

Сибирское отделение Российской Академии наук
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им.Г.И. Будкера

Р.М. Лапик, П.В. Мартышкин

РАСЧЕТ И ИЗМЕРЕНИЯ
ПРОТОТИПА ИМПУЛЬСНОГО МАГНИТА
КОНВЕРСИОННОЙ СИСТЕМЫ ИНЖЕКЦИОННОГО
КОМПЛЕКСА ВЭПП-5

ИЯФ 99-59

НОВОСИБИРСК
1999

**Расчет и измерения
прототипа импульсного магнита
конверсионной системы инжекционного
комплекса ВЭПП-5**

Р.М. Лапик, П.В. Мартышкин

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

В данной работе описан метод расчета импульсных магнитных полей в квазистационарном случае. На основе метода сеток описан алгоритм расчета импульсных магнитных полей на ЭВМ, обеспечивающий решение самосогласованной задачи в области конечных размеров.

Проведены измерения магнитных полей прототипа импульсного магнита. Проведены сравнения, измеренных и рассчитанных импульсных полей.

**Measurement and numerical simulation
of impulse coil prototype
of VEPP-5 injector complex**

R.M. Lapik, P.V. Martyshkin

Budker Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, Russia

Abstract

This paper is described a calculation method of impulse magnetic field for quasistatic case. Based on a finite difference method algorithm of computer simulation is presented.

A measurements of prototype magnet impulse field and its comparison with numerical simulation were done.

© *Институт ядерной физики
им. Г.И. Будкера СО РАН, Россия*

Оглавление

1	Введение	5
2	Уравнения полей в квазистационарном случае	7
3	Трёхмерный случай	9
4	Разностные уравнения	14
4.1	Построение расчетной сетки	15
4.2	Разностные уравнения для проводников с током	16
4.3	Разностное уравнение Лапласа	18
4.4	Измельчение ячеек сетки	20
4.5	Схема решений разностных уравнений	22
5	Измерения прототипа импульсного магнита	24
5.1	Макет концентратора потока	24
5.2	Прототип импульсного магнита	27
6	Заключение	32

1 Введение

Для сбора позитронов после конверсионной мишени применяются согласующие устройства, создающие сильные импульсные магнитные поля в заданном объеме. Одним из таких устройств является устройство с адиабатически спадающим вдоль оси, продольным магнитным полем. В качестве адиабатического устройства применяется концентратор потока с коническим внутренним сечением.

Схематически концентратор потока изображен на рис. 1. Конструкция и принцип работы этого устройства подробно описаны в литературе, посвященной импульсным устройствам для создания сильных, импульсных магнитных полей [?, ?, ?]. Хотя конкретные исполнения концентратора потока может быть различными, но все они содержат такие общие элементы, как первичную обмотку и одновитковое тело концентратора потока с поперечным разрезом вдоль своей оси.

Основной принцип работы концентратора потока состоит в следующем: когда на первичную обмотку подаются импульс тока, на внешней поверхности тела концентратора потока наводится обратный азимутальный ток, который перетекает через поперечный разрез на внутреннюю поверхность.

В задачах расчета импульсного магнитного поля с учетом нестационарного скин-эффекта часто необходимо иметь согласованное решение в смешанной области проводник-пустота. Ввиду сложности этой задачи (произвольная геометрия проводников) точное решение удается получить лишь в некоторых простых случаях [?, ?], поэтому зачастую приходится искать решение численными методами [?, ?, ?].

Принципиальная геометрия концентратора потока является сугубо 3-х мерной геометрией. Поэтому его точный расчет, принимающий во внимание связь между первичной обмоткой и одновитковым телом, а так же наличие разреза может быть выполнен только с учетом трех простран-

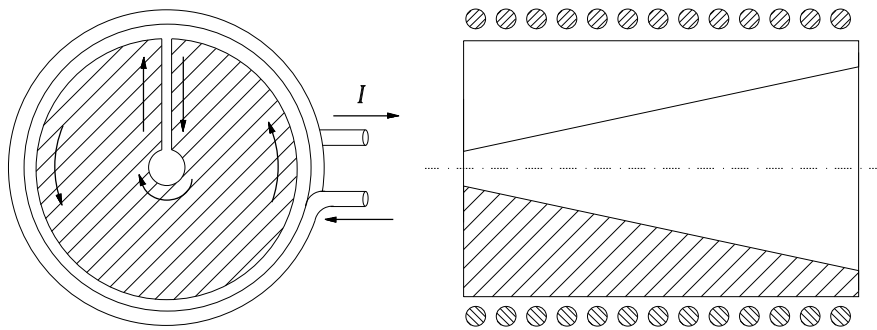


Рис. 1: Схематическое изображение концентратора потока.

ственных координат. Подобная задача может быть решена прямым методом, т.е. совместное решение системы уравнений для магнитного поля как внутри проводников, так и снаружи. При сеточном учете разреза (3-мерная разностная сетка, внутри разреза находятся узлы сетки, принадлежащие вакууму) правильный перевод тока с внешней поверхности концентратора потока на его внутреннюю поверхность происходит автоматически. В литературе отмечены и другие подходы к расчету концентратора потока – сначала рассчитывается 2-х мерная аксиально симметричная геометрия, а затем учитываются исправления значений магнитного поля, вносимые разрезом (все эти подходы связаны с проблемой передачи тока с внешней поверхности на внутреннюю). По затратам машинного времени и машинных ресурсов описанные в этом пункте подходы являются эквивалентными.

Численный расчет концентратора потока тем или иным описанным выше способом потребовал бы слишком много машинного времени.

В технической реализации концентратор потока обладает почти полной аксиальной симметрией, исключение составляет область разреза. Размер щели при технической реализации составляет $0.1 \div 0.2$ мм. Область магнитного поля, в которую вносятся создаваемые разрезом возмущения имеют почти такие же малые характерные размеры. Поэтому для упрощения расчетов концентратора потока будем рассматривать аксиально симметричный случай, такой, что разрез в первом приближении не будет учитываться, т.е. сплошной, проводящий виток с профилированным внутренним сечением. Напряжение от внешнего источника будет подаваться непосредственно на проводящий виток.

2 Уравнения полей в квазистационарном случае

Задача диффузии импульсного магнитного поля в проводник может быть описана несколькими эквивалентными способами [?, ?]. При этом рассматриваемые уравнения являются уравнениями параболического типа (например, уравнение теплопроводности), зависящими от одних и тех же величин. В квазистационарном приближении удобнее пользоваться уравнениями для вектор-потенциала магнитного поля или уравнениями, непосредственно описывающими проникновение тока в проводник, чем уравнениями полей. В этом случае система векторных уравнений содержит на одно уравнение меньше, а также становится значительно проще описывать сторонние источники тока, которые должны быть заданы для каждой расчетной задачи.

Описание проникновения магнитного поля в проводник с помощью уравнений вектор-потенциала и уравнений диффузии тока для простых случаев являются эквивалентными описаниями. В более сложных случаях, первое из них по сравнению со вторым, обладает следующими преимуществами:

- если расчетная область содержит несколько несвязанных между собой проводников, тогда для учета наводимых данными проводниками друг на друга вихревых токов необходимо знать значения вектор-потенциала или значения магнитного поля в узлах сетки, окружающих эти проводники;
- Вычисления данных зависимостей могут быть проделаны, используя интегральный численный метод. Суммарное число операций для вычисления одного временного слоя сопоставимым с первым случаем даже для бесконечно тонких витков с током. Если еще при этом учитывать проникновение тока вглубь проводников, то число операций возрастает на несколько порядков, соответственно во столько же раз возрастает время расчета одного временного слоя.

Для расчета двумерных импульсных магнитных полей, обладающих аксиальной симметрией, в квазистационарном случае будем пользоваться уравнением для вектор-потенциала. В этом случае вектор-потенциал и вектор плотности тока имеют только одну отличную от нуля азимутальную составляющую. Уравнение для вектор-потенциала приобретает вид

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c}j. \quad (1)$$

В данном уравнении все величины являются неизвестными и должны быть определены в результате решения задачи диффузии магнитного поля в проводник. Таким образом, задача определения значений вектор-потенциала и плотности тока внутри проводника является самосопряженной задачей.

Внешний источник тока проще всего ввести в уравнения при помощи обобщенного закона Ома, представляя вектор электрического поля в виде суммы вихревого E и вектор электрического поля сторонних источников E

$$j = \sigma(E + E), \quad (2)$$

где σ – удельная электрическая проводимость материала проводника. При этом величина E является заданной в проводнике функцией координат и времени.

Произвольно заданная в уравнениях Максвелла величина E должна удовлетворять некоторым требованиям. На нее нужно наложить ограничения, соответствующие условиям задачи:

- циркуляция E по любому азимутальному контуру должна иметь одно и то же значение, равное ЭДС генератора напряжения;
- дополнительное условие налагаемое на величину сторонней напряженности поля имеет вид $rot \vec{E} = 0$, при этом вектор-потенциал не зависит от вида E [?].

Уравнение для азимутальной составляющей вектор-потенциала в проводнике имеет вид [?]

$$\Delta A = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(E - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \right). \quad (3)$$

Уравнения для вектор-потенциала в области, где отсутствует проводник принимает следующий простой вид:

$$\Delta A = 0. \quad (4)$$

Область, в которой производится расчет магнитного поля ограничивается внешней границей Γ , на которой задается необходимое граничное условие

$$\begin{aligned} A| &= 0 \quad (), \\ \frac{\partial A}{\partial n}| &= 0 \quad (). \end{aligned} \quad (5)$$

Для задачи обладающей аксиальной симметрией, задается следующее условие на оси $A = 0$.

3 Трехмерный случай

Геометрия концентратора потока является сугубо трехмерной и ни коем образом не может быть сведена к двумерному случаю. Рассмотренный ранее двумерная аксиально симметричная задача, в этом смысле, является лишь некоторым приближением реальной геометрии концентратора потока. Это приближение, в случае самосогласованной задачи, дает возможность приближенно рассчитать распределение тока по телу концентратора потока.

Если известно распределение плотности тока в любой момент времени, тогда значения магнитного поля можно вычислить аналитически, используя закон Био-Савара. Магнитное поле бесконечно тонкого кругового витка радиуса a с протекающим по нему током I имеет радиальную и продольную составляющие и в точке с координатами r и z определяется выражением [?]

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{2I}{c} \frac{z}{r\sqrt{(a+r)^2+z^2}} \left(-K(k) + \frac{a^2+r^2+z^2}{(a-r^2)+z^2} E(k) \right), \\ H_z &= \frac{2I}{c} \frac{z}{r\sqrt{(a+r)^2+z^2}} \left(K(k) + \frac{a^2-r^2-z^2}{(a-r^2)+z^2} E(k) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $K(k)$, $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $k = \frac{4ar}{(a+r)^2+z^2}$.

Концентратор потока можно представить как набор бесконечно тонких витков с разными протекающими по ним токами и разными радиусами. Для определения значения магнитного поля, создаваемого концентратором потока, необходимо проинтегрировать выражение (6) по всем виткам с условием, что ток и радиус витка является функцией продольной координаты.

Если распределение тока нельзя представить в виде бесконечно тонкого витка (условие справедливости такого представления – радиус витка $a \gg \delta$, где δ – глубина скин-слоя) или требуется учесть влияние щели, то необходимо рассматривать магнитное поля, создаваемое концентратором потока, в общем виде, сформулированном законом Био-Савара. Рассмотрим виток с током, образованный геометрией концентратора потока (см. рис. 1). Разобьем его на две части, изображенные на рис. 2, 1 – ток, протекающий по внутренней поверхности концентратора потока, 2 – ток, протекающий по горизонтальной поверхности щели.

Для первого контура вектор плотности тока имеет только азимутальную составляющую. Значения вектор-потенциала в точке с координата-

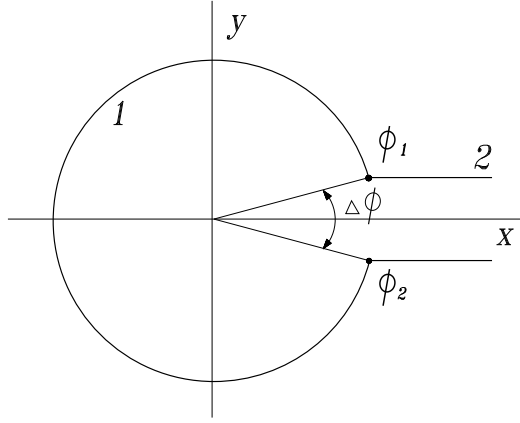


Рис. 2: Контура, образованные геометрией концентратора потока.

ми r_0, ϕ_0, z_0 , в общем случае, определяются следующими выражениями

$$\begin{aligned}
 A_r &= - \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{j_\phi(r, z) \sin(\phi - \phi_0)}{c(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z - z_0)^2)^{1/2}} r dr d\phi dz, \\
 A_\phi &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{j_\phi(r, z) \cos(\phi - \phi_0)}{c(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z - z_0)^2)^{1/2}} r dr d\phi dz,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где интегрирование проводится по всей области, занятой проводником.

Интегрирование радиальной составляющей вектор-потенциала по азимутальной координате осуществляется элементарным образом и дает следующий результат

$$A_r = \int \frac{j_\phi(r, z)}{cr_0} (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z - z_0)^2)^{1/2} \Big|_{-\Delta\phi/2}^{\Delta\phi/2} dr dz. \tag{8}$$

Для вычисления азимутальной составляющей поступим следующим образом – добавим недостающий до полного кругового витка сегмент с током и сведем выражение для азимутальной составляющей (7) к элли-

птическому интегралу

$$A_\phi = \frac{4}{c\sqrt{r_0}} \int \frac{j(r, z)}{k} \left((1 + k^2/2)K(k) - E(k) \right) \sqrt{r} dr dz - \int_{-\Delta\phi/2}^{\Delta\phi/2} \frac{j_\phi(r, z) \cos(\phi - \phi_0)}{c(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z - z_0)^2)^{1/2}} r dr d\phi dz, \quad (9)$$

где $K(k)$, $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $k = \frac{4r_0 r}{(r_0 + r)^2 + (z - z_0)^2}$.

Если существует полная аксиальная симметрия ($\phi_1 = 0$ и $\phi_2 = 2\pi$), т.е. – полный круговой виток, тогда радиальная составляющая вектор-потенциала равна нулю, а азимутальная составляющая содержит только первое слагаемое и переходит в соответствующее этому случаю выражение [?].

Значение магнитного поля в точке с координатами r_0, ϕ_0, z_0 определяется из условия $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$ и в явном виде определяется

$$\begin{aligned} H_r &= -\frac{\partial A_\phi}{\partial z_0}, \\ H_\phi &= \frac{\partial A_r}{\partial z_0}, \\ H_z &= \frac{1}{r_0} \frac{\partial A_\phi}{\partial r_0} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial A_r}{\partial \phi_0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для дифференцирования эллиптических интегралов воспользуемся следующими соотношениями [?]

$$\begin{aligned} \frac{dK(k)}{dk} &= \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}, \\ \frac{dE(k)}{dk} &= \frac{E(k) - K(k)}{k}. \end{aligned}$$

Проводя последовательно дифференцирование выражений (8, 9) и приводя подобные члены, окончательно получим выражения, определяющие магнитное поле.

Радиальная составляющая магнитного поля в точке с координатами r_0, ϕ_0, z_0 определяется как

$$H_r = \frac{2}{cr_0} \int \frac{j_\phi(r, z) \cdot (z_0 - z)}{((r_0 + r)^2 + (z_0 - z)^2)^{1/2}} \left(-K(k) + \frac{1 - k^2/2}{1 - k^2} E(k) \right) dr dz$$

$$- \int_{-\Delta\phi/2}^{\Delta\phi/2} \frac{j_\phi(r, z) \cdot (z_0 - z) \cos(\phi - \phi_0)}{c(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z_0 - z)^2)^{3/2}} r dr d\phi dz. \quad (11)$$

Первый интеграл в предыдущем выражении определяет радиальную составляющую магнитного поля в случае полной аксиальной симметрии, второй вносит поправку в случае асимметрии.

Азимутальная составляющая магнитного поля существует только если нет полной аксиальной симметрии и определяется следующим выражением

$$H_\phi = - \frac{1}{cr_0} \int \frac{j_\phi(r, z) \cdot (z_0 - z)}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z_0 - z)^2)^{1/2}} \Big|_{-\Delta\phi/2}^{\Delta\phi/2} dr dz, \quad (12)$$

в противном случае данная составляющая равна нулю.

Продольная составляющая магнитного поля имеет вид

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{2}{c} \int j_\phi(r, z) \frac{\left(-K(k) + \frac{r^2 - r_0^2 - (z_0 - z)^2}{(r - r_0)^2 + (z_0 - z)^2} E(k) \right)}{\sqrt{(r_0 + r)^2 + (z_0 - z)^2}} dr dz \\ &- \frac{1}{cr_0} \int_{-\Delta\phi/2}^{\Delta\phi/2} \frac{j_\phi(r, z) \cos(\phi - \phi_0) r dr d\phi dz}{(r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z_0 - z)^2)^{1/2}} \\ &+ \frac{1}{c} \int_{-\Delta\phi/2}^{\Delta\phi/2} j_\phi(r, z) \frac{\cos(\phi - \phi_0)(r_0 - r \cos(\phi - \phi_0)) r dr d\phi dz}{(r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z_0 - z)^2)^{3/2}} \\ &+ \int \frac{j_\phi(r, z) \sin(\phi - \phi_0)}{cr_0(r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z_0 - z)^2)^{1/2}} \Big|_{-\Delta\phi/2}^{\Delta\phi/2} r dr dz. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь, как и раньше первый член в приведенном выражении определяет продольную составляющую магнитного поля для случая полной аксиальной симметрии витка с током.

Если принять приближение бесконечно тонкой поверхности с продольным распределением по ней тока $I(z)$, тогда выражения (11, 12, 13), определяющие значение магнитного поля, можно упростить, сняв интегрирование по радиальному направлению. Для этого необходимо задать плотность тока в следующем виде $j_\phi(r, z) = I(z)\delta(r - a)$, где a – радиус поверхности в точке с координатой z . Таким образом, значение магнитного поля определяется только интегралом по продольному распределению бесконечно тонкого тока.

В общем случае, радиус токовой поверхности a является функцией от продольной координаты и может быть задана как $a(z)$. В случае конической поверхности, данная зависимость задается в виде $a(z) = a_0 + z \cdot \operatorname{tg}(\alpha)$, где α – угол раскрыва конуса, a_0 – минимальная апертура конуса.

Рассмотрим вторую часть контура, образованную поверхностью разреза 2 на рис. 2. Для упрощения задачи пренебрежем распределением плотности тока вглубь проводника и рассмотрим его как бесконечно тонкий поверхностный ток, имеющий только продольное распределение.

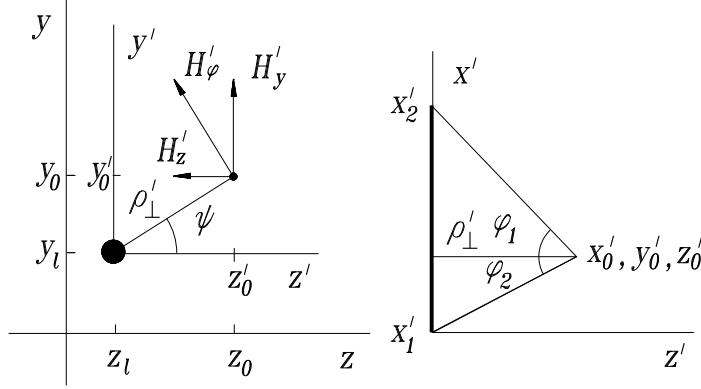


Рис. 3:

Магнитное поле от бесконечно тонкого отрезка линейного тока I , (см. рис. 3) в системе координат $X'Y'Z'$ определяется следующим выражением

$$\begin{aligned} H'_{y'}(x'_0, y'_0, z'_0) &= \frac{H_0}{\rho'_\perp} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \cos \psi, \\ H'_{z'}(x'_0, y'_0, z'_0) &= -\frac{H_0}{\rho'_\perp} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \sin \psi, \end{aligned} \quad (14)$$

где величины $\rho'_\perp = (y'^2_0 + z'^2_0)^{1/2}$, $\sin \varphi_1 = \frac{x'_0 - x'_1}{((x'_1 - x'_0)^2 + \rho'^2_\perp)^{1/2}}$,

$\sin \varphi_2 = \frac{x'_2 - x'_0}{((x'_2 - x'_0)^2 + \rho'^2_\perp)^{1/2}}$, определены на рис. 3, $H_0 = I/c$.

В системе координат XYZ , связанной с концентратором потока, напряженность магнитного поля в точке (x_0, y_0, z_0) бесконечно тонкого отрезка линейного тока, расположенного в точке с координатами $x, y =$

$y_l, z = z_l$, имеет следующий вид

$$H_y = \frac{H_0}{\rho_{\perp}^2} \left(\frac{x_2 - x_0}{(\rho_{\perp}^2 + (x_2 - x_0)^2)^{1/2}} - \frac{x_0 - x_1}{(\rho_{\perp}^2 + (x_0 - x_1)^2)^{1/2}} \right) (z_0 - z_l),$$

$$H_z = -\frac{H_0}{\rho_{\perp}^2} \left(\frac{x_2 - x_0}{(\rho_{\perp}^2 + (x_2 - x_0)^2)^{1/2}} - \frac{x_0 - x_1}{(\rho_{\perp}^2 + (x_0 - x_1)^2)^{1/2}} \right) (y_0 - y_l),$$
(15)

где $\rho_{\perp} = ((y_0 - y_l)^2 + (z_0 - z_l)^2)^{1/2}$. Предыдущие выражения получены из выражений (14) линейным сдвигом системы координат.

Для вычисления значения магнитного поля от одной плоскости разреза необходимо провести интегрирование выражения (15) по всем линейным проводникам, т.е. по переменной z_l с учетом того, что x_1 зависит от z_l . Магнитное поле от двух плоскостей разреза определяется суммой данных выражений, при этом для нижней плоскости координата y_l переходит в $-y_l$, и вектор плотности тока меняет направление.

Значение магнитного поля в цилиндрической системе координат, связанной с концентратором потока, в точке наблюдения поля (r_0, ϕ_0) определяется как

$$H_r(r_0, \phi_0) = H_y \sin \phi,$$

$$H_{\phi}(r_0, \phi_0) = H_y \cos \phi,$$

где H_y – значение магнитного поля от двух плоскостей разреза.

Таким образом, магнитное поле концентратора потока определяется суммой предыдущих выражений и выражений (11,12,13).

4 Разностные уравнения

Одним из универсальных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных является метод конечных разностей – метод сеток [?, ?].

Сущность данного метода состоит в следующем – область непрерывного и изменения аргументов заменяется дискретным множеством точек, называемым сеткой. Расчетную функцию непрерывных аргументов заменяют на функцию дискретных аргументов, определяемую в узлах сетки. Частные производные, входящие в дифференциальный оператор, аппроксимируются соответствующими разностными отношениями. Начальные и граничные условия также заменяются соответствующими разностными уравнениями. В результате получается система алгебраических уравнений, называемая разностной схемой.

4.1 Построение расчетной сетки

Первым вопросом, возникающим при решении поставленной задачи, является вопрос о выборе сеточной области, а именно выбор размера ячейки сетки.

Размеры ячейки сетки теоретически определяется требованием, чтобы величина остаточного члена в выражениях, служащих для приближенной замены дифференциального оператора разностным, была меньше допустимой при решении погрешности. Однако практически такой путь в большинстве случаев нецелесообразен из-за того, что вычислить величину остаточного члена точно нельзя, а при использовании приближенной оценки сверху, обычно настолько преувеличивают эту величину, что полученный размер ячейки сетки является слишком малым. Поэтому более приемлемый для практического построения сетки путь – выбрать размер ячейки таким образом, чтобы достаточно точно решить поставленную задачу [?]. Т.е. количество ячеек сетки между определяющими элементами является достаточным для того, чтобы не вносить в вычисления существенной ошибки, связанной с дискретизацией задачи. Для уменьшения погрешности, связанной с внешней границей, формирующей расчетную область, число ячеек сетки между границей и другими элементами должно быть достаточно большим (проблема открытой границы расчетной области для метода сеток). Для преодоления данной проблемы можно использовать сетку с неравномерным шагом, увеличивающимся по направлению к внешней границе. Хотя на практике, такой прием не всегда является удобным, т.к. усложняет алгоритм построения сетки и алгоритм обхода ее узлов.

Другим моментом, не связанным напрямую с проблемой пространственного разрешения в поставленной задаче (характерные минимальные размеры проводников и т.д.), является задача динамического разрешения скин-слоя в нестационарном случае. Данная проблема связана в первую очередь с временным характером процесса проникновения магнитного поля в проводник и длительностью приложенного к проводнику импульсного напряжения.

Глубина скин-слоя δ для нестационарного процесса в момент времени t определяется как [?]

$$\delta = \sqrt{\kappa t}, \quad (16)$$

где $\kappa = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$, σ – удельная электрическая проводимость материала проводника.

Рассмотрим критерий устойчивости для разностных схем. Для того,

чтобы схема бала устойчива, необходимо выполнение следующего условия

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{c^2 \Delta t}{4\pi\sigma h^2} \quad , \\ \eta &\in]0 \dots \infty[\quad , \end{aligned} \quad (17)$$

где h – величина пространственного шага сетки, Δt – временной шаг.

Определим глубину скин-слоя в шагах сетки разностного уравнения, для этого подставим в выражение (16) время t , определенное из критерия устойчивости разностных схем (17)

$$\delta = 2h\sqrt{n\eta}, \quad (18)$$

где n – номер временного шага. Из вида выражения $\delta/h = 2\sqrt{n\eta}$ видно

- $n = 1$, тогда $\delta/h = 2\sqrt{\eta}$ и очевидно, что для хорошего разрешения скин-слоя необходимо, чтобы его глубина укладывалась на нескольких шагах пространственной сетки. При использовании явных схем для этого необходимо выбирать максимально возможное значение величины η .
- $n \neq 1$, тогда $\delta/h = 2\sqrt{n\eta}$. Видно, что последнее отношение величин глубины скин-слоя и шага сетки может принимать сколь угодно большие значения, и ограничение величины шага сетки h определяется чисто пространственным разрешением на размере проводников.

4.2 Разностные уравнения для проводников с током

Для численного решения задачи проникновения магнитного поля в проводник используется пятиточечная схема типа крест с равномерным шагом сетки для каждого направления в отдельности (рис. 4). Дискретизация уравнения (1) для i,k ячейки сетки приводят к разностному выражению для плотности тока

$$j_{i,k}^n = -\frac{i}{4\pi\sigma\Delta r^2} \left(\frac{i}{i-1/2} A_3^n - 2\frac{i^2}{i^2-1/4} A_0^n + \frac{i}{i+1/2} A_4^n + \lambda \left(A_1^n - 2A_0^n + A_2^n \right) \right), \quad (19)$$

где введено следующее обозначение $\lambda = \Delta r^2/\Delta z^2$, $\Delta r, \Delta z$ – шаги по радиальному и продольному направлениям, n – номер временного шага.

Для нахождения значения вектор-потенциала на следующем временном шаге используется явная по времени разностная схема. При этом

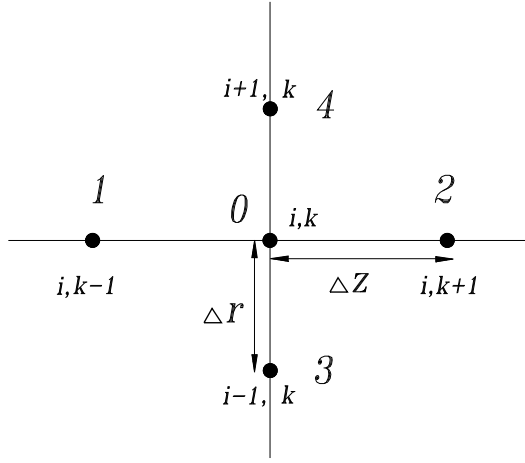


Рис. 4: Пятиточечный шаблон типа крест.

Значения вектор-потенциала на следующем временном слое вычисляются явно, исходя из значений вектор-потенциала и плотности тока, взятых на предыдущем временном слое

$$A_{i,k}^{n+1} = A_{i,k}^n + \frac{c\Delta t}{\sigma} \left(\sigma E_{i,k}^n - j_{i,k}^n \right), \quad (20)$$

где Δt – величина шага по времени.

Для того, чтобы явная разностная схема была устойчива, необходимо выполнение следующего условия [?]

$$\eta = \frac{c^2 \Delta t (1 + \lambda)}{4\pi\sigma \Delta r^2} \leq 1/2, \quad (21)$$

где введено соотношение $\lambda = (\Delta r / \Delta z)^2$. Данное условие приводит к жесткому ограничению величины шага по времени.

Часто, на практике, проводники состоят из металлов с разной электрической проводимостью, например медь и нержавеющая сталь. Удельная электрическая проводимость данных металлов отличается примерно в 50 раз. В этом случае использование явной схемы для нахождения значений вектор-потенциалов является нецелесообразным, т.к. условие устойчивости приводит к очень жесткому ограничению на величину шага

по времени в области проводников с низкой электрической проводимостью (см. выражение 21). В таких случаях удобнее пользоваться неявной схемой по времени, т.к. последняя не имеет ограничений типа (21) и является всегда устойчивой.

В любом случае при отдавании предпочтения явной или неявной временной схеме следует исходить из конкретных условий поставленной задачи и геометрии проводников (например, относительно малое число узлов сетки с низкой электрической проводимостью по сравнению с числом узлов сетки с высокой проводимостью).

4.3 Разностное уравнение Лапласа

Для аппроксимации разностного уравнения Лапласа (4) используется пятиточечный шаблон с равномерными шагами $\Delta r, \Delta z$ по радиальному и продольному направлениям (рис. 4). Для i, k ячейки сетки разностное уравнение Лапласа определяется соотношением

$$\frac{i}{i-1/2}A_3 - 2\frac{i^2}{i^2-1/4}A_0 + \frac{i}{i+1/2}A_4 + \lambda(A_1 - 2A_0 + A_2) = 0. \quad (22)$$

Граничными условиями для предыдущего разностного уравнения являются значения вектор-потенциала в граничных точках проводника, а также граничные условия на внешней границе расчетной области.

Применив разностную аппроксимацию (22) ко всем узлам сетки, не содержащим проводников, получим систему линейных алгебраических уравнений. Такая система решается одним из итерационным методом [?, ?]. Наиболее простым методом в реализации алгоритма расчета является метод пошаговой верхней релаксации (SOR) с ускоряющим множителем. Итерационное соотношение имеет следующий простой вид

$$A_{i,k}^{t+1} = (1 - \omega)A_{i,k}^t + \omega A_{i,k}^*, \quad (23)$$

где A^{t+1} – значения вектор-потенциала на новом итерационном шаге, A^t – значения вектор-потенциала на предыдущем итерационном шаге, ω – ускоряющий множитель, $A_{i,k}^*$ – значения вектор-потенциала, вычисленные для текущей итерации по выражению (22).

Применение ускоряющего множителя позволяет ускорить процесс итерационной сходимости метода в несколько десятков раз. Для того, чтобы итерационный процесс был сходящимся, значение ускоряющего множителя должно быть меньше 2.

Скорость итерационной сходимости SOR метода в большой степени зависит от правильного выбора ускоряющего множителя. В литературе, посвященной итерационным методам решения систем алгебраических уравнений, отмечено, что SOR метод сходится при всех значениях ω , удовлетворяющих следующему условию $0 < \omega < 2$. Наиболее быстрая сходимость метода будет иметь место при значениях ускоряющего множителя ω , называемого оптимальным ω , где $1 < \omega < 2$. Для достижения наибольшей скорости сходимости чрезвычайно важно использовать ω близкое к ω .

Существует несколько методов для определения оптимального ускоряющего множителя [?, ?]. Но ни один из этих методов не является универсальным. Реально, задача определения ω является не менее сложной проблемой, и требующей не менее трудоемких вычислений, чем собственно решение уравнения Лапласа. Поэтому для практического определения величины ускоряющего множителя ω , часто используются его аналитические оценки. Следуя работе [?], оптимальный ускоряющий множитель выбирают следующим образом

$$\omega = 2 / (1 + \sqrt{1 - \rho^2}), \quad (24)$$

где $\rho \simeq 1 - \pi^2 / 2n^2$, n – число шагов сетки по одному из направлений. Если ускоряющий множитель ω выбран меньше чем оптимальный ускоряющий множитель, определяемый геометрией расчетной задачи, то скорость сходимости итерационного метода падает. В случае, если значения ускоряющего множителя большего ω , количество итераций резко увеличивается и становится даже больше чем при использовании итерационного метода без всякого ускорения процесса сходимости.

Важнейшим параметром, определяющим время, затраченное на решение задачи, является количество операций для данного метода. Полное число операций, необходимое для решения численной задачи с точностью 10^{-p}

$$T_{SOR} = N_1 N_2 \frac{p}{3} N_2^{1/d}, \quad (25)$$

где N_1 – число операций на один узел сетки, N_2 – число узлов сетки, d – размерность задачи.

Альтернативным методом свободным от описанной выше проблемы (значения ускоряющего множителя вычисляются непосредственно в процессе итерационного решения численной задачи) является Чебышевское ускорение. При использовании Чебышевского ускорения применяется нечетно-четный метод обхода узлов сетки. Значение ускоряющего мно-

жителя изменяется на каждой половине обхода узлов сетки и определяется выражениями

$$\begin{aligned}\omega^{(0)} &= 1, \\ \omega^{(1/2)} &= 1/(1 - \rho^2/2), \\ \omega^{(t+1/2)} &= 1/(1 - \rho^2\omega^{(t)}/4),\end{aligned}\tag{26}$$

где $t = 1/2, 1, \dots, \infty$ – номер итерации.

Применение нечетно-четного метода обхода узлов сетки возможно и для SOR метода с ускоряющим множителем, определяемым выражением (24). При этом наблюдается небольшое ускорение сходимости.

4.4 Измельчение ячеек сетки

Как правило, знание значения вектор-потенциала с большой точностью требуется не во всей расчетной области, а только в некоторых узлах сетки, например вблизи проводников с током или в узлах с наибольшим искривлением геометрии. В этом случае нет необходимости вести расчет с одинаковой точностью во всех узлах сетки, можно вести расчет лишь до некоторой удовлетворительной точности, а потом воспользоваться методом измельчения узлов сетки для некоторой расчетной области. Например, для грубого расчета можно использовать крупную сетку как некое начальное приближение для итерационного процесса на более мелкой сетки.

Применение данного подхода значительно сокращает время полного расчета с заданной, повышенной точностью. Например, если сетка измельчается в $2 \div 8$ раз, то скорость сходимости полного итерационного процесса может быть увеличена более чем на два порядка. При этом применения Чебышевского ускорения становится наиболее привлекательно.

При измельчении сетки значения в новых, дополнительных узлах вычисляются как средние арифметическое значение между соседними первоначальными узлами. Более правильным подходом является вычисление значения в дополнительных узлах сетки с явным учетом разностного уравнения Лапласа. Хотя, как правило, в случае использования не декартовой системы координат учет точных разностных уравнений ведет к дополнительным операциям для разностного оператора Лапласа, а число итераций при этом снижается незначительно. Процесс вычисления значений в дополнительных узлах сетки следует рассматривать как еще одну итерацию в общем итерационном процессе решения разностного уравнения Лапласа.

Используя метод изменения ячеек сетки, желательно выбирать начальную сетку таким образом, чтобы наибольшее число граничных узлов для мелкой сетки совпадало с узлами начальной, крупной сетки. Данное условие значительно уменьшает число итераций после измельчения сетки, т.к. все значения расчетной функции в граничных узлах являются вычисленными на данный момент, а уточняются только значения во внутренних узлах сетки.

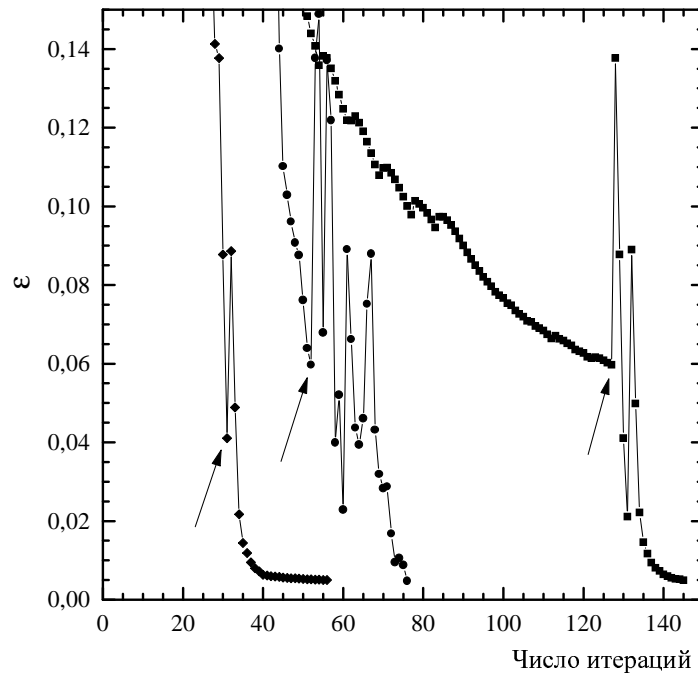


Рис. 5: Поведение относительной ошибки вычислений ε при итерационном процессе. Конечная точность 0.5%. □ – без ускоряющего множителя, ● – SOR метод, ◇ – специальный метод.

При применении метода измельчения сетки следует отметить поведение величины относительной ошибки в зависимости от числа итераций. На рис. 5 приведено относительное изменение величины вектор-потенциала на каждой итерации. Номер итерации, при котором происходит изменения сетки отмечен на том же рисунке. Из данного рисунка видно, что относительное изменение величины ошибки вычислений сра-

зу же после изменения сетки носит характер итерационной сходимости с применением ускоряющего множителя, т.е. резкое увеличение относительной ошибки вычислений, которая носит осцилляционный характер (кривая, отмеченная кружками) [?].

Для уменьшения числа итераций был применен следующий прием, вначале для вычисления приближенного значения вектор-потенциала на крупной сетке использовался SOR метод с нечетно-четным обходом узлов и Чебышевским ускоряющим множителем. После достижения некоторого значения точности вычислений, сетка измельчалась во всей расчетной области, и вычисления продолжались тем же методом без использования ускоряющего множителя. Данный прием позволяет избежать увеличения величины погрешности вычислений при измельчении сетки, что естественным образом увеличивает скорость сходимости метода. Скорость сходимости, которую можно видеть на рис. 5 (кривая, отмеченная ромбиками) увеличивается больше чем в 2 раза.

Использование других итерационных и ускоряющих сходимость методов дает более высокую теоретическую скорость сходимости, но при этом количество "накладных" операций на одну итерацию увеличивается [?, ?, ?]. Заметим при этом, что отмеченные в литературе ускоряющие процесс сходимости методы исследованы только для прямоугольной геометрии расчетной области. Вопрос выбора итерационных методов с более высокой теоретической скоростью сходимости требует дополнительных исследований с учетом их конкретной реализацией и конкретной расчетной геометрией.

4.5 Схема решений разностных уравнений

Схема решений разностных уравнений (19,20,22) состоит в следующем (см. рис. 6). Сначала задается начальное значение вектор-потенциала внутри пространства из условия отсутствия магнитного поля в проводниках в момент включения внешнего напряжения.

Далее на каждом временном шаге, используя разностные уравнения (19 и 20), определяются значения вектор-потенциала внутри проводников. Если в расчетной области находятся проводники, на которые не подается напряжение внешнего, стороннего источника, в этом случае значение напряженности поля сторонних источников E следует положить нулю.

После чего, по разностным уравнениям (22), с использованием SOR метода и Чебышевского ускоряющего множителя (26) с некоторой приемлемой точностью находится значение вектор-потенциала в области отсутствия проводников. После этого расчетная сетка измельчается в 2

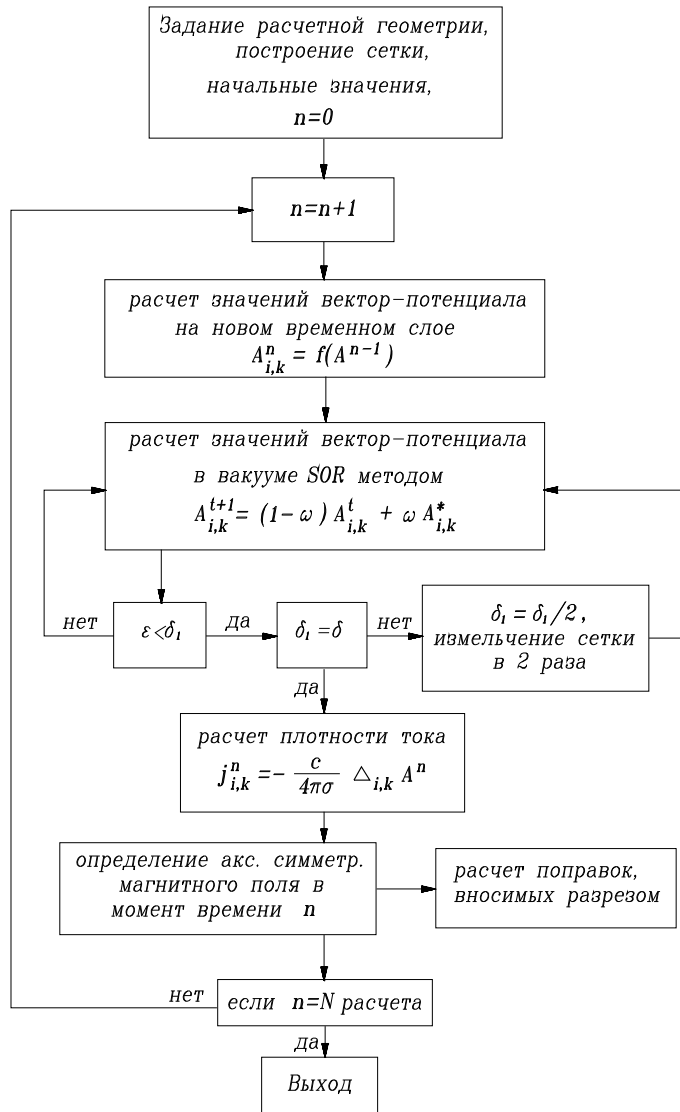


Рис. 6: Блок схема программы расчета магнитного поля.

раза. Значения вектор-потенциала в дополнительных точках пересчитывается через уже известные значения в соседних узлах. Далее происходит расчет с новой, повышенной точностью. На этом, значение вектор-потенциала для данного временного шага является вычисленным.

После того как значение вектор-потенциала является вычисленным во всей расчетной области, определяется значение плотности тока во всех точках, принадлежащих проводникам.

Если требуется, то для данного момента времени по разностным аналогам выражения (10) вычисляются значение аксиально симметричного магнитного поля, а так же поправки, вносимые разрезом. Для вычисления поправок магнитного поля нужно воспользоваться выражениями, приведенными в третьей части (11,12,13), с условием того, что аксиально симметричная часть уже вычислена. Для уменьшения числа операций значения эллиптических интегралов могут быть предварительно затабулированы или можно воспользоваться их полиномиальными аппроксимациями, дающими погрешность не более $2 \cdot 10^{-8}$ [?].

После чего, процесс вычисления всех величин повторяется заново уже на следующем временном слое.

5 Измерения прототипа импульсного магнита

5.1 Макет концентратора потока

Таблица 1: Геометрические размеры макета концентратора потока.

минимальный внутренний радиус	10 мм
максимальный внутренний радиус	80 мм
максимальный внешний радиус	130 мм
длина концентратора потока	140 мм
угол раскрыва внутреннего конуса	60°

Для проведения измерений импульсного магнитного поля, создаваемого концентратором потока, был изготовлен его макет в увеличенном размере. Масштаб 5:1 был выбран для того чтобы проводить измерения магнитного поля в районе минимальной апертуры, где поле достигает максимальной величины. Параметры макета приведены в таблице 1. Мо-

дель концентратора потока запитывалась полусинусоидальным импульсом тока длительностью 56 мксек. На данном макете индуктивными датчиками проводились измерения продольного и поперечного магнитного поля в плоскости щели разреза. Результаты измерений продольной составляющей магнитного поля вдоль оси макета приведены на рис. 7. Из приведенного рисунка видно, что максимум магнитного поля смещен относительно положения минимальной апертуры примерно на 0.5 ее радиуса. Спадание поля носит резкий характер, отношение значения магнитного поля в середине макета концентратора потока к значению максимального магнитного поля составляет 0.1, данное отношение на задней плоскости макета составляет 0.03.

На рис. 8 приведено распределение перпендикулярной составляющей магнитного поля в плоскости разреза в нескольких точках вдоль продольной оси макета. Перпендикулярная составляющая нормирована на значения продольной составляющей магнитного поля в данной точке на оси. Наличие разреза приводит к тому, что на оси макета возникает пер-

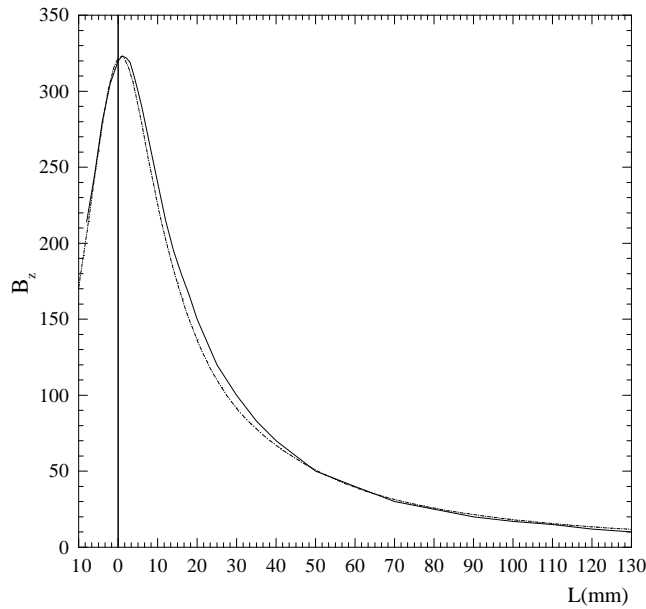


Рис. 7: Продольное магнитное поле на оси макета. 1 – измерения, 2 – расчет.

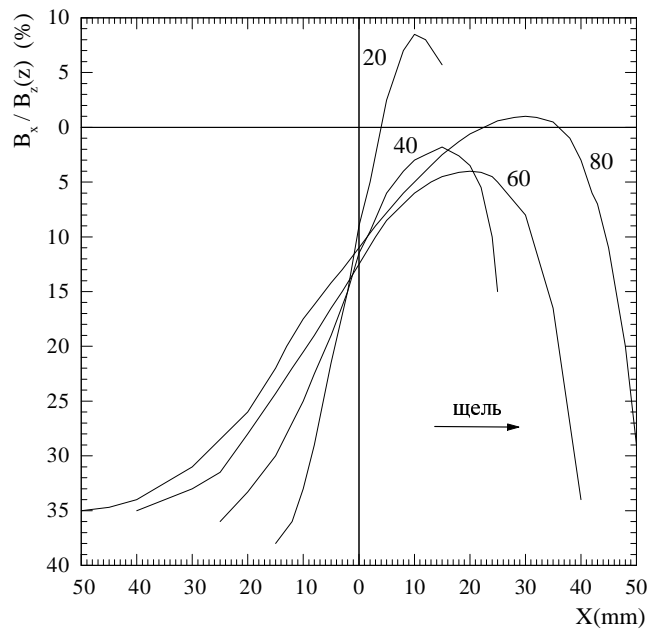


Рис. 8: *Распределение перпендикулярного магнитного поля.*

пендикулярная составляющая магнитного поля. Смещение перпендикулярной составляющей поля от нулевого значения приблизительно равно $9\% \div 12\%$ и мало зависит от положения вдоль оси макета, и радиуса внутреннего конического сечения a_r . Искажения, вносимые щелью разреза, становятся заметными примерно на половине радиуса внутреннего конического сечения. Направление щели разреза отмечено на рисунке стрелкой.

Азимутальное распределение радиальной составляющей магнитного поля для нескольких расстояний до оси приведено на рис. 9. Напряженность магнитного поля, вываливающегося из щели разреза, примерно в $1.3 \div 1.4$ раз больше напряженности неискаженного поля. При приближении к щели разреза искажения возрастают по амплитуде, но при этом становится меньше область вносимого искажения. Так при расстоянии до оси 10 полуширина составляет 45° , а при $20 \div 25$ примерно $17^\circ \div 10^\circ$.

По описанному в предыдущем разделе алгоритму были проведены расчеты импульсного магнитного поля макета концентратора потока. Про-

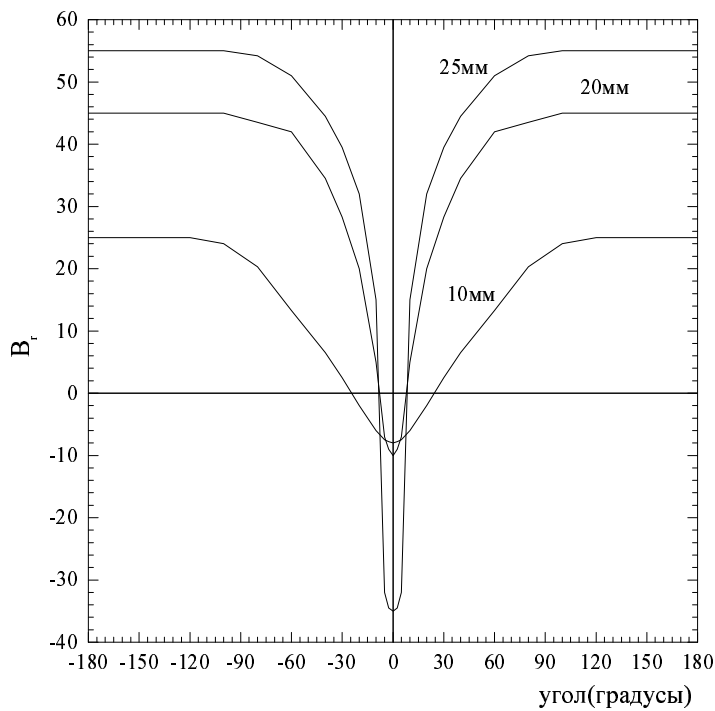


Рис. 9: Азимутальное распределение радиальной составляющей магнитного поля для нескольких расстояний до оси.

дольная составляющая расчетного поля на оси приведена на рис. 7 (кривая отмечена точками). Видно, что расчеты распределения поля довольно хорошо совпадают с измерениями. Наибольшее отклонение составляет примерно 9% и находится в $15 \div 30$ от положения минимальной апертуры макета.

5.2 Прототип импульсного магнита

Основные недостатки концентратора потока хорошо известны и подробно описаны [?, ?, ?]. К ним можно отнести:

- низкая энергетическая эффективность [?], т.к. рабочий ток концентратора протекает по длинной цепи, включающей рабочую полость, разрез и цилиндрическую поверхность большого диаметра, причем

- эквивалентный ток по первичной обмотке также большого диаметра;
- низкая функциональная эффективность – поток рассеяния таких устройств всегда сравним с потоком рабочей полости, что является следствием большого диаметра обмотки [?, ?];
 - стремление импульсного магнитного поля разорвать концентратор, что приводит к возникновению механических напряжений в материале на внутренней поверхности малого радиуса. Рабочее магнитное поле ограничивается при этом не пределом текучести материала, а гораздо меньшими механическими напряжениями, при которых развиваются усталостные явления с последующим разрушением концентратора при циклических нагрузках.

Предлагаемое устройство (рис.10) свободно от изложенных недостатков концентратора потока. Задача повышения энергетической эффективности решается уменьшения путей протекания тока; задача повышения механической устойчивости магнита решается устранением открытой щели.

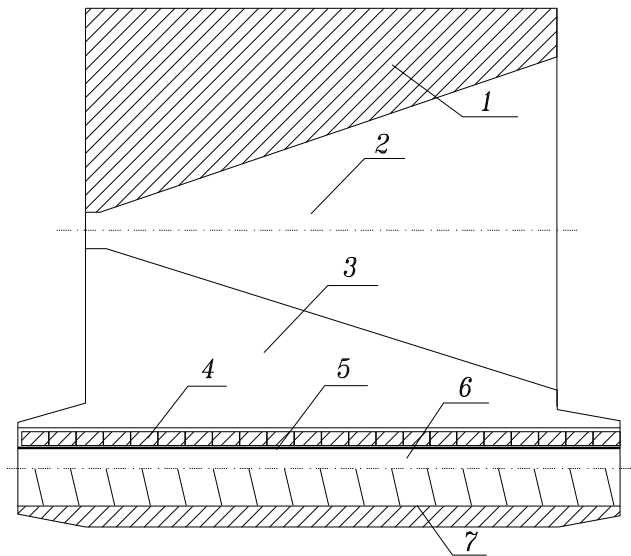


Рис. 10: Схематическое изображение прототипа импульсного магнита.

В массивном проводящем цилиндре 1 (рис. 10) имеется коническая полость 2, соединенная разрезом 3 с цилиндрической полостью 6, в которой размещена обмотка 4. Поскольку индуктивность рабочей полости 2 составляет единицы наногенри, диаметр цилиндрической полости 6 равен всего нескольким сантиметрам, причем целесообразно использовать обмотку с ферромагнитным сердечником, что повышает энергетическую эффективность устройства. Из соображений изоляции и механической устойчивости обмотки целесообразно выточенную из медной трубы обмотку 4 размещать в цилиндрической полости 6 на жестком изоляционном каркасе 5. При этих решениях отпадает необходимость использования изоляции обмотки (зазор 7 является воздушным). Разрез 3 целесообразно выполнять методом электроискровой обработки – в этом случае удастся получить разрез толщиной всего $0.2 \div 0.3$ мм.

При разряде конденсаторной батареи (на рисунке не показана) на первичную обмотку 4 вторичный ток трансформатора протекает по внутренней поверхности цилиндрической полости 6, разрезу 3 и конической полости 2, формируя в ее узкой части сильное магнитное поле.

Из-за более короткого пути протекания рабочих токов рассматриваемое устройство энергетически более совершенно чем классический концентратор потока [?, ?, ?]. Кроме того известно, что индуктивность рассеяния цилиндрической обмотка трансформатора пропорциональна ее диаметру, поэтому с уменьшением диаметра обмоток трансформатор становится совершеннее и энергетически, и функционально. Механически предлагаемое устройство также совершеннее концентратора потока, т.к. не содержит открытого разреза.

Геометрические размеры прототипа импульсного магнита представлены в таблице 2.

Таблица 2: *Геометрические размеры прототипа импульсного магнита.*

минимальный внутренний радиус	2 мм 2.5 мм
максимальный внутренний радиус	33.5 мм
максимальный внешний радиус	200 мм
длина концентратора потока	75 мм
угол раскрыва внутреннего конуса	45°
радиус цилиндрической полости	20 мм
число витков обмотки	12

Прототип запитывался полусинусоидальным импульсным током длительностью 15 мксек. Максимальное значение достигнутого магнитного поля составляет 100 кГс, при этом величина тока составляет 70 кА для прототипа с минимальным радиусом апертуры 2 мм, и 100 кА для минимального радиуса апертуры 2.5 мм.

Измерения проводились на воздухе без принудительного охлаждения тела устройства. За несколько часов работы с максимальным полем и частотой повторения импульсов 50 Гц, тело прототипа нагревалось примерно до $40 \div 50^\circ\text{C}$. Температура примерно равномерно распределена по всему телу, за исключением области минимальной апертуры, где наблюдался очень сильный разогрев. К сожалению, точно измерить температуру не удалось, можно лишь с уверенностью сказать, что она составляла не менее $150 \div 200^\circ\text{C}$.

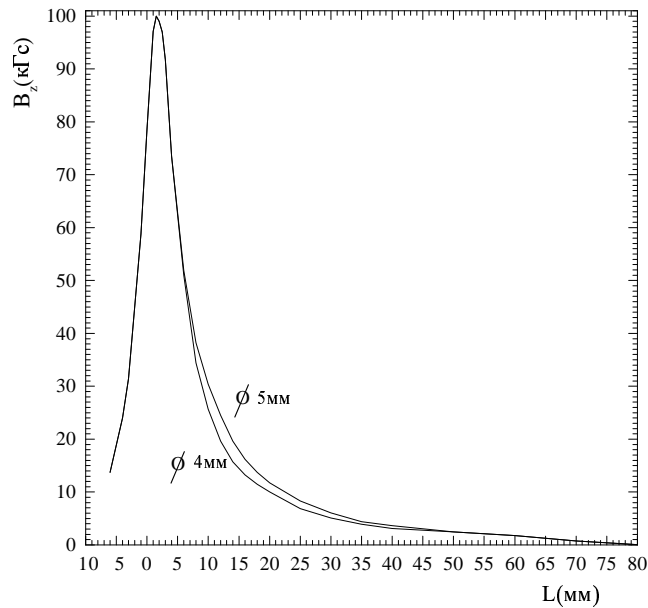


Рис. 11: Продольное магнитное поле прототипа импульсного магнита.

Область с такой температурой приблизительно миллиметрового размера создает проблему для достижения магнитных полей с высокой напряженностью, т.к. при увеличении поля энергия, выделяющаяся в виде тепла, увеличивается квадратично. Поэтому ограничения для достиже-

ния полей высокой напряженности связаны не с пределом текучести материала, а с нагревом кромок в районе максимума поля. Использование вставок в тело устройства из других материалов приведет к еще большему нагреву и только усугубит положение.

Продольная составляющая измеренного поля приведена на рис 11 для значения минимальной апертуры 4 мм и 5 мм. Энергоемкость рабочей полости магнита примерно 10 Дж при начальной энергоемкости конденсаторной батареи около 30 Дж для минимальной апертуры 5 мм. Данная энергоемкость является еще приемлемой и не вызывает проблем для создания источника питания импульсного магнита. Поэтому за образец был выбран вариант со значением минимальной апертуры 5 мм.

На торце прототипа отношение полей к максимальному полю составляет примерно 0.01 для обоих случаев.

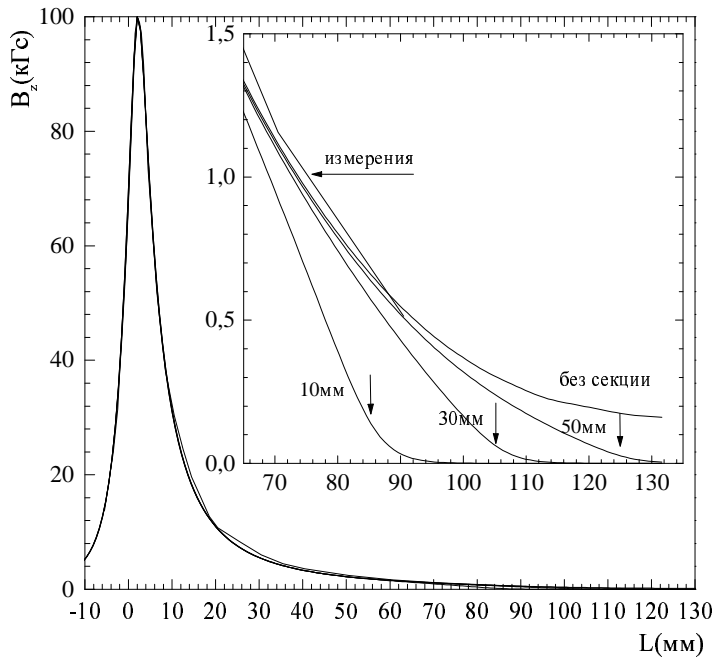


Рис. 12: Продольное магнитное поле прототипа импульсного магнита с близко расположенной ускоряющей секцией.

Измерения и расчеты, сделанные для учета близко расположенной к торцу магнита ускоряющей секции рис 12, показали, что магнитное поле резко падает до нулевого значения на расстоянии примерно половины радиуса апертуры ускоряющей секции. Напряженность магнитного поля в этом месте $0.7 \div 1$, что составляет около $14\% \div 20\%$ от напряженности ведущего поля соленоида сопровождения.

6 Заключение

Успешная реализация конструкции прототипа импульсного магнита, а так же достигнутое, в ходе его испытаний, наибольшее значение магнитного поля для данного типа устройств – 100 кГс, позволяют использовать его как образец для изготовления согласующего устройства для конверсионного узла инжекционного комплекса ВЭПП-5.

Реализация алгоритма численного расчета концентратора потока позволяет использовать рассчитанные поля для проведения численных оценок числа позитронов, инжектируемых в охладитель-накопитель. Так же оптимизировать взаимное расположения таких элементов конверсионного узла как конверсионная мишень, импульсный магнит для сбора позитронов, ускоряющая секция для достижения наибольшего захвата позитронов.

Литература

- [1] *Г. Кнопфель*. Сверхсильные импульсные поля. М.: Мир, 1972.
- [2] *Уилсон, Сривастова*. Конструкция эффективных концентраторов потока для получения больших импульсных магнитных полей. ПНИ, 1965, N8, с.18.
- [3] *Д. Паркинсон, Б. Малхол*. Получение сильных магнитных полей. М.: Атомиздат, 1971.
- [4] *И.В. Юрченко*. ЖТФ XLIII, 1973, с.1866.
- [5] *Н.И. Дойников*. ЖТФ 1973, т.45, N5, с.897.
- [6] *И.В. Юрченко*. ЖТФ, 1974, т.44, N8, с.1569.
- [7] *А.В. Новохатский*. Численный расчет квазистационарных магнитных полей с учетом нагрева проводников. Припринт ИЯФ 79-8.
- [8] *Л.Д. Ландау Е.М. Лифшиц*. Теория поля, М.: Наука, 1989.
- [9] *С.К. Годунов, В.С. Рябенский*. Разностные схемы, М.: Наука, 1973.
- [10] *А.А. Самарский, А.В. Гулин*. Численные методы, М.: Наука, 1989.
- [11] *В.И. Юрченко*. Расчет двумерных квазистационарных полей на ЭВМ, Припринт ИЯФ 94-73.
- [12] *В. Вазов, Дж. Форсайт*. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, М.: 1963.
- [13] *В.П Ильин*. Разностные методы решения эллиптических уравнений, Н.: НГУ 1970.
- [14] *Р. Хокни, Дж. Иствуд*. Численное моделирование методом частиц, М.: Мир, 1987.
- [15] *Р. Рихтмаер, К. Мортон*. Разностные методы решения краевых задач, М.: Мир, 1972.
- [16] *Г. Корн, Т. Корн*. Справочник по математике, М.: Наука, 1968.
- [17] Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.