

Институт ядерной физики  
им. Г.И. Будкера СО РАН

И. А. Котельников

О ЗАТУХАНИИ В ВОЛНОВОДЕ

ИЯФ 98–85

Новосибирск  
1998

# О ЗАТУХАНИИ В ВОЛНОВОДЕ

*И. А. Котельников*

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера  
630090, Новосибирск, Российская Федерация

## Аннотация

Показано, что сильное поглощение ТМ волны при скользющем падении на поверхность металла является аналогом полного прохождения ТМ волны при падении на поверхность диэлектрика под углом Брюстера. Следствием потери поверхностью металла отражающих свойств является сильное затухание при распространении в волноводе колебаний с длиной волны  $\lambda$  порядка произведения радиуса  $a$  сечения волновода на величину поверхностного импеданса  $\zeta$ . Вычислен коэффициент затухания для  $H$ - и  $E$ - волн в круглом волноводе при произвольном соотношении  $\lambda$  и  $\zeta a$ .

# ON DAMPING IN A WAVEGUIDE

*I.A. Kotelnikov*

Budker Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, Russian Federation

## Abstract

It is shown that strong absorption of TM wave at inclined incidence on the surface of a metal is analogous to total transmission of TM wave, impinging on the surface of a dielectric medium at the Brewster's angle. The loss of reflection from metallic surface results in anomalously strong damping of waveguide modes in the regime where the wavelength  $\lambda$  is in order of the waveguide radius  $a$  times the surface impedance  $\zeta$ . The damping rate of  $H$ - and  $E$ -waves in circular waveguide for arbitrary ratio of  $\lambda$  to  $\zeta a$  is calculated.

©Budker Institute of Nuclear Physics

1. Рассмотрим отражение плоской электромагнитной волны от поверхности металла. Амплитуды отраженной и преломленной волн,  $E_1$  и  $E_2$ , нетрудно выразить через амплитуду падающей волны  $E_0$ , если использовать результат решения аналогичной задачи для диэлектрика и подставить

$$\varepsilon = \frac{4\pi i\sigma}{\omega}, \quad (1)$$

где  $\sigma$  — статическая проводимость металла. Для ТЕ волны (рис. 1) в соответствии с формулами Френеля [1, §86] получаем

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\cos\theta - \sqrt{\varepsilon}\cos\theta_2}{\cos\theta + \sqrt{\varepsilon}\cos\theta_2}, \quad (2a)$$

$$\frac{E_2}{E_0} = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta + \sqrt{\varepsilon}\cos\theta_2}; \quad (2б)$$

а для ТМ волны (рис. 2) имеем

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta - \cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta + \cos\theta_2}, \quad (3a)$$

$$\frac{E_2}{E_0} = \frac{2\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta + \cos\theta_2}, \quad (3б)$$

где  $\theta$  — угол падения, а  $\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2\theta/\varepsilon}$ . Для хороших проводников  $|\varepsilon| \gg 1$ , поэтому с хорошей точностью  $\cos\theta_2 = 1$ .

Известно, что на поверхности металлов для тангенциальных компонентов электрического и магнитного полей должно выполняться граничное условие Леонтовича [1, §87]

$$\mathbf{E}_t = \zeta[\mathbf{n}, \mathbf{H}_t], \quad (4)$$

где  $\zeta$  — поверхностный импеданс, а  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности металла. Учитывая, что вне металла  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$  и используя формулы

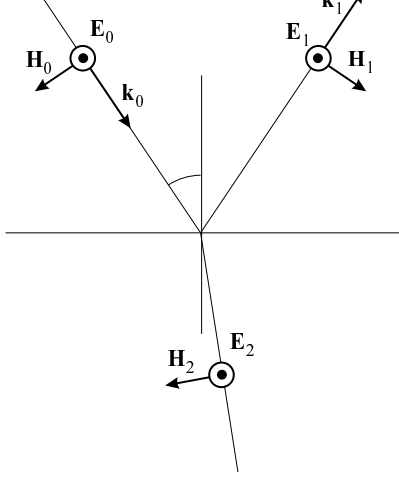


Рис. 1: ТЕ волна

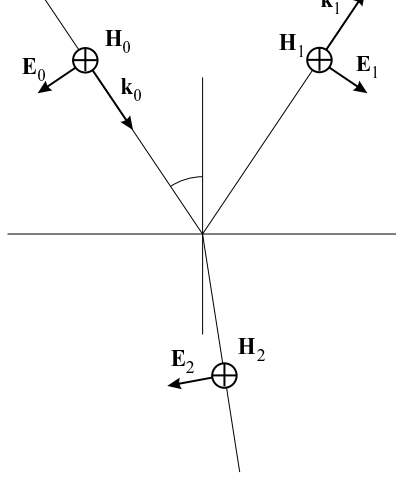


Рис. 2: ТМ волна

(2) и (3), нетрудно найти, что для ТЕ и ТМ волн поверхностный импеданс равен соответственно  $1/(\cos\theta_2\sqrt{\epsilon})$  и  $\cos\theta_2/\sqrt{\epsilon}$ . Таким образом, в приближении  $\cos\theta_2 = 1$  получаем  $\zeta = 1/\sqrt{\epsilon}$  вне зависимости от поляризации электромагнитного поля. Для случая (1) имеем  $\zeta = (1-i)\zeta'$ , где  $\zeta' = \sqrt{\omega/8\pi\sigma}$ . В общем случае, когда необходимо учитывать частотную дисперсию проводимости,  $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ , причем  $\zeta' > 0$ , а  $\zeta'' < 0$  [1, §87]. Как ясно из вывода, граничное условие Леонтовича верно при  $|\zeta| \ll 1$ . Для металлов последнее неравенство выполняется в инфракрасной и более низкочастотной области [1, §87], [2, §2.5].

Коэффициент отражения  $\mathcal{R} = |E_1/E_0|^2$  от поверхности металла нетрудно найти с помощью формул Френеля (2а) и (3а), либо непосредственно из граничного условия Леонтовича (4), выразив  $E_t$  и  $H_t$  через  $E_0$  и  $E_1$ :

$$\mathcal{R}_{TE} = \left| \frac{\zeta \cos\theta - 1}{\zeta \cos\theta + 1} \right|^2, \quad (5a)$$

$$\mathcal{R}_{TM} = \left| \frac{\cos\theta - \zeta}{\cos\theta + \zeta} \right|^2. \quad (5b)$$

Коэффициент отражения ТЕ волны близок к 1 при всех углах падения (рис. 3), а коэффициент отражения ТМ волны при  $\theta = \pi/2 - |\zeta|$  имеет

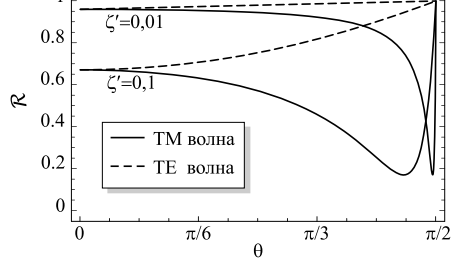


Рис. 3: Коэффициент отражения в зависимости от угла падения

минимум, равный

$$\mathcal{R}_{\min} = \left( \frac{|\zeta| - \zeta'}{|\zeta| + \zeta'} \right)^2.$$

На частотах, где дисперсия проводимости еще не существенна,  $\mathcal{R}_{\min} = 0,17$ . При уменьшении мнимой части  $\zeta''$  импеданса  $\mathcal{R}_{\min}$  стремится к нулю, а величина соответствующего угла падения — к углу Брюстера [1, §86]. При падении на диэлектрик под углом Брюстера ТМ волна полностью проходит через его поверхность, а при падении на металл — почти полностью поглощается.

2. Наличие глубокого провала в отражательной способности металлической поверхности приводит к сильному поглощению колебаний в волноводах при определенном соотношении между длиной волны, линейными размерами сечения волновода и величиной поверхностного импеданса его стенок. Рассмотрим волновод с круглым сечением (радиуса  $a$ ). В таком волноводе [1, §91]

$$\mathbf{E} = \frac{ik}{\kappa^2} \nabla_{\perp} E_z + E_z \hat{\mathbf{z}} + \frac{i\omega}{c\kappa^2} [\nabla_{\perp} H_z, \hat{\mathbf{z}}], \quad (6a)$$

$$\mathbf{H} = \frac{ik}{\kappa^2} \nabla_{\perp} H_z + H_z \hat{\mathbf{z}} - \frac{i\omega}{c\kappa^2} [\nabla_{\perp} E_z, \hat{\mathbf{z}}], \quad (6б)$$

$$E_z = E_0 J_m(\kappa r) e^{ikz + im\varphi - i\omega t}, \quad (6в)$$

$$H_z = H_0 J_m(\kappa r) e^{ikz + im\varphi - i\omega t}, \quad (6г)$$

где  $\kappa = \sqrt{\omega^2/c^2 - k^2}$ , а  $J_m$  — функция Бесселя. Используя граничное

условие (4), получаем дисперсионное уравнение

$$\left[ \zeta J_m + \frac{i\omega}{c\kappa} J'_m \right] \left[ J_m + \zeta \frac{i\omega}{c\kappa} J'_m \right] = \zeta \left[ \frac{ik}{\kappa} \frac{im}{\kappa a} J_m \right]^2, \quad (7)$$

где  $J_m$  и  $J'_m$  вычисляются для аргумента  $\kappa a$ . При заданной частоте  $\omega$  оно определяет продольное волновое число  $k$ .

В пределе идеальной проводимости стенок волновода, когда  $\zeta = 0$ , (7) распадается на два уравнения, отвечающих независимому выбору амплитуд  $E_0$  и  $H_0$ :

$$J'_m(\kappa a) = 0, \quad (8a)$$

$$J_m(\kappa a) = 0. \quad (8b)$$

Первое соответствует  $H$ -волне, в которой  $E_z \equiv 0$ , а второе отвечает  $E$ -волне, в которой  $H_z \equiv 0$ . Для справки укажем, что первые 3 корня  $\kappa_H a$  уравнения (8a) равны 1,84118, 5,33144, 8,53632, а первые 3 корня  $\kappa_E a$  уравнения (8b) есть 3,83171, 7,01559, 10,1735.

При конечном, хотя и малом импедансе,  $\zeta \ll \kappa/k$ , у любой из волн имеются все 6 компонентов электромагнитного поля. Для  $E$ -волны из (7) получаем приближенное уравнение

$$J_m(\kappa a) = -\zeta \frac{i\omega}{c\kappa} J'_m(\kappa a).$$

Решая его методом последовательных приближений, находим поправку  $\delta\kappa$  к величине  $\kappa_E$ , вносимую конечным импедансом:

$$\delta\kappa = -\frac{i\omega}{c\kappa_E} \frac{\zeta}{a}.$$

Так как  $\delta\kappa = -\delta k k / \kappa$ , отсюда находим коэффициент затухания  $E$ -волны:

$$\Im k = \frac{\omega}{kc} \frac{\zeta'}{a}, \quad (9a)$$

где  $\Im$  означает выделение мнимой части. Аналогичным образом для  $H$ -волны записываем приближенное уравнение

$$J'_m = \zeta \frac{i\kappa c}{\omega} J_m + \zeta \frac{i\kappa c}{\omega} \frac{km^2}{\kappa^3 a^2} J_m,$$

из которого находим

$$\Im k = \frac{kc}{\omega} \frac{m^2 k^2 + \kappa^4 a^2}{(\kappa_H^2 a^2 - m^2) k^2} \frac{\zeta'}{a}. \quad (96)$$

Смысл коэффициента затухания состоит в том, что поток энергии в волне убывает пропорционально  $e^{-2\Im k z}$ . Формулы (9а), (9б) совпадают с найденными в [1, §91] (другим способом). Однако они дают неверный результат, если  $\zeta \gtrsim \kappa/k$ .

В пределе  $\zeta \gg \kappa/k$  (7) переходит в уравнение

$$\zeta \left[ \frac{i\omega}{c\kappa} J'_m \right]^2 = \zeta \left[ \frac{ik}{\kappa} \frac{im}{\kappa a} J_m \right]^2,$$

которое имеет чисто вещественные решения, поскольку после сокращения множителя  $\zeta$  вообще не зависит от проводимости стенок. Если заметить, что  $\omega/c = k$  в силу неравенств  $\kappa/k \ll \zeta \ll 1$ , последнее уравнение легко свести к двум независимым уравнениям:

$$\frac{m}{\kappa a} J_m - J'_m = J_{m+1} = 0, \quad (10a)$$

$$\frac{m}{\kappa a} J_m + J'_m = J_{m-1} = 0. \quad (10б)$$

Поле (6), отвечающее решению уравнений (10а) и (10б), назовем соответственно  $L$ - и  $R$ -волной.  $L$ -волна имеет левую циркулярную поляризацию (в плоскости сечения волновода), причём  $E_r = +iE_\varphi \propto J_{m+1}(\kappa r)$ .  $R$ -волна имеет правую циркулярную поляризацию:  $E_r = -iE_\varphi \propto J_{m-1}(\kappa r)$ . На стенках волновода отличны от нуля только  $z$ -компоненты электрического и магнитного полей, поэтому вектор Пойтинга  $\mathbf{S} = (c/4\pi)[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$  там равен нулю, выражая отсутствие диссипации энергии. Имея ввиду случай  $m = 1$ , укажем, что первые три корня  $\kappa_{Ra}$  уравнения  $J_0 = 0$  равны 2,40483, 5,52008, 8,65373, а первые три корня  $\kappa_{La}$  уравнения  $J_2 = 0$  равны 5,13562, 8,41724, 11,6198. Поправка к  $\kappa_{L,R}$  вычисляется по формуле  $\delta k = i\kappa_{L,R}^2 / (2k^2 a \zeta)$ , а коэффициент затухания равен

$$\Im k = \frac{\kappa_{L,R}^2 \zeta'}{2k^2 a |\zeta|^2}. \quad (11)$$

Наиболее быстрое затухание достигается на общей границе областей применимости формул (9) и (11) при  $\zeta \sim \kappa/k$ . Соответствующая длина затухания  $(\Im k)^{-1}$  по порядку величины равна длине дифракции  $a^2/\lambda$ , на которой диаметр волнового пакета удваивается.

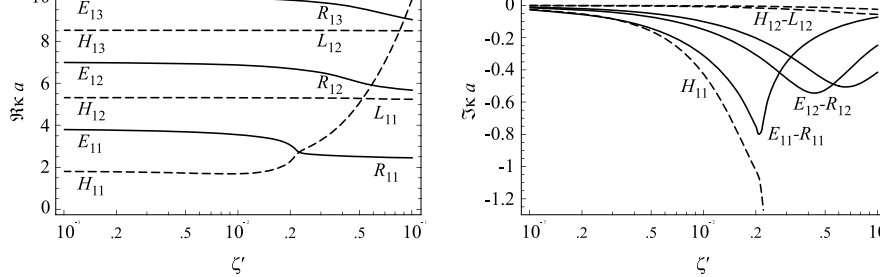


Рис. 4. Зависимость  $ka$  от  $\zeta'$  при  $ka = 100$ : слева — вещественная часть, справа — мнимая часть  $ka$ . Обозначения  $H_{mn}$ ,  $E_{mn}$ ,  $L_{mn}$ ,  $R_{mn}$  соответствуют волнам с заданными азимутальными и радиальными номерами  $m$  и  $n$

Рис. 4 на примере волн с  $m = 1$  позволяет проследить основные закономерности преобразования  $H$ - и  $E$ -волн в  $L$ - и  $R$ -волны при изменении  $\zeta = (1 - i)\zeta'$ . При увеличении  $\zeta$  от предельного значения  $\zeta \ll \kappa/k$  до  $\zeta \gg \kappa/k$  в конечном итоге происходит уменьшение  $\kappa$ . Если упорядочить в порядке возрастания  $\kappa_H$ ,  $\kappa_E$  с одной стороны и  $\kappa_R$ ,  $\kappa_L$  — с другой, то соответствие волн при  $\zeta \ll \kappa/k$  и  $\zeta \gg \kappa/k$  устанавливается простым правилом: корень из первой последовательности переходит в ближайший меньший корень из второй последовательности. Поскольку волне  $H_{11}$  отвечает наименьший (1,84118) из всех корней в обеих последовательностях, она исчезает (становится сильно затухающей) при увеличении импеданса. Другие  $H$ -волны переходят в  $L$ -волны с уменьшением радиального номера  $n$  на единицу. Так,  $H_{12}$  переходит в  $L_{11}$ ,  $H_{13}$  переходит в  $L_{12}$  и т.д.  $E$ -волны переходят в  $R$ -волны с сохранением радиального номера:  $E_{mn}$  переходит в  $R_{mn}$ .

3. Аномальное затухание в волноводе следует учитывать при изучении распространения лазерного излучения через микрокапиллярные трубки [3,4]. Недавно было предложено использовать такие трубки для предотвращения дифракционного расплывания драйверного импульса мощного лазера с длиной волны  $\lambda \sim 1 \div 10$  мкм в методе кильватерного ускорения заряженных частиц [5]. Анализ физических явлений, сопровождающих распространение лазерного импульса мощностью порядка 10 ТВт, выходит за рамки простой модели, рассмотренной выше, поскольку даже при очень малой длительности импульса (1 пкс) требует учета ионизации и, возможно, испарения стенок трубки под действием лазерного импульса (даже при контрастности порядка  $10^{-5}$ ).



## Литература

- [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Сер. Теоретическая физика, т. VIII. М.: «Наука», 1982.
- [2] Н.И. Калигиевский. Волновая оптика. М.: «Наука», 1971.
- [3] S. Jackel *et al.* // Opt. Lett. **20**, 1086 (1995).
- [4] M. Borghesi, A.J. Mackinnon, R. Gaillard, O. Willi, and A.A. Offenberger // Phys. Rev. E, **57**(5), R4899 (1998).
- [5] K.V. Lotov // Rep. Budker INP 98-40. Novosibirsk: Budker Ins. of Nucl. Phys., 1998.