдено, что во всей области средних частот сепаратрисное отображение содержит две гармоники – одинарную и двойную (ее дает вторичная гармоника на разности частот). В нулях интегралов (10) одинарная гармоника проходит через нуль со сменой знака, но амплитуда отображения остается конечной из-за присутствия двойной частоты. В [10] получены формулы резонансных инвариантов двойной частоты специально для исследования окрестностей нулей этих интегралов.

При несимметричном возмущении двойная частота отсутствует и амплитуда сепаратрисного отображения верхней части хаотического слоя в нуле интеграла (10) реально оказывается малой, что определяет и малый размер этой части слоя. Например, при частотах  $\Omega_1 = 14.0$  и  $\Omega_2 = -12.9752$  (величина  $\Delta\Omega_+ = 1.0248$  весьма близка к первому нулю вторичного интеграла  $A_8(\Omega)$ ) измерения энергетических размеров

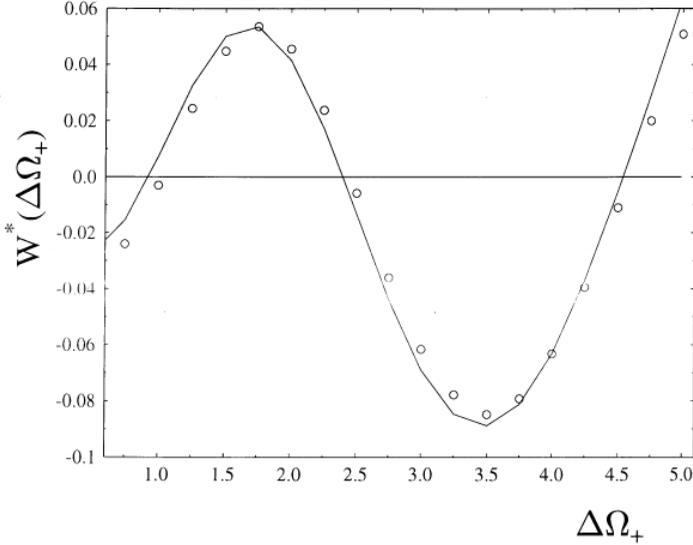


Рис. 2: Приведенная амплитуда вторичной гармоники на сумме первичных частот сепаратрисного отображения при  $\Omega_1 = 14.0$ ,  $\Omega_2 = var$ . Сплошная линия построена по формулам (22),(23) при значении подгочного коэффициента  $a_+ \approx 0.25$ , кружки - данные численного счета отображения (24).

отдельных частей слоя по минимальному периоду движения (формула (26)) дали следующий результат

$$w_{tp} \approx 9.72 \cdot 10^{-7}, \quad w_{md} \approx 2.51 \cdot 10^{-2}, \quad w_{bt} \approx 1.66 \cdot 10^{-2}, \quad (28)$$

где  $w_{tp}$ ,  $w_{md}$ ,  $w_{bt}$  – размеры верхней, средней и нижней частей слоя соответственно. Верхняя часть (на которую "настроена" вторичная гармоника) оказалась существенно слабее остальных частей. Отметим, что пример сознательного использования вторичных гармоник для ослабления хаоса приведен в работе [12].

Вторичную гармонику на разности частот в сепаратрисном отображении представляет интеграл  $A_4(\Delta\Omega_-)$  с единственным нулем  $\Omega_1^{(4)} = \sqrt{2}$ . На рис.3 для случая  $\Omega_1 = 13.0$ ,  $\Omega_2 = var$  дано сравнение теории (22),(23) (сплошная линия) с численным экспериментом (кружки). Соответствие здесь оказывается хуже, чем в предыдущем случае, но качественное по-

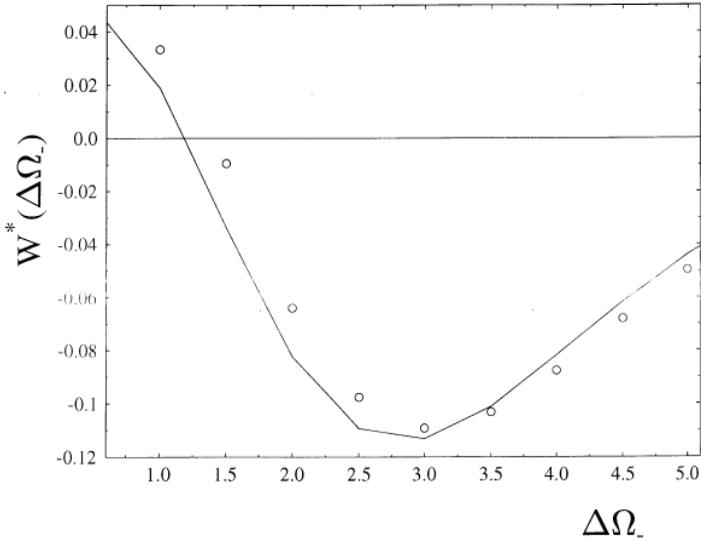


Рис. 3: То же, что на рис.2, но для разности первичных частот при  $\Omega_1 = 13.0$ ,  $\Omega_2 = var$  и значении подгоночного коэффициента  $a_- \approx 0.57$ .

ведение теоретической и экспериментальной зависимостей согласуется. Значение подгоночного параметра  $a_- \approx 0.57$ .

## 4 Вместо заключения

Приведенные выше факты (см. также работы [11,12]) заставляют признать, что вторичные гармоники на сумме и разности первичных (явно входящих в гамильтониан системы) частот - реальные объекты, при определенных условиях весьма активно участвующие в формировании хаотического слоя. Построение полноценной теории динамического хаоса в гамильтоновых системах требует, по нашему мнению, дальнейшего детального экспериментального и теоретического их исследования.

Работа частично поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант 01-02-16836) и комплексной научной программой РАН "Математические методы в нелинейной динамике".

## Список литературы

- [1] B.V. Chirikov, Phys.Reports **52**, 263 (1979).
- [2] A. Lichtenberg and M. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer (1992).
- [3] Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
- [4] S. Bullett, Commun. Math. Phys. **107**, 241 (1986).
- [5] В.В. Вечеславов, *Динамика пилообразного отображения: 1. Новые численные результаты*. Препринт ИЯФ 2000-27, Новосибирск, 2000; E-print archive nlin.CD/0005048.
- [6] В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков, ЖЭТФ, **120**, 740 (2001).
- [7] В.В. Вечеславов, *Хаотический слой маятника при низких и средних частотах возмущений*. Препринт ИЯФ 2003-11, Новосибирск. 2003.
- [8] В.В. Вечеславов, ЖТФ **58** вып.1, 20 (1988).
- [9] В.В. Вечеславов, ЖТФ **72** вып.2, 20 (2002).
- [10] В.В. Вечеславов, *Структура хаотического слоя маятника*. Препринт ИЯФ 2003-42, Новосибирск, 2003; ЖЭТФ, в печати, **125**, вып.1 (2004).
- [11] В.В. Вечеславов, ЖЭТФ, **109**, 2208 (1996).
- [12] В.В. Вечеславов, ПЖЭТФ, **63**, вып.12, 989 (1996).
- [13] В.В. Вечеславов, ЖТФ **73** вып.9, 1 (2003).
- [14] Г.М. Заславский, Н.Н. Филоненко, ЖЭТФ **54**, 1590 (1965).

*V.V. Vecheslavov*

**Хаос в динамике маятника  
при несимметричном возмущении**

*V.V. Vecheslavov*

**Chaos in the pendulum dynamics  
under nonsymmetric perturbation**

ИЯФ 2003-75

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев  
Работа поступила 24.10.2003 г.

---

Сдано в набор 30.10.2003 г.

Подписано в печать 31.10.2003 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.0 печ.л., 0.8 уч.-изд.л.

Тираж 85 экз. Бесплатно. Заказ № 75

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН  
*Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*