

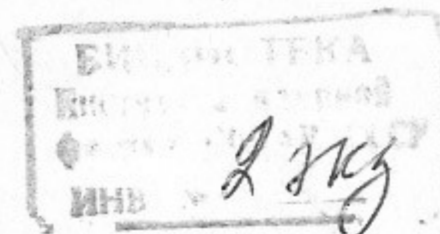


Я.И.И

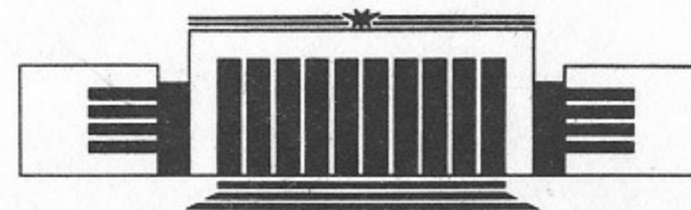
Государственный научный центр
Российской Федерации
Институт ядерной физики
им. Г.И. Будкера

С.Г. Яковченко

**РЕШЕНИЕ
КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ ИОНОВ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ
ПРИ НАЛИЧИИ НАГРЕВА**



ИЯФ 95-20



НОВОСИБИРСК

Решение кинетического уравнения для ионов в изотропной плазме при наличии нагрева

С.Г. Яковченко

ГНЦ РФ "Институт ядерной физики
им. Г.И. Будкера СО РАН"
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

На основе решения кинетического уравнения для ионов определяется температура ионов при нагреве плазмы стохастическими электростатическими полями, возникающими при развитии неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в плазменной струе, создаваемой газоразрядным источником. Предполагается, что потери энергии ионов обусловлены торможением на более холодных электронах.

© ГНЦ РФ "Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН"

Введение

В экспериментах [1] – [4] был обнаружен и исследован дополнительный механизм нагрева плазмы, получаемой с помощью газоразрядных источников с $E \times B$ дрейфом. Было показано, что этот механизм заключается в возбуждении в плазменной струе неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (НКГ) и последующего нагрева возникающими ВЧ полями ионов.

Целью настоящей работы является нахождение функции распределения ионов для ситуации, близкой к условиям этих экспериментов. План дальнейшего изложения следующий. В первом разделе сделан краткий обзор экспериментальных условий [1] – [4] и вытекающих из них упрощений нашей задачи. Во втором разделе проанализировано кинетическое уравнение для ионов в случае, когда функция распределения близка к максвелловской. В третьем разделе найдены "квазимаксвелловские" решения для двух видов нагревного слагаемого в кинетическом уравнении. Особое решение кинетического уравнения получено в четвертом разделе. Общие выводы из результатов и сравнение с численным решением кинетического уравнения приведены в пятом разделе.

В Приложении I из общих выражений [5] найдено кинетическое уравнение для изотропной функции распределения. Приложение II посвящено аппроксимации вклада в кинетическое уравнение от дополнительного нагрева плазмы, обусловленного НКГ.

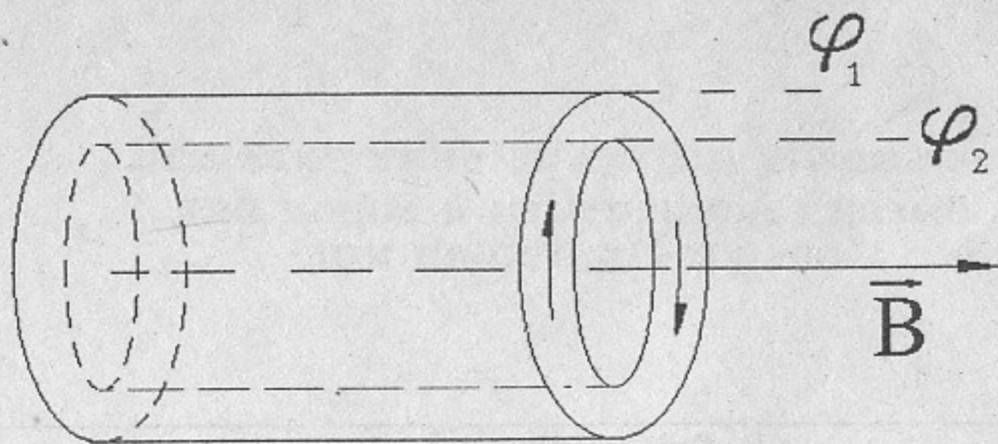


Рис. 1. Полая плазменная струя, вытекающая из газоразрядного источника, вращается в скрещенных радиальном электрическом и магнитном полях ($\varphi_{1,2}$ — электрические потенциалы на внешней и внутренней сторонах струи). Стрелки показывают направление вращения плазмы.

1. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца

В газоразрядных источниках плазмы, использованных в экспериментах [1]–[4] имеется радиальное электрическое поле (см. рис. 1), перпендикулярное магнитному, приводящее к вращению плазменной струи, вытекающей из источника. Дифференциальное вращение плазмы в скрещенных полях при определенных условиях может приводить к возбуждению неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Эта неустойчивость стремится сделать вращение твердотельным. При ее развитии в плазме возникают пакеты электростатических волн, распространяющиеся поперек магнитного поля (направленного вдоль оси z), причем $k_{\parallel} \simeq 0$. Электрическое поле пакета можно представить суммой гармоник [6]:

$$E = E_0 \cdot \sin(k_0 \cdot x - \omega_0 \cdot t) \cdot \sum_n \cos(n \cdot \Delta\omega t), \quad (1)$$

где E_0 , k_0 , ω_0 , $\Delta\omega$, — амплитуда электрического поля, волновой вектор, частота несущей гармоники и разность частот между соседними гармониками пакета, соответственно. В формуле (1) не учитывается дисперсия по волновым векторам, поскольку разность волновых векторов между соседними гармониками Δk обычно мала по сравнению с обратным ларморовским радиусом ионов $\rho_i^{-1} = (v_T/\Omega_i)^{-1}$ (здесь Ω_i и v_T , соответственно циклотронная частота и тепловая скорость ионов), так что $\Delta k x \sim \Delta k \rho_i \ll 1$.

Амплитуда электростатических волн ограничена передачей энергии ионам. Авторы [7] рассмотрели нагрев частиц в поле (1) в пределе силь-

ной стохастичности, когда велик параметр:

$$K_H = 2\pi \cdot \frac{e \cdot E_0 \cdot k_0}{M\Omega_i \cdot \Delta\omega} \gg 1.$$

Экспериментальные условия [1]–[4], соответствуют именно такому пределу. Стохастический нагрев ионов в поле пакета приводит к появлению в уравнении Фоккер–Планка для ионной функции распределения нагревного слагаемого, рассчитанного [7]:

$$\frac{\partial f_i(\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\perp}} \cdot \varepsilon_{\perp} \cdot (D(\varepsilon_{\perp}) \cdot M) \cdot \frac{\partial f(\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp})}{\partial \varepsilon_{\perp}} + \dots, \quad (2)$$

где многоточием обозначены слагаемые, соответствующие кулоновским столкновениям, а коэффициент диффузии:

$$D(\varepsilon_{\perp}) = \frac{\pi}{\Delta\omega} \cdot \left(\frac{eE_0}{M}\right)^2 \cdot \left\{1 - \frac{J_1(2k_0 r_H)}{k_0 r_H}\right\}. \quad (3)$$

Ларморов радиус r_H выражается через энергию движения перпендикулярно магнитному полю ε_{\perp} обычным образом:

$$r_H = \left(\frac{2\varepsilon_{\perp}}{M\Omega_i^2}\right)^{1/2}.$$

Характерной чертой экспериментов [1, 2] была низкая температура электронов, обусловленная сильной электронной теплопроводностью на газоразрядный источник плазмы. Эта теплопроводность могла быть подавлена созданием термобарьера между источником плазмы и основной ловушкой [3, 4], так что электронная (и вместе с ней ионная) температура в основной ловушке возрастала в несколько раз. Тем не менее во всех экспериментах энергетическое время жизни ионов определялось торможением на холодных электронах.

Второй особенностью экспериментов [1]–[4] было малое отличие средней энергии движения частиц вдоль и поперек магнитного поля. При высокой температуре ионов (достигаемой в присутствии термобарьера) в [3, 4] столкновительное время изотропизации функции распределения становится порядка времени существования плазмы в основной ловушке (в [1, 2] время изотропизации много меньше времени жизни). Авторы [3, 4] объясняют это “магнитным перемешиванием” стохастически ускоренных частиц в неоднородном магнитном поле (см. [8]).

Дополнительной чертой экспериментов, упрощающей нахождение функции распределения ионов, является малая роль процессов переноса в кинетическом уравнении. Более конкретно, конвективным слагаемым $\vec{v} \cdot \nabla f_i(v)$ в кинетическом уравнении можно пренебречь по сравнению

со столкновительным, имеющим порядок $\nu_{ii} \cdot f_i(v)$, где ν_{ii} — ион-ионная частота столкновений.¹

Рассмотренные нами особенности экспериментов делают возможным использование следующих упрощений кинетического уравнения:

1. Изотропия: функция распределения не зависит от направления скорости.
2. Однородность: пренебрежение изменениями в функции распределения, вызванными ее пространственными градиентами, по сравнению со столкновительными изменениями.
3. Потери энергии обусловлены торможением на холодных электронах.
4. Стационарность: времена перехода функции распределения к равновесному состоянию значительно меньше времени изменения макропараметров плазмы (например, концентрации).
5. Приток энергии от ВЧ полей, инициируемых НКГ, учитывается введением дополнительного коэффициента диффузии по скоростям.

2. Кинетическое уравнение

Для изотропной функции распределения ионов в отсутствие нагрева при учете упрощений (1-3), рассмотренных в предыдущей секции, кинетическое уравнение принимает вид (см. [5] и Приложение I настоящей статьи):

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 (D_{ie} + D_{ii}) \frac{\partial f_i}{\partial v} + v^3 (\nu_{ie} + \nu_{ii}) f_i \right], \quad (4)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} D_{ii} &= \pi^{3/2} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \nu_{ie} \cdot \int_0^\infty du \cdot u f(u) \left[\left(\frac{u}{v}\right)^3 \theta(v-u) + \theta(u-v) \right]; \\ \nu_{ii} &= \pi^{3/2} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \nu_{ie} \cdot 3 \int_0^\infty \frac{du \cdot u^2}{v^3} f(u) \theta(v-u); \\ D_{ie} &= \frac{T_e}{M} \nu_{ie}; \quad \nu_{ie} = \frac{16\pi^{1/2} e^4 \Lambda n_0}{3M m v_e^3}, \end{aligned} \quad (5)$$

¹Пренебрежение пространственным градиентом функции распределения, разумеется, несправедливо вблизи термобарьера ([3, 4]), где температура ионов очень резко зависит от координаты вдоль оси ловушки.

где $v_T = (2T/m)^{1/2}$ — скорость ионов при температуре равной температуре электронов. При расчете D_{ie} , ν_{ie} электроны полагались максвелловскими с температурой $T = T_e > (m/M)(Mv^2/2)$, что достаточно для наших целей. Функция распределения ионов нормирована на единицу:

$$4\pi \cdot \int_0^\infty du \cdot u^2 f(u) = 1. \quad (6)$$

Модельное слагаемое, описывающее нагрев ионов, выбрано в следующем виде:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 D_{heat}(v) \frac{\partial f_i}{\partial v}. \quad (7)$$

где зависимость нагревного коэффициента диффузии от скорости принята ступенчатой: а) $D_{heat}(v) = D_0 \theta(v-v_0)$ ($\theta(x)$ — функция Хевисайда) — эта зависимость соответствует аппроксимации стохастического нагрева ионов НКГ (см. Приложение II), далее для нее используется термин “стохастическая”, б) $D_0 \theta(v_0-v)$ — эта зависимость в какой-то степени дополнительна стохастическому нагреву, так, что для нее в работе используется термин “антистохастическая”. Ясно, что D_0 можно сопоставить с интенсивностью нагрева, а v_0 — характерный размер области нагрева. Для дальнейших расчетов введем обозначения $\chi = (M D_0)/(\nu_{ie} T)$ для безразмерной интенсивности нагрева и $\xi = v_0/v_T$ для безразмерной границы области нагрева.

Поскольку функция распределения и коэффициенты диффузии и торможения $D^{i/\alpha}$, $\nu^{i/\alpha}$ конечны при $v = 0$ можно, домножив кинетическое уравнение (8) с учетом (7) на v^2 и проинтегрировав от 0 до v , записать его в эквивалентной форме:

$$0 = [D_{ie} + D_{ii} + D_{heat}(v)] \frac{1}{v} \frac{\partial f_i}{\partial v} + [\nu_{ie} + \nu_{ii}] f_i. \quad (8)$$

Заметим, что константа интегрирования равна нулю, что следует из рассмотрения кинетического уравнения при $v \rightarrow \infty$.

Для получения уравнения баланса энергии домножим (4) на $Mv^2/2$ и проинтегрируем по всему скоростному пространству. Вводя эффективную температуру ионов W :

$$\frac{3}{2} W = 4\pi \int_0^\infty du \cdot u^2 f_i(u) \cdot \frac{Mu^2}{2},$$

получаем после громоздких вычислений балансовое уравнение:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} W = 3\nu_{ie}(T - W) + 4\pi \int_0^\infty du f(u) \frac{\partial}{\partial u} (u^3 M D_{heat}(v)). \quad (9)$$

В приведенном уравнении слагаемое, пропорциональное разности средних энергий ионов и электронов играет роль стока. Для дальнейшего продвижения нам понадобится рассмотреть случай бесконечно большой области нагрева, т.е. $D_{heat}(v) = D_0 = const$ для всех скоростей. Можно показать, что самосогласованным решением кинетического уравнения (8) в этом случае является максвелловская функция распределения с температурой W :

$$W = T + \frac{D_0 M}{\nu_{ie}} \quad (10)$$

Для максвелловской функции распределения с температурой W кинетические коэффициенты торможения и рассеяния на ионах подчиняются легко доказываемому соотношению $D_{ii} = (W/M)\nu_{ii}$. При использовании этого равенства, а также учете соотношения между коэффициентами торможения и рассеяния на электронах кинетическое уравнение (8) переписывается в виде:

$$0 = \left[\frac{T}{M} \nu_{ie} + \frac{W}{M} \nu_{ii} + \frac{D_0 M}{\nu_{ie}} \frac{T}{M} \nu_{ie} \right] \frac{1}{v} \frac{\partial f_i}{\partial v} + \left[\nu_{ie} + \nu_{ii} \right] f_i \quad (11)$$

При подстановке соотношения (10) в (11), легко видеть, что решение $f_i(v)$ — максвелловское с температурой W , т.е. наше предположение — самосогласованное.

Из физических соображений понятно, что когда область нагрева весьма мала функция распределения ионов должна быть близка к максвелловской с температурой $W = T$. Ясно, что можно рассмотреть аналитически случаи, когда область нагрева мала или велика в некотором смысле, используя в качестве нулевого приближения максвелл с соответствующей температурой W_0 . Рассчитав по функции нулевого приближения $f_i^0(v)$ кинетические коэффициенты D_{ii}^0 и ν_{ii}^0 можно из формулы (8) найти функцию распределения первого приближения $f_i^1(v)$. Если кинетические коэффициенты, рассчитанные по функции первого приближения D_{ii}^1 и ν_{ii}^1 будут мало отличаться от предыдущих, то можно считать близкую к максвелловской функцию $f_{ii}^1(v)$ — решением кинетического уравнения. Удобно находить не саму функцию, а ее логарифм по формуле — следствию (8):

$$\ln \left(\frac{f^1(v)}{f^1(0)} \right) = \quad (12)$$

$$= - \int_0^v \frac{[1 + \nu_{ii}^0/\nu_{ie}] dv \cdot v}{[T/M + (W_0/M)(\nu_{ii}^0/\nu_{ie}) + (T/M)(D_{heat}(v)M)/(T\nu_{ie})]}$$

Значение функции распределения в нуле $f^1(0)$ следует находить из условия нормировки (6). Для удобства расчетов введем функцию $g(v)$ — отношение ион-ионной и ион-электронной частот торможения:

$$g(v) = \frac{\nu_{ii}^0}{\nu_{ie}} = \gamma_0 \cdot 3 \int_0^x \frac{u^2 du}{x^3} \exp(-u^2), \quad \gamma_0 = \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{T}{W_0}\right)^{3/2}, \quad (13)$$

где $x = v/v_w$, а $v_w = (2W_0/M)^{1/2}$ — тепловая скорость ионов, определяемая из функции распределения нулевого приближения. Функция $g(v)$ при скоростях много меньше тепловой $v \ll v_w$ равна γ_0 , а при $v \geq v_w$ убывает как $\gamma_0 \cdot (3\sqrt{\pi}/4) \cdot (v_w/v)^3$.

3. Предельные случаи широкой и узкой областей нагрева

3.1. Стохастический нагрев

Рассмотрим вначале случай широкой области нагрева, когда функция распределения близка к максвелловской с температурой $W_0 = T + (D_0 M)/\nu_{ie}$ и предполагается, что $v_0 \ll v_w$. Используя уравнения (6, 12, 13) легко получаем $f(v)$:

$$f(v) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_w^3} \left(1 - \frac{8\mu}{15\sqrt{\pi}} \frac{v_0^5}{v_w} \right) \times$$

$$\times \left\{ \exp\left(-\mu \frac{v^2}{v_w^2} - \frac{v^2}{v_w^2}\right) \theta(v_0 - v) + \exp\left(-\mu \frac{v_0^2}{v_w^2} - \frac{v^2}{v_w^2}\right) \theta(v - v_0) \right\},$$

где введено обозначение:

$$\mu = \frac{\chi}{1 + \gamma_0(1 + \chi)}$$

Средняя энергия ионов, рассчитанная по этой функции распределения, будет:

$$W = W_0 \left(1 - \frac{8\mu}{15\sqrt{\pi}} \left(\frac{v_0}{v_w}\right)^5 \right)$$

Условие применимости полученных формул при учете дополнительного условия малости изменения функции распределения на участке без нагрева по сравнению с "невозмущенным" максвеллом: $\mu \cdot (v_0/v_w)^2 \ll 1$ можно записать в безразмерных обозначениях как:

$$\xi^2 \ll \min\left\{(1 + \chi), \left(\frac{M}{m} \frac{1}{\chi}\right)^{1/2}\right\}$$

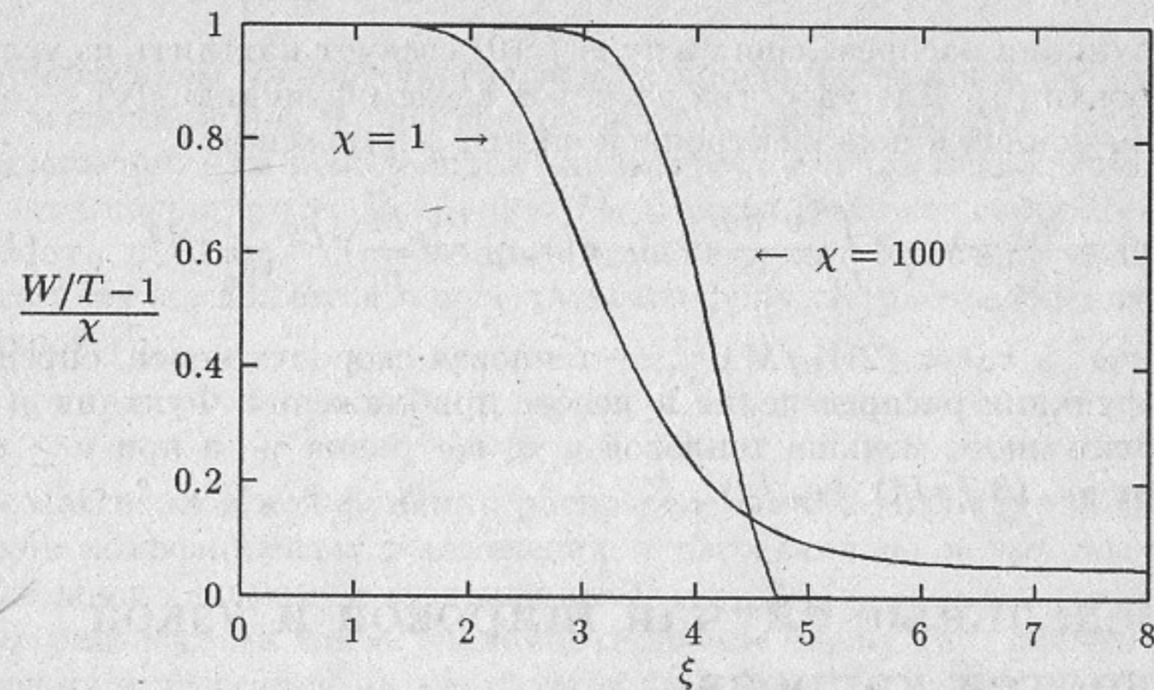


Рис. 2. Зависимость нормированной к единице разницы средних энергий ионов и электронов от ξ при постоянном χ (стохастический нагрев). При $\xi^2 \geq (M/m)^{1/3}$ граница нагрева выходит из области сильных ионных столкновений и средняя энергия ионов резко падает до $W = T$. При малых ξ средняя энергия ионов равна $T(1 + \chi)$ - и справедливо приближение "широкой" области нагрева.

В обратном случае узкой области нагрева: функция распределения ионов близка к максвелловской, с температурой $W_0 = T$. Этот случай довольно просто анализируется с качественной стороны. При $v > v_0$ функция распределения убывает как

$$f(v) \Big|_{v > v_0} \sim \exp\left(-\frac{Mv^2}{2T} \frac{1}{1 + \chi}\right)$$

или быстрее. Если $Mv_0^2/2T \gg (1 + \chi)$, то функция распределения будет мала в области нагрева и можно считать, что средняя энергия $W_0 = T$. Поправки в W будут иметь порядок:

$$\exp\left(-\frac{Mv_0^2}{2T} \frac{1}{1 + \chi}\right) \ll 1.$$

Выражение для функции распределения ионов:

$$f(v) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_T^3} \left\{ \exp\left(-\theta(v_0 - v) \frac{v^2}{v_T^2}\right) + \theta(v - v_0) \times \right.$$

$$\times \exp\left(-\left(\frac{v^2}{v_0^2} + \chi\right) \frac{\xi^2}{1 + \chi} - \frac{\chi \xi^2}{1 + \chi} G\left(\frac{v}{v_0}, \frac{4(1 + \chi)\xi^2}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{M}{m}}\right)\right) \Big\},$$

где введена функция:

$$G(a, b) = 2 \int_1^a \frac{x dx}{1 + b \cdot x^3}. \quad (14)$$

На рис.2 приведена численная зависимость, нормированной к единице, разницы средних энергий ионов и электронов от ξ при постоянном χ .

3.2 Антистохастический нагрев

При "антистохастическом" виде нагревного слагаемого приближение широкой области нагрева соответствует случаю $\xi^2 \gg (1 + \chi)$ (средняя энергия ионов в этом приближении $W_0 = T(1 + \chi)$). В этом случае поправки в функции распределения и средней энергии, обусловленные конечностью ξ , будут порядка $\exp(-\xi^2/(1 + \chi)) \ll 1$, и можно записать следующее приближение для $f(v)$:

$$f(v) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_w^3} \left\{ \theta(v_0 - v) \exp\left(-\frac{v^2}{v_w^2}\right) + \theta(v - v_0) \exp\left(-\frac{\xi^2}{1 + \chi} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{v^2}{v_0^2}(1 + \chi) - \chi\right) \frac{\chi \xi^2}{(1 + \chi)^2} G\left(\frac{v}{v_0}, \frac{4\xi^2}{3\sqrt{\pi}(1 + \chi)} \sqrt{\frac{m}{M}}\right)\right\},$$

где функция $G(a, b)$ задана (14). Строгое условие применимости приближения:

$$\xi^2 \gg (1 + \chi) \max\{1, \ln(1 + \chi)\}.$$

Интересен случай "слабого" нагрева, когда средняя энергия ионов близка к средней энергии электронов и ионная функция распределения — максвелловская. Слабый нагрев возможен либо когда область нагрева очень мала $\xi^2 \ll 1$, либо если мала интенсивность нагрева $\chi \ll 1$. Используя уравнения (6, 12, 13) можно записать функцию распределения как:

$$f(v) = f(0) \cdot \begin{cases} \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2} - a\left(\frac{v}{v_T}\right)\right), & \text{при } v < v_0 \\ \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2} - a\left(\frac{v_0}{v_T}\right)\right), & \text{при } v \geq v_0, \end{cases}$$

$$f(0) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_T^3} \cdot \left[1 - a(\xi) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi du u^2 \exp(-u^2) (a(v) - a(\xi)) \right],$$

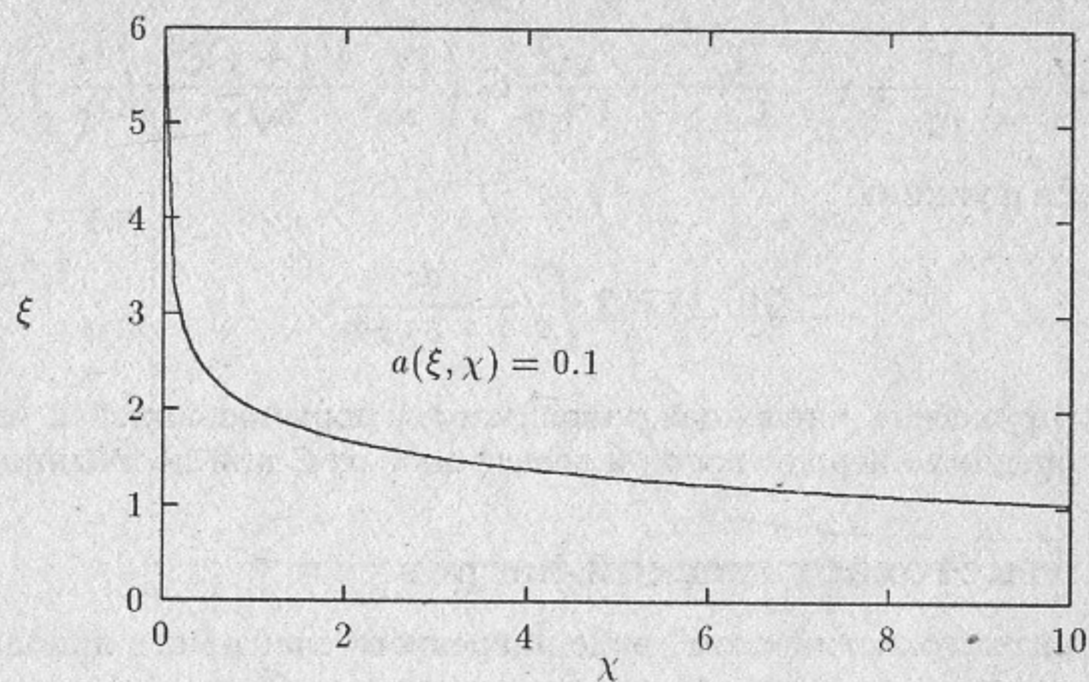


Рис. 3. В области под кривой $W/T \approx 1$.

где функция:

$$a(x) = 2 \int_0^x \frac{\chi \cdot x dx}{1 + \chi + g(x)},$$

должна быть малой для $x = [1, \xi]$, чтобы функция распределения была близка к максвелловской с температурой T . Функция $g(x)$ введена в (13) ($x = v/v_T$ — безразмерная скорость), константа γ_0 в нашем случае, очевидно, равна $(M/m)^{1/2}$.

Средняя энергия ионов записывается в виде:

$$\frac{W}{T} = \left[1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi du u^2 \exp(-u^2) \left(\frac{2}{3} u^2 - 1 \right) (a(v) - a(\xi)) \right].$$

Из вида функции-поправки $a(\xi)$ видно, что при очень малых ξ или χ она также мала. На рис.3 показана зависимость $\xi(\chi)$ на которой $a(\xi, \chi) = 0.1$, область лежащая ниже графика есть область применимости нашего приближения.

На рис.4 приведена численная зависимость нормированной к единице разницы средних энергий ионов и электронов от ξ при постоянном χ .

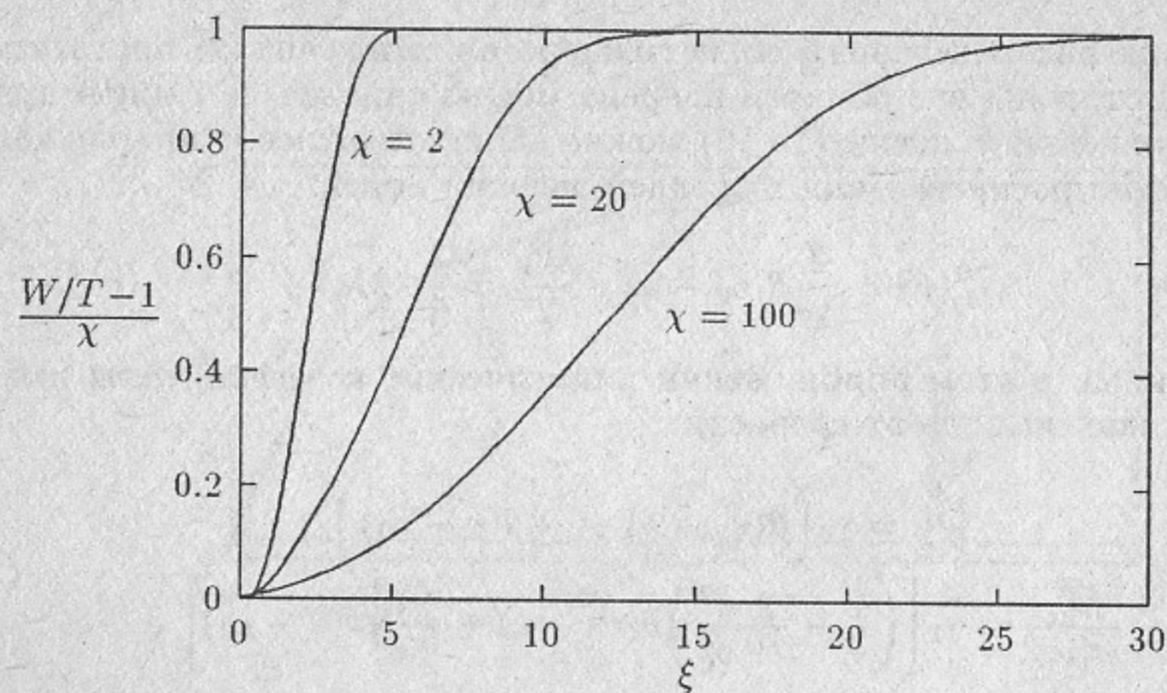


Рис. 4. Зависимость нормированной к единице разницы средних энергий ионов и электронов от ξ при постоянной интенсивности нагрева χ ("антистохастический" нагрев).

4. Антистохастический нагрев: особое решение

В предыдущей секции рассмотрены решения, область применимости которых, грубо говоря, либо $\xi^2 \ll 1$, либо $\xi^2 \gg 1 + \chi$. Имеется промежуточное решение, при котором ξ^2 должно быть в интервале $1 \ll \xi^2 \ll 1 + \chi$. Соображения, на основе которых удается построить такое решение весьма просты. Известно, что для пробных частиц, с энергией большей $T(M/m)^{1/3}$ торможение на электронах сильнее чем на ионах (это можно видеть из выражения (13) для отношения частот ν_{ii}/ν_{ie} при $W_0 = T$). Если нагрев производится вплоть до скоростей, где уже нет интенсивных ион-ионных столкновений:

$$\xi^2 \gg (M/m)^{1/3}, \quad (15)$$

то можно утверждать, что функция распределения будет испытывать резкий спад при $v > v_0$ из-за торможения на электронах. Основная часть частиц будет сосредоточена там где есть нагрев: $v \leq v_0$. Рассмотрим вид функции распределения внутри этой области. Из вида кинетического уравнения (8) следует, что при росте интенсивности нагрева D_0 функция распределения будет "уплощаться". Если $D_0 \gg v_0^2 \nu_{ie}$ или, в безразмерных параметрах:

$$\chi \gg \xi^2, \quad (16)$$

то функцию распределения в области нагрева можно считать постоянной. С другой стороны вне области нагрева можно считать ее равной нулю. При выполнении условий (15,16) можно записать нулевое приближение для функции распределения и средней энергии ионов:

$$f_i^0(v) = \frac{3}{4\pi} \theta(v_0 - v), \quad \frac{W_0}{T} = \frac{2}{5} \cdot M v_0^2.$$

Вычисленные в этом приближении кинетические коэффициенты имеют простую зависимость от скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{ii}^0}{\nu_{ie}^0} &= \gamma_1 \left(\theta(v_0 - v) + \frac{v_0^3}{v^3} \theta(v - v_0) \right), \\ \frac{D_{ii}^0}{v_0^2 \nu_{ie}^0} &= \gamma_1 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{10} \frac{v^2}{v_0^2} \right) \theta(v_0 - v) + \frac{1}{5} \frac{v_0^3}{v^3} \theta(v - v_0) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где коэффициент $\gamma_1 \ll 1$ согласно условию (15):

$$\gamma_1 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(\left(\frac{M}{m} \right)^{1/3} \frac{1}{\xi^2} \right)^{3/2} \ll 1.$$

Используя уравнения (12) (с коэффициентами (17)), (6) получаем для функции распределения первого приближения: при $v < v_0$:

$$f^1(v) = f^1(0) \left(1 - \frac{3v^2}{5v_0^2} \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \chi/\xi^2 + (T/W_0)} \right)^{\frac{5}{3} \frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}};$$

при $v \geq v_0$:

$$f^1(v) = f^1(v_0) \cdot \exp \left(-\frac{v^2}{v_T^2} + 2 \left(\xi^2 - \frac{5}{2} \right) G \left(\frac{v}{v_0}, \frac{10\xi}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m}{M}} \right) \right);$$

$$f^1(0) = \frac{3}{4\pi v_0^3} \cdot \left(1 - \frac{3}{5} \left(\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1} \cdot \frac{\chi - \xi^2}{\gamma_1 \xi^2 + \chi} - \frac{\xi^2(1+\gamma_1)}{\gamma_1 \xi^2 + \chi} \right) \right).$$

Здесь $G(a, b)$ определяется (14). Зависимость функции распределения при $(v/v_0 - 1) \simeq 1$, $v \geq v_0$ проста:

$$f^1(v) = f^1(v_0) \cdot \exp \left(-5 \left(\frac{v}{v_0} - 1 \right) \frac{1+\gamma_1}{\gamma_1} \right).$$

Средняя энергия ионов с учетом ненулевого γ_1 и конечного отношения χ/ξ^2 записывается как:

$$\frac{W}{T} = \frac{2}{5} \xi^2 \cdot \left[1 + \frac{2}{5} \frac{\gamma_1}{1+\gamma_1} \cdot \frac{\chi - \xi^2}{\gamma_1 \xi^2 + \chi} - \frac{4}{35} \frac{\xi^2(1+\gamma_1)}{\gamma_1 \xi^2 + \chi} \right]. \quad (18)$$

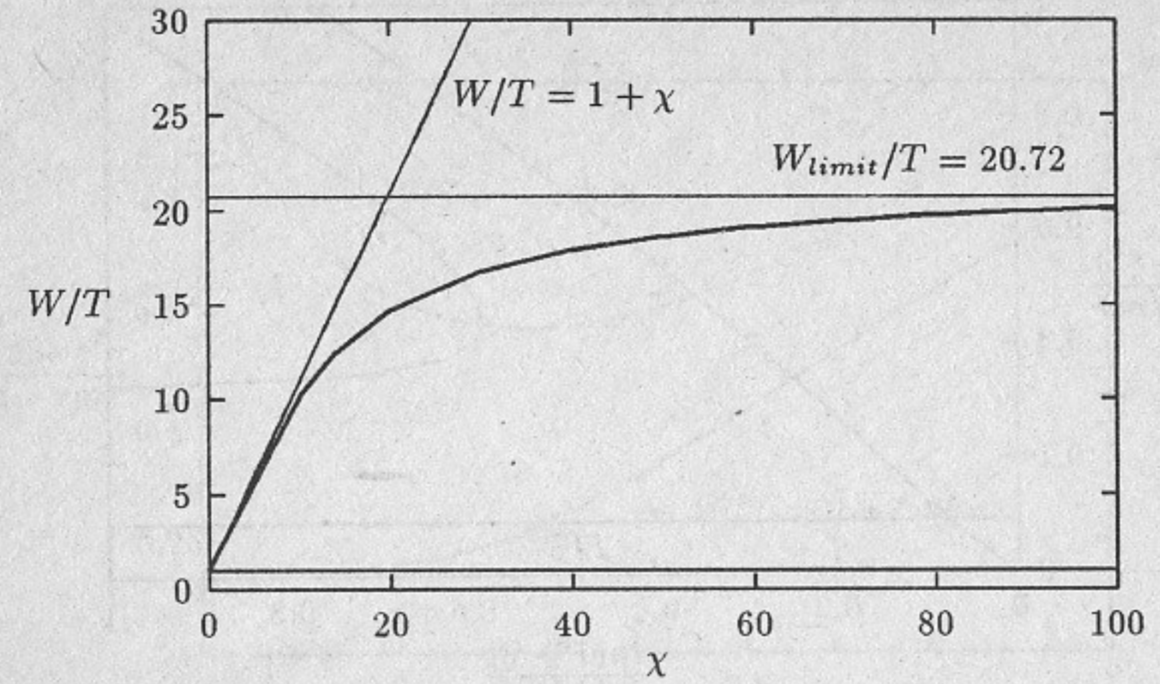


Рис. 5. Зависимость средней энергии ионов от χ при постоянном $\xi = 7$. При больших χ средняя энергия ионов стремится к асимптотике особого решения (см. (18)). При малых $\chi \ll \xi^2$ справедлива асимптотика "широкой" области нагрева.

На рис.5 показана численная зависимость средней энергии ионов от χ . Разность аналитического и численного значений средней энергии частиц при выполнении условий (15, 16) не превышает двух процентов и находится в пределах ошибки счета.

5. Карта приближений. Численные расчеты

Области применимости аналитических зависимостей, полученных в предыдущих разделах удобно представить на плоскости χ, ξ . Для антистохастического нагрева подобная "карта" приведена на рис.6.

Для стохастического нагрева области $W/T \sim 1$ и $W/T \sim 1 + \chi$ показаны на рис.7, полученном по результатам численных расчетов с точной зависимостью $D_{heat}(v)$ (см. (3)). Переходная область, $0.05 \cdot \chi < W/T - 1 < 0.95 \cdot \chi$ значительно расширяется если не используется ступенчатое приближение для коэффициента диффузии по скоростям (20). Такое изменение можно заметить при сравнении зависимостей $W(\xi)$, рассчитанных для точной (рис.8) и приближенной (рис.2) зависимостей $D_{heat}(v)$. Причина такого поведения заключается в том, что даже при большом значении нижней границы нагрева ξ , в области сильных ион-ионных столкновений $Mv^2/2 < (M/m)^{1/3}$ точный коэффициент диффузии не равен нулю,

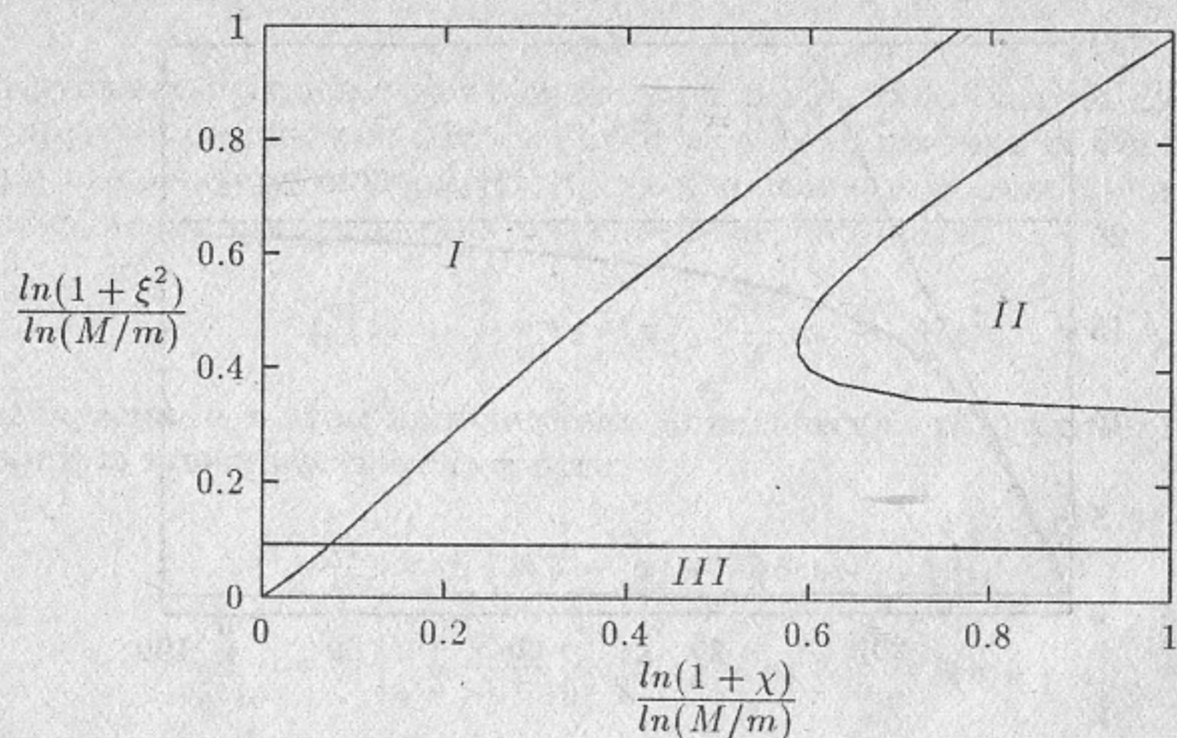


Рис. 6. Карта приближений при "антистохастическом" нагреве. Область I соответствует приближению широкой области нагрева $\xi^2 \gg 1 + \chi$, область III — противоположному случаю $\xi^2 \ll 1$. Область II — промежуточный случай, при котором граница действия нагрева выходит из области интенсивных ион-ионных столкновений $\xi^2 \gg (M/m)^{1/3}$, а интенсивность нагрева достаточно высокая: $\chi \gg \xi^2$.

вследствие чего средняя энергия ионов несколько выше чем при "ступенчатом" нагреве. При не слишком малых $W/T > 1 \div 2$ и $\chi < 1000$ можно предложить аппроксимационную формулу для стохастического нагрева, полученную на основе численных расчетов:

$$\frac{W}{T} = 1 + \frac{\chi}{1 + c \cdot \ln^3(1 + \chi) \cdot \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{\xi}{a\sqrt{1 + \chi}}\right)^n\right)\right]}$$

где

$$a = 2.45 - 0.17 \cdot \ln(1 + \chi), \quad n = 0.8 + 1.3 \cdot \ln(1 + \chi), \quad c = 1.45,$$

имеющую точность лучше 10%.

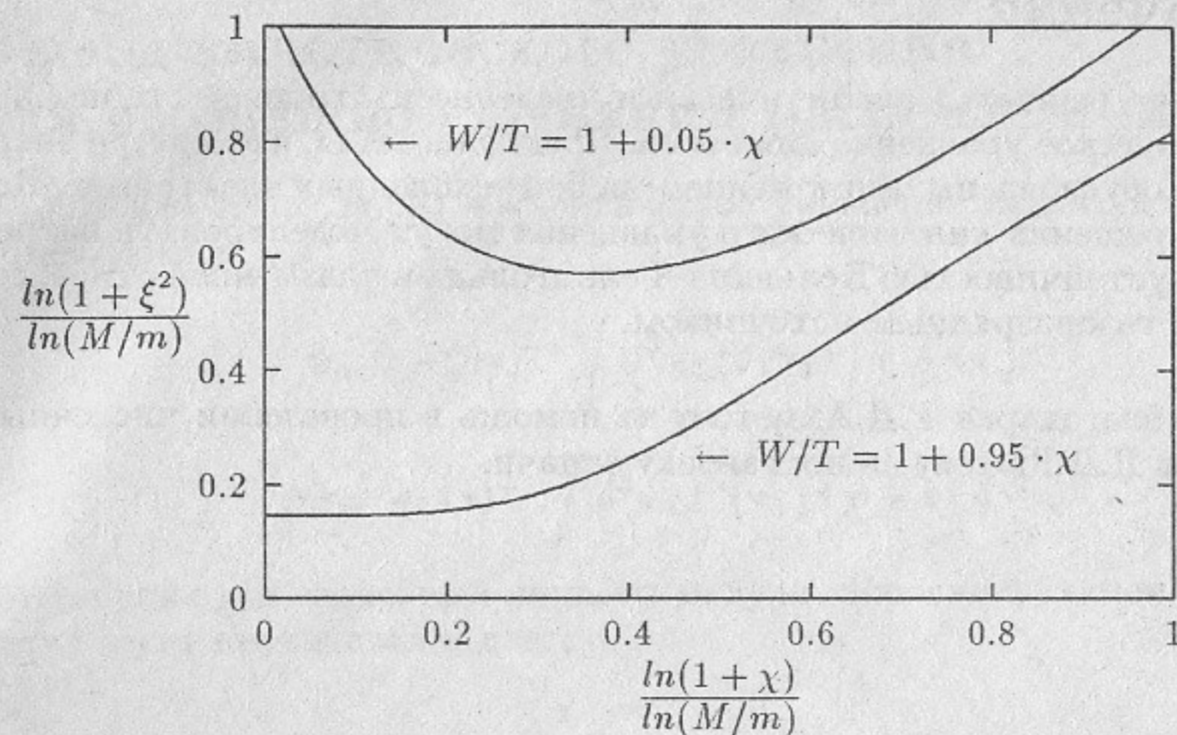


Рис. 7. Карта приближений при "стохастическом" нагреве. Кривые делят плоскость значений (χ, ξ^2) на три области: верхняя соответствует слабому влиянию нагрева на функцию распределения, нижняя (соответствующая широкой области нагрева) — сильному.

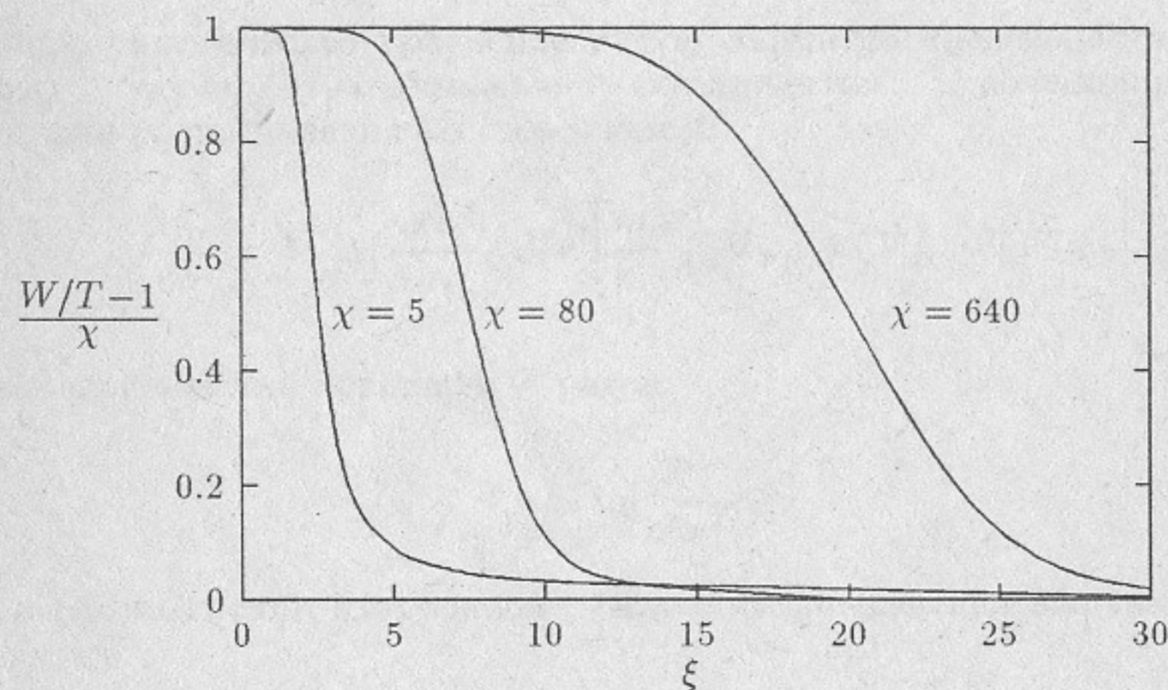


Рис. 8. Нормированная к единице разница средних энергий ионов и электронов как функция ξ при постоянной интенсивности нагрева χ для точной зависимости нагревающего слагаемого от скорости.

Заключение

В работе решается аналитически и численно изотропное стационарное кинетическое уравнение для ионов. Предполагается, что потери энергии ионов обусловлены торможением на более холодных электронах. Полученные решения кинетического уравнения могут моделировать нагрев плазмы неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца в плазменной струе, создаваемой газоразрядным источником.

Автор благодарен Т.Д.Ахметову за помощь в проведении численных расчетов и Д.Д.Рютову за постановку задачи.

Приложение I

Вывод кинетического уравнения для изотропной функции распределения

Как известно (см.[5]) в кинетическое уравнение входят потенциалы Розенблюта ψ и φ :

$$\psi_\alpha = -(8\pi)^{-1} \int d^3\mathbf{v}_1 f^\alpha(\mathbf{v}_1) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|,$$

$$\varphi_\alpha = -(4\pi)^{-1} \int d^3\mathbf{v}_1 f^\alpha(\mathbf{v}_1) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|^{-1}.$$

Интеграция для зависящей лишь от модуля скорости функции распределения легко проводится и дает:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &= -\frac{v^2}{6} \int_0^\infty dv_1 \cdot v_1 f_\alpha(v_1) \times \\ &\times \left[\frac{v_1}{v} \left(3 + \left(\frac{v_1}{v} \right)^2 \right) \theta(v - v_1) + \left(3 \left(\frac{v_1}{v} \right)^2 + 1 \right) \theta(v_1 - v) \right]; \\ \varphi_\alpha &= - \int_0^\infty dv_1 \cdot v_1 f_\alpha(v_1) \cdot \left[\frac{v_1}{v} \theta(v - v_1) + \theta(v_1 - v) \right]. \end{aligned}$$

Точное кинетическое уравнение для функции распределения записывается через комбинацию градиентов потенциалов и функции распределения по скоростям [5]:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \sum_\beta \Lambda \left(\frac{4\pi e^2}{m_\alpha} \right)^2 \operatorname{div} \left[\frac{m_\alpha}{m_\beta} f_\alpha \nabla \varphi_\beta + (\nabla f_\alpha \cdot \nabla) \nabla \psi_\beta \right],$$

здесь кулоновский логарифм Λ равен:

$$\Lambda \approx \ln \left[\frac{T^{3/2}}{e^3 n^{1/2}} \right].$$

При рассмотрении изотропной функции распределения выражение сжимается в:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \sum_\beta \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \cdot D^{\alpha/\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} + v^3 \cdot \nu^{\alpha/\beta} f_\alpha \right]. \quad (19)$$

здесь кинетические коэффициенты:

$$D^{\alpha/\beta} = -\Lambda \left(\frac{4\pi e^2}{m_\alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi_\beta}{\partial v^2}; \quad \nu^{\alpha/\beta} = \Lambda \frac{m_\alpha}{m_\beta} \left(\frac{4\pi e^2}{m_\alpha} \right)^2 \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial v}.$$

После тривиальных преобразований получаем уравнение (4), причем функция распределения электронов предполагается максвелловской и для коэффициентов торможения и диффузии D_{ie}, ν_{ie} берется предел по $v = 0$ (поскольку $v_e \gg v$).

Приложение II

Нагрев пакетом электростатических волн

Полученное авторами [7] выражение (2) для нагрева частиц в поле пакета электростатических волн нуждается в некоторых преобразованиях для использования в нашем кинетическом уравнении. Будем считать функцию распределения по скоростям изотропной, т.е. зависящей только от $\varepsilon = (\varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_\parallel^2)^{1/2}$. Введем "питч-угол" $\vartheta = \arctan(\varepsilon_\perp/\varepsilon_\parallel)^{1/2}$ и запишем частную производную по перпендикулярной энергии как:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_\perp} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon \cdot \operatorname{tg} \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \sin^2 \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

Подставляя это выражение для частной производной в (2), используя независимость функции распределения от ϑ , можно осреднить нагреваемое по углам, в результате чего получается:

$$\frac{\partial f_i(v)}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \cdot v^2 \cdot D(v) \cdot \frac{\partial f_i(v)}{\partial v} + \dots,$$

где коэффициент диффузии по скоростям:

$$D(v) = \frac{\pi}{2\Delta\omega} \cdot \left(\frac{eE_0}{M} \right)^2 \cdot B\left(\frac{k_0 v}{\Omega_i}\right),$$

$$B(x) = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin^6 \vartheta \cdot \left\{ 1 - \frac{J_1(2x \sin \vartheta)}{x \sin \vartheta} \right\}.$$

Функция $B(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow 0$ и к $5\pi/32$ при $x \rightarrow \infty$. Для удобства аналитических расчетов мы аппроксимируем ее выражением

$$B(x) \simeq B_{appr}(x) = \frac{5\pi}{32} \theta(x - x_0), \quad x_0 = \frac{256}{75\pi} \simeq 1.086,$$

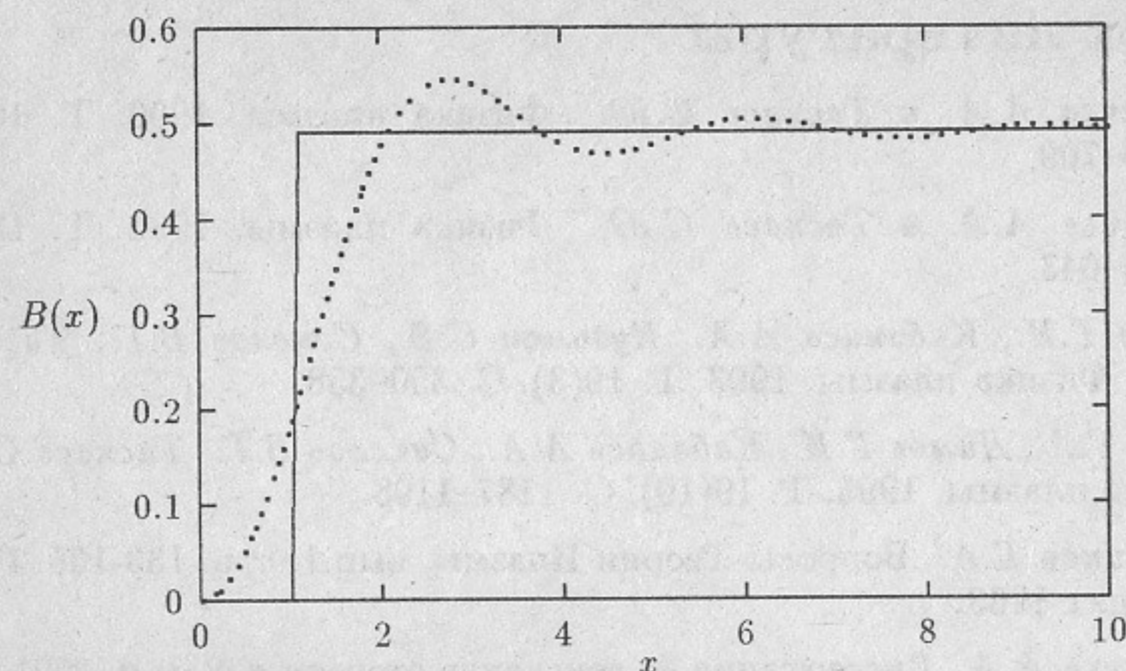


Рис. 9. Точная зависимость $B(x)$ (изображена точками) и ее аппроксимация (сплошная линия).

где x_0 подобрано из условия:

$$\int_0^\infty dx (B(x) - B_{appr}(x)) = 0.$$

На рис.9 показаны точная функция и ее аппроксимация. Таким образом коэффициент диффузии при нагреве частиц в поле пакета электростатических волн может быть аппроксимирован выражением:

$$D(v) = \frac{\pi}{2\Delta\omega} \cdot \left(\frac{eE_0}{M} \right)^2 \cdot \frac{5\pi}{32} \cdot \theta(v - v_0), \quad v_0 = 1.086 \frac{\Omega_i}{k_0}. \quad (20)$$

Наибольшая погрешность от нашей аппроксимации возникает, очевидно, из-за неучета нагрева на малых скоростях. Пока граничная энергия области нагрева $E_0 = Mv_0^2/2$ находится в области сильных ион-ионных столкновений $E_0 < (M/m)^{1/3}T$ это неважно, а при большей граничной энергии нагрев, даже при учете точного выражения, обычно мал и средняя энергия ионов близка к T .

Список литературы

- [1] Кабанцев А.А. и Таскаев С.Ю. Физика плазмы. 1990. Т. 16(6). С. 700-709.
- [2] Кабанцев А.А. и Таскаев С.Ю. Физика плазмы. 1992. Т. 18(5). С. 635-643.
- [3] Димов Г.И., Кабанцев А.А., Кузьмин С.В., Соколов В.Г., Таскаев С.Ю. Физика плазмы. 1993. Т. 19(3). С. 350-358.
- [4] Гилев Г.А., Димов Г.И., Кабанцев А.А., Соколов В.Г., Таскаев С.Ю. Физика плазмы. 1993. Т. 19(10). С. 1187-1198.
- [5] Трубников Б.А. Вопросы Теории Плазмы. вып.1, стр. 133-135. Госатомиздат 1963.
- [6] Кабанцев А.А. Диссертация на соискание степени к.ф.-м.н. 1991. Новосибирск: БИЯФ
- [7] Заславский Г.М. и Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса., с.298-307. Госатомиздат 1963.
- [8] Puri S. Phys. Fluids 1968. V. 11. p. 1745-1753.

С.Г. Яковченко

Решение кинетического уравнения для ионов
в изотропной плазме при наличии нагрева

ИЯФ 95-20

Ответственный за выпуск С.Г. Попов
Работа поступила 14.03 1995 г.

Сдано в набор 14 марта 1995 г.

Подписано в печать 21 марта 1995 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.1 печ.л., 0.9 уч.-изд.л.

Тираж 170 экз. Бесплатно. Заказ № 20

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринтере ГНЦ РФ "ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН",
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.