



Сибирское отделение Российской Академии наук
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им.Г.И. Будкера

*Р. 90
1999*

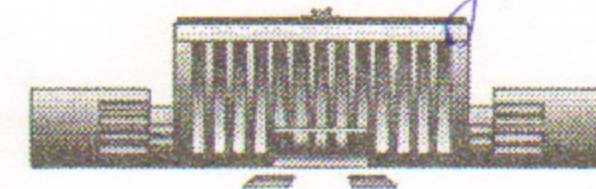
А.А. Кулаков, П.В. Мартышкин

РАЗРАБОТКА ПОЗИТРОННОГО ИСТОЧНИКА
НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ УСКОРИТЕЛЕЙ

ИЯФ 99-26

<http://www.inp.nsk.su/publications>

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
Физики СО РАН СССР
ИНВ № *2.2.1.*



НОВОСИБИРСК
1999

V

Сибирское отделение Российской Академии наук

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И. Будкера

РАЗРАБОТКА ПОЗИТРОННОГО ИСТОЧНИКА НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ УСКОРИТЕЛЕЙ

А.А. Кулаков, П.В. Мартышкин

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090, Новосибирск, Российская Федерация

Аннотация

В данной работе рассмотрены основные вопросы проектирования и оптимизации позитронного источника на основе линейных ускорителей. Приведены аналитические зависимости и численные моделирование основных параметров источника. Анализ качества пучка позитронов выполнен с помощью метода Монте-Карло.

РАЗРАБОТКА ПОЗИТРОННОГО ИСТОЧНИКА НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ УСКОРИТЕЛЕЙ

На основе рассмотренных параметров разработана модель позитронного источника на основе линейных ускорителей. Приведены аналитические зависимости основных параметров источника с учетом особенностей конструкции. Анализ качества пучка позитронов выполнен с помощью метода Монте-Карло.

ИЯФ 99-26

Positron source design based on linear accelerators

A.A. Kulakov, P.V. Martynkin

This paper are considered a common problem of positron source design. Analytical dependences and numerical simulation are presented to estimate positron yield of different electron beam energy. Energy angle and radial positron distributions after conversion target are presented.

Analytical dependences of AD matching device acceptance with nonuniform field change and reduce of positron number transport due to bunch phase slippage are described.

Fast method of matching device analysis with different parameters is suggested. Algorithm of positron number estimation with respect bunch energy spread is also described.

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера

НОВОСИБИРСК

1999

РАЗРАБОТКА ПОЗИТРОННОГО ИСТОЧНИКА НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ УСКОРИТЕЛЕЙ

А.А. Кулаков П.В. Мартышкин

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090, Новосибирск, Российская Федерация

Аннотация

В данной работе рассмотрены общие вопросы, возникающие при проектировании позитронного источника на основе линейных ускорителей. Приведены аналитические зависимости и численные моделирования, позволяющие оценить общее количество позитронов, выходящих из конверсионной мишени, для разных энергий первоначального сгустка электронов. Рассмотрены характерные энергетические, угловые и радиальные распределения позитронов после конверсионной мишени.

На основе рассмотренных ограничений предложен быстрый и наглядный метод анализа и сравнений согласующих устройств с разными параметрами. Приведена процедура численной оценки количества собираемых позитронов с учетом обеспечения требуемого энергетического разброса в позитронном сгустке при инъекции в охладитель-накопитель.

Positron source design based on linear accelerators

A.A. Kulakov P.V. Martyshkin

This paper are considered a common problems of positron source design. Analytical dependencies and numerical simulations are presented to estimate positron yield of differ electron bunch energy. Energy angle and radial positron distributions after conversion target are presented.

Analytical dependents of AD matching device acceptance with nonadiabatic field change and reduce of positron number recapture due-to bunch phase slippage are described.

Fast method of matching device analysis with differ parameters is suggested. Algorithm of positron number estimation with request bunch energy spread is also described.

©Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера

Оглавление

1 Введение	4
2 Электрон-позитронная конверсия	5
2.1 Общий выход позитронов	6
2.2 Оптимальная толщина конверсионной мишени	7
2.3 Спектральные распределения	10
2.4 Радиальные распределения позитронов	13
3 Согласующее устройство	15
3.1 Уравнения движения	16
3.2 Инвариант	18
3.3 Решение уравнений движения	19
3.4 Условие захвата частиц	21
4 Квадратичные формы акцептанса согласующих устройств	22
4.1 Угловой акцептанс согласующих устройств	23
4.2 Радиальный акцептанс	25
5 Фазовые ограничения	27
6 Количественные оценки собираемых позитронов	31
7 Приложение А	34
8 Приложение Б	36

1. Введение

Источники позитронов существуют во всех крупных лабораториях мира, работающих со встречными электрон-позитронными пучками. Строительство нового поколения ускорительных установок с высокой светимостью выдвигает требования создания высокоинтенсивных источников позитронов, которые призваны обеспечить новые установки необходимым для их нормальной работы количеством частиц.

Наиболее распространенная и общепринятая схема позитронного источника базируется на использовании линейных ускорителей [1-4]. Данная схема позитронного инжектора обычно включает в себя два линейных ускорителя. Первый линейный ускоритель предназначен для получения, формирования и ускорения электронного сгустка до требуемой энергии конверсии. Далее расположен конверсионный узел, который служит для получения и формирования позитронного сгустка. Второй линейный ускоритель ускоряет до требуемой энергии уже сформированные позитронные сгустки.

При создании конверсионного узла возникает ряд задач, которые обычно группируют следующим образом:

1. Электрон-позитронная конверсия – выбор материала и толщины конвертора, исходя из оценки общего количества позитронов, выходящих из конверсионной мишени, их радиального, углового и энергетического распределений.
2. Формирование позитронного сгустка – выбор устройства для согласования фазового объема позитронного сгустка с акцептансом ускоряюще-фокусирующего канала линейного ускорителя.
3. Оптимизация динамики позитронного сгустка – выбор положения конвертора относительно ускоряющей структуры, выбор параметров ускоряющих и фокусирующих полей.

Общая схема конверсионного узла для отмеченного выше способа реализации представлена на рис. 1 из которой видно, что следующее разделение на ряд отдельных задач сделано, исходя из последовательности размещения конкретных объектов в конверсионном узле.

Отметим, что разделение проблемы создания конверсионного узла на несколько отдельных задач носит чисто условный характер, который призван лишь выделить основные моменты. Так например, пункты 1 и 2 ни в коем случае не являются совершенно самостоятельными задачами, а должны решаться совместно, что и будет показано ниже.

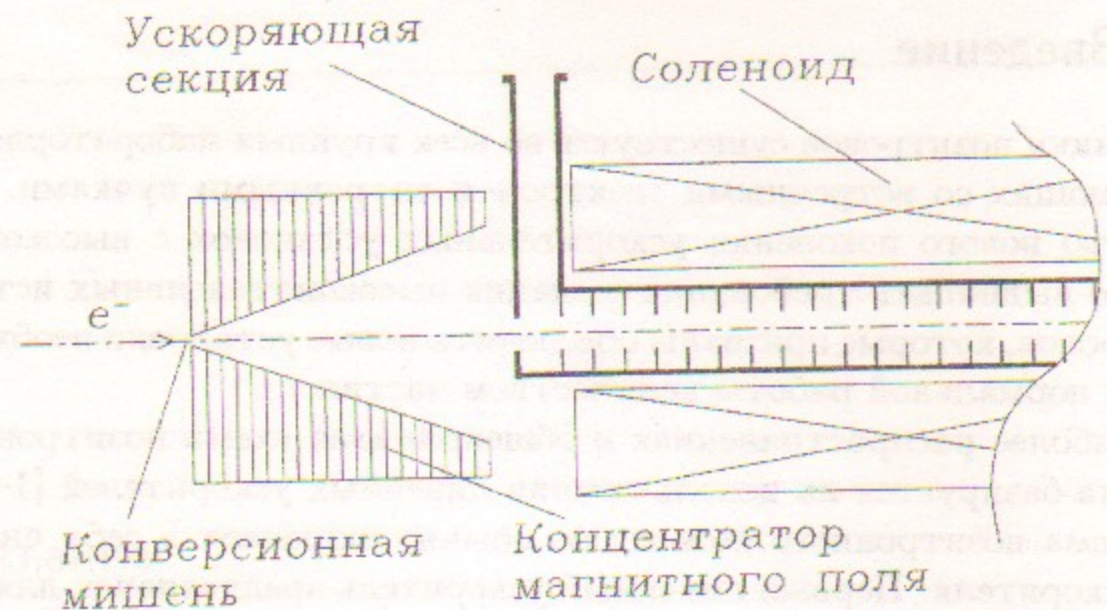


Рис. 1: Общая схема конверсионного узла

Для собирания позитронов с энергией от нескольких МэВ до нескольких десятков МэВ в основном применяются два типа согласующих устройств с продольным магнитным полем. Основное внимание будет уделено устройству с адиабатически изменяющимся магнитным полем, хотя такое название является чисто условным и зависит от величины магнитного поля, а также от его длины (более подробно этот вопрос будет рассмотрен в отдельном разделе данной работы).

Рассмотрение третьего пункта, а именно совместная динамика позитронов в фокусирующих магнитных полях и в ускоряющем поле бегущей СВЧ-волны, требует привлечения численных методов и в данной работе рассматриваться не будет.

2. Электрон-позитронная конверсия

Источники позитронов, эксплуатируемые во всех лабораториях мира, используют для электрон-позитронной конверсии твердометаллические мишени с высоким атомным номером вещества. Обычно в качестве вещества мишени используют вольфрам или его сплавы с добавками других металлов, изменяющими механические свойства материала. Поэтому для моделирования электромагнитных ливней в качестве вещества конверсионной мишени был выбран вольфрам. Моделирование электромагнитных ливней в мишенях различной толщины проводилось хорошо извест-

ным и распространенным пакетом библиотек GEANT, разрабатываемых в CERN [5].

2.1. Общий выход позитронов

Для выбора энергии первоначального электронного сгустка, который в дальнейшем будет использоваться для получения позитронов, следует исходить из зависимости полного количества позитронов, вышедших вперед из конверсионной мишени в максимуме электромагнитного ливня.

Существующие в литературе аналитические зависимости, описывающие приблизительное количество вторичных частиц в максимуме ливня, позволяют сделать оценки только для электронов. Количество вторичных электронов в максимуме ливня на один электрон в первоначальном сгустке определяется следующей зависимостью [6,7]

$$N^{e^-} = 0.31 \frac{E/\varepsilon_0}{(\ln(E/\varepsilon_0) - 0.1)^{1/2}}, \quad (1)$$

где E — энергия первичных электронов, ε_0 — критическая энергия вещества мишени.

Для сравнения количества электронов, полученного с использованием аналитической зависимости (1) с количеством позитронов, выходящих из конверсионной мишени, было проведено численное моделирование электромагнитных ливней. Результаты сравнения представлены на рис. 2 и рис. 3, при этом количество электронов (зависимость (1)) и позитронов отличаются примерно в 7 раз для всего диапазона энергии. Таким образом, для оценки числа позитронов, выходящих из мишени можно использовать аналитическую зависимость (1), нормированную на 7.

Из приведенных рисунков видно, что поведение зависимости числа родившихся позитронов от энергии первоначальных электронов носит линейный характер. В области энергий электронов 700 МэВ ÷ 1 ГэВ происходит изменение угла наклона кривой. При энергии первичных электронов больше 1 ГэВ выход позитронов из мишени составляет примерно 2.2 позитрона на ГэВ, при энергии ниже 700 МэВ составляет примерно 2.6 позитрона на ГэВ. При этом следует отметить, что энергия, при которой число родившихся позитронов равно числу частиц в первоначальном электронном сгустке, примерно составляет 400 МэВ. Все численные моделирования ливней проводились при условии, что поперечный размер мишени много больше характерного поперечного размера ливня.

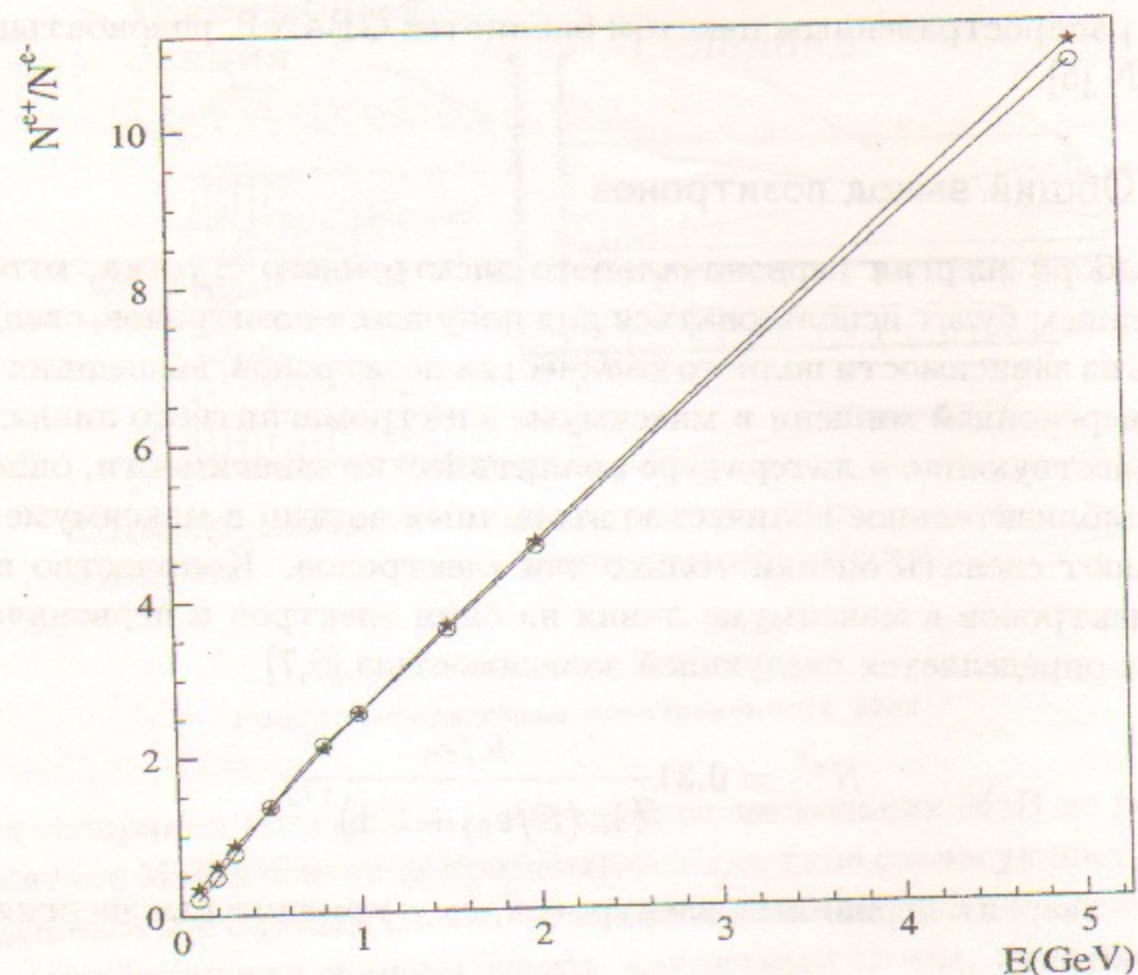


Рис. 2. Зависимость нормированного числа родившихся позитронов от энергии первоначального электронного сгустка. о - численное моделирование, * - зависимость (1), нормированная на 7.

2.2. Оптимальная толщина конверсионной мишени

Наиболее важным вопросом, который возникает в дальнейшем, является правильный подбор толщины конверсионной мишени при фиксированном значении энергии первичных электронов. Толщину конвертора при которой число электронов и позитронов в ливне достигает максимума называют оптимальной толщиной конвертора. Приблизительный выбор оптимальной толщины конвертора L_{opt} для значений энергий первичного электронного сгустка в диапазоне 0.2÷2 ГэВ может быть сделан на основе следующего эмпирического соотношения [8]

$$L_{opt} = 0.51 \cdot \ln E - 0.6, \quad (2)$$

где E - энергия первичных электронов в МэВ-ах, L_{opt} приведена в радиационных длинах вещества (X_0). Также в литературе можно встретить аналитическую зависимость, описывающую значение оптимальной толщины мишени, которая не имеет ограничений для энергии первичных

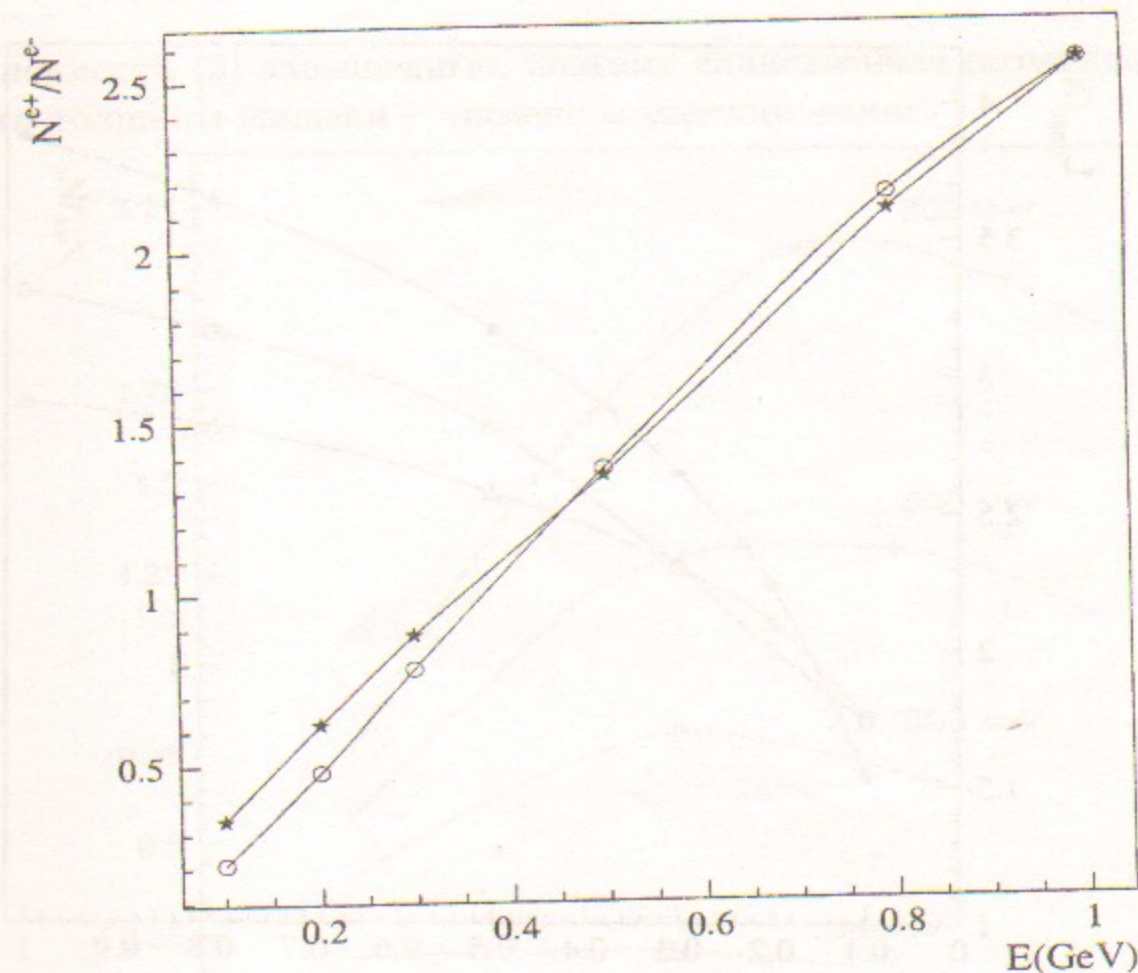


Рис. 3. Зависимость нормированного числа родившихся позитронов от энергии первоначального электронного сгустка. о - численное моделирование, * - зависимость (1), нормированная на 7.

электронов [6,7]

$$L_{opt} = 1.01(\ln(E/\epsilon_0) - 1), \quad (3)$$

где E - энергия первичных электронов, ϵ_0 - критическая энергия вещества мишени.

Оценки оптимальной толщиной конвертора, сделанные по выражениям (2,3) для разных энергий электронного сгустка, приведены на рис. 4 вместе с результатами численного моделирования электромагнитных ливней. Зависимость (2) дает более близкий результат к численному моделированию, чем зависимость (3). Это объясняется тем, что первая из них специально подбиралась, в то время как вторая была получена на основе аналитической модели электромагнитных ливней в веществе. Приведенные на рис. 4 результаты численного моделирования соответствуют толщине конверсионной мишени, при которой наблюдается максимальное число выходящих вперед позитронов.

Данные результаты были получены следующим образом, строилась

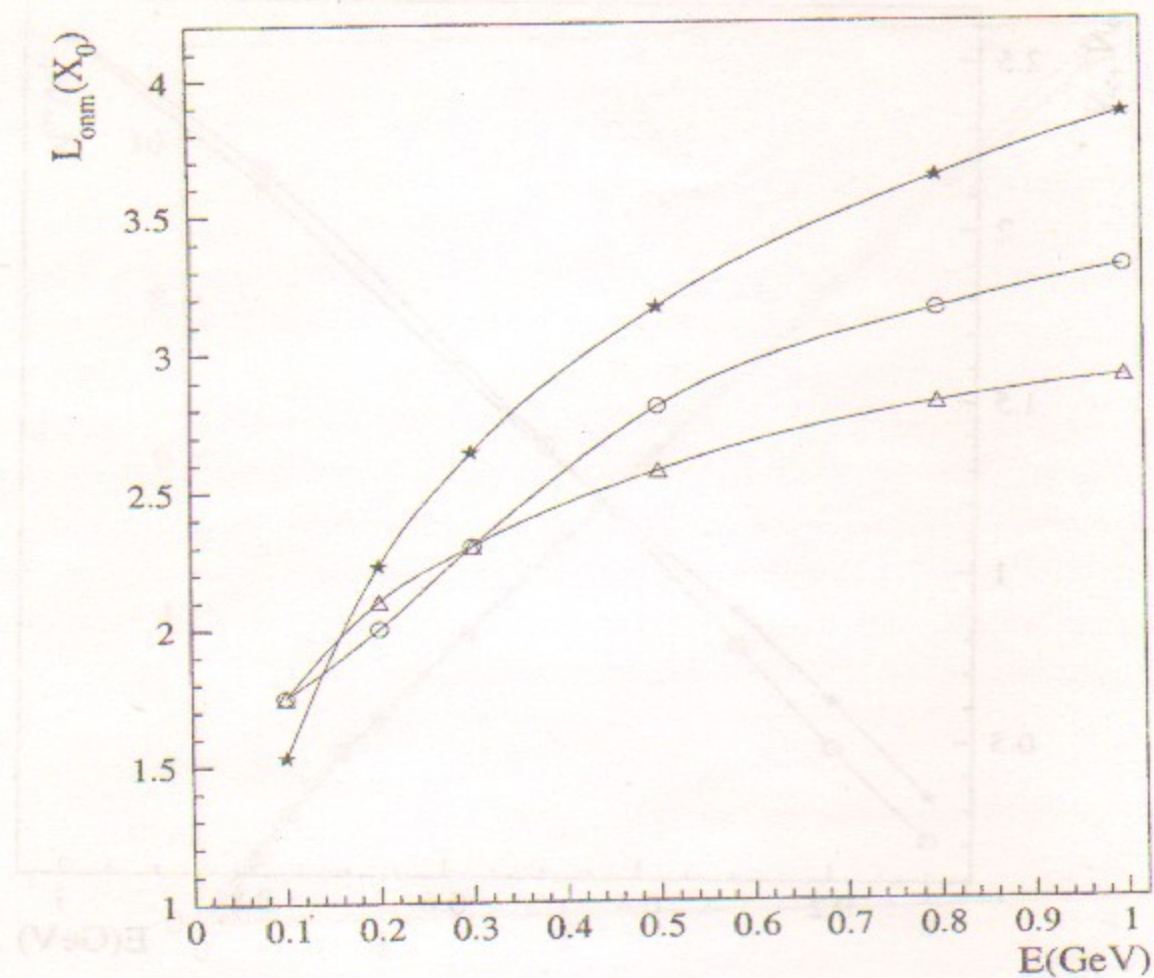


Рис. 4. Зависимость оптимальной толщины конвертора L_{opt} в радиационных длинах от энергии первоначального электронного сгустка. \circ - численное моделирование, Δ - эмпирическая зависимость (2), $*$ - зависимость (3). X_0 - радиационная длина материала мишени.

зависимость количества родившихся позитронов от толщины конверсионной мишени (см. рис. 5). На данном рисунке отражены результаты численного моделирования, проведенные для нескольких энергий электронного сгустка меньших 1 ГэВ. На этом же рисунке отмечены значения оптимальной толщины мишени, полученные использованием выражений (2) и (3), что дает возможность сравнить число позитронов при данных значениях толщины конверсионной мишени.

Из рис. 5 видно, что хотя оптимальная толщина мишени при использовании выражений (2), (3) и различна (см. рис 4), но количество частиц при этом имеет практически тоже самое значение. Таким образом, для более точной оценки оптимальной толщины конверсионной мишени можно брать среднее значение между толщинами, полученными при использовании выражений (2) и (3).

Для энергии электронного сгустка выше 2 ГэВ эмпирическая зависимость (2) дает заниженные результаты оптимальной толщины мишени,

а зависимость (3) завышенные, поэтому единственная возможность для оценки толщины мишени - численное моделирование.

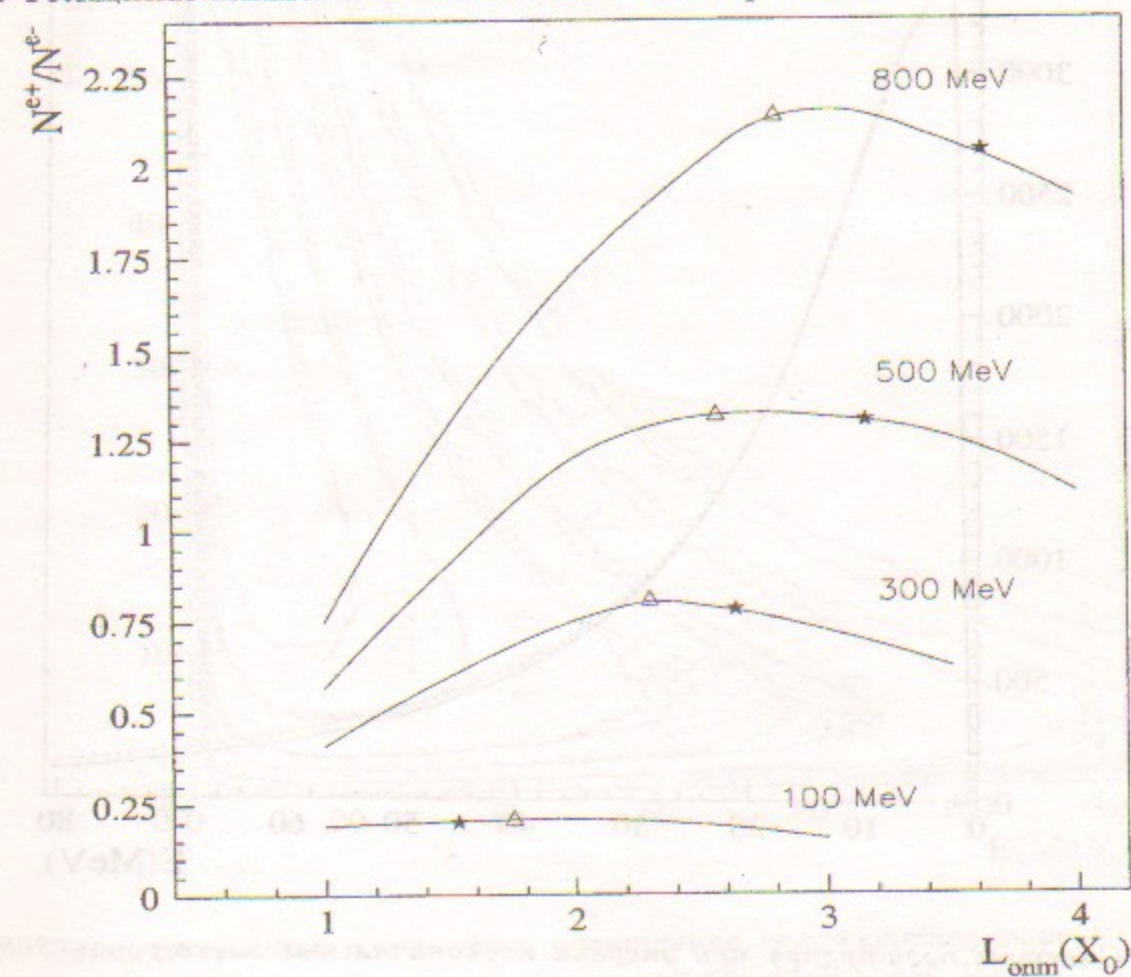


Рис. 5. Зависимость родившихся позитронов от толщины конверсионной мишени в рад. ед. длины при нескольких энергиях первоначального электронного сгустка. Δ - эмпирическая зависимость (2), $*$ - зависимость (3).

2.3. Спектральные распределения

В работах, посвященных созданию конверсионных систем, достаточно детально рассмотрены спектры позитронов и их характерные угловые распределения [8,9]. При этом следует отметить тот факт, что при использовании конверсионной мишени с толщиной близкой к оптимальной они имеют практически одинаковую зависимость для разных значений энергии первоначальных электронов.

В качестве примера на рис. 6 представлены спектры позитронного сгустка для трех значений энергии первоначальных электронов. Сплошная линия соответствует энергии электронов 300 МэВ, прерывистая 800 МэВ. Для удобства сравнения количество позитронов, соответствующие сгустку с энергией 800 МэВ было приведены к количеству позитронов

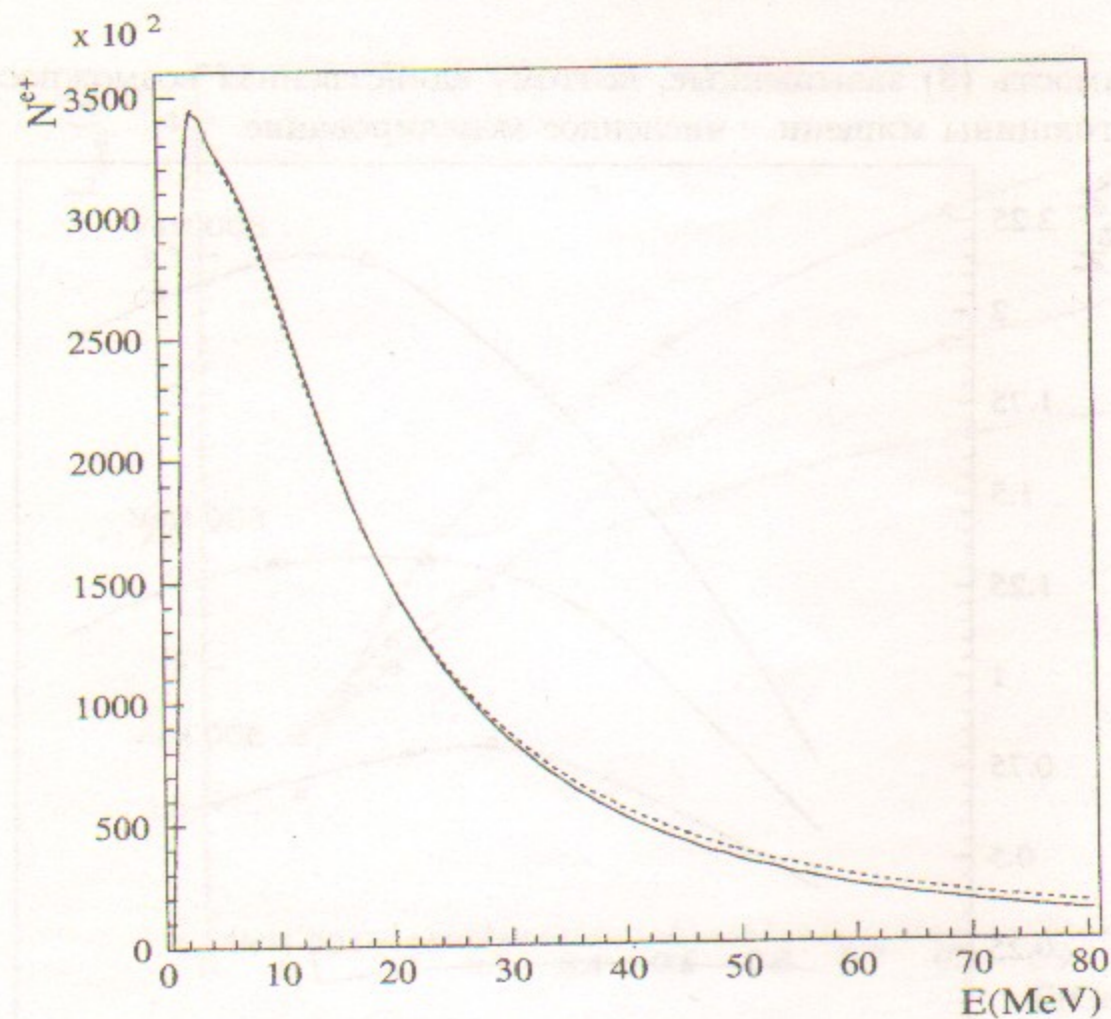


Рис. 6. Спектры позитронов при энергии первоначальных электронов 300 МэВ и 800 МэВ и оптимальных толщинах мишени.

сгустке с энергией 300 МэВ. В силу своего интегрального характера, отличия в спектрах позитронных сгустков являются незаметными. Поэтому такие зависимости могут строиться скорее во вспомогательных целях для того, чтобы иметь основу для проведения более детального анализа, либо при использовании мишеней с толщиной заметно меньшей чем оптимальная.

Для более детального анализа необходимо рассматривать плотность позитронов, вышедших из мишени, на плоскости их углов вылета из конверсионной мишени и энергий. Такие данные являются более информативными, а при возникновении необходимости в отмеченных в предыдущем пункте интегральных характеристиках, последние могут быть легко получены путем суммирования по одному из направлений.

Приведем рис. 7, на котором отражены линии равенства распределения плотности позитронов после конверсионной мишени с оптимальной толщиной 2.5 рад. длины для энергии электронов 300 МэВ. Для сравнения на этом же рисунке пунктиром приведены линии равенства плотно-

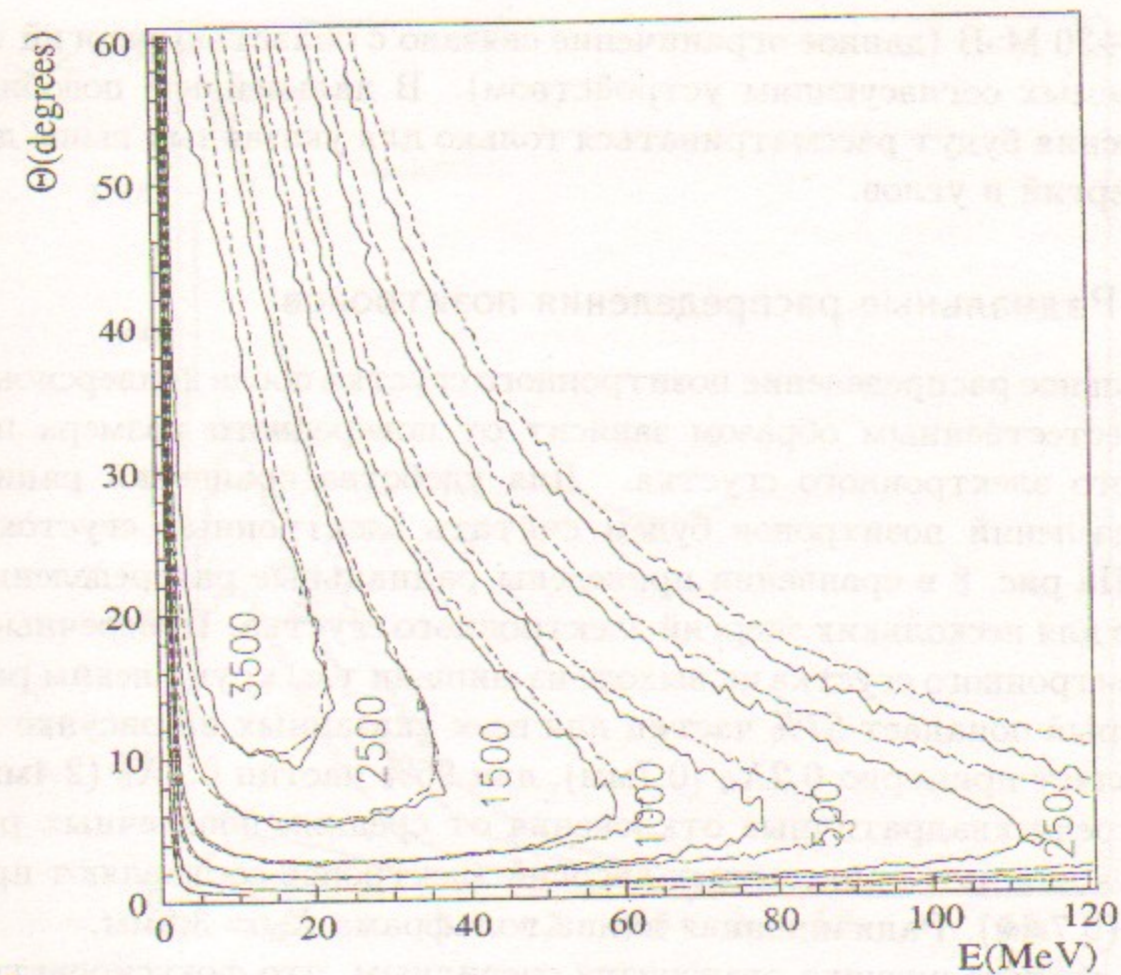


Рис. 7. Линии равенства плотности позитронов соответствующие 10^7 первоначальных электронов с энергией 300 МэВ и 800 МэВ.

сти позитронов при оптимальной толщине мишени 3.2 рад. длины и энергии электронного сгустка 800 МэВ. Для удобства сравнения количество позитронов для энергии 800 МэВ было приведено к значениям количества позитронов с энергией первичного электронного сгустка 300 МэВ. Фактор нормировки составляет 0.37. Как было отмечено выше, при использовании мишени с толщиной близкой к оптимальной, распределения плотности позитронов при разных энергиях первичных электронных сгустков практически совпадают в области энергий позитронов до нескольких десятков МэВ.

Плотность позитронов имеет область с максимальными значениями в диапазоне энергий 4÷20 МэВ и углов более чем 10° . Из данного рисунка видно, что, в виду малого относительного количества частиц иметь информацию о распределении позитронов с энергиями выше чем 60 МэВ и углами большими 40° в общем не столь необходимо. Более того, из рассуждений, которые будут приведены во второй, части станет ясно, что реально можно ограничиться максимальной энергией для позитро-

нов 25÷30 МэВ (данное ограничение связано с областью энергий и углов, собираемых согласующим устройством). В дальнейшем подобные распределения будут рассматриваться только для указанных выше диапазонов энергий и углов.

2.4. Радиальные распределения позитронов

Радиальное распределение позитронного сгустка после конверсионной мишени естественным образом зависит от поперечного размера первоначального электронного сгустка. Для удобства сравнения радиальных распределений позитронов будем считать электронный сгусток точечным. На рис. 8 в сравнении приведены радиальные распределения позитронов для нескольких энергий электронного сгустка. Поперечные размеры позитронного сгустка на выходе из мишени т.е. круг с неким радиусом в который попадает 67% частиц для всех указанных на рисунке энергий составляет примерно $0.2X_0$ (0.7мм), для 96% частиц $0.7X_0$ (2.4мм). При этом среднеквадратичные отклонения от средних поперечных размеров сгустка для всех приведенных энергий электронов составляют примерно $0.2X_0$ (0.7мм). Радиационная длина вольфрама $X_0 = 3.5$ мм.

Из данного рисунка становится очевидным, что фокусировать первоначальный электронный сгусток на конверсионную мишень в пятно поперечного размера много меньшего чем поперечный размер позитронного сгустка после конверсионной мишени, не имеет особого смысла. Подобные попытки могут привести лишь к удорожанию системы фокусировки электронного сгустка, а также усложнить проблемы, связанные с тепловым повреждением мишени.

Второй фактор, который также определяет размер электронного сгустка, фокусируемого на конверсионную мишень – тепловое повреждение мишени. Локальное выделение тепла в веществе мишени в основном происходит в области малого размера с характерными значениями $0.5X_0 \cdot \langle r^{e^+} \rangle$. Такие малые размеры области мгновенного тепловыделения приводят к возникновению больших температурных градиентов, что в свою очередь приводит к возникновению механических перенапряжений в веществе мишени.

Измерения проведенные в SLAC показали, что ограничения параметров первичного электронного сгустка, фокусируемого на мишень, связанные с механическими разрушениями в веществе мишени, определяют

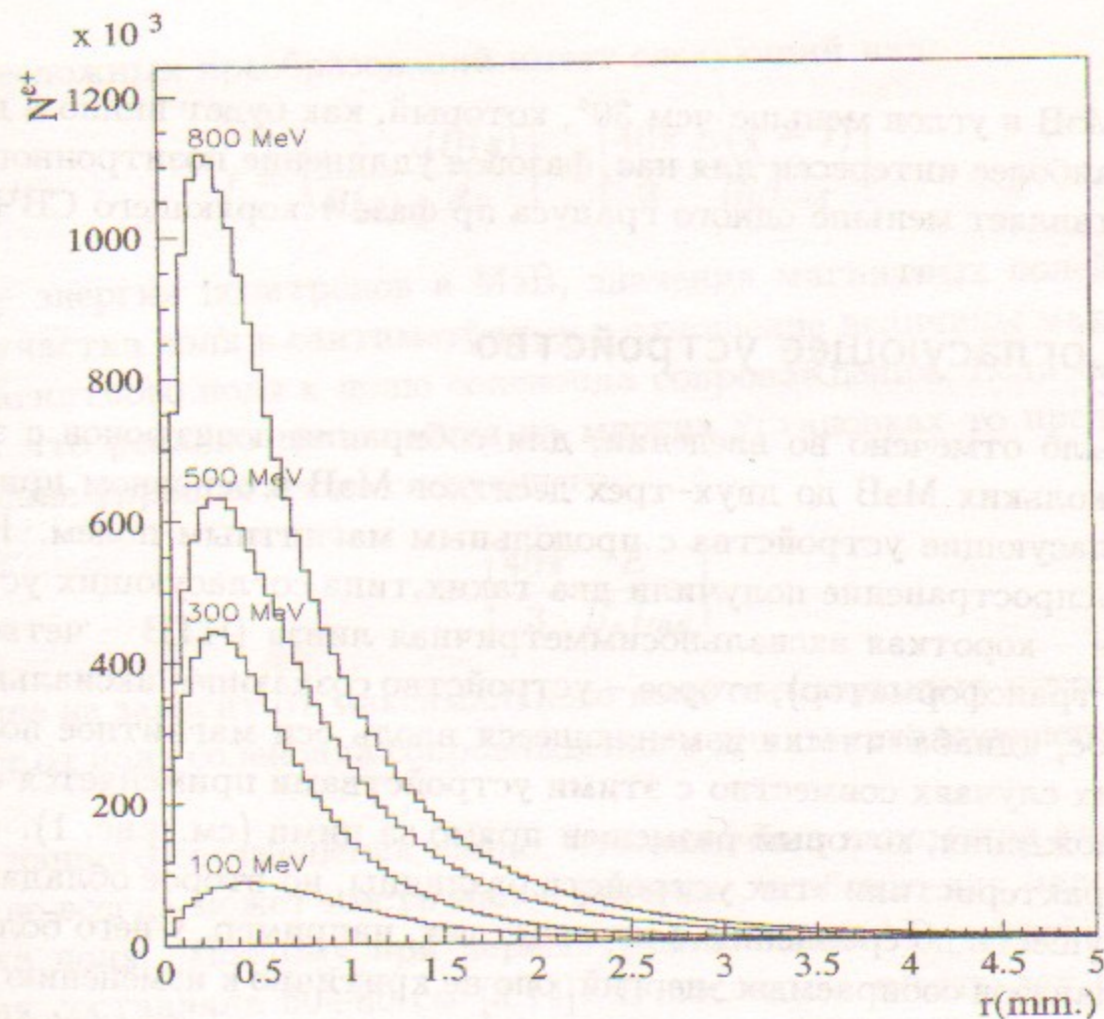


Рис. 8: Радиальные распределения позитронов.

ся следующим соотношением [10,11]

$$\frac{N^{e^-} E^{e^-}}{\pi \sigma^2} \leq 1.2 \cdot 10^{12} [\text{ГэВ}/\text{мм}^2],$$

где N^{e^-} – число электронов в первичном сгустке, E^{e^-} – энергия электронов в сгустке, σ – размер электронного сгустка на мишени.

Увеличение размера электронного сгустка на конверсионной мишени позволяет снять проблемы теплового повреждения. Однако, необходимо иметь в виду, что при этом будут наблюдаться потери частиц при собирании согласующим устройством, т.к. углы собирания позитронов зависят от расстояния от оси с которым частица покинула конверсионную мишень [12].

Процесс многократного рассеяния ведет к увеличению времени пролета позитронов с различными начальными энергиями и углами в мишени. Расчеты, проведенные с учетом данного фактора, показали, что удлинение позитронного сгустка для 10 см линейных ускорителей является незначительным. Так для диапазона начальных энергий позитронов

5÷30 МэВ и углов меньше чем 30°, который, как будет видно в дальнейшем наиболее интересен для нас, фазовое удлинение позитронного сгустка составляет меньше одного градуса пр фазе ускоряющего СВЧ-поля.

3. Согласующее устройство

Как было отмечено во введении, для собирания позитронов с энергией от нескольких МэВ до двух-трех десятков МэВ в основном применяются согласующие устройства с продольным магнитным полем. Наибольшее распространение получили два таких типа согласующих устройств. Первое – короткая аксиальносимметричная линза (ЧТВ – четвертьволновый трансформатор), второе – устройство создающее аксиальносимметричное, адиабатически изменяющееся вдоль оси магнитное поле (АД). В обоих случаях совместно с этими устройствами применяется соленоид сопровождения, который размещен прямо за ними (см. рис. 1).

Характеристики этих устройств различны, но второе обладает рядом преимуществ по сравнению с первым: так, например, у него более широкий диапазон собираемых энергий, оно не критично к изменению профиля поля. Поэтому основное внимание будет уделено именно этому устройству, хотя его название является чисто условным и зависит от величины магнитного поля, а также от его длины.

Впервые адиабатическое устройство было применено на Стенфордском линейном ускорителе (SLAC) и описано Р.Д.Хелмом [13]. Так же описание характеристик данного устройства может быть найдено в работе [7]. Для рассмотрения адиабатического устройства принимают следующую зависимость спада продольного магнитного поля вдоль оси $B(z)$ от максимального значения B_0 , до значения поля соленоида сопровождения B_s

$$B(z) = \frac{B_0}{1 + \mu z}, \quad (4)$$

где $\mu = (B_0/B_s - 1)/L_{ad}$, L_{ad} – длина участка с адиабатическим изменением поля. Данный закон изменения магнитного поля вдоль оси выбран для того, чтобы удовлетворять его медленному (адиабатическому) изменению.

Условие адиабатичности изменения можно сформулировать следующим образом – относительное малое изменение продольного магнитного поля на длине шага ларморовской спирали. Параметр адиабатичности ϵ

после несложных преобразований имеет следующий вид:

$$\epsilon = \left| \frac{\lambda}{B(z)} \frac{dB(z)}{dz} \right| = \left| \frac{40\pi}{3} \frac{E(\chi - 1)}{B_0 L_{ad}} \right|,$$

где E – энергия позитронов в МэВ, значения магнитных полей в кГс, длина участка поля в сантиметрах, χ – отношение величины максимального магнитного поля к полю соленоида сопровождения. Если параметр $\chi \gg 1$, что реально достигается на многих установках то предыдущее выражение упрощается до следующего

$$\epsilon = \left| \frac{40\pi}{3} \frac{E}{B_s L_{ad}} \right|,$$

и вообще не зависит от максимального поля согласующего устройства, а зависит от поля соленоида сопровождения и длины согласующего устройства.

Из данного соотношения видно, что величина параметра адиабатичности не всегда может иметь малое значение, особенно для малой длины участка поля. Поэтому при первых реализациях АД устройства длина поля составляла 60÷80 см [3,14]. В последние десять лет получило распространение тоже устройство с укороченной длиной поля, вплоть до 15 см это, естественно, потребовало точного знания характеристик такого устройства. В ряде работ, например [9], прямо указывается, что такое согласующее устройство с укороченной длиной поля имеет промежуточные характеристики между короткой аксиальносимметричной линзой и адиабатическим устройством. В следующих разделах будет проведен анализ подобного устройства без всяких допущений относительно адиабатичности поведения магнитного поля.

3.1. Уравнения движения

Для рассмотрения динамики позитронов в магнитных полях будем использовать Лагранжев формализм. При этом лагранжиан частицы, движущейся в магнитном поле, имеет следующий вид [15]

$$L(\vec{\beta}, \vec{x}) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + e \vec{A} \vec{\beta},$$

где \vec{A} – магнитный вектор-потенциал, соответствующий данному полю, $\vec{\beta}$ – обобщенная скорость частицы, нормированная на скорость света, \vec{x} – обобщенная координата.

Вектор-потенциал в случае аксиально-симметричного магнитного поля можно характеризовать только одной азимутальной компонентой, при этом остальные две его компоненты равны нулю. Для восстановления магнитного поля и вектор-потенциала во всем пространстве необходимо знать только распределение аксиальной составляющей магнитного поля вдоль оси [16]. Удерживая в разложении по радиусу только члены первого порядка, для азимутальной составляющей вектор-потенциала запишем

$$A_\phi(\rho, z) = B(z)\rho/2.$$

Так как функция Лагранжа не зависит от обобщенной азимутальной координаты, то соответствующий этой циклической координате обобщенный импульс является интегралом движения и имеет следующий вид

$$P_\phi = \rho \cdot p_\phi + \frac{e}{c} \rho A_\phi(\rho, z) = \text{const.} \quad (5)$$

Везде по тексту прописными буквами будут обозначаться обобщенные импульсы, а строчными — обычные.

Для удобства рассмотрения системы уравнений движения воспользуемся декартовой системой координат, т.к. в ней уравнения имеют симметричный вид. Перейдем к продольной координате z как переменной интегрирования и получим следующую систему уравнений движения:

$$\begin{aligned} x'' - \omega y' - \frac{\omega'}{2} y &= 0 \\ y'' + \omega x' + \frac{\omega'}{2} x &= 0, \end{aligned}$$

где введено следующее обозначение $\omega = \frac{eB(z)}{pc}$, p — полный импульс частицы.

Сделаем переход во вращающуюся систему координат с ларморовским углом χ_L , матрица преобразования которой выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \chi_L - y \sin \chi_L \\ \eta &= x \sin \chi_L + y \cos \chi_L. \end{aligned} \quad (6)$$

В результате такого перехода система уравнений движения распадается на два следующих независимых уравнения, каждое из которых представляет уравнение гармонических колебаний с частотой $\Omega = \frac{eB(z)}{2pc}$ и может

быть решено совершенно независимо от другого

$$\begin{aligned} \xi'' + \Omega^2 \xi &= 0 \\ \eta'' + \Omega^2 \eta &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для решения данных уравнений нужны начальные условия, которые легко получить, воспользовавшись соотношениями (6). Для начальных координат получим $\xi_0 = x_0$, $\eta_0 = y_0$, для углов $\xi'_0 = x'_0 - \Omega y_0$, $\eta'_0 = y'_0 + \Omega x_0$.

3.2. Инвариант

Для уравнения гармонических колебаний Гамильтониан является инвариантом движения и хорошо известен [17]. Поэтому для системы уравнений (7) при движении в поле соленоида запишем инвариант в виде

$$I_s = \frac{(\xi'^2 + \eta'^2)}{\Omega_s^2} + (\xi^2 + \eta^2), \quad (8)$$

где величина Ω_s — частота колебания частицы в поле соленоида во вращающейся системе координат.

Если теперь воспользоваться соотношениями (6) и подставить соответствующие значения для углов и координат во вращающейся системе координат в выражение инварианта (8), то последнее примет следующий вид

$$I_s = \frac{(P_x^2 + P_y^2)}{\Omega_s^2} + (x^2 + y^2). \quad (9)$$

Воспользовавшись интегралом движения (5), несложно показать, что имеет место следующее равенство, связывающее обобщенные импульсы в декартовой и цилиндрической системах координат $P_x^2 + P_y^2 = P_\rho^2 + M_0^2/\rho^2$, где $M_0 = P_\phi/p$. С учетом последнего замечания предыдущему выражению инварианта можно придать несколько иной вид

$$I_s = \frac{(P_\rho^2 + M_0^2/\rho^2)}{\Omega_s^2} + \rho^2. \quad (10)$$

В дальнейшем для инварианта будем использовать как выражение (9), так и выражение (10).

3.3. Решение уравнений движения

Решение уравнений движения для адиабатического поля с зависимостью от продольной координаты (4) можно найти в работах [7,13]. Эти решения базируются на использовании ВКБ-метода для уравнения колебаний и применимы в случае медленного изменения частоты от переменной интегрирования. Как было отмечено выше, не всегда удастся удовлетворить условию выполнения адиабатичности поля, поэтому попытаемся построить решение без каких-либо условий относительно адиабатичности изменения продольного магнитного поля.

Перепишем уравнение движения (7) для зависимости продольного поля (4) в виде, который явно отражает зависимость частоты от переменной интегрирования

$$\xi'' + \frac{\omega_0^2}{(1 + \mu z)^2} \xi = 0, \quad (11)$$

где $\omega_0 = (eB_0)/(2pc)$. Дальше все рассуждения по поводу решения системы (7) будем делать только для ее первого уравнения, для второго уравнения все рассуждения являются аналогичными.

Для решения предыдущего уравнения сделаем замену переменной интегрирования. Введем следующую величину $k(z) = \ln(1 + \mu z)$. После перехода от переменной z к переменной k вместо уравнения (11) получим

$$\xi''_{kk} - \xi'_k + \left(\frac{\omega_0}{\mu}\right)^2 = 0. \quad (12)$$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами и его решение хорошо известно [18]. Запишем собственные числа для предыдущего уравнения в виде $\alpha_{1,2} = 1/2 \pm i\Omega_1$, где

$$\Omega_1 = \sqrt{(\omega_0/\mu)^2 - 1/4}. \quad (13)$$

Из вида величины Ω_1 видно, что в зависимости от ее значения существуют два случая поведения решения:

- 1) $\omega_0/\mu > 1/2$ – собственными функциями решения являются тригонометрические функции, и решение имеет вид устойчивых колебаний;
- 2) $\omega_0/\mu < 1/2$ – собственными функциями решения являются гиперболические функции, и решение имеет экспоненциальный рост.

Для того чтобы разделить области энергии частиц на части, в которых имеет силу различия решения уравнения (12), введем понятие критической энергии адиабатического согласующего устройства $E_{кр}$ следующим образом – критическая энергия должна разделить области поведения решения на две части, на область с устойчивым поведением и на область с экспоненциальным ростом,

$$E_{кр} = (eB_0)/\mu. \quad (14)$$

В практической системе единиц $E_{кр}[МэВ] \simeq (0.3B_0[kГс])/[\mu[см^{-1}]]$. Величина критической энергии имеет как это будет видно далее простой физический смысл, она делит область энергии позитронов на области, захватываемую согласующим устройством и на область с подавленным захватом.

Транспортная матрица согласующего устройства от плоскости с нулевой продольной координатой к плоскости с координатой равной $L_{ад}$ (плоскость сопряжения поля согласующего устройства и поля соленоида сопровождения) для позитронов с энергией меньше чем критическая имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \xi(L_{ад}) &= x_0 \sqrt{\chi} \left(\cos \psi - \frac{\sin \psi}{2\Omega_1} \right) + \frac{P_x^0 \sqrt{\chi}}{\mu\Omega_1} \sin \psi \\ \xi'(L_{ад}) &= -x_0 \frac{\mu}{\sqrt{\chi}} \frac{4\Omega_1^2 + 1}{4\Omega_1} \sin \psi + \frac{P_x^0}{\sqrt{\chi}} \left(\cos \psi + \frac{\sin \psi}{2\Omega_1} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\psi = \Omega_1 \ln \chi$, χ – отношение максимального поля согласующего устройства к полю соленоида сопровождения.

Для позитронов с энергией больше критической транспортная матрица имеет практически такой же вид за исключением того, что вместо тригонометрических функций в ней присутствуют гиперболические

$$\begin{aligned} \xi(L_{ад}) &= x_0 \sqrt{\chi} \left(\text{ch } \psi - \frac{\text{sh } \psi}{2\Omega_1} \right) + \frac{P_x^0 \sqrt{\chi}}{\mu\Omega_1} \text{sh } \psi \\ \xi'(L_{ад}) &= x_0 \frac{\mu}{\sqrt{\chi}} \frac{4\Omega_1^2 - 1}{4\Omega_1} \text{sh } \psi + \frac{P_x^0}{\sqrt{\chi}} \left(\text{ch } \psi + \frac{\text{sh } \psi}{2\Omega_1} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где величина ψ определена как и раньше, но величина Ω_1 теперь принимает следующий вид

$$\Omega_1 = \sqrt{1/4 - (\omega_0/\mu)^2}. \quad (17)$$

Транспортные матрицы для второй пары координат и импульсов легко получить из выражений (15) и (16) простой заменой $-x_0, P_x^0$ на y_0, P_y^0 .

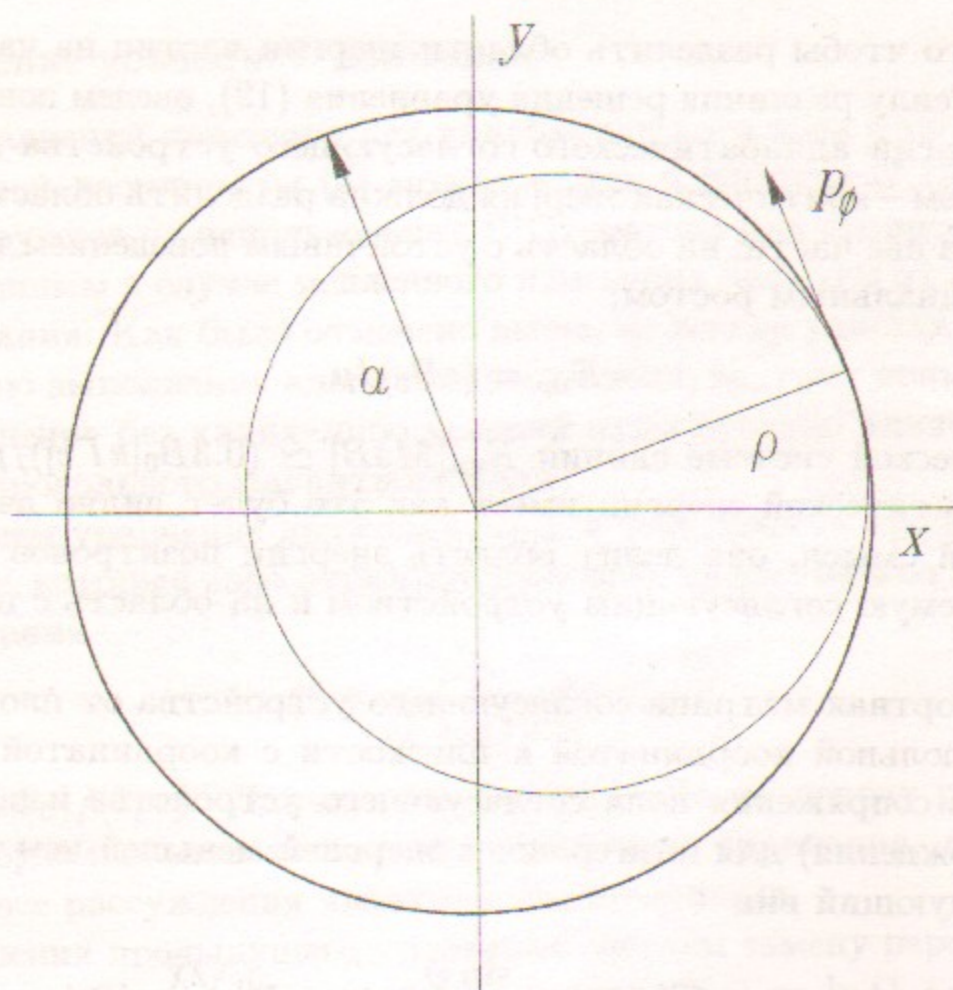


Рис. 9: Прохождение "предельной" частицы через апертуру ускоряющей секции a .

3.4. Условие захвата частиц

Для получения условия успешного прохождения позитронов через апертуру ускоряющей секции a в поле соленоида сопровождения воспользуемся выражением инварианта в поле соленоида (10). Условия захвата имеют следующий вид

$$I_s \leq a^2 + \frac{M_0^2}{a^2 \Omega_s^2}. \quad (18)$$

Это условие становится очевидным и имеет простой геометрический смысл если рассматривать "предельную" частицу, еще вписывающуюся в апертуру ускоряющей секции (см. рис. 9). Частицы, прошедшие через согласующее устройство, вращаются в поле соленоида сопровождения вокруг некоторого центра вращения с постоянным радиусом. "Предельная" частица касается апертуры ускоряющей секции, и ее поперечный импульс в точке касания $\rho = a$ имеет только азимутальную составляющую.

4. Квадратичные формы акцептанса согласующих устройств

Одна из основных характеристик согласующего устройства – это зависимость углов собирания системы от энергии частиц и их начальных расстояний от оси при выходе из конверсионной мишени. Такая характеристика определяет геометрические ограничения на собираемые позитроны. Данную зависимость можно получить, рассматривая квадратичную форму акцептанса согласующего устройства.

Для получения квадратичной формы акцептанса согласующего устройства возведем почленно в квадрат выражение для транспортной матрицы (15) и, подставляя получившиеся результаты в выражение инварианта (10), получим следующую квадратичную форму, описывающую согласующие характеристики устройства для зависимости продольного поля (4).

При этом мы воспользовались уже приводимым выше соотношением, связывающим сумму квадратов обобщенных импульсов в декартовой и цилиндрической системах координат, а так же следующим соотношением

$$x_0 P_x^0 + y_0 P_y^0 = \rho_0 P_\rho^0.$$

Воспользовавшись условием захвата (18), для позитронов с энергией меньшей критической получим квадратичную форму акцептанса согласующего устройства, описываемую следующим выражением

$$\rho_0^2 \chi \left(1 - \frac{\sin 2\psi}{2\Omega_1} + 2 \left(\frac{\sin \psi}{2\Omega_1} \right)^2 \right) + \frac{P_\rho^0{}^2 + M_0^2 / \rho_0^2}{\Omega_0 \Omega_s} \left(1 + \frac{\sin 2\psi}{2\Omega_1} + 2 \left(\frac{\sin \psi}{2\Omega_1} \right)^2 \right) - 8\rho_0 P_\rho^0 \frac{\chi}{\mu} \left(\frac{\sin \psi}{2\Omega_1} \right)^2 \leq a^2 + \frac{M_0^2}{a^2 \Omega_s^2}, \quad (19)$$

где величины Ω_1 и ψ определены выражениями (13) и (15) соответственно.

Для частиц с большей энергией выражение квадратичной формы принимает аналогичный вид с той лишь разницей, что вместо тригонометрических функций в ней присутствуют гиперболические и величина Ω_1 определяется выражением (17)

$$\rho_0^2 \chi \left(1 - \frac{\text{sh } 2\psi}{2\Omega_1} + 2 \left(\frac{\text{sh } \psi}{2\Omega_1} \right)^2 \right) + \frac{P_\rho^0{}^2 + M_0^2 / \rho_0^2}{\Omega_0 \Omega_s} \left(1 + \frac{\text{sh } 2\psi}{2\Omega_1} + 2 \left(\frac{\text{sh } \psi}{2\Omega_1} \right)^2 \right) - 8\rho_0 P_\rho^0 \frac{\chi}{\mu} \left(\frac{\text{sh } \psi}{2\Omega_1} \right)^2 \leq a^2 + \frac{M_0^2}{a^2 \Omega_s^2}. \quad (20)$$

Рассмотрение выражения квадратичной формы акцептанса согласующего устройства в общем виде является весьма сложной задачей. Поэтому, для выделения характерных особенностей согласующих устройств предыдущую задачу, поставленную в общем виде, разобьем на несколько более мелких задач. Такое разбиение позволит ввести некоторые математические упрощения. Для этого разделим на задачи две, первая – определение углов, захватываемых согласующим устройством, вторая – определение максимального размера позитронного источника. Итак, будем рассматривать отдельно друг от друга два акцептанса – угловой и радиальный.

4.1. Угловой акцептанс согласующих устройств

Рассмотрим первую из упомянутых выше задач – определение углового акцептанса согласующего устройства, которая пожалуй является более важной чем вторая.

Для определения углового акцептанса необходимо определить максимальные углы, захватываемые согласующим устройством, с которыми позитроны покидают конверсионную мишень в зависимости от их энергии. Для математического упрощения поставленной задачи будем рассматривать угловой акцептанс при условии, что позитроны стартуют с оси т.е. при условии, что $\rho_0 = 0$. Более подробней аспекты, связанные с определением углового акцептанса для $\rho_0 \neq 0$, рассмотрены в приложении Б. Таким образом, из выражения (19) для энергии позитронов меньше критической определим максимальные захватываемые углы как

$$\Theta_{max} = \frac{e\sqrt{B_0 B_s} a}{2p_0 c} \left/ \left(1 + \frac{\sin 2\psi}{2\Omega_1} + 2\left(\frac{\sin \psi}{2\Omega_1}\right)^2 \right) \right., \quad (21)$$

где величины Ω_1 и ψ определяются соответственно выражениями (13) и (15).

Для позитронов с энергией больше критической величина углового акцептанса определяется из выражения (20)

$$\Theta_{max} = \frac{e\sqrt{B_0 B_s} a}{2p_0 c} \left/ \left(1 + \frac{\text{sh } 2\psi}{2\Omega_1} + 2\left(\frac{\text{sh } \psi}{2\Omega_1}\right)^2 \right) \right., \quad (22)$$

при этом ψ определена как и раньше, а величина Ω_1 определяется выражением (17).

Из общего вида двух последних выражений (21,22) видно, что величины углового акцептанса осциллируют вокруг среднего значения

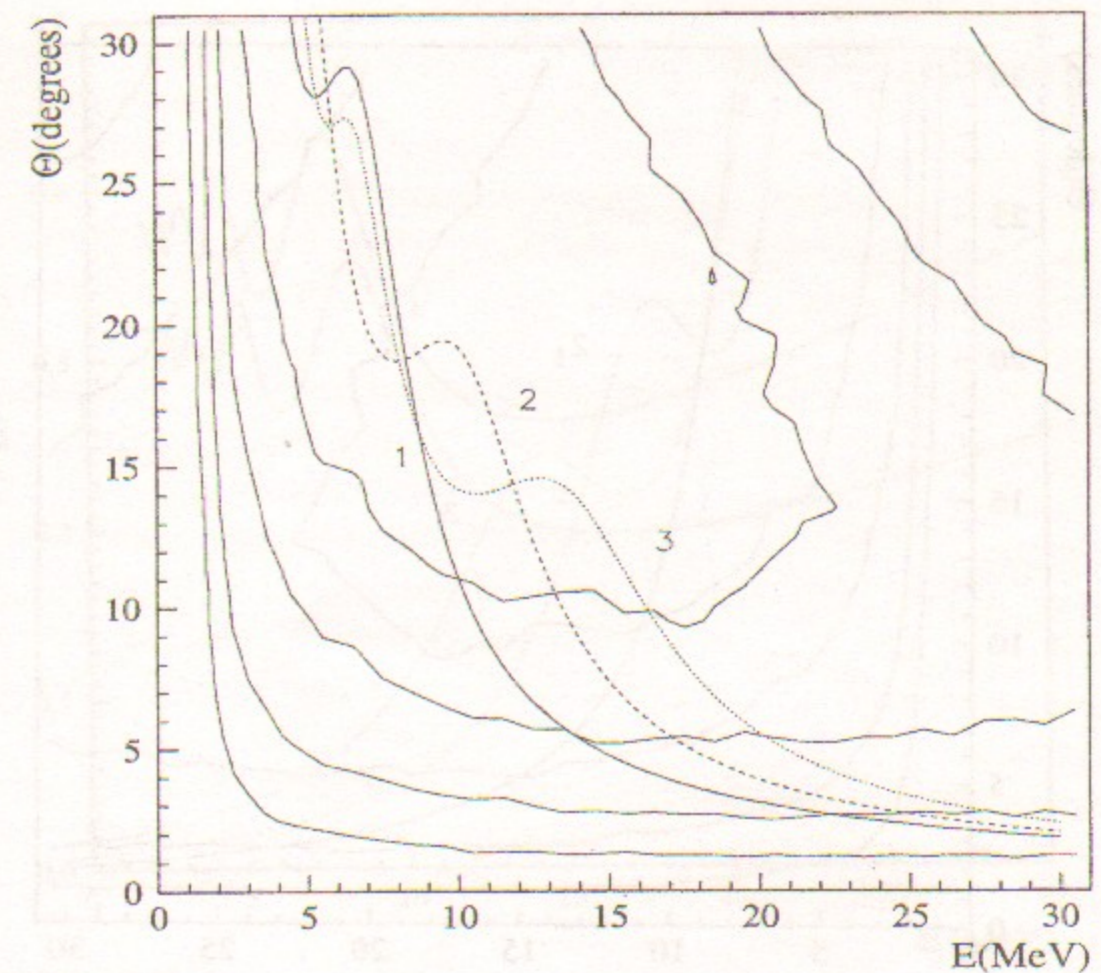


Рис. 10. Линии равенства плотности позитронов и угловые акцептансы согласующих устройств со следующими параметрами $B_0 = 50 \text{ кГс}$, $B_s = 5 \text{ кГс}$, 1 — $L_{AD} = 10 \text{ см}$, 2 — $L_{AD} = 15 \text{ см}$, 3 — $L_{AD} = 20 \text{ см}$.

$(e\sqrt{B_0 B_s} a)/(2p_0 c)$ и амплитуда осцилляций, а также положения максимумов кривой захвата зависят от значений магнитных полей, длины поля согласующего устройства и энергии позитронов. Поэтому наиболее информативно рассматривать зависимости угловых акцептансов совместно с распределениями плотности позитронов на плоскости их начальных углов и энергий с которыми они покидают конверсионную мишень (см. п.2.3 и рис. 7).

На рис. 10 и 11 совместно отображены линии равенства плотности позитронов и угловые акцептансы согласующих устройств с разными значениями максимального магнитного поля: 50, 75 кГс и разной длиной адиабатического участка L_{AD} , заданные выражениям (21,22), радиус апертуры ускоряющей секции 12 мм. Как видно из данного рисунка, наиболее оптимальной длиной поля согласующего устройства является та, при которой максимум кривой углового акцептанса совпадает с областью максимальной плотности позитронов. Таким образом, для достижения

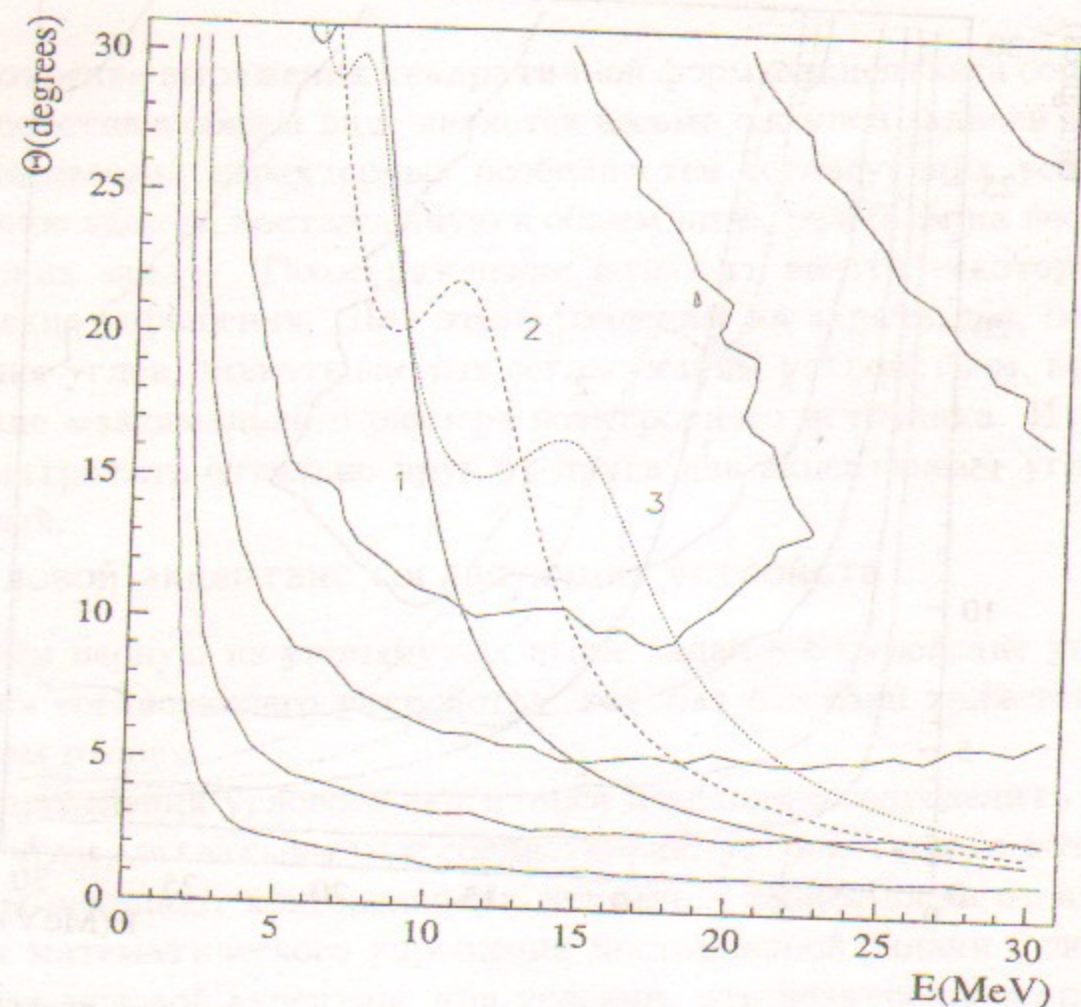


Рис. 11. Линии равенства плотности позитронов и угловые акцептансы согласующих устройств со следующими параметрами $B_0 = 75 \text{ кГс}$, $B_s = 5 \text{ кГс}$, 1 — $L_{AD} = 10 \text{ см}$, 2 — $L_{AD} = 15 \text{ см}$, 3 — $L_{AD} = 20 \text{ см}$.

максимально возможного коэффициента согласования важно правильно подобрать длину согласующего устройства.

4.2. Радиальный акцептанс

Рассмотрим вторую задачу — радиальный акцептанс согласующего устройства. Для упрощения поставленной задачи, под радиальным акцептансом будем понимать максимальный радиальный размер пятна на выходе конверсионной мишени, т.е. максимальное расстояние от оси при котором еще происходит захват с условием, что позитроны инжектируются с конверсионной мишени вдоль оси ускорителя.

Используя выражения квадратичных форм (19,20), для энергии позитронов меньше критической получим максимальный размер позитронно-

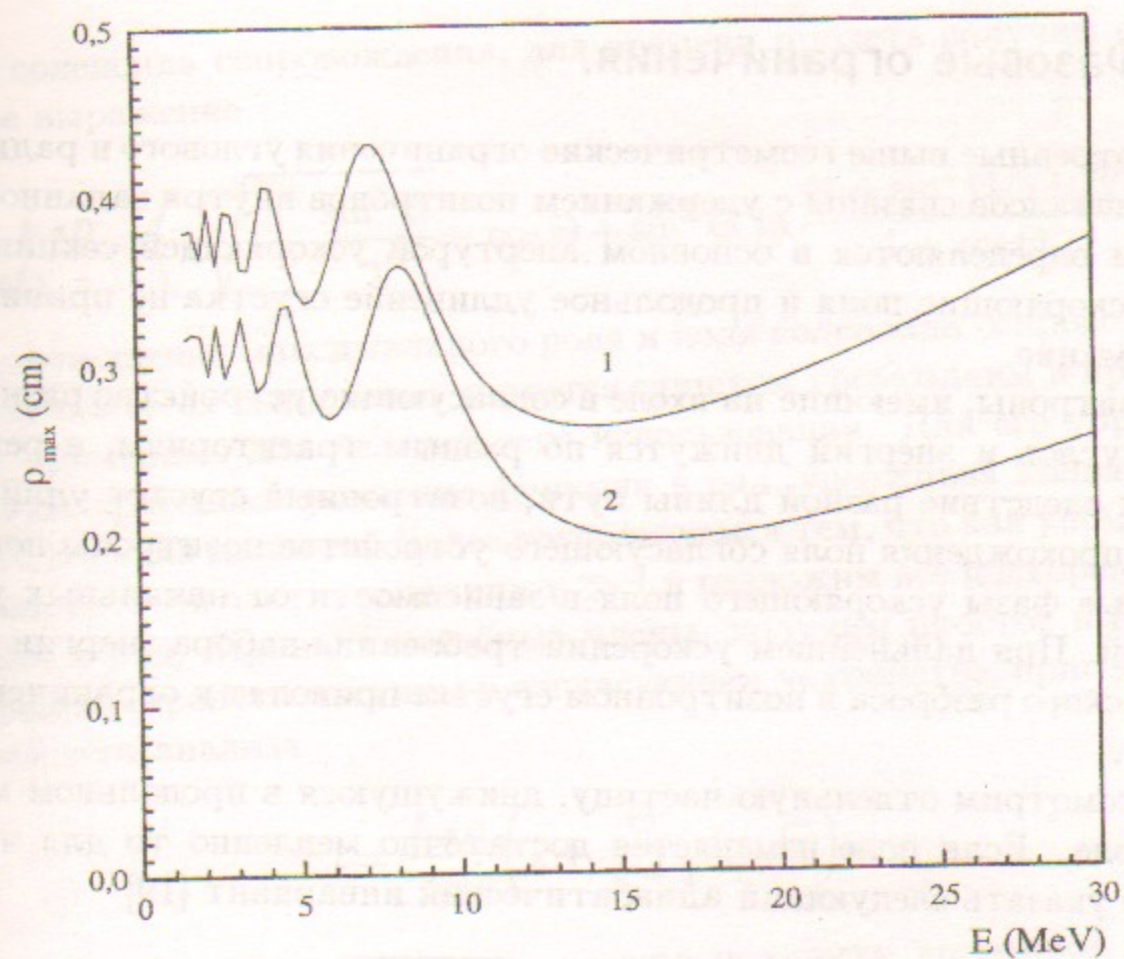


Рис. 12. Радиальные акцептансы согласующих устройств со следующими параметрами $L_{AD} = 15 \text{ см}$, $B_s = 5 \text{ кГс}$, 1 — $B_0 = 50 \text{ кГс}$, 2 — $B_0 = 75 \text{ кГс}$, радиус апертуры ускоряющей секции 12 мм.

го источника

$$\rho_{max} = \sqrt{\frac{B_s}{B_0}} a \left/ \left(1 - \frac{\sin 2\psi}{2\Omega_1} + 2 \left(\frac{\sin \psi}{2\Omega_1} \right)^2 \right) \right. \quad (23)$$

Для позитронов с энергией больше критической максимальный размер позитронного источника определяется как

$$\rho_{max} = \sqrt{\frac{B_s}{B_0}} a \left/ \left(1 - \frac{\text{sh } 2\psi}{2\Omega_1} + 2 \left(\frac{\text{sh } \psi}{2\Omega_1} \right)^2 \right) \right. \quad (24)$$

Из общего вида двух последних выражений видно, что величина радиального акцептанса, также как и углового, осциллируют вокруг среднего значения $\sqrt{B_s/B_0} a$, а амплитуда осцилляций и положения максимумов кривой зависят от тех же величин, что и угловой акцептанс. На рис. 12 представлены радиальные акцептансы согласующих устройств с теми же параметрами полей, что были рассмотрены и для угловых акцептансов.

5. Фазовые ограничения.

Рассмотренные выше геометрические ограничения углового и радиального акцептансов связаны с удержанием позитронов внутри заданной апертуры и определяются в основном апертурой ускоряющей секции. При этом ускоряющие поля и продольное удлинение сгустка не принимались во внимание.

Позитроны, имеющие на входе в согласующее устройство разные значения углов и энергий движутся по разным траекториям, в результате, как следствие разной длины пути, позитронный сгусток удлиняется. После прохождения поля согласующего устройства позитроны попадают в разные фазы ускоряющего поля в зависимости от начальных углов и энергий. При дальнейшем ускорении требования набора энергии и энергетического разброса в позитронном сгустке приводят к ограничению его длины.

Рассмотрим отдельную частицу, движущуюся в продольном магнитном поле. Если поле изменяется достаточно медленно то для частицы можно указать следующий адиабатический инвариант [19]

$$p_{\perp}(z) = p_{\perp}^0 \sqrt{B(z)/B_0}.$$

Воспользовавшись тем, что полный импульс частицы при движении в магнитных полях сохраняется, получим выражение для изменения продольного импульса при движении в поле согласующего устройства

$$p_{\parallel}(z) = p_0 \sqrt{1 - \sin^2 \Theta \frac{B(z)}{B_0}}. \quad (25)$$

Из последнего выражения можно получить время пролета частицы в согласующем устройстве. Время пролета частицы в согласующем устройстве длиной L_{AD} для зависимости магнитного поля от продольной координаты (4) принимает следующий вид

$$t = \frac{1}{v_0} \int_0^{L_{AD}} \frac{dz}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta / (1 + \mu z)}}, \quad (26)$$

где v_0 — скорость частицы. Данный интеграл легко приводится к одному из табличных видов введением следующей замены переменной интегрирования $y^2 = \sin^2 \Theta / (1 + \mu z)$. Принимая во внимание обозначения, введенные ранее для отношения максимального поля согласующего устройства

и поля соленоида сопровождения, для времени пролета получим окончательное выражение

$$t = \frac{L_{AD}}{v_0(\chi - 1)} \left(\chi \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \Theta}{\chi}} - \cos \Theta + \sin^2 \Theta \ln \frac{(1 + \sin^2 \Theta / \chi) \sqrt{\chi}}{1 + \cos \Theta} \right), \quad (27)$$

где χ — отношение максимального поля и поля соленоида сопровождения.

Получившееся выражение является слишком громоздким и практически не применимо для дальнейшего использования. Для его упрощения разложим тригонометрические функции в ряд, удерживая только члены второго порядка малости. Далее воспользуемся тем, что как упоминалось в начале третьей части, величина $\chi \gg 1$ и разложим все подкоренные выражения в ряд. Приводя подобные члены, получим простое выражение для времени пролета частицы в согласующем устройстве, пригодное для дальнейшего анализа

$$t = \frac{L_{AD}}{v_0} \left(1 + \frac{\Theta^2}{\chi - 1} \ln \sqrt{\chi} \right). \quad (28)$$

Выбирая "пробную" частицу, можно получить временной профиль первоначально точечного позитронного сгустка в зависимости от начальных энергий и углов при влете в ускоряющую секцию, т.е. удлинение позитронного сгустка при движении в поле согласующего устройства. В качестве такой пробной частицы удобнее всего брать частицу движущуюся вдоль оси ускорителя со скоростью света. Такой выбор прежде всего определяется удобством сравнения удлинения позитронного сгустка при сравнительном анализе согласующих устройств с разными значениями полей и разной длиной.

При движении позитронного сгустка в ускоряющей секции его длина должна быть ограничена некоторым значением, в противном случае позитроны не набирают требуемую энергию и не обеспечивается требуемый энергетический разброс в сгустке при инжекции в охлаждающий накопитель. Для анализа удлинения позитронного сгустка в ускоряющей секции удобнее использовать не временной профиль сгустка, а фазовый. Используя выражение (28), получим соотношение, связывающее разницу фаз $\Delta\varphi$ между пробной частицей и остальными в зависимости от их энергий и углов выхода из мишени

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi f_{RF} L_{AD}}{c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 1/\gamma^2}} \left(1 + \frac{\Theta^2}{\chi - 1} \ln \sqrt{\chi} \right) \right), \quad (29)$$

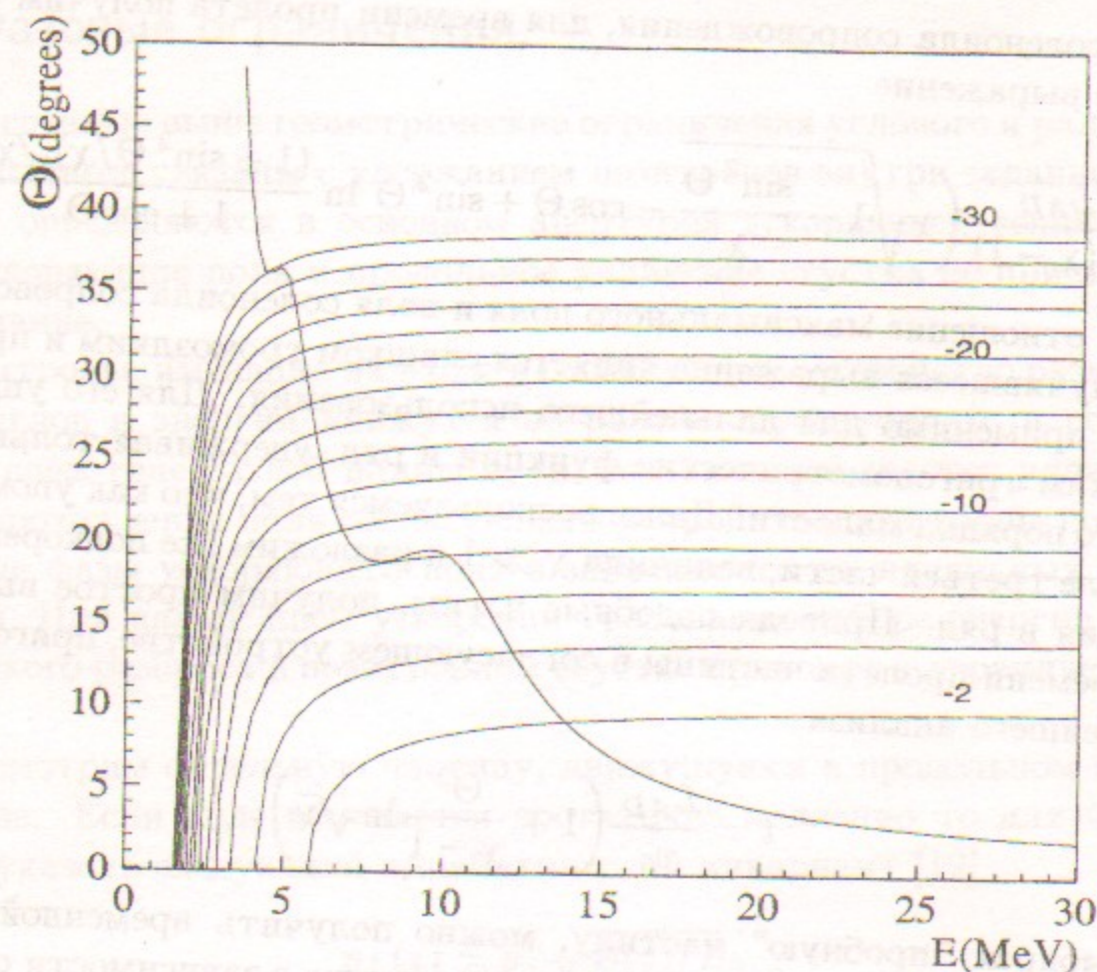


Рис. 13. Линии разницы фаз для согласующего устройства со значением максимального поля 50 кГс и длиной 15 см совместно с соответствующим данным параметрам угловым акцептансом.

где f_{RF} – рабочая частота ускоряющей структуры, γ – Лоренц-фактор частицы.

Как и для угловых акцептансов будем рассматривать не интегральную характеристику – фазовый профиль позитронного сгустка, а строить линии равных фаз на плоскости углов и энергий позитронов, выходящих из конверсионной мишени [20]. Как пример такого представления на рис. 13 и 14 приведены линии разности фаз для разных согласующих устройств со значениями максимальных полей 50 и 75 кГс. Длина поля обоих согласующих устройств 15 см. На тех же рисунках приведены угловые акцептансы, соответствующие данным параметрам согласующих устройств. Как видно из приведенных рисунков, для позитронов с энергией меньше 5 MeV фазовые ограничения не позволяют собирать частицы с углами большими 30° без применения специальных группирующих устройств.

При ускорении в первых позитронных секциях, позитроны с низкой

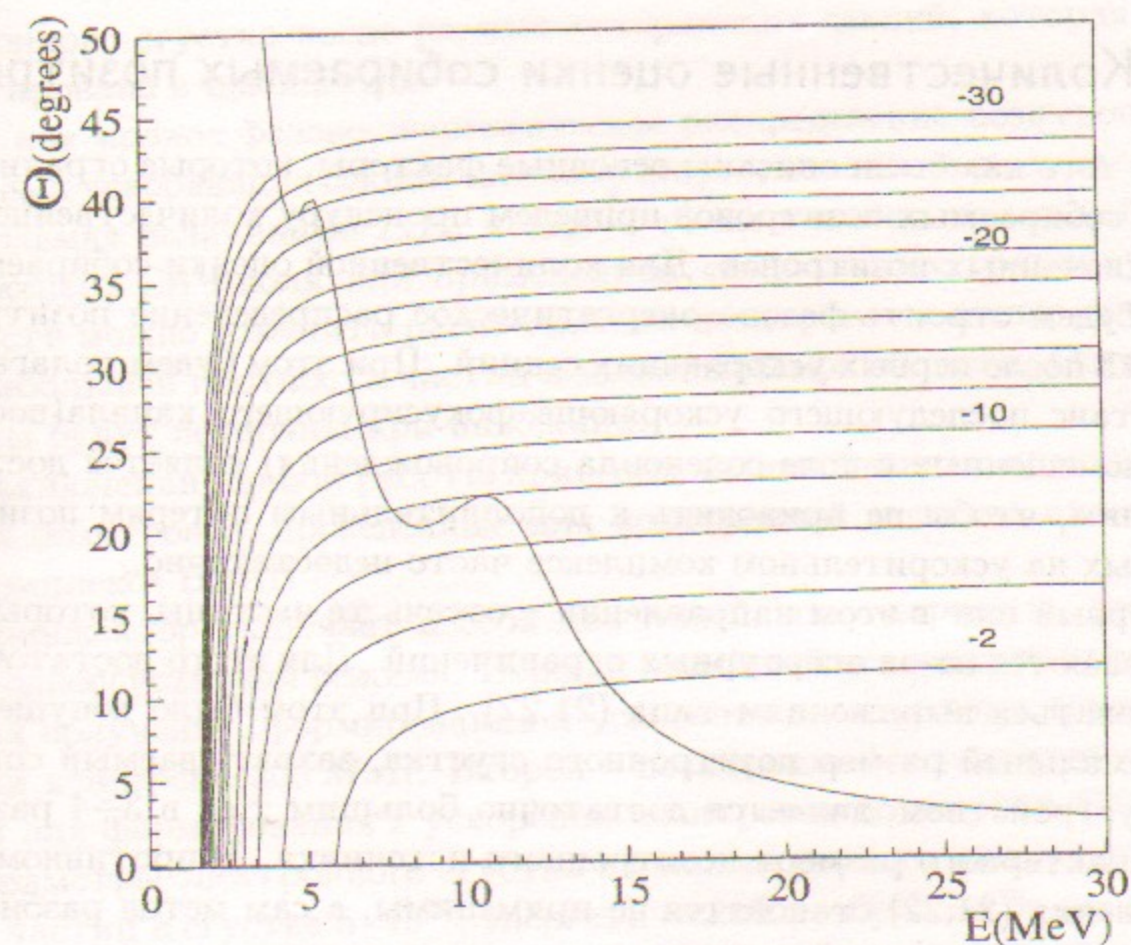


Рис. 14. Линии разницы фаз для согласующего устройства со значением максимального поля 75 кГс и длиной 15 см совместно с соответствующим данным параметрам угловым акцептансом.

энергией все еще подвержены процессу фазового скольжения. Особенно сильно это сказывается на частицы с низкими энергиями и большими углами. Поэтому построить простое аналитическое выражение, аналогичное выражению (29), которое бы связывало разность фаз после первых ускоряющих секций с начальными углами и энергиями инжекции позитронов из конверсионной мишени, без привлечения численных методов не представляется возможным. В конечном итоге, процесс фазового скольжения при ускорении приводит к еще большему ограничению на собираемые позитроны, т.к. при этом линии разности фаз опускаются еще примерно на 5°. При дальнейшем ускорении позитронов в следующих секциях линейного ускорителя, фазовым скольжением можно пренебречь.

Таким образом, диапазон собираемых углов и энергий согласующего устройства определяется двумя разными ограничениями: первое – угловое, связанное с апертурой ускоряющей секции, второе – дополнительное фазовое ограничение, связанное с длиной позитронного сгустка.

6. Количественные оценки собираемых позитронов

После того как были описаны основные факторы, которые ограничивают число собираемых позитронов приведем процедуру количественной оценки захваченных позитронов. Для количественной оценки собираемых частиц будем строить фазово-энергетическое распределение позитронного сгустка после первых ускоряющих секций. При этом будем полагать, что акцептанс последующего ускоряюще-фокусирующего канала (после секций, помещенных с полем соленоида сопровождения) является достаточно большим, чтобы не приводить к дополнительным потерям позитронов, которых на ускорительном комплексе часто недостаточно.

Первый шаг в этом направлении – отсечь те частицы, которые не захватываются из-за апертурных ограничений. Для этого достаточно воспользоваться выражениями типа (21,22). При этом было допущено, что максимальный размер позитронного сгустка, захватываемый согласующим устройством, является достаточно большим т.е. в 3÷4 раза больше характерного размера позитронного источника. В противном случае выражения (21,22) становятся не применимы, а сам метод разбиения на радиальный и угловой акцептансы является неприемлемым.

Второй шаг – учет фазовых ограничений, налагаемых на захватываемые позитроны (см. раздел 5). При этом необходимо учесть продольное распределение частиц в первоначальном электронном сгустке. Без учета продольного распределения характерная длина позитронного сгустка после первых ускоряющих секций примерно втрое меньше чем в реальной ситуации [21]. Вследствие этого, количественная оценка собираемых позитронов может быть завышена в 2÷3 раза.

Дальнейшее ускорение позитронного сгустка можно учесть аналитическими методами, считая, что его центр помещен в максимум ускоряющего поля и пренебрегая фазовыми скольжениями частиц.

Основное требование к инжектору – обеспечение заданного энергетического разброса в позитронном сгустке с требуемым числом частиц перед инжекцией в накопитель. Для энергетического разброса в сгустке перед инжекцией ΔE можно записать следующее выражение,

$$\Delta E = \Delta E_0 + 2AL_{ac} \sin^2(\Delta\varphi^{e^+}/4), \quad (30)$$

которое связывает начальный энергетический разброс в сгустке после первых секций ΔE_0 и длину позитронного сгустка $\Delta\varphi^{e^+}$, A – градиент ускоряющего поля, L_{ac} – длина участка ускорения. Значения величин ΔE_0 и $\Delta\varphi^{e^+}$ определяют область на фазово-энергетической плоскости

позитронного сгустка после первых ускоряющих секций, которая будет инжектирована в накопитель.

Так как полное фазово-энергетическое распределение позитронов после первых ускоряющих секций заведомо шире чем захватываемая область, определяемая величинами ΔE_0 и $\Delta\varphi^{e^+}$, то изменением начальной фазы ускоряющего СВЧ-поля или применением специальных группирующих устройств можно изменить распределение позитронов с целью обеспечения наибольшей плотности частиц в захватываемой области. Остальные частицы будут потеряны при инжекции.

В заключении данной работы приведем количественные оценки захваченных позитронов, проведенные для позитронной системы инжекционного комплекса ВЭПП-5.

Форинжектор включает в себя два линейных ускорителя, работающих в односгустковом режиме. Первый линейный ускоритель предназначен для получения, формирования и ускорения электронных сгустков до энергии конверсии 300 МэВ. Второй – позитронный ускоритель предназначен для формирования и ускорения позитронов до энергии 510 МэВ.

Параметры электронного сгустка на выходе первого лин. ускорителя: число частиц в сгустке $5 \cdot 10^{10}$, энергетический разброс $\pm 1\%$, продольная длина сгустка $2\sigma = 6$ мм. После первого лин. ускорителя электронный сгусток изохронно поворачивается на 180° и фокусируется триплетом на конверсионную мишень. Поперечный размер сфокусированного сгустка по диаметру составляет 1 мм.

Позитроны, вышедшие из мишени, собираются адиабатическим согласующим устройством и ускоряются в первой ускоряющей секции позитронного ускорителя, которая помещена в поле соленоида сопровождения 5 кГс. Первая ускоряющая секция имеет повышенный темп ускорения 25 МэВ/м. После ускорения до энергии 510 МэВ, позитронный сгусток инжектируется в охладитель-накопитель. Энергетический разброс в сгустке на выходе позитронного ускорителя должен составлять $\pm 3\%$.

По описанной в начале данного раздела процедуре были проведены оценки количества позитронов инжектируемых в охладитель-накопитель для нескольких значений максимального поля согласующего устройства и его разной длины (см. таб. 1). Число инжектируемых позитронов нормировано на число частиц в первоначальном электронном сгустке. В первой колонке приведены оценки, выполненные без учета продольного распределения частиц в позитронном сгустке. Во второй колонке оценки получены в результате трассировки позитронов до выхода первой ускоряющей секции позитронного ускорителя. Дальнейшее ускорение до энер-

гии 510 МэВ было учтено аналитически.

Таблица 1. Оценки нормированного числа позитронов, инжектируемых в охладитель-накопитель, в процентах от числа электронов в первоначальном сгустке при разных значениях максимального поля согласующего устройства.

Длина магнитного поля	20 кГс		35 кГс		50 кГс		75 кГс		100 кГс	
	15 см	3.8	2.9	5.9	4.4	8.0	5.7	9.8	6.8	12.4
30 см	3.2	2.5	4.1	3.7	6.5	4.6	8.2	5.6	8.3	6.4

7. Приложение А

Как отмечалось в начале раздела 3, в последнее время стали применяться устройства с укороченной длиной поля. При этом профиль поля имеет не такую зависимость от продольной координаты как было приведено в выражении (4), а примерно следующую

$$B(z) = \frac{B_0}{(1 + \mu z)^2}. \quad (31)$$

Рассмотрим движение частиц в поле определяемом выражением (31). При этом сохраним обозначения, введенные раньше, с той лишь разницей, что теперь выражение для μ будет иметь вид в соответствии с соотношением (31).

Запишем уравнение движения частицы во вращающейся системе координат аналогичное (11), но учитывающее новую зависимость поля от продольной координаты

$$\xi'' + \left(\frac{\omega_0}{(1 + \mu z)^2} \right)^2 \xi = 0. \quad (32)$$

Для решения данного уравнения сделаем следующую замену переменной интегрирования $k = 1/(1 + \mu z)$. Подставляя данную зависимость в уравнение (32), получим

$$\xi''_{kk} - 2 \frac{\xi'_k}{k} + \left(\frac{\omega_0}{\mu} \right)^2 = 0. \quad (33)$$

Последнее выражение свеем к уравнению Бесселя. Для этого представим функцию ξ в виде произведения двух функций $w(k)v(k)$. Для сведения выражения (33) к уравнению Бесселя выберем функцию $w(k)$ в виде $w(k) = 1/\sqrt{k}$ (в чем можно легко убедиться непосредственной подстановкой). Делая обратные замены всех введенных ранее вспомогательных зависимостей, получим решение уравнения (32) в следующем виде

$$\xi(z) = \sqrt{1 + \mu z} \left(C_1 J_{1/2} \left(\frac{\Omega_1}{1 + \mu z} \right) + C_2 J_{-1/2} \left(\frac{\Omega_1}{1 + \mu z} \right) \right), \quad (34)$$

где введено обозначение $\Omega_1 = \omega_0/\mu$.

Транспортная матрица данного устройства от плоскости с координатой $z = 0$ к плоскости сопряжения поля согласующего устройства с полем соленоида сопровождения с координатой $z = L_{ad}$ имеет следующий вид

$$\xi(L_{ad}) = x_0 \sqrt{\chi} \left(\cos \tilde{\psi} - \frac{\sin \tilde{\psi}}{\Omega_1} \right) + P_x^0 \frac{\sqrt{\chi}}{\mu \Omega_1} \sin \tilde{\psi}$$

$$\xi'(L_{ad}) = x_0 \left(\mu \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\chi}} \right) \cos \tilde{\psi} - \frac{\mu}{\Omega_1} \left(1 + \frac{1}{\Omega_1^2 \sqrt{\chi}} \right) \sin \tilde{\psi} \right) + P_x^0 \left(\frac{\cos \tilde{\psi}}{\sqrt{\chi}} + \frac{\sin \tilde{\psi}}{\Omega_1} \right), \quad (35)$$

где величина $\tilde{\psi}$ определена следующим образом

$$\tilde{\psi} = \Omega_1 (1 - 1/\sqrt{\chi}). \quad (36)$$

Для согласующего устройства с зависимостью поля типа (31), действуя аналогичным образом как и для зависимости (4), получим квадратичную форму в следующем виде

$$A \rho_0^2 \chi + B \frac{P_\rho^0{}^2 + M_0^2/\rho_0^2}{\Omega_0 \Omega_s} + C \rho_0 P_\rho^0 \frac{\chi}{\mu} \leq a^2 + \frac{M_0^2}{a^2 \Omega_s^2}, \quad (37)$$

где величина $\tilde{\psi}$ определена выражением (36), а величины A, B, C введены для укорочения записи и имеют следующий вид

$$A = 1 + \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{\cos 2\tilde{\psi}}{\Omega_1^2} + \chi \left(\frac{\cos \tilde{\psi}}{\Omega_1} \right)^2 + \chi \left(\frac{\sin \tilde{\psi}}{\Omega_1^2} \right)^2 - \sqrt{\chi} (\sqrt{\chi} - 1 + \Omega_1^2) \frac{\sin 2\tilde{\psi}}{\Omega_1},$$

$$B = 1 + \sqrt{\chi} \frac{\sin 2\tilde{\psi}}{\Omega_1} + \chi \left(\frac{\sin \tilde{\psi}}{\Omega_1} \right)^2,$$

$$C = -2 \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\chi}} \right) \left(\frac{\cos \tilde{\psi}}{\Omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\chi}{\Omega_1^2} + \sqrt{\chi} + 1 \right) \left(\frac{\sin \tilde{\psi}}{\Omega_1} \right)^2 + \frac{\chi - 2\sqrt{\chi} \sin 2\tilde{\psi}}{2\Omega_1^2} \frac{\tilde{\psi}}{\Omega_1} \right).$$

Угловой акцептанс согласующего устройства определяется следующим образом

$$\Theta_{max} = \frac{e\sqrt{B_0 B_s} a}{2p_0 c} \left/ \left(1 + \sqrt{\chi} \frac{\sin 2\tilde{\psi}}{\Omega_1} + \chi \left(\frac{\sin \tilde{\psi}}{\Omega_1} \right)^2 \right) \right. \quad (38)$$

при этом $\tilde{\psi}$ определена выражением (36), а величина Ω_1 определяется выражением (34).

8. Приложение Б

В четвертой части данной работы в общем виде были получены квадратичные формы акцептанса согласующих устройств и введены некоторые допущения, которые позволили отдельно рассматривать радиальный и угловой акцептансы. Как было отмечено ранее, такое рассмотрение является применимым при условии, что характерный размер позитронного источника много меньше чем радиальный акцептанс согласующего устройства. В противном случае угловой акцептанс согласующих устройств зависит кроме энергии и от расстояния до оси ускорителя с которым частица покидает конверсионную мишень, а так же и от продольного момента импульса (в четвертой части было введено допущение, пренебрегающее данными зависимостями).

Для рассмотрения общего случая зависимости углового акцептанса от перечисленных выше величин будем следовать работе [20], где рассматривается квадратичная форма акцептанса, приведенная в работе [7]. Перепишем выражения (19, 20, 37) в следующем общем виде

$$\left| \alpha \left(\frac{\rho_0}{a} \right)^2 \chi + \beta \frac{P_\rho^0{}^2 + M_0^2/\rho_0^2}{\Omega_0 \Omega_s a^2} + 2\gamma \rho_0 P_\rho^0 \frac{\chi}{\mu a^2} \right| \leq 1 + \frac{M_0^2}{a^4 \Omega_s^2}. \quad (39)$$

Введем следующие вспомогательные величины $\rho_R = \sqrt{\chi}(\rho_0/a)$ и $\Theta_R = \sqrt{\Omega_0 \Omega_s} a$, которые для квадратичной формы акцептанса, рассматриваемой в работе [7] являются радиальным и угловым акцептансами согласующего устройства.

Значения захватываемых углов зависят от направления перпендикулярного импульса частицы, т.е. от того какое преимущественное направление азимутальное или радиальное имеет перпендикулярный импульс. В случае, если перпендикулярный импульс имеет преимущественное азимутальное направление, значения захватываемых углов увеличивается [20]. Введем величину φ , характеризующую радиальность направления перпендикулярного импульса частицы следующим образом, будем отсчитывать угол φ против часовой стрелки от радиальной составляющей импульса частицы до ее полного перпендикулярного импульса (см. рис. 15).

Для введенного выше угла φ величины обобщенного радиального P_ρ^0 и азимутального p_ϕ^0 импульсов частицы определяются следующим образом

$$P_\rho^0 = \cos \varphi \sin \Theta$$

$$p_\phi^0 = p \sin \varphi \sin \Theta,$$

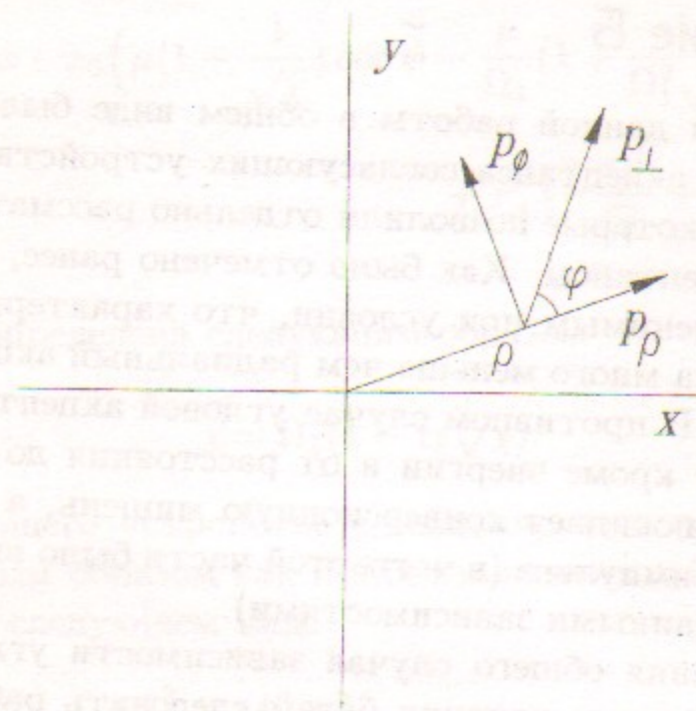


Рис. 15:

где p – полный импульс частицы, Θ – угол выхода позитрона из конверсионной мишени. Для удобства введем нормированные значения расстояния от оси ускорителя ρ_n и угла выхода частиц Θ_n на значения радиального ρ_R и углового Θ_R акцептансов ($\rho_n = \rho_0/\rho_R$, $\Theta_n = \Theta/\Theta_R$). Определенная таким образом величина ρ_n имеет диапазон изменения от 0 до $1/\sqrt{\alpha}$.

Группируя слагаемые с одинаковыми степенями величины Θ_n , можно переписать акцептанс согласующего устройства (39) в виде следующей системы неравенств

$$\begin{cases} (\beta - \rho_n^2 \sin^2 \varphi) \Theta_n^2 + 2\rho_n((\beta - \rho_n^2) \sin \varphi + \gamma \cos \varphi) \Theta_n + (\alpha + \beta) \rho_n^2 - (1 + \rho_n^4) \leq 0 \\ (\beta + \rho_n^2 \sin^2 \varphi) \Theta_n^2 + 2\rho_n((\beta + \rho_n^2) \sin \varphi + \gamma \cos \varphi) \Theta_n + (\alpha + \beta) \rho_n^2 + (1 + \rho_n^4) \geq 0. \end{cases} \quad (40)$$

Область пересечения решений неравенств системы (40) определяет диапазон углов, захватываемых согласующим устройством.

На рис. 16 приведена область нормированных захватываемых углов Θ_n в зависимости от разных значений параметра ρ_n . Как видно, при строго азимутальном направлении перпендикулярного импульса частицы ($\varphi = -90^\circ$ см. рис. 15), значения захваченных углов увеличиваются и достигают удвоенного значения от Θ_R . При противоположном направлении перпендикулярного импульса ($\varphi = 90^\circ$) наблюдается минимум кривой захваченных углов.

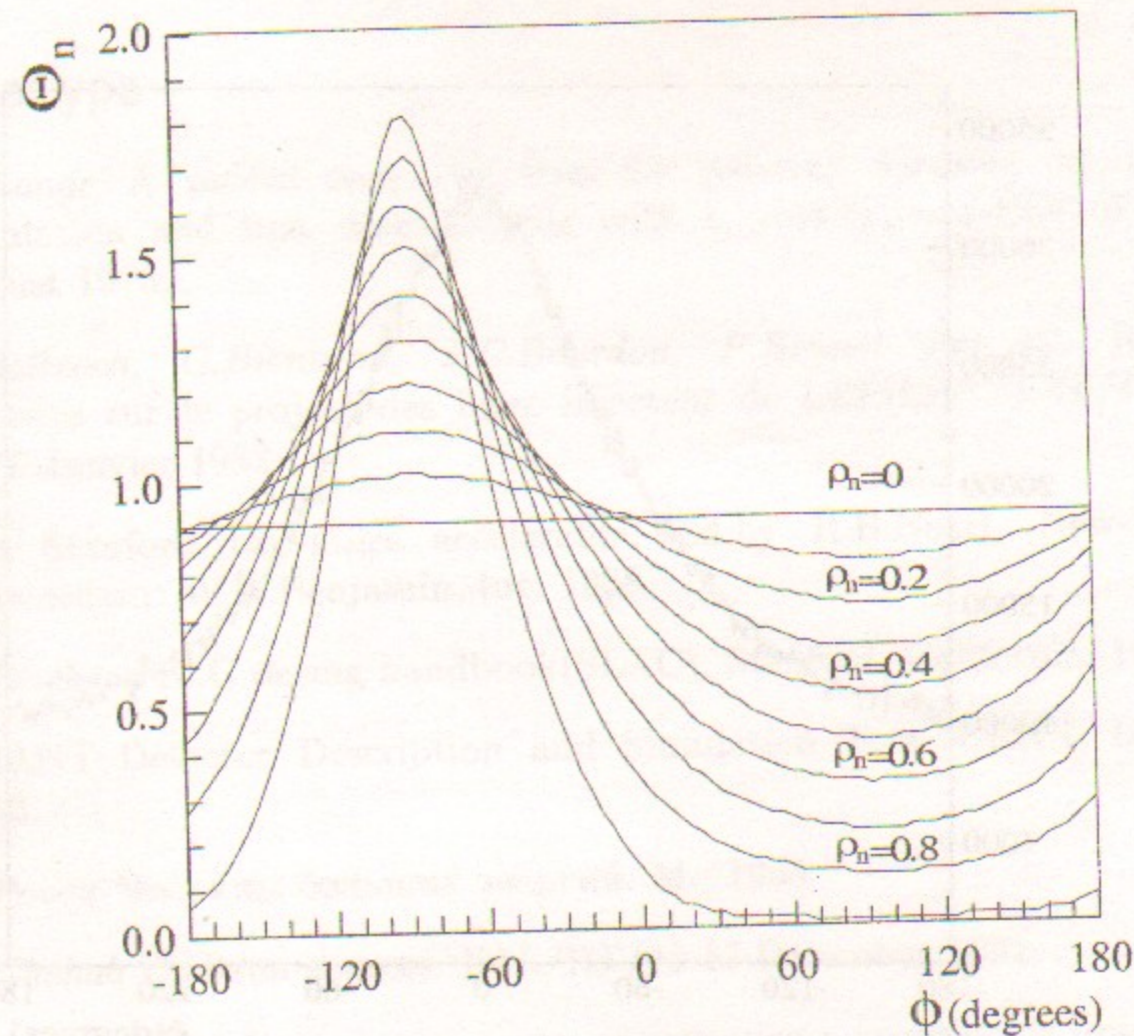


Рис. 16. Нормированные значения захватываемых углов Θ_n в зависимости от значений величины ρ_n для энергии позитронов 9 МэВ.

При увеличении энергии позитронов максимум кривой захвата сдвигается в сторону больших значений φ . Так при энергии позитронов 11 МэВ максимум кривой находится при значении $\varphi = -60^\circ$. При дальнейшем увеличении энергии позитронов максимум кривой захвата может находиться вплоть до значения $\varphi = -30^\circ$. При этом наблюдается захват частиц начиная только с некоторых значений углов, а при меньших их значениях захвата не происходит.

При рассмотрении области захвата, полезной информацией так же будет распределение позитронов после конверсионной мишени в зависимости от значений угла φ . Данное распределение приведено на рис. 17. В области значений φ от -90° до 90° лежит наибольшее количество частиц, примерно 66%. Среднеквадратичное отклонение от среднего значения φ составляет примерно 87° .

Как видно из сопоставления рис. 16 и рис. 17 количество позитронов в области с повышенным угловым захватом (принимая во внимание, что

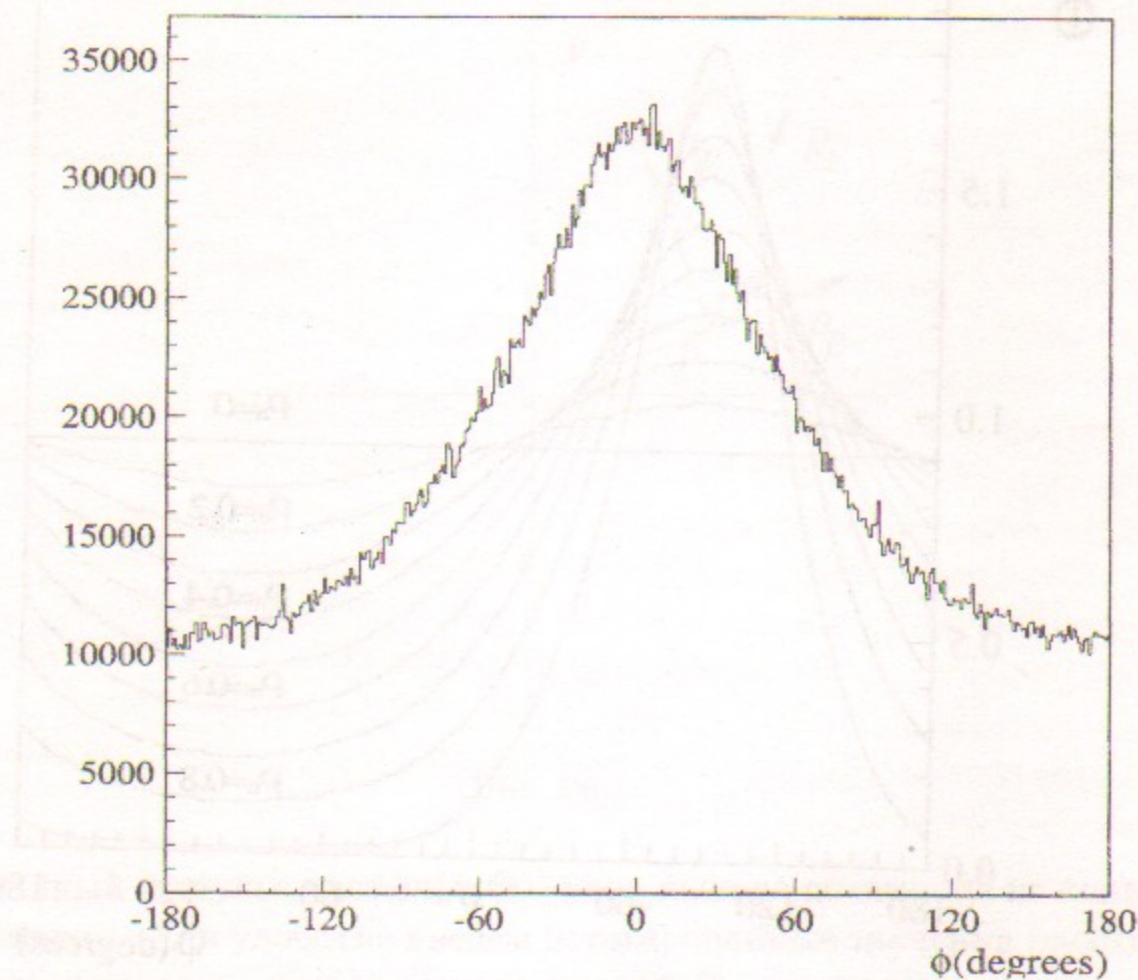


Рис. 17. Распределение позитронов по радиальности направления поперечного импульса после конверсионной мишени.

реальные значения ρ_n достигают величины не более $0.4 \div 0.5$) примерно компенсируется областью с пониженным захватом. Поэтому значение Θ_R для $\rho_n = 0$ является хорошей аппроксимацией для численной оценки захваченных позитронов.

Литература

- [1] *G.Stange* A pulsed magnetic lens for positron focusing numerical calculation and first measurements with a prototype. DESY SI-73/1, August 1973.
- [2] *R.Belbeoch, G.Bienvenu, J.C.Bourdon, P.Brunet and etc.* Rapport d'etudes sur le projet des linac injecteur de LEP(LIL). LAL/PI/82-01/T Janvier 1982.
- [3] The Stanford two-miles accelerator. Ed.by R.B.Nearl, New-York-Amsterdam: W.A.Benjamin, Inc. 1968.
- [4] *R.Erickson* SLC desing handbook(SLAC), Stenford, California, 1986.
- [5] GEANT-Detector Description and Simulation Tool. CERN, Geneva 1993.
- [6] *P.Росси* Частицы больших энергий. М.; 1955
- [7] *R.Chehab* Positron sources. LAL/RT/92-17 December 1992.
- [8] *В.А.Таюрский* Расчет конверсии электронов в позитроны при энергии $0.2 \div 2$ ГэВ. Припринт ИЯФ СО АН СССР. 76-36. Новосибирск 1976.
- [9] *S.Encklud* Positrons for linear colliders. SLAC-PUB-4484, November 1987(M).
- [10] *В.И.Артемов* Методы получения и формирования позитронных сгустков в линейных ускорителях. Обзор. М.; ЦНИИатоминформ, 1984
- [11] *S.Encklud* Positron target material tests. SLAC-CN-128, 1981
- [12] *I.Hiroyuki* Design of positron sources for JLC-I and JLC-ATF
- [13] *R.H.Helm* Adiabatic approximation for dynamics of a particle in the field of a tapered solenoid. SLAC-4, 1962.
- [14] *R.Chehab, G.L.Meur, B.Mouton, M.Renard* An adiabatic matching device for the Orsay linear positron accelerator. LAL/RT/83-03 March 1983.
- [15] *Л.Д.Ландау Е.М.Лифшиц* Теория поля. М.; Наука, 1989.

- [16] *М. Силадьи* Электронная и ионная оптика. М.; Мир, 1990.
- [17] *Л.Д. Ландау Е.М. Лифшиц* Механика. М.; Наука, 1988.
- [18] *Л.Э. Эсцгольц* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.; Наука, 1965.
- [19] *И.Н. Мешков* Траспортировка пучков заряженных частиц. Н.; Наука, 1991.
- [20] *A.A. Kulakov P.V. Martyshkin* VEPP-5 positron source yield semianalitical estimation. EPAC96, Spain, Barselona, 1996.
- [21] *A.A. Kulakov P.V. Martyshkin* VEPP-5 positron source simulations. EPAC96, Spain, Barselona, 1996.

А.А. Кулаков, П.В. Мартышкин

**Разработка позитронного источника
на основе линейных ускорителей**

A.A. Kulakov, P.V. Martyshkin

**Positron source design
based on linear accelerators**

ИЯФ 99-26

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 26.02. 1999 г.

Сдано в набор 2.03.1999 г.

Подписано в печать 2.03.1999 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.7 печ.л., 2.2 уч.-изд.л.

Тираж 110 экз. Бесплатно. Заказ № 26

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.