НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И.Будкера СО РАН

В.В. Вечеславов

ХАОТИЧЕСКИЙ СЛОЙ МАЯТНИКА ПРИ НИЗКИХ И СРЕДНИХ ЧАСТОТАХ ВОЗМУЩЕНИЙ

ИЯФ 2003-11

НОВОСИБИРСК
2003

Хаотический слой маятника при низких и средних частотах возмущений

В.В. Вечеславов[1]
Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090 Новосибирск, СО РАН

Аннотация

Численно и аналитически исследована зависимость амплитуды сепаратрисного отображения и размера хаотического слоя маятника от параметра адиабатичности при низких и средних частотах возмущений. Установлено хорошее соответствие между теорией и численным экспериментом в низкочастотном пределе. Отмечена высокая эффективность использования резонансных инвариантов сепаратрисного отображения в области средних частот. Вместе с уже известной высокочастотной асимптотикой это позволило построить полную картину хаотического слоя во всем диапазоне частот возмущений.

PACS 05.45.+b

[1]Email: vecheslavov@inp.nsk.su

1. Взаимодействие нелинейных резонансов и образование динамического хаоса в гамильтоновых системах остается одной из сложных и все еще далеких от полного решения проблем. Во многих случаях задача может быть сведена к исследованию маятника (основной резонанс, вблизи которого выбираются начальные условия), подверженного действию квазипериодического возмущения

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2\,\cos(x) + V(x,t)\,, \tag{1}$$

$$V(x,t) = \varepsilon_1\,\cos(a_1\,x - \Omega_1\,t) + \varepsilon_2\,\cos(a_2\,x - \Omega_2\,t)\,, \tag{2}$$

где амплитуды гармоник $\varepsilon_1\,,\varepsilon_2 \ll 1$ считаются малыми. Заметим, что каждая гармоника также является резонансом и может играть роль основного в "своей"области фазового пространства.

Система (1),(2) изучалась во многих работах (см., например,[1,2,3], причем чаще всего главным объектом рассмотрения оказывалась ситуация в окрестности сепаратрис основного резонанса. Мы планируем поступить так же и уместно напомнить, как устроены сепаратрисы [1]. Прежде всего, имеется седло - неподвижная точка, которую следует рассматривать как самостоятельную траекторию (невозмущенный маятник может находиться в ней бесконечно долго). От седла в противоположных направлениях отходят и затем асимптотически к нему же приближаются еще две траектории (сепаратрисы), каждая из которых является пограничной между вращением фазы (вне резонанса) и ее колебанием (внутри резонанса). На фазовой плоскости в окрестности седла образуется характерный крест с двумя приходящими и двумя уходящими траекториями (см. рис.2.1 в [1]). Важно отметить, что на самом деле обе невозмущенные сепаратрисы состоят из двух пространственно совпадающих траекторий для направлений времени вперед и назад соответственно.

В случае аналитического потенциала (что имеет место в (1)) наличие возмущающих резонансов (хотя бы одного!) всегда расщепляет каждую сепаратрису на две ветви ("усы"по образной терминологии Арнольда), которые уже не возвращаются в седло и не совпадают друг с другом, но пересекаются в так называемых гомоклинных точках [2]. Свободные концы этих ветвей образуют бесконечное число петель неограниченно возрастающей длины, которые заполняют узкую область вблизи невозмущенных сепаратрис, образуя хаотический слой. В этом слое необходимо различать три части: верхнюю (фаза x вращается сверху $p > 0$), среднюю (фаза колеблется) и нижнюю (фаза x вращается снизу $p < 0$). Определение фактических размеров этих частей слоя, которые при несимметричном возмущении (2) могут быть существенно различными, является важной для практики задачей.

Формирование основного хаотического слоя для случая симметричного высокочастотного возмущения

$$V(x,t) = \varepsilon\, \cos\left(\frac{m}{2}\, x - \Omega\, t\right) + \varepsilon\, \cos\left(\frac{m}{2}\, x + \Omega\, t\right), \tag{3}$$

$\Omega \gg \omega_0$ и m - целое число, наиболее полно исследовано Чириковым [1]. Используя свойства стандартного отображения и свой критерий перекрытия резонансов он показал, что в этом высокочастотном пределе все три части слоя имеют одинаковый размер

$$w_{tp} = |w_{md}| = w_{bt} = \lambda\, W\,, \qquad \lambda \to \infty\,, \tag{4}$$

где $\lambda = \Omega/\omega_0$ есть так называемый параметр адиабатичности и $w = H(x,p,t)/\omega_0^2 - 1$ - относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по знергии.

[2]Для систем с гладким потенциалом такое расщепление происходит не всегда. Поразительные факты сохранения сепаратрис целых и дробных резонансов несмотря на наличие возмущения и сильного локального хаоса в кусочно-линейных системах приведены и обсуждаются в работах [4-6].

Входящая в (4) величина W является амплитудой гармоники сепаратрисного отображения системы (1),(3) частоты Ω. Это отображение, впервые введенное в работе [7], приближенно описывает динамику системы вблизи сепаратрисы в моменты прохождения ею состояния устойчивого равновесия (см. также [1]).

Теоретическое значение $W = W_T$ связано соотношением

$$W_T(\lambda) = \varepsilon\,\lambda\,A_m(\lambda) \tag{5}$$

с введенными в [1] интегралами Мельникова-Арнольда $A_m(\lambda)$. В настоящей работе эти интегралы также используются и для удобства читателя ниже приводятся взятые из [1] определения:

$$A_m(\lambda > 0) = \frac{2\,\pi}{(m-1)!}\,\frac{e^{\pi\,\lambda/2}}{\sinh\left(\pi\,\lambda\right)}(2\,\lambda)^{m-1}\left[1 + f_m(\lambda)\right], \tag{6}$$

$$A_m(\lambda < 0) = (-1)^m\,A_m(|\lambda|)\,e^{-\pi\,|\lambda|}\,, \tag{7}$$

$$f_1 = f_2 = 0\,, \quad f_{m+1} = f_m - (1 + f_{m-1})\frac{m\,(m-1)}{4\,\lambda^2}\,, \quad m \geq 3\,. \tag{8}$$

Важно подчеркнуть, что при выводе выражений (6)-(8) в [1] не делалось никаких упрощаюших предположений и допущений и они оказываются справедливы при любой величине λ из интервала $0 < \lambda < \infty$.

Картина резко и качественно меняется, когда возмущение, оставаясь высокочастотным, становится несимметричным $\Omega_1 \neq \Omega_2$. Первые же численные эксперименты [8,9] показали, что в спектре сепаратрисного отображения этой системы помимо явно входящих в возмущение (2) частот $\Omega_1\,,\Omega_2$ присутствуют также комбинационные гармоники $\sim \varepsilon_1\,\varepsilon_2$ на их сумме $\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2$ и разности $\Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1$. Еще более удивительным оказался тот факт, что при определенных условиях именно эти гармоники полностью определяют размер хаотического слоя. В [9] приведен пример, когда вклад вторичной гармоники $\Delta\Omega_+ = 3$ в амплитуду сепаратрисного отображения в несколько сотен раз превысил вклады от первичных гармоник. Возникающее при этом впечатление о том, что слабые первичные гармоники породили мощную вторичную гармонику и на этом их роль в образовании хаоса закончилась получило в [9] полное численное подтверждение.

2. В настоящей работе продолжено изучение основного хаотического слоя системы (1) с симметричным возмущением (3) при фиксированных значениях частоты малых колебаний $\omega_0 = 1.0$ и возмущения $\varepsilon = 0.01$ (использование других значений этих величин будет специально оговорено). К уже исследованному случаю высокой частоты добавлены средние и низкие частоты, что позволяет получить представление о характеристиках слоя во всем интервале $0 < \lambda < \infty$.

Известны два основных численных способа отыскания размеров хаотического слоя. В первом из них при длительном счете фиксируется минимальный период движения в исследуемой части слоя $T_{0,\min}$ (T_0 – время между двумя последовательными пересечениями устойчивой фазы $x = \pi$). Размер этой части находится затем по формуле [1]

$$w = 32 \exp(-\omega_0 \, T)\,, \tag{9}$$

где в качестве T используется $T_{0,\min}$.

Второй способ предполагает построение сепаратрисного отображения системы

$$\overline{w} \;=\; w + W\,\sin\psi\,, \quad \overline{\psi} = \psi + \lambda\,\ln\left(\frac{32}{|\overline{w}|}\right)\,, \quad \psi = \Omega\, T_0 \bmod(2\,\pi) \tag{10}$$

и его итерации.

Кратко напомним алгоритм построения этого отображения (подробности в [8]). Прежде всего, на линии симметрии $x = \pi$ с высокой точностью отыскивается центральная гомоклинная точка p_{fb} как граница между вращением и колебанием фазы. Вблизи этой точки в исследуемой части слоя выбирается узкий интервал $x = \pi\,,\, p_{fb} + \delta p$, из которого запускается случайная траектория. Эта траектория либо совершает предписанное число периодов движения, либо прерывается из-за перехода в другую часть слоя. В обоих случаях из того же интервала запускается новая случайная траектория, пока не набирается требуемое число периодов N. Для каждого периода по формуле (9) вычисляется средняя энергия w. Определяя изменение $\delta\, w = \overline{w} - w$ энергии для каждой пары соседних периодов и приписывая его к общему для этой пары моменту времени T_0 можно построить сепаратрисное отображение (10) $(\delta\, w)_k$, $T_{0,k}$, $k = 1, 2, ..N - 1$. Мы будем для определенности всегда исследовать верхнюю часть слоя, размер которой для симметричного возмущения точно равен размеру нижней части $w_{tp} = w_{bt}$. Именно эти внешние части представляют основной интерес, поскольку участвуют в перекрытии соседних резонансов и развитии глобального хаоса. Забегая вперед, заметим, что отображение (10) может содержать не одну, а несколько гармоник (см. раздел 3).

Численные результаты для амплитуды сепаратрисного отображения W_E надо сравнить с теоретическими величинам W_T, вычисленными через интегралы Мельникова-Арнольда по формуле

$$W_T(\lambda) = \varepsilon\, \lambda\, S_m(\lambda)\,, \tag{11}$$

где сумма

$$S_m(\lambda) = A_m(|\lambda|)\,(1 + (-1)^m\, e^{-\pi\,|\lambda|})\,, \tag{12}$$

учитывает влияние обеих гармоник симметричного возмущения. Из выражений (6),(8) следует, что при значениях $m \geq 3$ эти интегралы одновременно с множителем в квадратных скобках проходят через нуль при определенных значениях $\lambda = \lambda_0$. Мы используем интегралы A_2 и A_4; первый из них не имеет нуля, а второй имеет его в точке $\lambda_0 = \sqrt{2}$.

3. На рис.1 дано сравнение найденных численно $W_E^* = |W_E|/\varepsilon$ и по формуле (11) $W_T^* = |W_T|/\varepsilon$ нормированных значений амплитуд сепаратрисных отображений верхней части хаотического слоя для симметричного возмущения (3) в зависимости от параметра адиабатичности при двух значениях коэффициента $m = 2$ и $m = 4$. Видно, что теоретическая зависимость W_T^* неплохо описывает не только высокочастотную часть $\lambda \gtrsim 5$, о чем уже говорилось выше, но и область низких частот $\lambda \lesssim 0.1$, где амплитуда оказывается пропорциональна параметру адиабатичности $W_T \sim \lambda$.

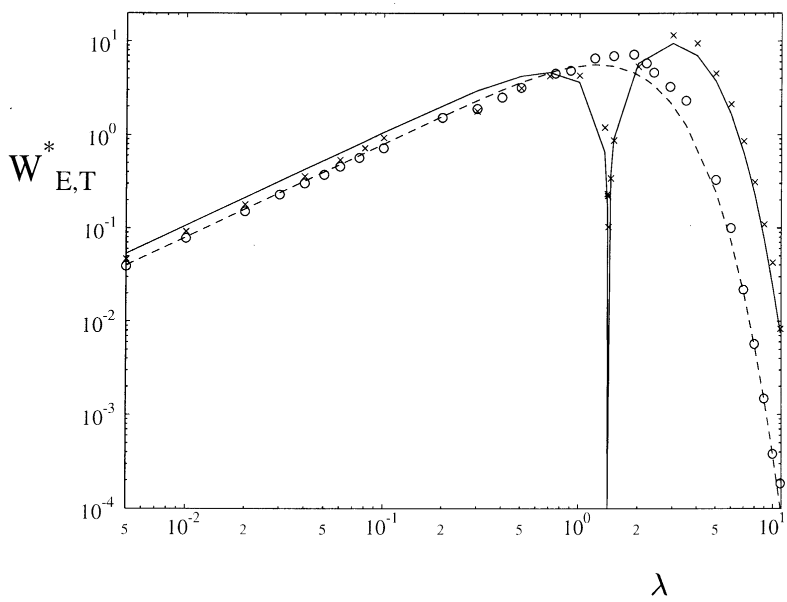

Рис. 1: Симметричная система (1), (3). Зависимости численных W_E^* (значки) и найденных по формуле (11) W_T^* (линии) нормированных амплитуд сепаратрисных отображений от параметра адиабатичности λ. Кружки и пунктирная линия - $m = 2$, кресты и сплошная линия - $m = 4$.

Это согласуется с теорией, поскольку входящая в (12) сумма интегралов в низкочастотном пределе $\lambda \to 0$ стремится к не зависящей от λ постоянной $S_m(\lambda) \to s_m = \mathrm{const}$

$$s_1 = 2\,\pi, \quad s_2 = 8, \quad s_3 = 2\,\pi, \quad s_4 = 32/3, \quad s_5 = 2\,\pi... \tag{13}$$

и амплитуда (11), приближается к величине $W_T \to \varepsilon\, s_m\, \lambda$. Отображение (10) принимает вид

$$\overline{w} \;=\; w + c\,\lambda\,\sin\psi\,, \quad \overline{\psi} = \psi + \lambda\,\ln\left(\frac{32}{|\overline{w}|}\right),$$

где $c = \varepsilon\, s_m = \mathrm{const}$. При $\lambda \ll 1$ разностные уравнения можно заменить дифференциальными [1]

$$\frac{dw}{dt} = \frac{c\,\lambda\,\sin\psi}{T_s}\,, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\lambda\,\ln\left(32/|\overline{w}|\right)}{T_s}\,,$$

здесь T_s – период отображения. Отсюда находим

$$\frac{dw}{d\psi} = \frac{c\,\sin\psi}{\ln\left(32/|\overline{w}|\right)}$$

и убеждаемся, что в зависимости $w(\psi)$ параметр адиабатичности λ отсутствует. Так будет, если принять, что размер слоя w_{tp} и амплитуда сепаратрисного отображения W при низкой частоте возмущения связаны соотношением

$$w_{tp} \approx b\,\frac{W}{\lambda} \approx 0.22\,s_m = \mathrm{const}\,, \quad \lambda \to 0\,, \tag{14}$$

где s_m есть предел (13) и введен эмпирический множитель $b \approx 0.22$. Зависимость (14) хорошо подтверждается в численном эксперименте (отрезки горизонтальных прямых на рис.3).

Таким образом, в низкочастотном пределе размер хаотического слоя вообще не зависит от частоты, что кардинально отличается от высокочастотного случая, где эта зависимость (5),(6) экспоненциальная. Выше отмечалась активная, иногда решающая роль в образовании хаоса вторичных гармоник возмущения, возникающих на комбинациях высоких частот первичных гармоник. В основе этого эффекта лежит именно экспоненциальная зависимость, которая позволяет даже очень слабым, но низкочастотным гармоникам определять формирование слоя. В низкочастотном пределе вторичные гармоники становятся малыми поправками порядка $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ и их роль исчезающе мала.

4. Наиболее интересные динамические эффекты имеют место в области средних частот $0.1 \gtrsim \lambda \lesssim 5$, которая плохо поддается теоретическому описанию. Особенно это заметно в окрестности нуля интеграла $A_4(\lambda_0) = 0$, $\lambda_0 = \sqrt{2}$ (на него указывает вертикальная линия на рис.1), где $W_T = 0$, в то время как эксперементальная величина

$W_E^* \approx 0.103$ оказывается конечной. По этой причине обсуждаемые ниже факты получены в основном численно и связанные с ними динамические механизмы чаще всего остаются пока невыясненными. Однако, знание этих фактов может помочь в создании будущей теории хаотического слоя при средней частоте возмущения.

Спектральный анализ показал, что сепаратрисное отображение системы (1), (3) в этой области является существенно двухчастотным: кроме гармоники основной частоты Ω оно содержит также гармонику двойной частоты $2\,\Omega$. Более того, для случая $m = 4$ амплитуда основной частоты $W(\Omega)$ вообще исчезает при $\lambda = \lambda_1 \approx 1.4175... > \lambda_0$ и затем меняет знак. При изменении величины возмущения ε изменяется также и величина λ_1. По мере отхода от значения λ_1 в любую сторону влияние двойной частоты слабеет и спадает практически до нуля на подходе к границам обеих асиптотических областей. Механизм появления двойной частоты непонятен.

Как известно, ценную информацию о поведении ветвей сепаратрис целых и дробных резонансов дает измерение угла пересечения этих ветвей в центральной гомоклинной точке (см. раздел 1). Этот угол является одним из немногих атрибутов хаоса, который может быть измерен сколь угодно точно (подробности в [10]) и его отличие от нуля является надежным свидетельством расщепления сепаратрис. Ниже будет показано, что обратное утверждение неверно.

В обсуждаемой области средних частот при возмущении (3) с коэффициентом $m = 2$ угол пересечения ветвей сепаратрис сохраняет знак. При $m = 4$ он проходит через нуль в точке $\lambda = \lambda_2 = 1.3986685... < \lambda_0$ и затем меняет знак. Изменение величины возмущения ε изменяет также величину λ_2.

При исследовании гладких кусочно-линейных отображений равенство этого угла нулю на практике всегда означало сохранение сепаратрисы и отсутствие хаотического слоя (см., например, [5]), что подтверждалось численными экспериментами. Однако, построение фазового портрета системы (1), (3) при $\lambda = \lambda_2$ показало, что сепаратриса основного резонанса разрушена и ее место занял мощный хаотический слой. Для прояснения ситуации потребовалось изучить характер пересечения ветвей сепаратрис в этом случае более подробно.

Обозначим через $P_f^* = p_f/p_{s,0} - 1$ относительное отклонение ветви сепаратрисы от ее невозмущенного значения $p_{s,0} = 2\,\omega_0\,\sin(x_s/2)$ [1] для направления времени вперед и введем аналогичное обозначение P_b^* для направления времени назад. На рис.2 приведена картинка пересекающихся ветвей верхней сепаратрисы при $\lambda = \lambda_2 = 1.3986685...$ в окрестности центральной гомоклинной точ-

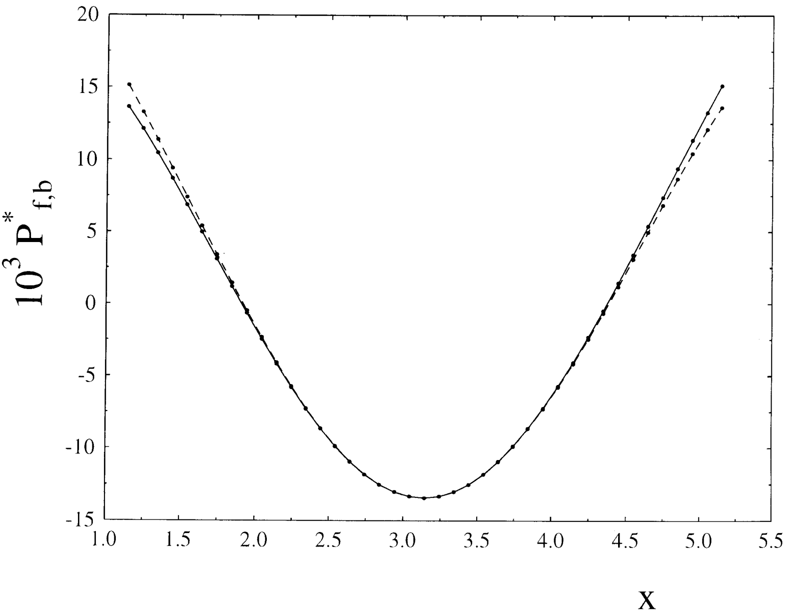

Рис. 2: Система (1),(3) с $m = 4$. Пересечение ветвей сепаратрисы основного резонанса при $\lambda = 1.3986685...$; относительные значения импульсов P_f^* - сплошная кривая и P_b^* - пунктир (см. текст).

ки $x = \pi$, которая оказывается точкой перегиба: угол пересечения ветвей и угол наклона касательной проходят через нуль одновременно после чего ветви отделяются друг от друга. Этот пример показывает, что обращение угла пересечения ветвей сепаратрисы в центральной (а, следовательно, и в любой другой гомоклинной) точке в нуль не является гарантией сохранения сепаратрисы; это опровергает содержащееся в работе [5] противоположное утверждение.

Для выявления других динамических эффектов необходимо выяснить, как зависит от частоты возмущения размер хаотического слоя.

5. На рис.3 показаны найденные численно по минимальному периоду движения (9) нормированные размеры $W_{tp}^* = w_{tp}/\varepsilon$ верхней части основного хаотического слоя (каждая точка просчитывалась на протяжении $5 \cdot 10^6$ периодов движения).

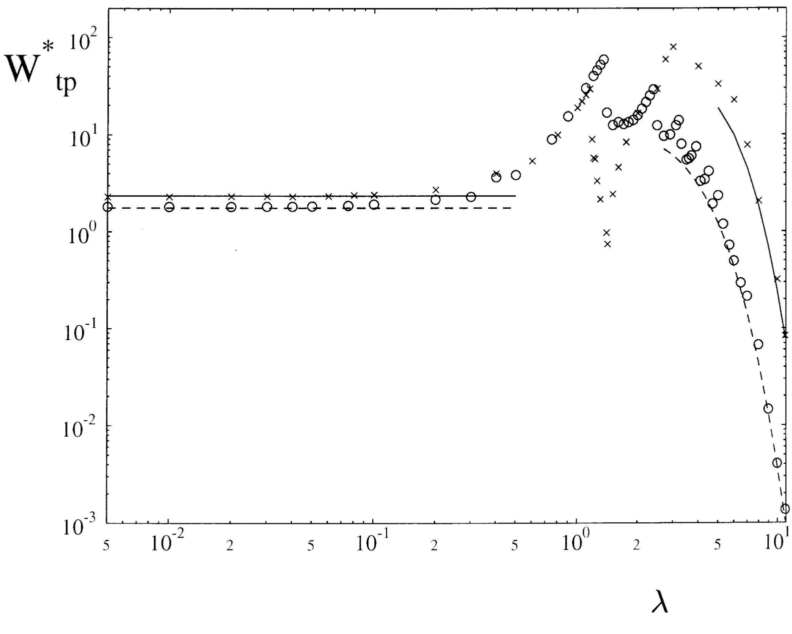

Рис. 3: Построенная численно зависимость нормированного размера верхней части хаотического слоя W_{tp}^* от параметра адиабатичности λ; пунктиреые линии и кружки - $m = 2$, сплошные линии и кресты - $m = 4$.

Отрезки прямых горизонтальных линий в левой половине рисунка вычислены по формуле (14) и соответствуют асимптотическим значениям для низкочастотного предела $\lambda \to 0$. Кривые в правой части рисунка, построенные по формулам (4),(5), дают представление о соответствии теории и эксперимента при высокой частоте возмущения. На этом возможности строгой теории кончаются и для анализа средних частот приходится прибегать к приближенным и численным методам.

Характерной чертой зависимости размера слоя w^*_{tp} от параметра (λ), сильно затрудняющей развитие теории в этой области частот, является ее разрывность (хотя амплитуда сепаратрисного отображения изменяется плавно, см. рис.1). Некоторые разрывы хорошо видны на рис.3 (случай $m = 2$), другие для своего обнаружения требуют увеличения масштаба. Такая структура оказывается вполне естественной и объясняется в рамках современной динамики следующим образом. По мере уменьшения величины параметра λ происходит последовательное разрушение инвариантных кривых с иррациональными числами вращения и образование на их месте так называемых "кантор-торов"[11]. Если такая кривая является границей между основным хаотическим слоем и ближайшим к нему резонансом сепаратрисного отображения, то при ее разрушении происходит слияние этих объектов и размер слоя прирастает скачком на конечную величину - фазовый объем присоединившегося резонанса. В [1] отмечалось, что максимальная величина скачка возникает при объединении слоя с целым резонансом. Основная трудность здесь связана с необходимостью построения картины взаимного расположения резонансов вблизи края хаотического слоя и определения момента их перекрытия.

Удобным средством решения этой проблемы являются, на наш взгляд, так называемые резонансные инварианты. Для сепаратрисного отображения инварианты первых трех порядков (резонансы 1:1, 1:2 и 1:3 соответственно) предложены недавно в работах [12,13], где в комбинации с известным критерием перекрытия резонансов они используются для исследования динамики хаотического слоя и отыскания величин скачков как раз в области средних частот при $\lambda = 3$. В этих работах обсуждаются также некоторые технические детали и демонстрируется хорошее соответствие картинок взаимного расположения резонансов, полученных по линиям уровня инвариантов и с помощью прямого счета траекторий.

Проведенное здесь рассмотрение позволяет составить достаточно полное представление о хаотическом слое маятника во всем диапазоне частот возмущений.

Автор благодарен Б.В.Чирикову за обсуждения и советы.
Работа частично поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант 01-02-16836) и комплексной научной программой РАН "Математические методы в нелинейной динамике".

Список литературы

[1] *B.V.Chirikov.* Phys.Reports **52**, 263 (1979).

[2] *A. Lichtenberg and M. Lieberman.* Regular and Chaotic Dynamics, Springer (1992).

[3] *Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев.* Введение в нелинейную физику, Наука, Москва (1988).

[4] *S.Bullett.* Commun. Math. Phys., **107**, 241 (1986).

[5] *В.В.Вечеславов.* Динамика пилообразного отображения: 1. Новые численные результаты. Препринт ИЯФ 2000-27, Новосибирск, 2000; E-print archive nlin.CD/0005048.

[6] *В.В.Вечеславов, Б.В.Чириков.* ЖЭТФ, **120**, 740 (2001).

[7] *Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко.* ЖЭТФ, **54**, 1590 (1965).

[8] *В.В.Вечеславов* ЖЭТФ, **109**, 2208 (1996).

[9] *В.В.Вечеславов.* Письма в ЖЭТФ, **63** , 989 (1996).

[10] *В.В.Вечеславов, Б.В.Чириков.* ЖЭТФ, **114**, 1516 (1997).

[11] *R.S. MacKay, J.D. Meiss, I.C. Percival.* Physica D, **13**, 55 (1984).

[12] *V.V.Vecheslavov.* Physica D, **131**, 55 (1999).

[13] *В.В.Вечеславов.* ЖТФ, **72**, 20 (2002).

В.В. Вечеславов

**Хаотический слой маятника
при низких и средних частотах возмущений**

V.V. Vecheslavov

**Chaotic layer of pendulum
at the low and medium frequency perturbations**

ИЯФ 2003-11

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев
Работа поступила 14.02.2003 г.

Сдано в набор 18.02.2003 г.
Подписано в печать 19.02.2003 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.1 печ.л., 0.9 уч.-изд.л.
Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 11

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.