

Сибирское отделение Российской Академии наук
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им.Г.И. Будкера

В.В. Вечеславов

НЕОБЫЧНАЯ ДИНАМИКА
ПИЛООБРАЗНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

ИЯФ 99-69

НОВОСИБИРСК
1999

**Необычная динамика
пилообразного отображения**

В.В. Вечеславов

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090 Новосибирск, Россия

V.V. Vecheslavov

Unusual dynamics of the sawtooth map

Аннотация

Приведены результаты численного исследования двумерного канонического отображения с пилообразной силой и показано, что динамика этой системы весьма необычна. Подтвержден, в частности, установленный Л.В.Овсянниковым факт существования неразрушенных сепаратрис целых резонансов для точно заданного счетного множества значений параметра системы K . Найдено еще одно множество значений этого параметра, определяющее другое семейство неразрушенных сепаратрис. Обследованы первые дробные резонансы и для них также обнаружены свои множества значений K , при которых их сепаратрисы сохраняются. Важность этих фактов связана с тем, что наличие неразрушенной сепаратрисы любого резонанса исключает возможность глобальной диффузии в фазовом пространстве. Отмечены возникшие в этой связи новые вопросы, существенные для дальнейшего развития современной теории нелинейных гамильтоновых систем.

Email: vecheslavov@inp.nsk.su

Двумерные канонические отображения вида

$$\bar{p} = p + K \cdot f(x), \quad \bar{x} = x + \bar{p} \quad (1)$$

с единственным параметром K уже давно и широко используются в нелинейной физике как весьма удобные и чрезвычайно информативные модели [1,2,3]. Функции $f(x) = \sin(x)$, например, отвечает так называемое стандартное отображение, которому посвящено и с помощью которого выполнено очень большое число исследований. Создатели теории КАМ с самого начала отмечали различное поведение систем (1) для аналитических и гладких зависимостей $f(x)$. Основной темой здесь является вопрос о степени гладкости (число l непрерывных производных силы $f(x)$), при которой глобальный хаос имеет место не для сколь угодно малого значения параметра системы, а лишь выше некоторой пороговой величины $K > K_g$. Исследования Мозера и Рюссмана показали, что такой порог существует всегда при $l > 3$ [4]. Однако, отсутствуют доказательства обратного утверждения о том, что при $l \leq 3$ такого порога нет и диффузия в фазовом пространстве ничем не ограничена.

Ниже рассматривается система с пилообразной силой

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{если } x \leq 0.25, \\ 4(0.5 - x), & \text{если } |0.5 - x| \leq 0.25, \\ 4(x - 1.0), & \text{если } |x - 1.0| \leq 0.25. \end{cases} \quad (2)$$

Эта функция антисимметрична $f(1-x) = -f(x)$, ее период равен единице и степень гладкости $l = 0$.

Поводом для нашей работы послужило знакомство со строго доказанным Л.В.Овсянниковым фактом существования у системы (1), (2) сепаратрис целых резонансов при точно определенном счетном множестве значений параметра системы K [5].

Напомним на примере маятника, что сепаратрисой одиночного резонанса называется особая траектория, отделяющая колебания фазы (внутри резонанса) от ее вращения (вне резонанса). На самом деле это две пространственно совпадающие ветви, отвечающие ходу времени вперед и назад, соответственно. Каждая ветвь представляет собой непрерывную траекторию с бесконечным периодом движения, которая выходит из положения неустойчивого равновесия (седло) и затем асимптотически к нему же приближается.

При наличии в системе других (хотя бы одного) нелинейных резонансов сепаратриса расщепляется на две пересекающиеся ветви, которые по-прежнему выходят из седла навстречу друг другу, но более к нему не возвращаются (этот эффект был качественно описан Пуанкаре еще в прошлом столетии [6] и уже в наше время детально исследовался Мельниковым [7]). Свободные концы ветвей расщепленной сепаратрисы образуют бесконечное число петель неограниченно возрастающей длины, которые заполняют при этом ограниченную и узкую область вдоль невозмущенной сепаратрисы, образуя так называемый хаотический слой [1,2,3]. Перекрывание хаотических слоев всех резонансов системы как раз и означает возникновение глобального хаоса.

Центральным пунктом современных представлений можно считать утверждение о том, что расщепление сепаратрисы резонанса и образование хаотического слоя в типичной (то есть неинтегрируемой) гамильтоновой системе происходят при почти любом возмущении. Считается также, что именно сепаратрисы разрушаются в первую очередь, поскольку имеют нулевую частоту и взаимодействие нелинейных резонансов в их окрестности всегда существенно [1,2,3]. Последними, по мере роста возмущения, исчезают инвариантные кривые с иррациональными числами вращения (для стандартного отображения это "золотое" число $(\sqrt{5}-1)/2$, максимально удаленное от всех рациональных чисел [8]).

У системы (1), (2) все выглядит иначе, и мы кратко изложим полученные недавно результаты.

Согласно Овсянникову [5], нерасщепленные сепаратрисы существуют при следующих значениях параметра

$$K_m = \sin^2(\beta_m/2), \quad m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

(в обозначениях работы [5] $K_m = h_m^2/4$), где β_m есть наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{2} \sin(m\beta) = \cos(\beta/2). \quad (4)$$

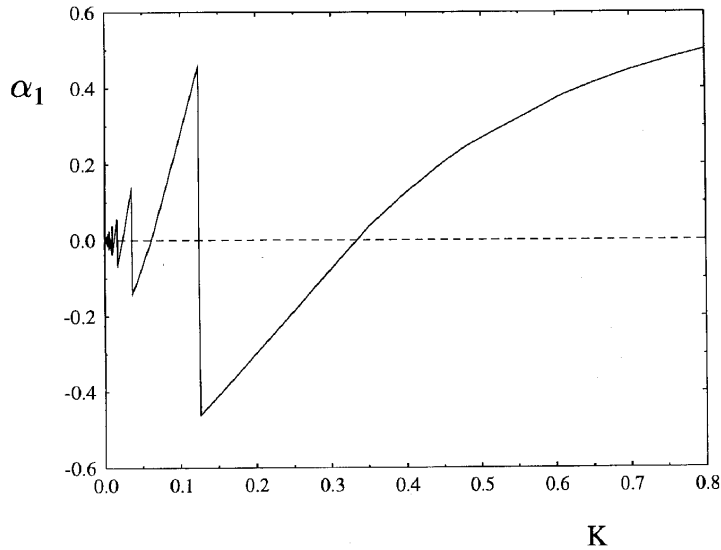


Рис. 1: Зависимость угла α_1 расщепления ветвей сепаратрисы целого резонанса системы (1), (2) от параметра K .

По причинам, которые станут понятны ниже, назовем совокупность всех найденных по (3), (4) величин множеством критических чисел первого типа. Наибольший элемент этого множества имеет значение $K_1 = 1/8$. Важно отметить, что в работе [5] приведены также точные формулы, по которым сепаратриса может быть фактически построена для любого критического числа K_m .

Определенную количественную информацию об эффекте расщепления дает угол пересечения ветвей сепаратрисы целого 1:1 (период – одна итерация) резонанса α_1 в центральной гомоклинической точке, лежащей для системы (1), (2) на линии симметрии $x = 0.5$ (см. [9], где описаны техника и результаты таких измерений для стандартного отображения). Равенство угла пересечения нулю является надежным свидетельством отсутствия хаотического слоя.

На рис.1 показана зависимость $\alpha_1(K)$, из анализа которой следуют два вывода:

- 1) для критических чисел K_m первого типа угол пересечения проходит через нуль в процессе скачкообразной смены знака;

- 2) существует еще одно счетное множество значений параметра \tilde{K}_n (назовем его множеством критических чисел второго типа) с плавным переходом угла через нуль.

Оказалось, что элементы этого множества можно представить в той же форме (3), что и элементы множества первого типа

$$\tilde{K}_n = \sin^2(\beta_n/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где β_n есть наименьший положительный корень того же самого трансцендентного уравнения (4), но уже с полуцелыми коэффициентами

$$\sqrt{2} \sin[(n + 1/2)\beta] = \cos(\beta/2). \quad (6)$$

Первое критическое число из этой серии имеет точное значение $\tilde{K}_0 = 1/3$. Как видно из рис.1 (см. также рис.3), при монотонном уменьшении величины параметра K за каждым элементом множества второго типа следует элемент множества первого типа. Подчеркнем еще раз, что оба эти множества относятся только к целому 1:1 резонансу отображения (1), (2). Сепаратриса этого резонанса – ломаная линия, форму которой для значений $K_1 = 1/8$ и $\tilde{K}_0 = 1/3$ можно увидеть на рисунках 4 и 5, соответственно (об этих рисунках рассказывается ниже).

Число $\tilde{K}_0 = 1/3$ выделено не только тем, что является самым большим из всех критических чисел. Оказалось, что оно находится на границе двух областей с резко и качественно различным динамическим поведением системы (1), (2). При $K \leq \tilde{K}_0$ имеет место весьма нетривиальная динамика, обсуждению которой посвящена вся остальная часть нашей работы. Напротив, при $K > \tilde{K}_0$ система ведет себя очень просто: по мере роста величины параметра K один за другим теряют устойчивость дробные резонансы и связанные с ними островки устойчивости "тонут" в хаотическом море. Этот процесс четко прослеживается по переходу собственных чисел матрицы линеаризованного движения от комплексно-сопряженных значений (устойчивая точка эллиптического типа) к вещественным через равенство $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (гиперболическая точка с отражением), что является свидетельством смены регулярного движения на хаотическое [2]. При $K \approx 0.39$ исчезают резонансы 1:3, при $K = 0.5$ – полуцелые резонансы 1:2, и, наконец, при $K = 1.0$ целые резонансы. Может оказаться, что для $K > 1.0$ регулярная компонента движения в системе (1), (2) полностью отсутствует. Это качество, если оно подтвердится, также явится особенностью пилообразного возмущения, поскольку для аналитических функций (например, для стандартного отображения) мера регулярной компоненты всегда больше нуля [1].

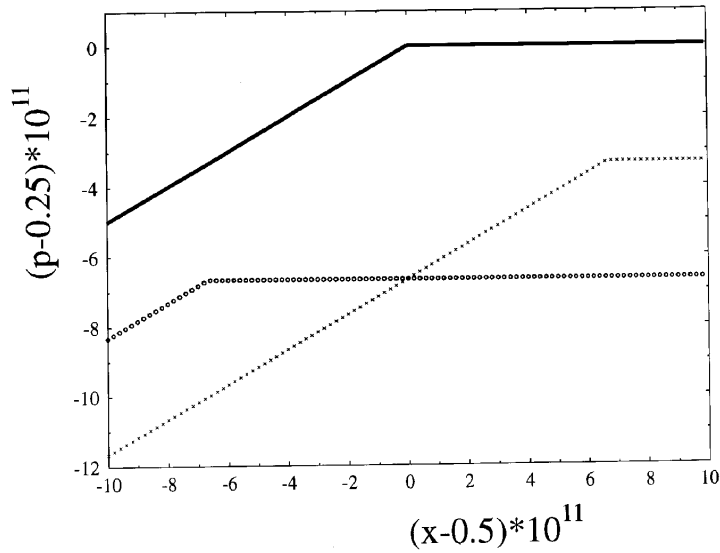


Рис. 2: Сплошная ломаная линия – участок неразрушенной сепаратрисы целого резонанса при $K = K_1 = 0.125$. Внизу – ветви расщепившейся сепаратрисы при $K = 0.125 - 5 \times 10^{-11}$. Кресттики отвечают ходу времени вперед, кружочки – назад. Угол пересечения $\alpha_1 = 0.464$.

Для понимания природы скачкообразных изменений угла на критических числах первого типа K_m была построена картинка пересекающихся ветвей сепаратрисы целого резонанса в центральной гомоклининой точке при значении параметра системы немного меньшего величины $K_1 = 1/8$ (рис.2). Видно, что переход на горизонтальный участок при прямом ходе времени смещается по фазе вправо, при обратном – влево. Если построить такую же картинку для K чуть больше K_1 , то ветви меняются ролями и угол, сохраняя величину, изменяет знак на противоположный. Установлена интересная (хотя и не получившая пока какого – либо объяснения) эмпирическая асимптотическая ($m \gg 1$) зависимость $\alpha_1(K_m) = 4 K_m$, которая показана на рис.3.

Из рис.2 видно, что для чисел первого типа угол пересечения определяется в основном углом излома сепаратрисы в гомоклининой точке. Его измерение, оставаясь эффективным практическим приемом локализации таких чисел, не дает никакой информации о динамике (например,

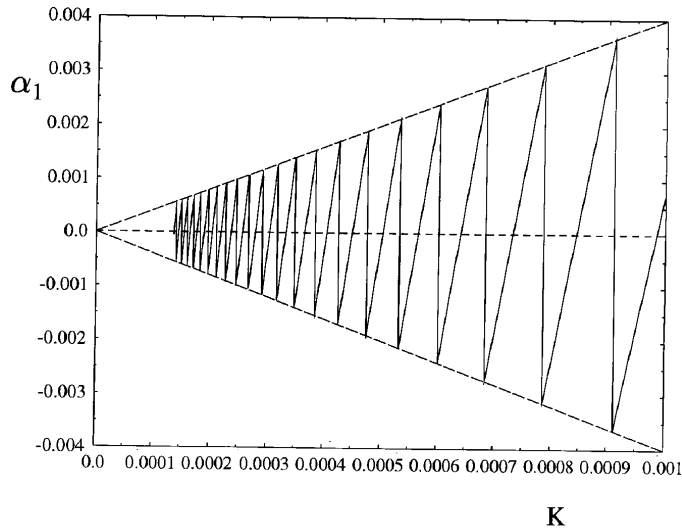


Рис. 3: Иллюстрация эмпирической зависимости величины угла пересечения ветвей сепаратрисы целого резонанса в точках первого типа от значения критического числа (см. текст). Наклонные пунктирные прямые построены по уравнениям $\alpha_1 = 4K$.

о ширине хаотического слоя). По-видимому, такую информацию можно будет получить, измеряя другую (непрерывную) функцию параметра K – расстояние между ветвями сепаратрисы по импульсу. Для критических чисел второго типа \tilde{K}_n угол изменяется плавно поскольку сепаратриса не имеет излома на линии симметрии (см. рис.5), но его связь с динамическими показателями системы еще предстоит установить.

Дальнейшие достаточно необычные и неожиданные эффекты обнаружались при изучении поведения траекторий, стартующих вне целого резонанса при значениях параметра системы K близких или совпадающих с критическими числами. Напомним, что эта область заполнена дробными $M : N$ ($M < N$, N – число итераций отображения на M периодов движения траектории) резонансами.

Начнем с критических чисел первого типа. На рис.4 показана область, которую заняла единственная хаотическая траектория при $K = K_1 = 1/8$. Нижняя и верхняя ломаные границы области совпадают с вычисленными по точным формулам работы [5] сепаратрисами целых резонансов.

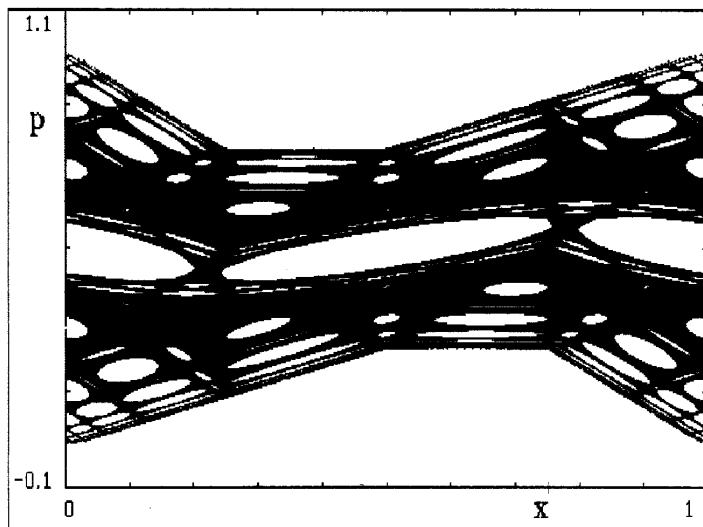


Рис. 4: Параметр системы равен первому критическому числу первого типа $K = K_1 = 1/8$. Область, занятая единственной траекторией с начальными координатами $x = 0, p = 0.37$. Число итераций отображения равно 10^9 . Нижняя и верхняя ломаные границы области совпадают с сепаратрисами соседних целых резонансов.

Здесь все противоречит представлениям "обычной" динамики. Известно, что имеется бесконечно много "нетипичных" гамильтоновых систем, у которых сепаратрисы всех резонансов неразрушены. Это так называемые полностью интегрируемые системы, в поведении которых нет никакого хаоса [2,3]. Поразительной особенностью ситуации на рис.4 является сосуществование сохранившихся сепаратрис двух соседних целых резонансов с областью мощного хаоса, где все имеющие полный размер по фазе инвариантные кривые с самыми устойчивыми иррациональными числами вращения разрушены и хаотические слои всех дробных резонансов перекрыты. Более того, именно эти сепаратрисы "запирают" собой всю хаотическую компоненту движения в ограниченную часть фазового пространства, что исключает возможность глобальной диффузии.

Положение дел с первым критическим числом второго типа выглядит не менее удивительным (см. рис.5, который построен для значения параметра $K = \tilde{K}_0 = 1/3$). Оказалось, что любая запущенная вне целого

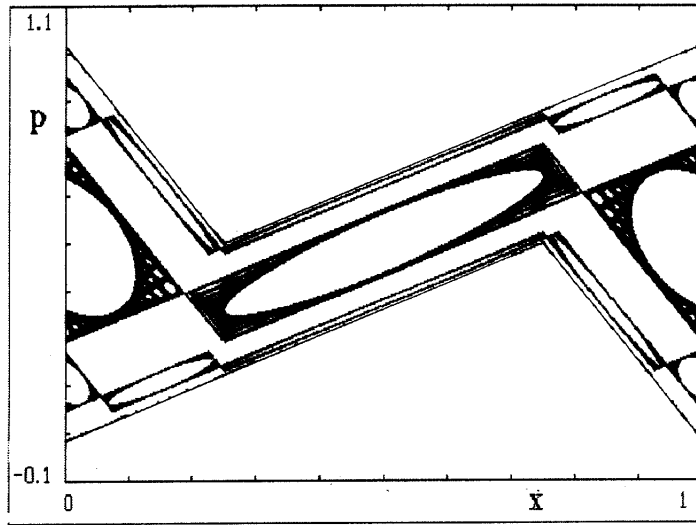


Рис. 5: Параметр системы равен первому критическому числу второго типа $K = K_0 = 1/3$. Нижняя и верхняя ломаные – сепаратрисы соседних целых резонансов. Три траектории с начальными координатами, обеспечивающими их попадание в дробные резонансы 1:2 и 1:4, соответственно. Число итераций отображения равно 5×10^{10} для каждой траектории.

резонанса траектория на протяжении всего времени счета не покидает область того дробного резонанса, в который она попала с самого начала. На рис.5, чтобы сделать его понятным показаны, помимо сепаратрис соседних целых резонансов, всего два дробных 1:2 и 1:4. Картинка со многими резонансами очень хорошо смотрится на экране цветного дисплея, где каждый резонанс представлен своим цветом и эти цвета не смешиваются. Здесь также, как и на рис.4, вся показанная область ”заперта” между сепаратрисами соседних целых резонансов. Однако, возникает впечатление, что и каждый отдельно взятый дробный резонанс в этой области является инвариантным многообразием (наверное, правильнее сказать – инвариантной резонансной структурой), которая также ограничивает глобальную диффузию. Уместен вопрос: что представляет из себя граница этой структуры? Привычные представления ”обычной” динамики подсказывают, что это может быть устойчивая инвариантная кривая с иррациональным числом вращения, которая изолирует

друг от друга хаотические слои соседних резонансов. Но после обсуждения ситуации на рис.4 мы вправе предположить, что этой границей может оказаться и неразрушенная сепаратриса самого дробного резонанса.

Для исследования дробных $1 : N$, $N > 1$ резонансов было решено применить ту же методику, что была использована выше в отношении целых резонансов – измерение зависимости угла расщепления ветвей сепаратрисы α_N от параметра системы K . Заметим, что с увеличением N существенно возрастают чисто технические трудности, поэтому к настоящему моменту достоверные данные удалось получить только в отношении полуцелого резонанса 1:2 (он располагается посередине рисунков 4 и 5) и начать исследование резонанса 1:3. Из этих данных следует:

- 1) у полуцелого резонанса также имеются два счетных множества критических чисел первого и второго типов, которые (за исключением точки $K = \tilde{K}_0 = 1/3$) не совпадают с аналогичными множествами целого резонанса;
- 2) для $K = K_1 = 1/8$ зафиксирован относительно большой угол $\alpha_2 = 0.0362$ пересечения ветвей сепаратрис, что подтверждает наличие хаотического слоя и соответствует показанной на рис.4 картине;
- 3) при прохождении параметра K через значение $\tilde{K}_0 = 1/3$ угол пересечения α_2 проходит через нуль откуда следует, что границей инвариантной резонансной структуры 1:2 на рис.5 является ее собственная сепаратриса.

Последний пункт представляется особенно важным не только потому, что вновь демонстрирует необычные качества сепаратрисы на сей раз дробного резонанса. Равенство угла расщепления нулю подтверждает устойчивость структуры и, с одной стороны, снимает опасения о недостаточной продолжительности счета, а с другой – позволяет доверять результатам этого счета. Если это на самом деле так (что дополнительно подтверждается начатыми уже исследованиями резонанса 1:3), то вырисовывается следующая очень непростая динамическая картина.

С каждым резонансом из счетного множества всех резонансов системы (1), (2) связаны два счетных множества критических значений параметра K , при которых угол α_N пересечения ветвей сепаратрисы проходит через нуль, что свидетельствует об отсутствии хаотического слоя. Для первого множества это прохождение осуществляется в форме скачка, для второго плавно. Сепаратриса такого резонанса, имея полную протяжен-

ность по фазе, является непроходимым барьером для глобальной диффузии, причем период резонанса N роли не играет. Заметим, что в работе [10] при численном изучении отображения (1),(2) со значением параметра $K = 0.28625$ (обращаем внимание на его близость к критическому числу $1/3$) наблюдалось не получившее тогда объяснения ограничение диффузии. Это обстоятельство, вероятно, можно будет понять в ходе дальнейших исследований с учетом приведенных выше фактов.

Система (1), (2) демонстрирует весьма необычную динамику, что порождает ряд новых проблем. Первая – выяснение природы и механизма удивительной устойчивости сепаратрисы нелинейного резонанса несмотря на наличие в системе других резонансов. Безусловный интерес представляет исследование глобальной диффузии при $K \leq 1/3$ с учетом того, что на любом критическом числе любого резонанса эта диффузия ограничена. Решение этой задачи зависит, по-видимому, от того, как устроено и что из себя представляет множество всех критических чисел. Предстоит также понять, как ведет себя система при переходах между этими числами, что скрывается за приведенной на рис.3 зависимостью и имеют ли нечто подобное дробные резонансы.

Можно надеяться, что в ходе поиска ответов на поставленные вопросы будет получена информация, которая позволит существенно уточнить некоторые представления современной теории нелинейных колебательных гамильтоновых систем.

Автор глубоко благодарен Л.В. Овсянникову за возможность познакомиться с результатами его исследований до их публикации и Б.В. Чирикову за обсуждения и советы. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97-01-00865).

Литература

- [1] *B.V. Chirikov*. Phys. Reports, **52**, 263 (1979).
- [2] *A. Lichtenberg and M. Lieberman*. Regular and Chaotic Dynamics, Springer (1992).
- [3] *Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев*. Введение в нелинейную физику, Наука, Москва (1988).
- [4] *J. Moser*. Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math. Phys. Kl., No 1 (1962) 1; Stable and Random Motion in Dynamical Systems, Annals of Mathematics Studies No 77 (University Press, Princeton 1973).
- [5] *Л.В. Овсянников*. Существование сепаратрис для одного аналога уравнения Б.В.Чирикова, ДАН (направлена в печать).
- [6] *A. Poincaré*. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, Paris (1892), п.226.
А. Пуанкаре. Избранные труды, Наука, Москва (1971), т.1, с.728.
- [7] *В.К. Мельников*. ДАН, **148**, 1257 (1963); Труды Моск. мат. общества **12**, 3 (1963).
- [8] *J. Green*, J.Math.Phys., **20** (1979) p.1183
- [9] *В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков*. ЖЭТФ, **114** 1516 (1998);
В.В. Вечеславов. ЖЭТФ, **116**, вып.1(7) (1999).
- [10] *B.V. Chirikov, E. Keil, and A.M. Sessler*. J. Stat. Phys., **3**, No 3, 307 (1971).