

Л.80



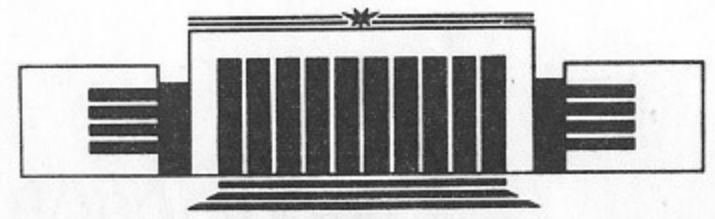
Государственный научный центр
Российской Федерации
Институт ядерной физики
им. Г.И. Будкера

К.В. Лотов

РЕАКЦИЯ ПЛАЗМЫ НА
УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПУЧОК
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ



ИЯФ 95-17



НОВОСИБИРСК

Реакция плазмы
на ультрарелятивистский пучок
заряженных частиц

К.В. Лотов

ГНЦ РФ "Институт ядерной физики
им. Г.И. Будкера СО РАН"
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

Реакция плазмы на пучок малой плотности была подробно изучена в начале 70-х годов. Однако для исследования новых методов ускорения заряженных частиц необходим теоретический аппарат, позволяющий определять поведение плазмы в случае, когда её плотность сравнима с плотностью пучка. В настоящей работе эта задача решается для плавного включения пучка: $\tau \gg \omega_p^{-1}$, где τ — время нарастания тока пучка, ω_p — плазменная частота (для невозмущенной плазмы). Приводятся графики, которые позволяют проследить процесс образования ионного канала, проясняют картину зарядовой и токовой компенсации пучка произвольной плотности, а также дают представление о возникающем движении плазменных электронов и о фокусирующей силе, действующей на пучок.

1 Введение

Реакция плазмы на пучок малой плотности была подробно изучена в начале 70-х годов ([1] — [5]). Однако для исследования новых методов ускорения, транспортировки и фокусировки заряженных частиц¹ необходим теоретический аппарат, позволяющий определять поведение плазмы в случае, когда её плотность сравнима с плотностью пучка. Разработке такого теоретического аппарата и посвящена настоящая работа.

Будем использовать следующие обозначения: m — масса электрона, e — элементарный заряд ($e > 0$), c — скорость света; a — характерный радиус пучка, n_b — его плотность, \vec{u} — его скорость ($|\vec{u}| \equiv u \approx c$), $\gamma_b = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$; n_i — плотность ионов плазмы, ω_p — плазменная частота ($\omega_p^2 = 4\pi n_i e^2/m$); n и \vec{v} — плотность и скорость электронов плазмы, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$; \vec{E} и \vec{H} — электрическое и магнитное поле.

В работе также фигурируют характерные времена и частоты: τ — длительность пучка, τ_r — время нарастания его тока, τ_b — время перераспределения плотности пучка под действием самосогласованного пучково-плазменного поля, τ_{inst} — время развития пучковой неустойчивости, τ_p — время реакции плазмы на вносимое возмущение, $\tau_p \sim \max(\omega_p^{-1}, a/c)$; ν — частота электрон-ионных столкновений.

Относительно параметров пучково-плазменной системы делаются следующие предположения.

¹См. обзоры [6], [7] и списки литературы к ним.

1. Пучок и исходное распределение плотности плазмы обладают аксиальной симметрией.
2. Все частицы пучка имеют одинаковую по модулю и по направлению скорость.
3. Пучок включается медленно:

$$\tau_r \gg \tau_p. \quad (1)$$

4. Плазма считается бесстолкновительной, что допустимо, если

$$\tau \ll \nu^{-1}. \quad (2)$$

5. Внешнее магнитное поле \vec{H}_{ext} мало или отсутствует:

$$|\vec{H}_{ext}| \ll \frac{mc}{e\tau}. \quad (3)$$

6. Тепловым движением электронов плазмы можно пренебречь. Для этого должно быть выполнено условие

$$v_{Te} = \sqrt{\frac{2T_e}{m}} \ll \frac{a}{\tau}, \quad (4)$$

где v_{Te} и T_e — тепловая скорость и температура электронов.

7. Возникающее в плазме электрическое и магнитное поле не оказывает влияния на пучок. Такая постановка задачи правомерна в следующих ситуациях.

(а) При рассмотрении быстропротекающих процессов. Как будет показано ниже, при $n_i \sim n_b$ в плазме возникает поле $|\vec{E}| \sim |\vec{H}| \sim \sqrt{4\pi n_i mc^2}$, под действием которого частицы пучка (обладающие инерционной массой M_b) сместятся по радиусу на расстояние $\sim a$ за время $\tau_b \sim \sqrt{aM_b/e|\vec{E}|}$, откуда следует ограничение

$$\tau \ll \tau_b, \quad \tau_b \sim \omega_p^{-1} \sqrt{\frac{M_b}{m}} \quad \text{при } n_b \sim n_i, \quad c/\omega_p \sim a. \quad (5)$$

- (б) При анализе установившегося равновесного состояния пучка, если развитием пучковой неустойчивости ещё можно пренебречь:

$$\tau \ll \tau_{inst}, \quad \tau_{inst} \sim \gamma_b \omega_p^{-1} \quad \text{при } n_b \sim n_i \quad (6)$$

(см. [8], стр. 79).

- (в) При определении невозмущённого состояния пучково-плазменной системы, знание которого необходимо для последующего изучения каких-либо неустойчивостей.

8. Ионы плазмы неподвижны. Если $n_b \sim n_i$ и $c/\omega_p \sim a$, то ионы (обладающие массой M и зарядом qe) можно считать неподвижными при условии²

$$\tau \ll \omega_p^{-1} \sqrt{\frac{M}{qm}}. \quad (7)$$

Выполнение (7) также означает, что в рассматриваемой системе не успеет развиваться нерезонансная неустойчивость Будкера-Бунемана, обусловленная относительным движением электронов и ионов плазмы (см., например, [9]). Резонансная неустойчивость ([9]) накладывает более жёсткое ограничение на τ :

$$\tau \ll \omega_p^{-1} \left(\frac{M}{qm} \right)^{1/3}, \quad (8)$$

однако она может проявиться лишь при высокой степени однородности движения плазменных электронов:

$$\frac{|\nabla v|}{v} \lesssim \left(\frac{qm}{M} \right)^{1/3} \frac{\omega_p}{c}, \quad v = |\vec{v}|. \quad (9)$$

Развитая в таких предположениях теория нужна, в частности, для исследования

- процесса образования ионного канала при транспортировке пучка в режиме ионной фокусировки (см., например, [10]),
- структуры полей и плотности электронов в схеме кильватерного ускорения с инжекцией длинного сгустка ([11], [12]),

²Оценка (7) получается аналогично (5).

- фокусирующих свойств плазменной линзы в промежуточном режиме (между пределом очень плотной ([13], [14]) и очень редкой ([15]) плазмы).

Статья построена следующим образом.

В разделе 2 приведены исходные уравнения движения плазмы.

В разделе 3 вкратце рассмотрен случай малой плотности пучка. Этот раздел преследует цель выписать полезные для последующего изложения формулы и не содержит новых, по сравнению с работами [1] – [5], [16], результатов³.

В разделе 4 определяются характерные плотность и частота (обратное время нарастания) пучка, при которых использование линейной теории правомерно.

В разделе 5 задача о реакции плазмы на пучок сводится к одному дифференциальному уравнению с надлежащим образом подобранными граничными условиями. (Алгоритм численного решения этого уравнения описан в Приложении 3).

В разделе 6 (с помощью указанного алгоритма) исследуется процесс образования ионного канала, зарядовая и токовая компенсация пучка, фокусирующие свойства плазмы для характерных частных случаев распределения плотности пучка.

Наконец, в заключительном разделе 7 перечислены основные результаты настоящей работы.

2 Исходные уравнения

Рассмотрим задачу о распространении пучка заряженных частиц через пространственно-неограниченную однородную плазму. Выполнения условия (1) пока требовать не будем. В указанных выше предположениях для описания поведения плазмы уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{4\pi e}{c} (n\vec{v} + n_b\vec{u}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (10)$$

³Изложение линейной теории реакции плазмы на пучок можно найти также в книгах [8] (глава 4) или [17] (глава 4).

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (11)$$

достаточно дополнить уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} (n\vec{v}) = 0 \quad (12)$$

и материальным уравнением, которое, с учётом возможного релятивистского движения электронов, может быть записано в виде

$$\frac{\partial \gamma \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \gamma \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E} - \frac{e}{mc} [\vec{v} \times \vec{H}]. \quad (13)$$

Здесь⁴ $n_b = n_b(r, z - ut)$. Для определённости пучок считаем электронным (аналогичные формулы для ионного пучка получаются заменой n_b на $-n_b$).

Учитывая, что, вследствие аксиальной симметрии пучка,

$$H_z = H_r = E_\varphi = 0; \quad v_\varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \quad (14)$$

можно уравнения (10) – (13) записать в покомпонентной форме:

$$-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = -\frac{4\pi e}{c} n v_r + \frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t}, \quad (15)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r H_\varphi = -\frac{4\pi e}{c} n v_z - \frac{4\pi e}{c} n_b u + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r n v_r + \frac{\partial n v_z}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \gamma v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial \gamma v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial \gamma v_r}{\partial z} = -\frac{e}{m} E_r + \frac{e}{mc} v_z H_\varphi, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \gamma v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial \gamma v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial \gamma v_z}{\partial z} = -\frac{e}{m} E_z - \frac{e}{mc} v_r H_\varphi. \quad (20)$$

Будем также считать, что поля, связанные с переходными процессами при инжекции, пренебрежимо малы (см. [18]), и возмущение плазмы неизменно относительно пучка (движется вместе с ним):

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (21)$$

⁴Везде в работе используется цилиндрическая система координат (r, φ, z) с осью \vec{z} , направленной вдоль оси пучка.

3 Линейная теория зарядовой и токовой компенсации

Если плотность пучка мала по сравнению с плотностью плазмы (критерий малости будет получен в разделе 4), то задачу можно рассматривать в линейном приближении с помощью преобразования Фурье по времени:

$$\tilde{n}_b(r, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} n_b(r, z - ut) e^{i\omega t} dt. \quad (22)$$

Тогда уравнения (15) – (20), с учётом (21), перейдут в систему

$$\frac{i\omega}{u} \tilde{H}_\varphi = \frac{4\pi e}{c} n_i \tilde{v}_r + \frac{i\omega}{c} \tilde{E}_r, \quad (23)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tilde{H}_\varphi = \frac{4\pi e}{c} n_i \tilde{v}_z + \frac{4\pi e}{c} \tilde{n}_b u + \frac{i\omega}{c} \tilde{E}_z, \quad (24)$$

$$\frac{i\omega}{u} \tilde{E}_r - \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} = \frac{i\omega}{c} \tilde{H}_\varphi, \quad (25)$$

$$-i\omega \delta \tilde{n} + \frac{n_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tilde{v}_r + \frac{i\omega}{u} n_i \tilde{v}_z = 0, \quad (26)$$

$$i\omega \tilde{v}_r = \frac{e}{m} \tilde{E}_r, \quad (27)$$

$$i\omega \tilde{v}_z = \frac{e}{m} \tilde{E}_z, \quad (28)$$

где значком тильда обозначены Фурье-образы соответствующих величин; n_i — невозмущённая плотность электронов (равная плотности ионов), δn — возмущение плотности электронов, $\gamma = 1$ в силу следующего из малости плотности пучка соотношения $|\vec{v}| \ll c$. Все величины рассматриваются в некоторой точке $z = z_0$.

Систему (23) – (28) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}_r &= -\frac{ie}{m\omega} \tilde{E}_r, & \tilde{v}_z &= -\frac{ie}{m\omega} \tilde{E}_z, \\ \frac{i\omega}{u} \tilde{H}_\varphi &= \left(-\frac{i\omega_p^2}{\omega c} + \frac{i\omega}{c} \right) \tilde{E}_r, & \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} &= \frac{i\omega}{u} \tilde{E}_r - \frac{i\omega}{c} \tilde{H}_\varphi, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tilde{H}_\varphi + \left(-\frac{i\omega_p^2}{\omega c} + \frac{i\omega}{c} \right) \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} + \frac{4\pi e u}{c} \frac{\partial \tilde{n}_b}{\partial r} = 0,$$

$$\delta \tilde{n} = \frac{n_i}{\omega r} \frac{\partial}{\partial r} r \tilde{v}_r + \frac{n_i}{u} \tilde{v}_z,$$

откуда имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tilde{H}_\varphi - \left(\frac{\omega^2}{u^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{H}_\varphi = -\frac{4\pi e u}{c} \frac{\partial \tilde{n}_b}{\partial r}, \quad (29)$$

$$\tilde{E}_r = \frac{\omega^2 c}{(\omega^2 - \omega_p^2) u} \tilde{H}_\varphi, \quad (30)$$

$$\tilde{v}_r = -\frac{ie\omega c}{m u (\omega^2 - \omega_p^2)} \tilde{H}_\varphi, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} = -\frac{i\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega^2 c^2}{(\omega^2 - \omega_p^2) u^2} \right) \tilde{H}_\varphi, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} = -\frac{e}{m c} \left(1 - \frac{\omega^2 c^2}{(\omega^2 - \omega_p^2) u^2} \right) \tilde{H}_\varphi, \quad (33)$$

$$\delta \tilde{n} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2} \tilde{n}_b. \quad (34)$$

Решение уравнений (29) – (34) с последующим обращением преобразования Фурье позволяет определить поля и токи, возникающие в плазме при прохождении сквозь неё пучка с произвольной зависимостью плотности от r и $z - ut$. Подробное описание этой процедуры приведено в работе [16] (формулы (29), (30) и (32) тождественны уравнениям (13) и (14) из [16]).

Можно, однако, сделать ряд утверждений относительно структуры возникающих возмущений, не прибегая к рассмотрению конкретных профилей пучка. Из уравнения (29) видно (см. Приложение 1), что глубина проникновения магнитного поля в плазму определяется величиной

$$k_r = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{c^2} + \omega^2 \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{c^2} \right)}, \quad k_r = \frac{\omega_p}{c} \quad \text{при} \quad u \approx c. \quad (35)$$

При $u \approx c$ параметр k_r не зависит от ω , и можно в уравнении (29) перейти от Фурье-образов величин к самим величинам⁵:

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) H_\varphi = -4\pi e \frac{\partial n_b}{\partial r}. \quad (36)$$

⁵При исследовании магнитного поля переход к пределу $u = c$ в уравнении (29) допустим. В то же время, при вычислении компонент электрического поля и скорости нельзя до обращения преобразования Фурье полагать $u = c$ в формулах (29) – (33), поскольку это приводит к ошибочным результатам (подробнее см. [16]).

Таким образом, токовая компенсация ультрарелятивистского пучка определяется только радиальной структурой $n_b(r, z-ut)$ в данном его сечении и, в частности, не зависит от формы переднего фронта.

Как следует из (34), при плавном включении пучка большой длительности ($\omega \ll \omega_p$) его заряд компенсируется почти полностью, $\delta\bar{n} \approx -\bar{n}_b$. При больших частотах ($\omega \gg \omega_p$) зарядовой компенсации нет: $\delta\bar{n} \sim \bar{n}_b \omega_p^2 / \omega^2$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta\bar{n} = 0$. В области же $\omega \approx \omega_p$ величина $|\delta\bar{n}|$ существенно превышает $|\bar{n}_b|$, однако, как будет показано ниже, линейная теория здесь применима только к пучкам с очень малой плотностью.

Для последующего сравнения с результатами нелинейной теории особый интерес представляет случай плавного включения пучка. При $\omega \ll \omega_p$ из (30) – (33) имеем

$$E_z \sim \omega \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0, \quad E_r \sim \omega^2 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0, \quad v_r \sim \omega \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{eH_\varphi}{mc}. \quad (38)$$

Существенно, что в данном интервале частот скорость электронов плазмы v_z также определяется локальным по z поведением плотности пучка. Это позволяет записать уравнение, непосредственно связывающее v_z и n_b (получающееся из (29) снятием производной⁶ $\partial/\partial r$):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\omega_p^2}{c^2} v_z = \frac{4\pi e^2 u}{mc^2} n_b. \quad (39)$$

4 Пределы применимости линейной теории

Пусть \bar{n}_b и ω — характерные плотность и частота пучка (для пучка с плотностью, плавно меняющейся со временем, $\omega \sim \tau^{-1}$). Целью настоящего раздела будет нахождение на плоскости (\bar{n}_b, ω) области, где использование линейного приближения правомерно. Будем характеризовать пучок, наряду с радиусом a , также “размытостью” границы⁷ d ($d \lesssim a$) и введём обозначения

$$\omega_b^2 = \frac{4\pi\bar{n}_b e^2}{m}, \quad D = 1 + k_r d, \quad D_n = \frac{1}{k_r a}. \quad (40)$$

⁶Под снятием производной здесь и далее понимается интегрирование с учётом того, что при $r \rightarrow \infty$ или $t \rightarrow \pm\infty$ возмущения плазмы и плотность пучка обращаются в нуль.

⁷См. рисунок 19 (Приложение 2).

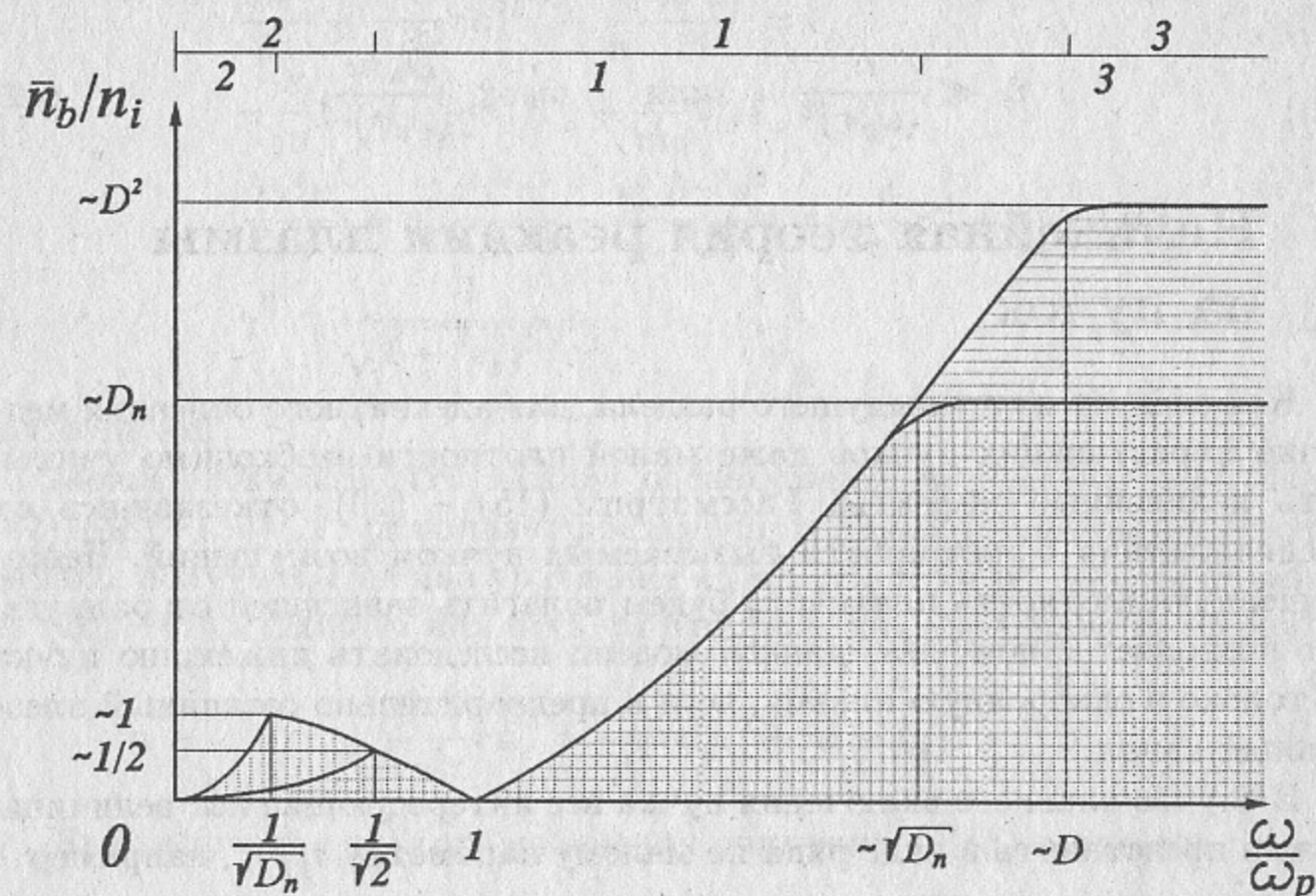


Рис. 1. Области применимости линейной теории (горизонтальная штриховка — широкий пучок, вертикальная — узкий).

Оценки показывают (см. Приложение 2), что линейная теория применима, если одновременно выполняются следующие соотношения:

	широкий пучок ($k_r a \gg 1$)	узкий пучок ($k_r a \ll 1$)
1.	$\omega_b \ll \sqrt{ \omega^2 - \omega_p^2 }$;	$\omega_b \ll \sqrt{ \omega^2 - \omega_p^2 }$;
2.	$\omega_b \ll \omega$;	$\omega_b \ll \sqrt{D_n \omega}$;
3.	$\omega_b \ll D \omega_p$;	$\omega_b \ll \sqrt{D_n \omega_p}$.

Области применимости линейной теории приведены на рисунке 1 (заштрихованы). В верхней части рисунка указаны номера условий из (41), которые являются определяющими в данных интервалах изменения ω (над линией — для широкого пучка, под линией — для узкого). Видно, что при $\omega > \omega_p$ линейной теорией можно пользоваться для описания пучков с плотностью, существенно превышающей плотность плазмы. В то же время на плотность плавно нарастающих пучков условием (41.2) на-

лагается жёсткое ограничение (см. также [5]):

$$\bar{n}_b \ll \frac{n_i}{(\omega_p \tau)^2} \quad \text{или} \quad \bar{n}_b \ll \frac{D_n n_i}{(\omega_p \tau)^2}. \quad (42)$$

5 Нелинейная теория реакции плазмы на пучок

Как следует из предыдущего раздела, для адекватного описания медленно нарастающих пучков даже малой плотности необходимо учитывать нелинейные эффекты. Рассмотрим (15) – (20), отказавшись от предположения о линейности вызываемых пучком возмущений. Невозможность плотности плазмы n_i будем полагать зависящей от радиуса, что позволяет с помощью данной модели исследовать инжекцию пучка не только в однородную плазму, но и в предварительно созданный плазменный канал.

В случае плавного включения пучка все интересующие нас величины можно представить в виде ряда по малому параметру τ_p/τ_r , например

$$H_\varphi(r, z - ut) = H_\varphi^0(r, z - ut) + H_\varphi^1(r, z - ut) + \dots, \quad (43)$$

$$|H_\varphi^0| \gg |H_\varphi^1| \gg \dots,$$

что позволяет разделить систему (15) – (20) на бесконечную совокупность систем:

$$v_r^0 = 0, \quad (44)$$

$$E_z^0 = 0, \quad (45)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r H_\varphi^0 = -\frac{4\pi e}{c} n^0 v_z^0 - \frac{4\pi e}{c} n_b u, \quad (46)$$

$$E_r^0 = \frac{v_z^0 H_\varphi^0}{c}; \quad (47)$$

$$\frac{1}{u} \frac{\partial H_\varphi^0}{\partial t} = -\frac{4\pi e}{c} n^0 v_r^1 + \frac{1}{c} \frac{\partial E_r^0}{\partial t}, \quad (48)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r H_\varphi^1 = -\frac{4\pi e}{c} n^0 v_z^1 - \frac{4\pi e}{c} n^1 v_z^0, \quad (49)$$

$$\frac{1}{u} \frac{\partial E_r^0}{\partial t} + \frac{\partial E_z^1}{\partial r} = \frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi^0}{\partial t}, \quad (50)$$

$$\frac{\partial n^0}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r n^0 v_r^1 - \frac{1}{u} \frac{\partial n^0 v_z^0}{\partial t} = 0, \quad (51)$$

$$-\frac{e}{m} E_r^1 + \frac{e}{mc} v_z^0 H_\varphi^1 + \frac{e}{mc} v_z^1 H_\varphi^0 = 0, \quad (52)$$

$$\frac{\partial \gamma^0 v_z^0}{\partial t} + v_r^1 \frac{\partial \gamma^0 v_z^0}{\partial r} - \frac{v_z^0}{u} \frac{\partial \gamma^0 v_z^0}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_z^1 - \frac{e}{mc} v_r^1 H_\varphi^0, \quad (53)$$

$$\gamma^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_z^0)^2/c^2}} \quad (54)$$

и так далее.

Можно показать, что каждая последующая система из ряда (44) – (47), (48) – (54), ... дополняет предыдущую двумя уравнениями. Проще, однако, получить ещё два уравнения на v_z^0 , E_r^0 , H_φ^0 и n^0 непосредственно из (10) – (13). Одно из них есть ни что иное, как уравнение Пуассона⁸

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_r^0 = -4\pi e (n^0 + n_b - n_i). \quad (55)$$

Для получения другого уравнения применим к (13) операцию rot:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot } \gamma \vec{v} - \frac{e \vec{H}}{mc} \right) = -\text{rot} \left[\vec{v} \times \frac{e \vec{H}}{mc} \right] - \text{rot} \left((\vec{v} \nabla) \gamma \vec{v} \right). \quad (56)$$

Учитывая векторные соотношения

$$((\vec{v} \nabla) \gamma \vec{v}) = -\vec{v} \times \text{rot } \gamma \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla (\gamma v^2) + \frac{v^2}{2} \nabla \gamma,$$

$$\text{rot} \left(\frac{v^2}{2} \nabla \gamma \right) = \left[\frac{\nabla v^2}{2} \times \nabla \gamma \right] = 0,$$

преобразуем (56) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot } \gamma \vec{v} - \frac{e \vec{H}}{mc} \right) = \text{rot} \left[\vec{v} \times \left(\text{rot } \gamma \vec{v} - \frac{e \vec{H}}{mc} \right) \right]. \quad (57)$$

По своей структуре уравнение (57) совпадает с известным из магнитной гидродинамики уравнением в замороженности (см., например, [19], § 65). Это уравнение обладает тем свойством, что если в начальный момент

⁸Заметим, что уравнение (55) вытекает из (46), (48) и (51).

времени (до появления в плазме пучка) стоящее в круглых скобках выражение равно нулю, то оно равно нулю всегда:

$$\text{rot } \gamma \vec{v} = \frac{e \vec{H}}{mc}, \quad (58)$$

откуда следует⁹

$$\frac{\partial \gamma^0 v_z^0}{\partial r} = -\frac{e H_\varphi^0}{mc}. \quad (59)$$

Равенство (59) позволяет связать плотность электронов плазмы с их скоростью посредством следующего из (55) и (47) соотношения¹⁰

$$n = n_i - n_b + \frac{m}{4\pi e^2 r} \frac{\partial}{\partial r} r v_z \frac{\partial \gamma v_z}{\partial r}. \quad (60)$$

Подставляя (59) и (60) в (46), получаем основное уравнение данного раздела:

$$\left(1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \gamma v_z - \frac{v_z}{c^2} \frac{\partial v_z}{\partial r} \frac{\partial \gamma v_z}{\partial r} - \frac{4\pi e^2}{mc^2} v_z (n_i - n_b) = \frac{4\pi e^2}{mc^2} u n_b. \quad (61)$$

Решение этого уравнения с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad v_z|_{r=\infty} = 0 \quad (62)$$

может легко быть найдено (численно) для любого профиля пучка $n_b(r)$. Заметим, что, как и в линейном приближении, скорость электронов $v_z(r)$ определяется только плотностью пучка в данном его сечении.

Нетрудно видеть, что при малой плотности пучка и, соответственно, малой скорости v_z уравнение (61) обращается в (39). Таким образом, нелинейная теория непрерывно переходит в линейную при уменьшении n_b . Тем самым оправдывается использование линейной теории в той области параметров пучка и плазмы, где условие (42) нарушается:

$$\frac{n_i}{(\omega_p \tau)^2} \lesssim n_b \ll n_i. \quad (63)$$

Удерживая в (61) второй порядок малости по n_b/n_i , имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\omega_p^2}{c^2} v_z = \frac{4\pi e^2}{mc^2} (u - v_z) n_b. \quad (64)$$

⁹Уравнение (59) также может быть получено из (48), (50) и (53).

¹⁰Поскольку в дальнейших выкладках участвуют только величины нулевого по τ_p/τ_r порядка малости, обозначающий их верхний индекс ⁰ (нуль) будем опускать.

Так как при инжекции электронного пучка ($n_b > 0$) скорость v_z отрицательна, то учёт нелинейных эффектов подобен "увеличению" плотности пучка. В случае же ионного пучка ($n_b < 0, v_z > 0$), наоборот, нелинейные члены работают в сторону уменьшения "эффективной" плотности.

Численный анализ (раздел 6) показывает, что когда плотность пучка достигает определённого критического значения¹¹ ($\varepsilon = \varepsilon_{max}$), решение уравнения (61) с граничными условиями (62) теряет физический смысл (вычисленная по формуле (60) плотность электронов становится отрицательной). Это значит, что при $\varepsilon > \varepsilon_{max}$ где-то появляется свободная от плазменных электронов область пространства (в которой скорость v_z не определена). Будем считать, что такая область расположена вблизи оси пучка (при $r < r_*(\varepsilon)$)¹². Тогда поля и токи в плазме могут быть найдены сшивкой двух типов решений. Именно, в области $r < r_*$ поля определяются интегралами

$$E_r(r) = \frac{4\pi e}{r} \int_0^r (n_i(r') - n_b(r')) r' dr', \quad (65)$$

$$H_\varphi(r) = -\frac{4\pi e u}{cr} \int_0^r n_b(r') r' dr'. \quad (66)$$

В области же $r > r_*$ зависимость v_z от r описывается уравнением (61), а n, H_φ и E_r находятся из (60), (59) и (47) соответственно. Условия сшивки следуют из непрерывности магнитного и электрического полей в точке $r = r_*$:

$$\left. \frac{\partial \gamma v_z}{\partial r} \right|_{r=r_*} = \frac{4\pi e^2 u}{mc^2 r_*} \int_0^{r_*} n_b(r') r' dr', \quad (67)$$

¹¹Здесь параметр $\varepsilon \sim n_b/n_i$ характеризует относительную плотность пучка. Более строгое определение ε даётся ниже (формула (73)).

¹²Такая ситуация имеет место при инжекции в однородную плазму пучка с монотонно убывающей по радиусу плотностью. Исследование общего случая N областей с $n = 0$, лежащих в интервалах $r_{*,i}^{(1)}(\varepsilon) < r < r_{*,i}^{(2)}(\varepsilon)$ ($i = 1 \dots N$), может быть проведено аналогичным образом, но потребует существенного усложнения численных алгоритмов.

$$\left. \frac{v_z}{c} \right|_{r=r_*} = \frac{\frac{c}{u} \int_0^{r_*} (n_b(r') - n_i(r')) r' dr'}{\int_0^{r_*} n_b(r') r' dr'} \quad (68)$$

и, в совокупности с условием $v_z \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, полностью определяют задачу (два условия необходимы для решения краевой задачи и одно — для нахождения точки r_*).

Заметим, что в случае ультрарелятивистского электронного пучка ($-c < v_z < 0$, $u = c$) из (68) вытекает соотношение

$$\int_0^{r_*} n_b r' dr' = \frac{1}{1 - v_z(r_*)/c} \int_0^{r_*} n_i r' dr', \quad (69)$$

из которого видно, при какой плотности пучка и плазмы возможно существование свободной от плазменных электронов области радиуса r_* :

$$\frac{1}{2} \int_0^{r_*} n_i r' dr' < \int_0^{r_*} n_b r' dr' < \int_0^{r_*} n_i r' dr'. \quad (70)$$

6 Примеры применения нелинейной теории

Для удобства анализа возникающих в плазме полей и токов перейдем к безразмерным величинам:

$$x = \frac{r}{c} \sqrt{\frac{4\pi n_d e^2}{m}}, \quad \hat{a} = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{4\pi n_d e^2}{m}}, \quad \hat{v} = \frac{v_z}{c}, \quad \hat{n}_b = \frac{n_b}{n_d}, \quad (71)$$

$$\hat{H}_\varphi = \frac{H_\varphi}{\sqrt{4\pi n_d m c^2}}, \quad \hat{E}_r = \frac{E_r}{\sqrt{4\pi n_d m c^2}}, \quad \hat{n} = \frac{n}{n_d}, \quad \hat{n}_i = \frac{n_i}{n_d}. \quad (72)$$

В качестве обезразмеривающей плотности n_d будем брать либо $n_i(0)$ (для сравнения реакции плазмы на пучки различной плотности), либо $|n_b(0)|$ (для исследования возмущений, вызываемых заданным пучком в плазме различной плотности). Параметр ε определим как отношение плотностей в центре:

$$\varepsilon = n_b(0)/n_i(0). \quad (73)$$

Также пренебрежем отличием u от c и введем безразмерный импульс плазменных электронов $p = \gamma \hat{v}_z$.

Алгоритм, использованный при анализе реакции плазмы на пучок, описан в Приложении 3.

6.1 Образование ионного канала

Характерные особенности процесса образования ионного канала проследим на примере пучка с гауссовским распределением плотности, инжектируемого в однородную плазму:

$$\hat{n}_b(x) = \varepsilon \exp\left(-\frac{x^2}{\hat{a}^2}\right), \quad \hat{n}_i(x) \equiv 1. \quad (74)$$

Везде в этом пункте полагаем $n_d = n_i(0)$.

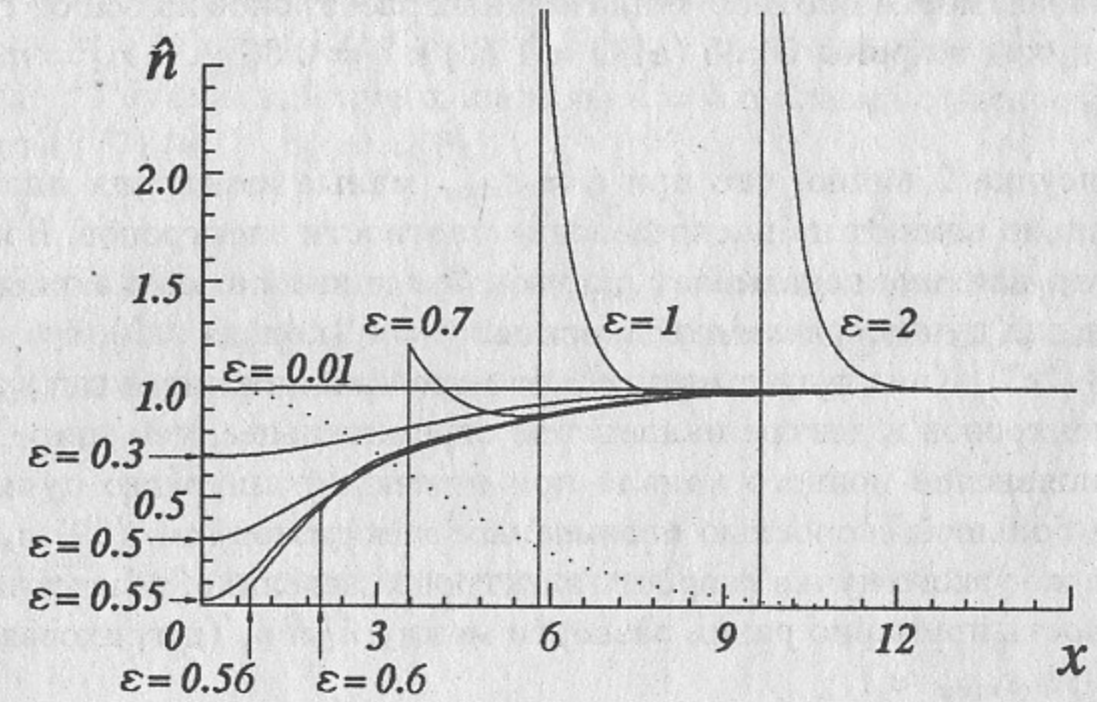


Рис. 2. Зависимости $\hat{n}(x)$ для гауссовских пучков различной плотности. Ширина пучков $\hat{a} = 5$. Точками показана плотность пучка при $\varepsilon = 1$. $n_d = n_i(0)$.

Об эволюции радиального распределения плотности электронов с увеличением ε можно судить по рисунку 2, где показаны зависимости $\hat{n}(x)$ для широкого пучка ($\hat{a} = 5$). Аналогичные графики для случая $\hat{a} \lesssim 1$ выглядят сходным образом. Интересно отметить, что вытолкнутые пучком электроны сосредоточены в узком слое (толщины $\sim c/\omega_p$), образуя резкий пик плотности.

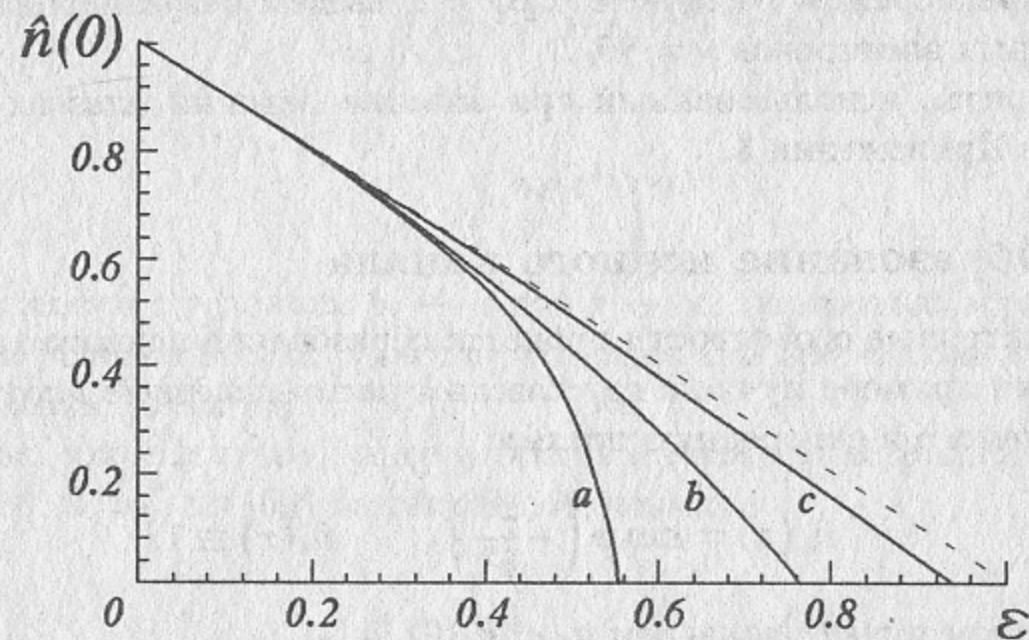


Рис. 3. Зависимости плотности плазменных электронов на оси от ϵ . Гауссовский пучок ширины $\hat{a} = 5$ (а), $\hat{a} = 1$ (б) и $\hat{a} = 0.3$ (с). $n_d = n_i(0)$.

Из рисунка 2 видно, что при $\epsilon \approx \epsilon_{max}$ малые изменения плотности пучка сильно влияют на распределение плотности электронов. Более наглядно это влияние показывает рисунок 3, где изображены зависимости $\hat{n}(0)$ от ϵ для пучков различной ширины: $\hat{a} = 5$ (кривая "а"), $\hat{a} = 1$ ("б") и $\hat{a} = 0.3$ ("с"). Как следует из рис.3, по мере приближения ϵ к ϵ_{max} плотность электронов в центре падает тем стремительнее, чем шире пучок. Раннее появление ионного канала при инжекции широкого пучка объясняется большой скоростью плазменных электронов (см. (69) и рис.6). В случае же узкого пучка скорость электронов невелика, вследствие чего их плотность примерно равна разности между \hat{n}_i и \hat{n}_b (штриховая линия на рис.3), и $\epsilon_{max} \approx 1$.

Увеличение радиуса ионного канала (x_*) с ростом ϵ иллюстрируется рисунком 4 (для удобства сравнения графиков приводится отношение x_*/\hat{a}). Интересно соотнести вычисленные зависимости $x_*(\epsilon)$ с функцией $X_*(\epsilon)$, которой бы определялся радиус ионного канала, если бы на электроны действовала только электрическая сила:

$$\pi X_*^2 = \epsilon \int_0^{x_*} e^{-x^2/\hat{a}^2} 2\pi x dx. \quad (75)$$

Различие x_* и X_* , опять же, обусловлено силой Лоренца, дополнительно выталкивающей электроны по радиусу.

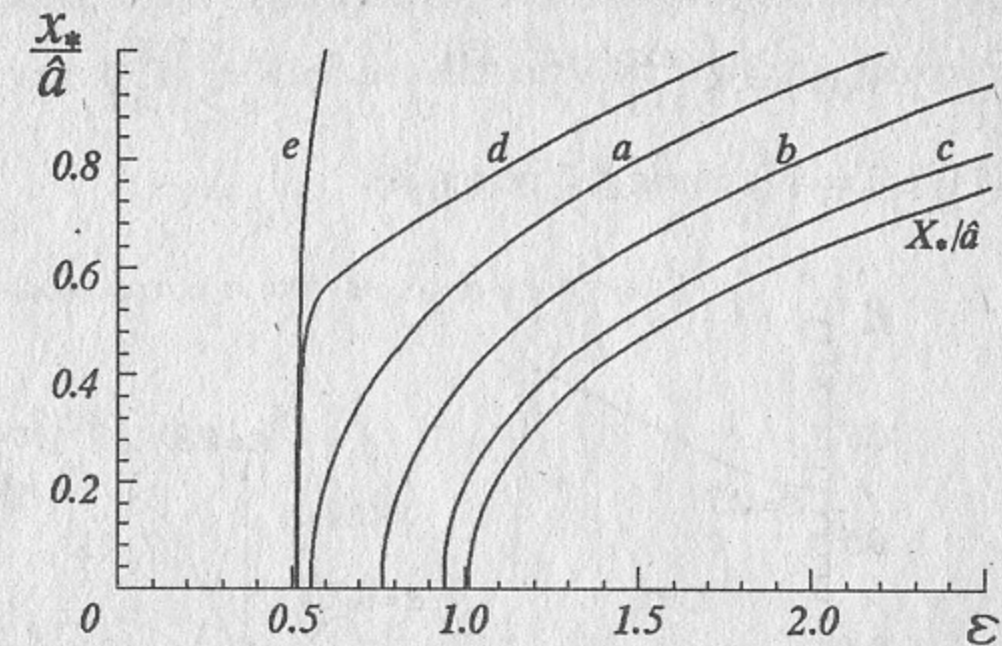


Рис. 4. Зависимости радиуса ионного канала от ϵ . Гауссовский пучок ширины $\hat{a} = 5$ (а), $\hat{a} = 1$ (б) и $\hat{a} = 0.3$ (с); пучок профиля (76) с $\hat{a} = 5$, $\hat{b} = 6$ (д); Гауссовский пучок ширины $\hat{a} = 5$ в плазме с распределением плотности (77) (е). $n_d = n_i(0)$.

Ширина ионного канала при $\epsilon \sim \epsilon_{max}$ в значительной мере зависит от вида функции $\hat{n}_b(x)$. Примером тому служит график $x_*(\epsilon)$ для пучка с платообразным распределением плотности:

$$\hat{n}_b(x) = \begin{cases} \epsilon, & x < \hat{a}, \\ \epsilon \frac{1 + \cos(\pi(x - \hat{a})/(\hat{b} - \hat{a}))}{2}, & \hat{a} < x < \hat{b}, \\ 0, & x > \hat{b} \end{cases} \quad (76)$$

(кривая "d" на рис.4).

Если инжекция ведётся в плазменный канал с радиусом, близким к радиусу пучка, ($n_i \neq const$), то качественный вид зависимости $\hat{n}(0)$ от ϵ остаётся таким же, как и при инжекции в однородную плазму (см. рис.3). Однако при незначительном превышении плотностью пучка критического значения ϵ_{max} электроны полностью выталкиваются из канала несмотря на то, что плотность остающихся ионов может почти вдвое превышать плотность пучка (в случае $\hat{a} \gg 1$). Этот процесс иллюстрируется графиком $x_*(\epsilon)$ для гауссовского распределения плотности

плазмы¹³:

$$\hat{n}_i(x) = \begin{cases} \exp(-x^2/25), & x \leq 7.59, \\ 0.1, & x \geq 7.59 \end{cases} \quad (77)$$

и пучка (74) с $\hat{a} = 5$ (кривая "е" на рис.4).

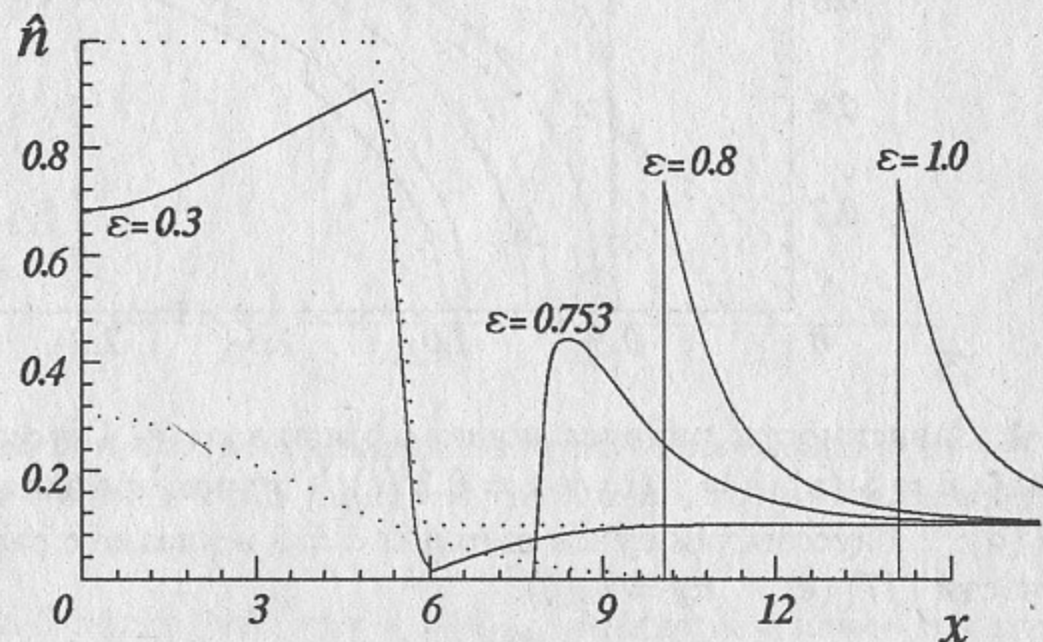


Рис. 5. Зависимости $\hat{n}(x)$ для гауссовских пучков различной плотности в неоднородной плазме (78) с $A = 5$, $B = 6$. Ширина пучков $\hat{a} = 5$. Точками показаны плотность пучка $\hat{n}_b(x)$ (при $\epsilon = 0.3$) и плотность ионов $\hat{n}_i(x)$. $n_d = n_i(0)$.

Отметим, что несогласованность профилей пучка и плазменного канала может приводить к появлению области с $\hat{n} = 0$ не на оси системы, а где-либо ещё. Такая ситуация имеет место, например, при инжекции пучка (74) с $\hat{a} = 5$ в плазму плотности

$$\hat{n}_i(x) = \begin{cases} 1, & x < A, \\ 0.1 + 0.45 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi(x-A)}{(B-A)}\right) \right], & A < x < B, \\ 0.1, & x > B \end{cases} \quad (78)$$

с $A = 5$, $B = 6$: при $0.3 < \epsilon < 0.753$ свободная от плазменных электронов область находится на периферии пучка (рис.5).

¹³Фоновая плазма при $x > 7.59$ вводится для облегчения численного счёта.

6.2 Аксиальное движение плазменных электронов

В этом пункте считаем пучок заданным: $n_d = |n_b(0)|$. Соответственно, полагаем

$$\hat{n}_i = \frac{1}{|\epsilon|}, \quad \hat{n}_b(x) = \pm \exp\left(-\frac{x^2}{\hat{a}^2}\right) \quad (79)$$

(знак "−" выбирается в случае ионного пучка).

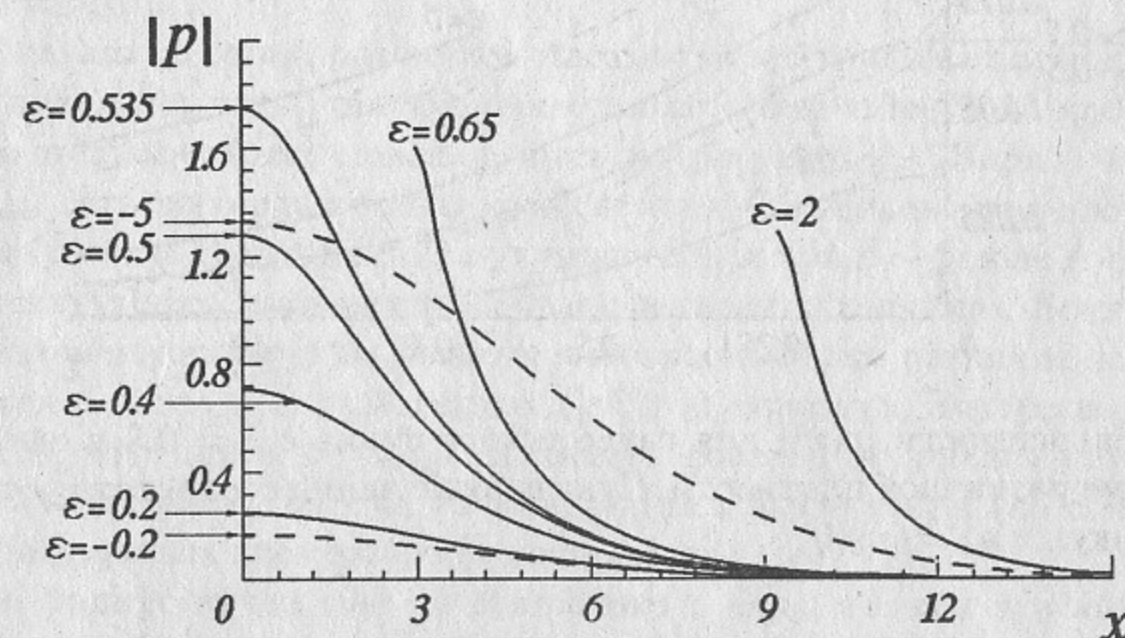


Рис. 6. Зависимости $|p(x)|$ для гауссовского пучка с $\hat{a} = 5$ в однородной плазме различной плотности. Пунктирные линии соответствуют ионному пучку. $\epsilon_{max} \approx 0.535$. $n_d = |n_b(0)|$.

Характерные графики $p(x)$ для широкого и узкого пучков приведены на рисунках 6 и 7. О скорости движения электронов в плазме различной плотности, однако, более наглядно говорит рисунок 8, на котором изображены зависимости от ϵ максимального значения импульса p . Из рисунков 6 и 7 следует, что это значение достигается либо на оси пучка, либо на границе ионного канала:

$$p_{max} = \begin{cases} p(0), & \epsilon < \epsilon_{max}, \\ p(x_*), & \epsilon \geq \epsilon_{max}. \end{cases} \quad (80)$$

Из приведённых графиков видно, что чем шире пучок, тем сильнее его поле разгоняет электроны плазмы. В случае широкого ($\hat{a} \gg 1$) пучка с $|\hat{n}_b| \gtrsim \hat{n}_i$ это движение является релятивистским ($|p| \gtrsim 1$, $|v_z| \sim c$).

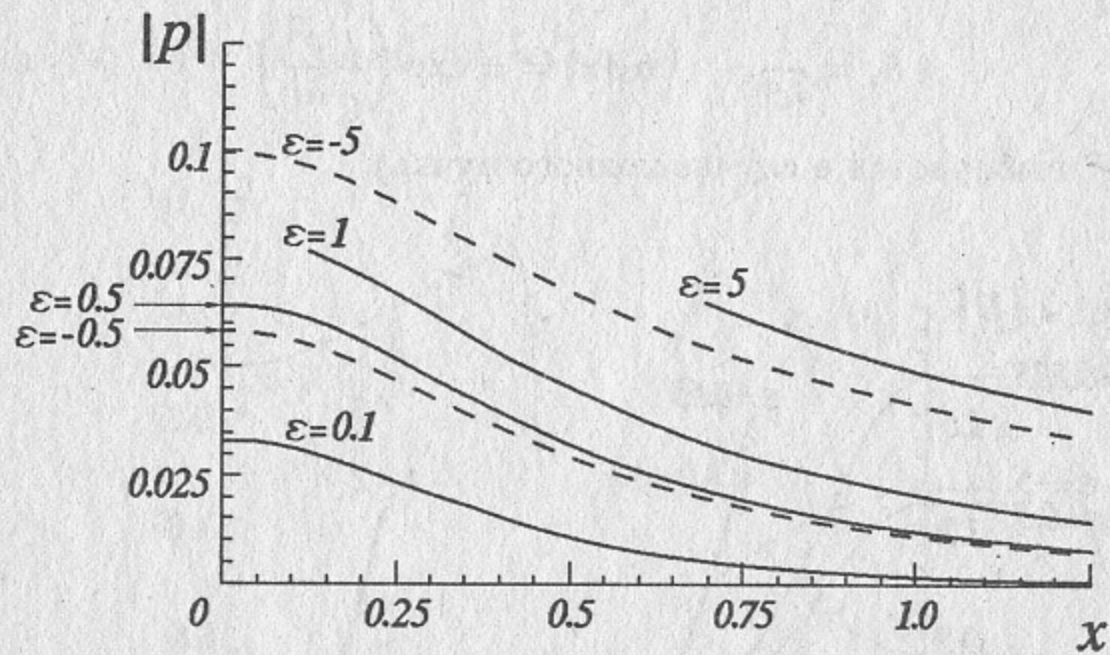


Рис. 7. Зависимости $|p(x)|$ для гауссовского пучка с $\hat{a} = 0.3$ в однородной плазме различной плотности. Пунктирные линии соответствуют ионному пучку. $n_d = |n_b(0)|$.

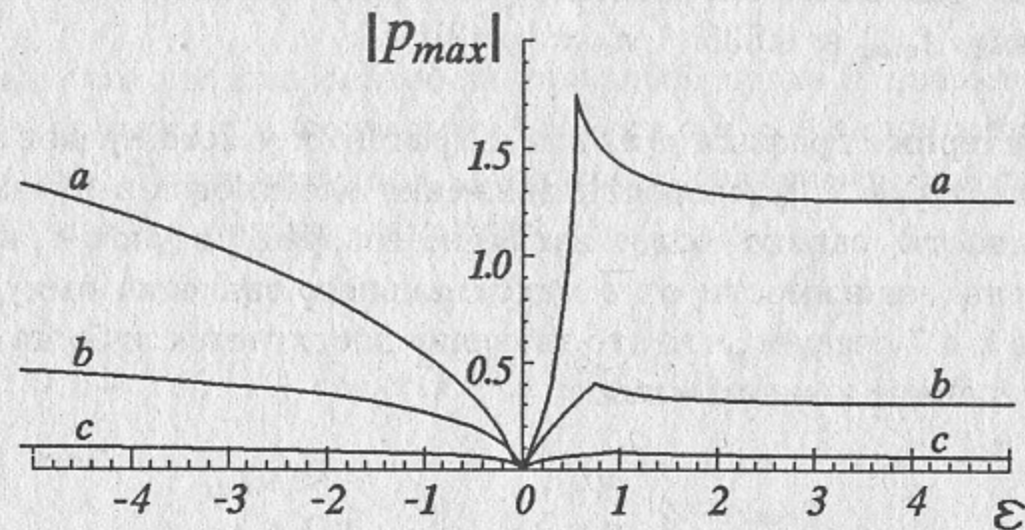


Рис. 8. Зависимости $|p_{max}(\epsilon)|$ для гауссовского пучка с $\hat{a} = 5$ (a), $\hat{a} = 1$ (b) и $\hat{a} = 0.3$ (c) в однородной плазме. $n_d = |n_b(0)|$.

При $|\epsilon| < \epsilon_{max}$ ионный пучок ускоряет электроны слабее, нежели электронный той же плотности (поскольку ускоряемых частиц больше). Заметим также, что при $\epsilon > \epsilon_{max}$ движение сосредоточено в узком слое плазмы (там, где находится пик плотности, см. рис.2).

6.3 Токовая компенсация пучка

Как и в предыдущем пункте, считаем плотность пучка фиксированной: $n_d = |n_b(0)|$.

О том, как плазмой различной плотности нейтрализуется ток широкого¹⁴ пучка (то есть, как уменьшается его магнитное поле протекающим по плазме током) можно судить по рисунку¹⁵ 9. Видно, что при $\epsilon \ll \epsilon_{max}$ есть хорошая токовая компенсация. С уменьшением плотности плазмы (ростом ϵ) компенсация ухудшается, и при $\epsilon \sim 1$ поле достигает своего вакуумного значения (в случае электронного пучка). Ионный пучок нейтрализуется лучше, нежели электронный; это различие особенно бросается в глаза в случае редкой ($|\epsilon| \gg 1$) плазмы. Интересно также отметить, что при $\epsilon > \epsilon_{max}$ магнитное поле не проникает глубоко в плазму, а экранируется уже упоминавшимся выше узким (но плотным) слоем плазменных электронов (в котором $|v_z| \sim c$).

Если радиус пучка мал по сравнению с c/ω_p , то, как и в линейном приближении (см., например, [8]), токовой компенсации почти нет, и магнитное поле в плазме слабо отличается от поля в вакууме.

Степень токовой компенсации пучка удобно характеризовать¹⁶ коэффициентом f_m , определяемым как отношение максимального магнитного поля в плазме ($H_{\varphi, max}$) к максимальному полю того же пучка в вакууме ($H_{\varphi, vac}$):

$$f_m = \frac{H_{\varphi, max}}{H_{\varphi, vac}}. \quad (81)$$

Зависимости $f_m(a)$ для плазмы различной плотности приведены на рисунке 10. Для удобства сравнения графиков по оси абсцисс отложено отношение радиуса пучка к бесстолкновительной глубине скин-слоя c/ω_p .

При большой плотности плазмы ($\epsilon \ll 1$, кривая "ЛТ"), как и следовало ожидать, компенсация есть тогда, когда $a > c/\omega_p$. В пределе больших a

¹⁴По сравнению с c/ω_p .

¹⁵Знак \dot{H}_{φ} зависит от знака заряда частиц пучка, поэтому приводятся графики $|\dot{H}_{\varphi}(x)|$.

¹⁶Собственно степенью токовой компенсации обычно называют величину $(1 - f_m)$.

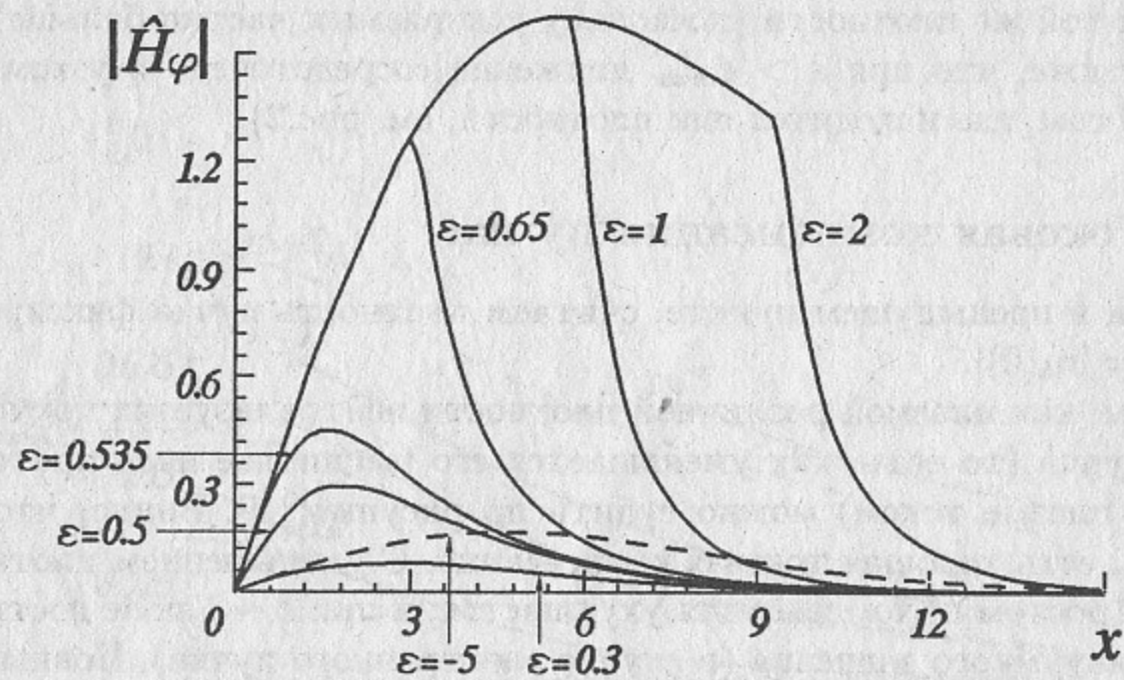


Рис. 9. Зависимости $|\hat{H}_\varphi(x)|$ для гауссовского пучка с $\hat{a} = 5$ в однородной плазме различной плотности. Пунктирная линия соответствует ионному пучку. $\epsilon_{max} \approx 0.535$. $n_d = |n_b(0)|$.

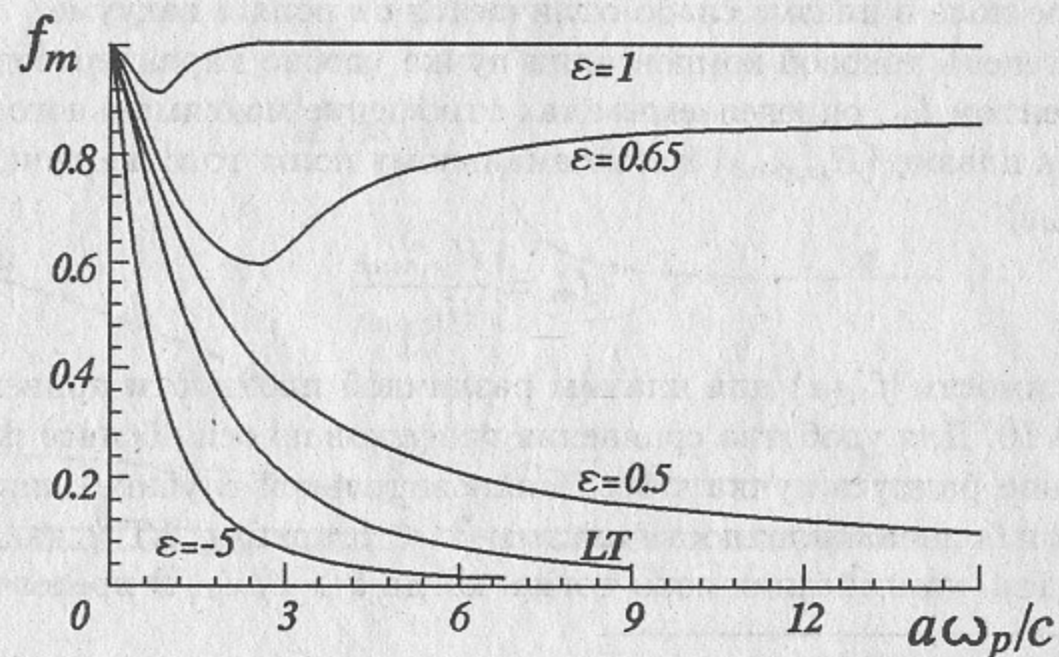


Рис. 10. Зависимости $f_m(a)$ для гауссовского пучка в однородной плазме различной плотности (кривая "LT" соответствует линейной теории). $n_d = |n_b(0)|$.

зависимость $f_m(a)$ является степенной:

$$f_m = \epsilon_0 \left(\frac{c}{\omega_p a} \right)^2 \quad (\epsilon_0 \approx 2.66 \text{ для гауссовского пучка}), \quad (82)$$

что находится в соответствии с результатами [5].

Из рисунка 10 видно, что вследствие нелинейных эффектов ионный пучок нейтрализуется лучше¹⁷, нежели предсказывается линейной теорией, а электронный — хуже. В частности, с увеличением радиуса электронного пучка f_m стремится к отличной от нуля константе, в то время как компенсация ионного пучка при $a \gg c/\omega_p$ определяется формулой (82) с коэффициентом пропорциональности $\epsilon = \epsilon(\epsilon) < \epsilon_0$. При $\epsilon \sim 1$ ток электронного пучка скомпенсирован плохо, и зависимость $f_m(a)$ имеет характерный вид с неглубоким минимумом¹⁸ при $a \sim c/\omega_p$

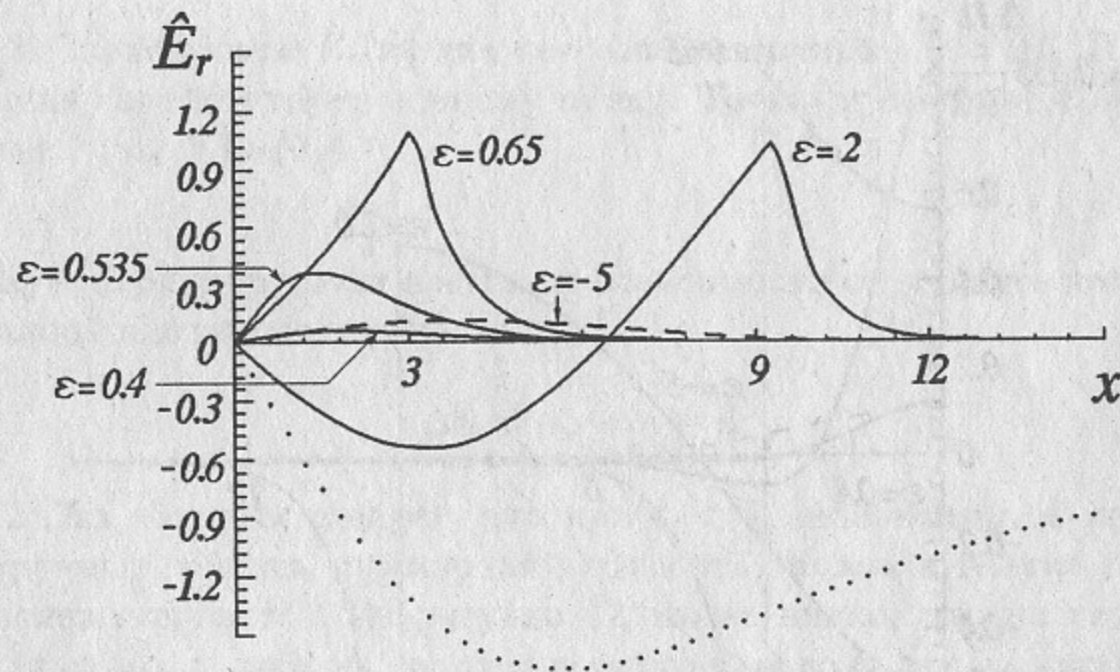


Рис. 11. Зависимости $\hat{E}_r(x)$ для гауссовского пучка с $\hat{a} = 5$. Пунктирная линия соответствует ионному пучку. Точками показано поле пучка в вакууме. $n_d = |n_b(0)|$.

¹⁷ При фиксированном радиусе пучка коэффициент f_m , конечно же, возрастает с увеличением плотности плазмы.

¹⁸ Минимум f_m имеет место, когда эффект уширения ионного канала вследствие движения электронов уже мал, но пучок ещё достаточно широк, чтобы быть заметно скомпенсированным.

6.4 Зарядовая компенсация пучка

Полагаем $n_d = |n_b(0)|$; \hat{n}_b и \hat{n}_i определяются согласно (79).

Электрическое поле пучка в плазме оказывается меньшим, нежели в вакууме, поскольку объёмный заряд пучка компенсируется (хотя бы частично) перераспределением плазменных электронов. Структура поля \hat{E}_r в случае широкого пучка ($\hat{a} \gg 1$) показана на рисунке 11. Видно, что при $\epsilon \ll \epsilon_{max}$ есть хорошая зарядовая компенсация, причём при $\epsilon > 0$ (электронный пучок) знак поля другой, нежели в вакууме. При $\epsilon_{max} < \epsilon < 1$ появляется ионный канал, компенсация ухудшается (см. также рис. 15), однако, по-прежнему, всюду $\hat{E}_r > 0$. При $\epsilon > 1$ поле вблизи оси пучка приближается к вакуумному ($\hat{E}_r < 0$), но при $x \sim x_*$ меняет знак, так что на границе ионного канала \hat{E}_r всегда положительно.

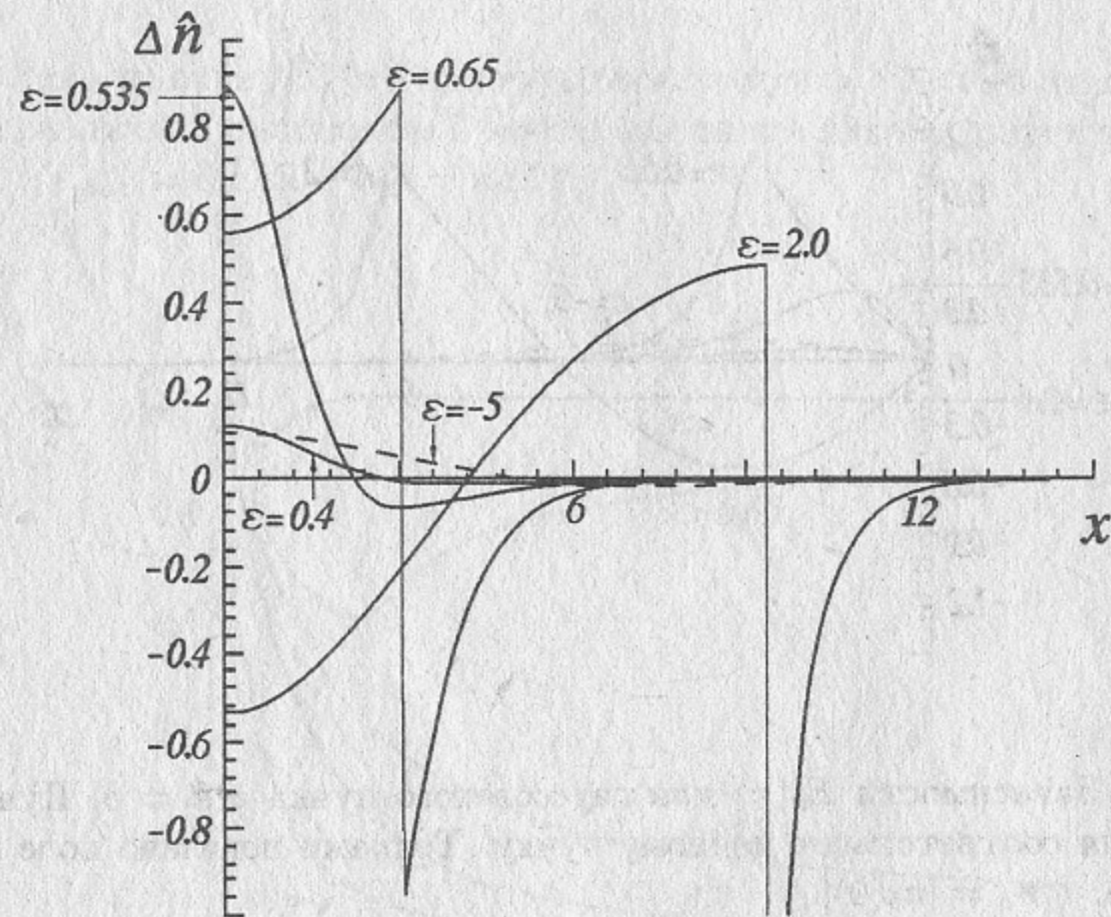


Рис. 12. Зависимости $\Delta \hat{n}(x)$ для гауссовского пучка с $\hat{a} = 5$ в плазме различной плотности. Пунктирная линия соответствует ионному пучку. $n_d = |n_b(0)|$.

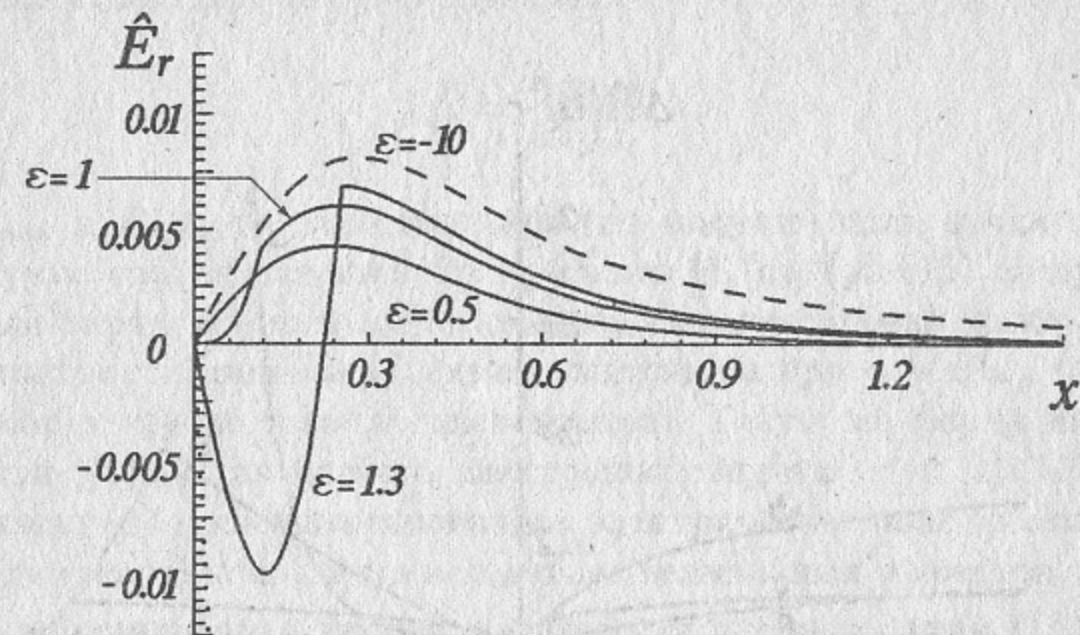


Рис. 13. Зависимости $\hat{E}_r(x)$ для гауссовского пучка с $\hat{a} = 0.3$. Пунктирная линия соответствует ионному пучку. Точками показано поле пучка в вакууме. $n_d = |n_b(0)|$.

Такую структуру поля поясняют зависимости от радиуса нескомпенсированной плотности заряда

$$\Delta \hat{n} = \hat{n}_i - \hat{n}_b - \hat{n} \quad (83)$$

(рис.12), из которых следует, что при $\epsilon < 1$, независимо от сорта инжектируемых частиц, суммарная плотность заряда в центре оказывается положительной¹⁹. Из рисунка 12 также видно, что на периферии пучка ($\epsilon < \epsilon_{max}$), либо на границе ионного канала ($\epsilon > \epsilon_{max}$) всегда есть область с $\Delta \hat{n} < 0$ (избыток электронов).

В случае узкого пучка ($\hat{a} \ll 1$, рисунок 13) закономерности поведения функции $\hat{E}_r(x)$ в целом те же, что и при $\hat{a} \gg 1$. Поскольку здесь $\epsilon_{max} \approx 1$, компенсация нарушается одновременно с появлением ионного канала (см. также рис.14).

Для сравнения зарядовой компенсации пучков различного радиуса

¹⁹Причина тому — сила Лоренца, дополнительно выталкивающая электроны по радиусу независимо от знака ϵ .

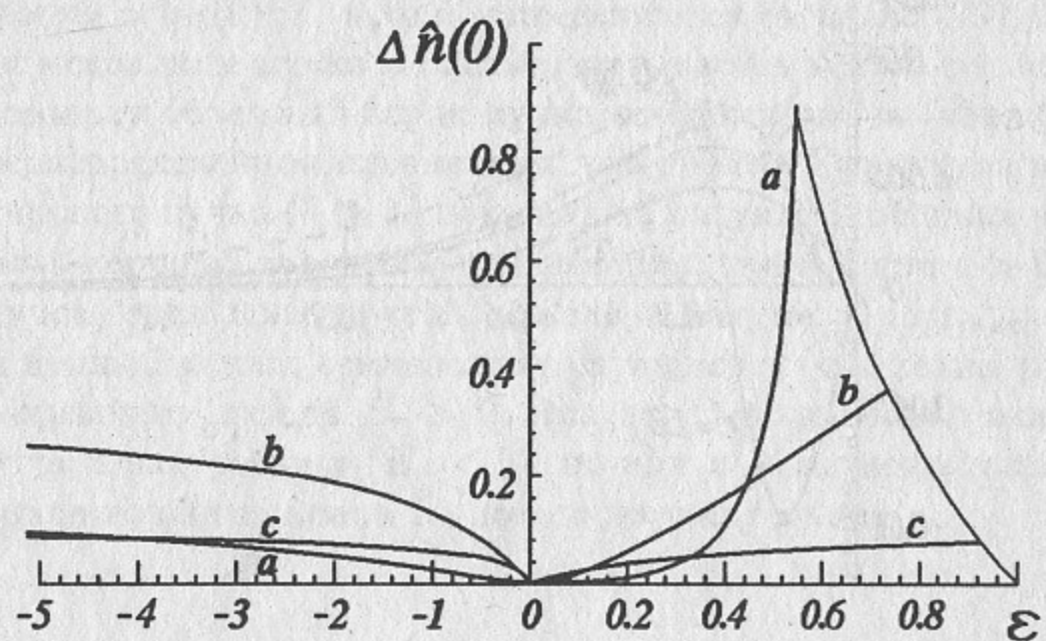


Рис. 14. Зависимости $\Delta \hat{n}(0)$ от ε для ионного ($\varepsilon < 0$) и электронного ($\varepsilon > 0$) пучков. Гауссовский пучок ширины $\hat{a} = 5$ (а), $\hat{a} = 1$ (б) и $\hat{a} = 0.3$ (с). $n_d = |n_b(0)|$.

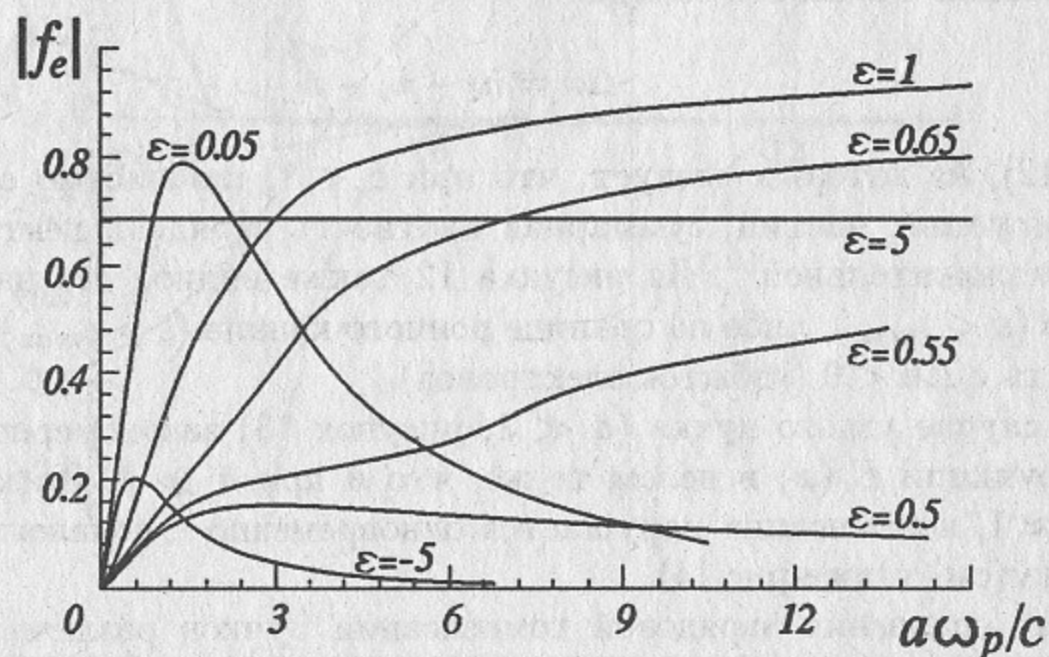


Рис. 15. Зависимости $|f_e(a)|$ для гауссовского пучка в плазме различной плотности. График для $\varepsilon = 0.05$ увеличен в 100 раз по оси ординат. $n_d = |n_b(0)|$.

введём, по аналогии с (81), коэффициент²⁰

$$f_e = \frac{E_{r,max}}{E_{r,vac}}, \quad (84)$$

где $E_{r,max}$ и $E_{r,vac}$ — максимальное (по модулю) поле пучка в плазме и в вакууме соответственно. Из графиков $|f_e(a)|$ (рис.15) следует, что объёмный заряд ионного пучка хорошо скомпенсирован даже плазмой малой плотности, причём $|f_e|$ имеет максимум при $a \sim c/\omega_p$ (а не при $a \rightarrow 0$, как в случае токовой компенсации). Такую же форму имеют зависимости $|f_e(a)|$ для слабого электронного пучка ($\varepsilon \ll 1$). Поскольку при условии (1) нескомпенсированное электрическое поле (в отличие от поля магнитного) появляется вследствие нелинейных эффектов, в случае $|\varepsilon| \ll 1$ нейтрализация заряда оказывается очень хорошей ($|f_e| \lesssim 0.01$ для $\varepsilon = 0.05$). Из рисунка 15 также следует, что при $\varepsilon \sim 1$ узкий пучок скомпенсирован лучше, чем широкий (см. также рис.14).

6.5 Фокусирующая сила, действующая на пучок

Рассмотрим зависимости

$$\hat{W}(x) = |\hat{E}_r - \hat{H}_\varphi| \quad \text{и} \quad \hat{W}(x)/x, \quad (85)$$

дающие представление о действующей на частицы пучка радиальной силе

$$F_r = \pm e \left(E_r - \frac{u}{c} H_\varphi \right) \quad (86)$$

(знак “+” соответствует положительному заряду частиц, знак “-” — отрицательному). Будем полагать $n_d = n_i(0)$.

Анализ реакции плазмы на пучки различной плотности обнаруживает следующие особенности фокусирующей силы.

- Если $\hat{n}_b(x)$ монотонно убывает с ростом x , то сила F_r всегда сжимает пучок (независимо от его заряда и плотности).
- При малых ε , когда зарядовая компенсация очень хорошая, основной вклад в \hat{W} даёт магнитное поле (соответственно, отличие графиков $\hat{W}(x)$ и $|H_\varphi(x)|$ невелико). Отношение $\hat{W}(x)/x$ при этом сильно зависит от ε , что затрудняет использование плазменного слоя для фокусировки пучка в малое пятно ([20]).

²⁰ Степенью зарядовой компенсации обычно называют величину $(1 - f_e)$.

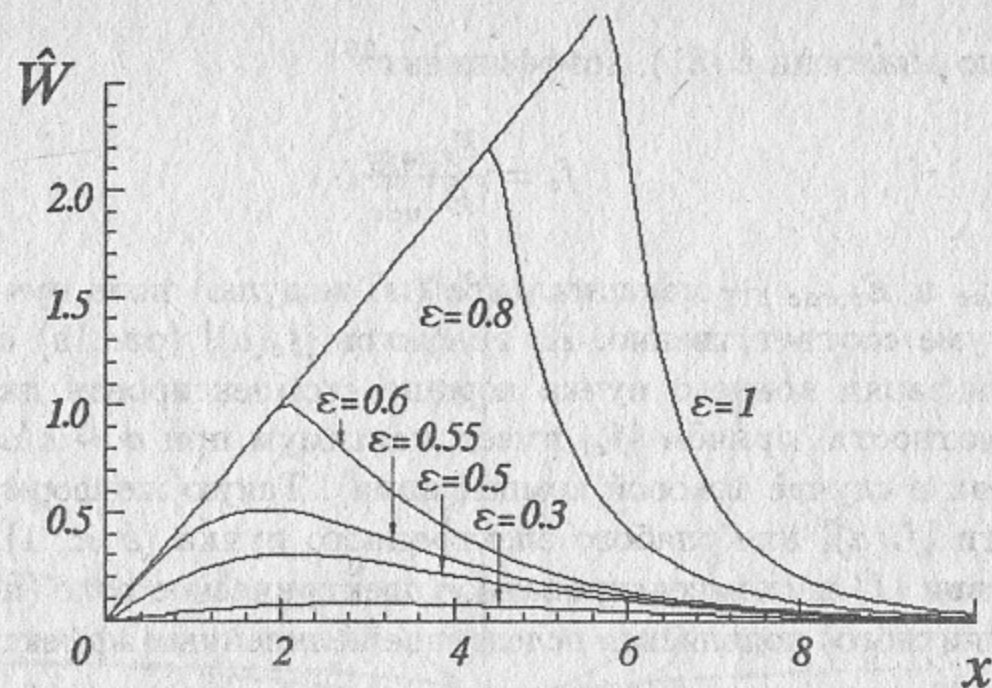


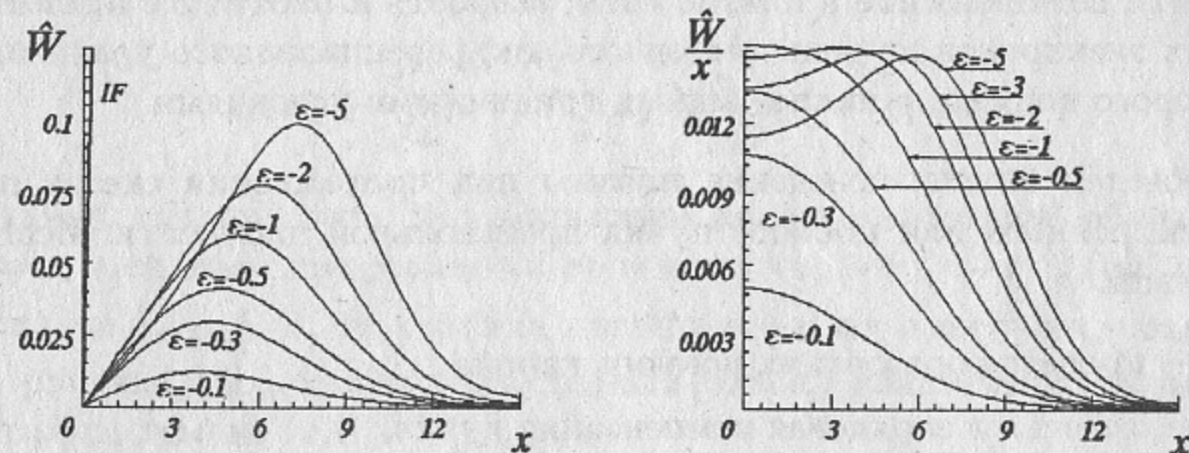
Рис. 16. Зависимости $\hat{W}(x)$ для гауссовских пучков различной плотности. Ширина пучков $\hat{a} = 5$. $n_d = n_i(0)$.

- При $\epsilon \gtrsim 1$ фокусировка электронного пучка определяется только плотностью ионов $n_i(x)$, так что в области, занятой пучком, $\hat{W}/x = 0.5$. Переход от случая $\epsilon \ll 1$ к $\epsilon \gg 1$ показан на рисунке 16.
- В случае положительно заряженного пучка фокусирующие свойства плазмы оказываются наилучшими при $|\epsilon| \sim 1$. А именно, в случае плавного профиля $n_b(x)$ (например, гауссовского, (74)) отношение $\hat{W}(x)/x$ в области пучка меняется незначительно (рис.17). Величина этого отношения, в зависимости от радиуса пучка, может как убывать с увеличением $|\epsilon|$ (рис.17а), так и возрастать (рис.17с). Это значит, что правильным подбором ширины пучка можно минимизировать вариацию \hat{W}/x при изменении ϵ (рис.17б), тем самым улучшив фокусирующие свойства плазмы (уменьшив aberrацию).

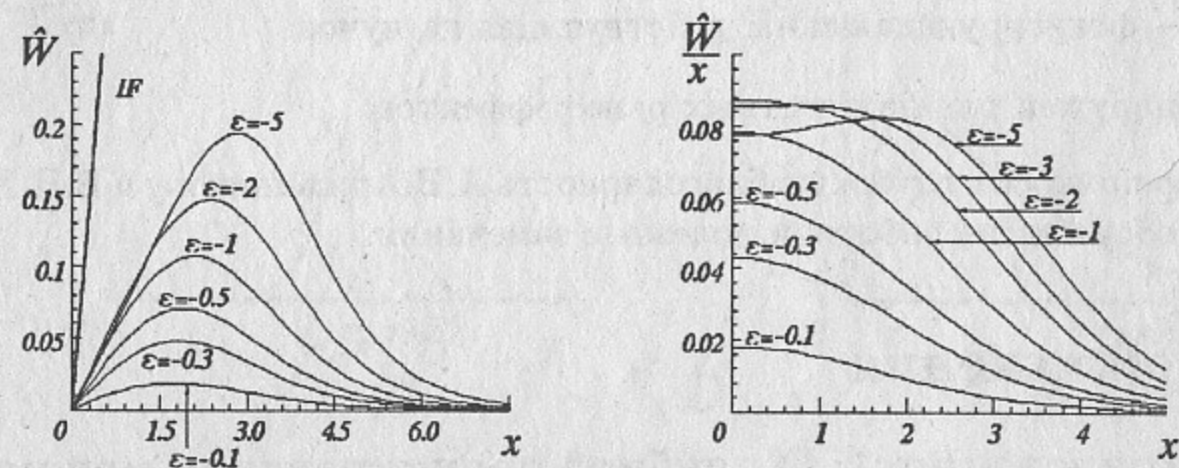
7 Заключение

Сформулируем основные результаты работы.

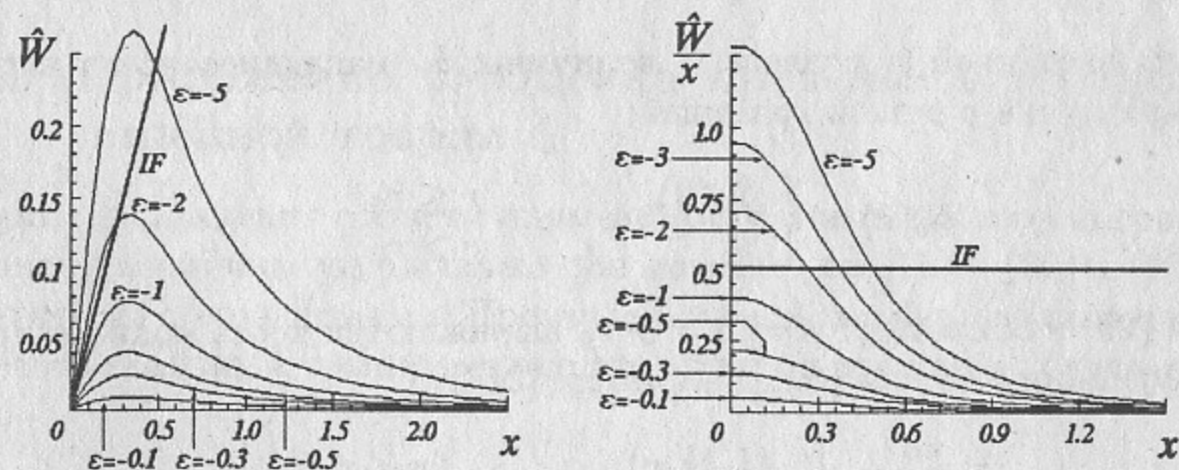
- Определено, при каких параметрах пучка (плотность, время нарастания тока) поведение плазмы адекватно описывается в рамках линейной теории.



а



б



с

Рис. 17. Зависимости $\hat{W}(x)$ (слева) и $\hat{W}(x)/x$ (справа) для гауссовских ионных пучков различной плотности. Ширина пучков $\hat{a} = 5$ (а), $\hat{a} = 2$ (б) и $\hat{a} = 0.3$ (с). Прямые "IF" соответствуют аналогичным зависимостям для электронного пучка большой плотности. $n_d = n_i(0)$.

- Развита нелинейная теория реакции плазмы на пучок, позволяющая найти возникающие в плазме поля, скорость и плотность плазменных электронов из решения одного дифференциального уравнения второго порядка с надлежащими граничными условиями.

- Проведён анализ поведения плазмы при прохождении сквозь неё электронного или ионного пучка произвольной плотности. Исследованы

- процесс образования ионного канала,
- токовая и зарядовая компенсация пучка,
- движение плазменных электронов,
- фокусирующая сила, действующая на пучок.

Обнаружен ряд неизвестных ранее эффектов.

Автор приносит глубокую благодарность А.В.Аржанникову и В.Н.Худуку за обсуждение работы и полезные замечания.

8 Приложения

8.1 Приложение 1: О глубине проникновения магнитного поля в плазму

Смысл введённой в разделе 3 величины k_r нагляднее всего виден на примере пучка с резкой границей:

$$\tilde{n}_b(r) = \begin{cases} \tilde{n}_b(0), & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0. \end{cases} \quad (87)$$

Решения (29) в областях $r < r_0$ и $r > r_0$ выражаются через модифицированные функции Бесселя (см., например, [21]):

$$\tilde{H}_\varphi(r) = \begin{cases} AI_1(k_r r), & r < r_0, \\ BK_1(k_r r), & r > r_0, \end{cases} \quad (88)$$

с коэффициентами A и B , определяемыми из условий

$$AI_1(k_r r_0) = BK_1(k_r r_0), \quad (89)$$

$$B \frac{\partial K_1(k_r r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} - A \frac{\partial I_1(k_r r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{4\pi e u}{c} \tilde{n}_b(0). \quad (90)$$

Из асимптотических выражений для цилиндрических функций (см., например, [22])

$$I_1(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{x}}, \quad K_1(x) \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \quad \text{при } x \gg 1 \quad (91)$$

следует, что при $k_r r_0 \gg 1$ магнитное поле локализовано вблизи точки $r = r_0$ и спадает при удалении от неё как $\exp(-k_r |r - r_0|)$ (см. рис.18a).

Если же $k_r r_0 \lesssim 1$, то картина магнитного поля имеет вид, показанный на рисунке 18b, однако характерный размер локализации возмущений остаётся тем же (k_r^{-1}).

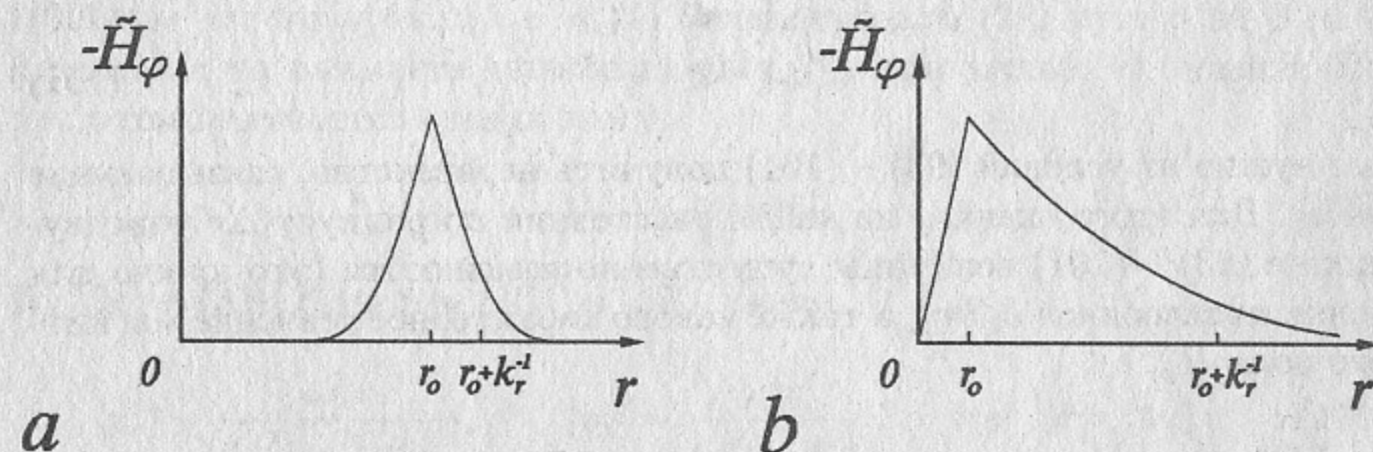


Рис. 18.

8.2 Приложение 2: Оценка пределов применимости линейной теории

Для нахождения области применимости линейной теории сравним по порядку величины удержанные при переходе от (15) – (20) к (23) – (28) слагаемые с опущенными. Производя оценки, можно перейти от Фурье-образов величин к самим величинам, хотя, по-прежнему, будем считать, что

$$u \approx c, \quad \frac{\partial}{\partial t} \sim -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{i\omega}{c}. \quad (92)$$

Линейная теория применима, если в области пучка и вблизи неё выполнены неравенства

$$|\delta n| \ll n_i; \quad (93)$$

$$\left| v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right| \ll \left| \frac{\partial v_r}{\partial t} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{\partial v_r}{\partial r} \right| \ll \omega; \quad (94)$$

$$\left| v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right| \ll \left| \frac{\partial v_r}{\partial t} \right| \Leftrightarrow |v_z| \ll c; \quad (95)$$

$$\frac{e}{mc} |v_z H_\varphi| \ll \left| \frac{\partial v_r}{\partial t} \right| \Leftrightarrow \left| v_z \frac{e H_\varphi}{mc} \right| \ll \omega |v_r|; \quad (96)$$

$$\left| v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right| \ll \left| \frac{\partial v_z}{\partial t} \right| \Leftrightarrow \left| v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right| \ll \omega |v_z|; \quad (97)$$

$$\left| v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right| \ll \left| \frac{\partial v_z}{\partial t} \right| \Leftrightarrow |v_z| \ll c; \quad (98)$$

$$\frac{e}{mc} |v_r H_\varphi| \ll \left| \frac{\partial v_z}{\partial t} \right| \Leftrightarrow \left| v_r \frac{e H_\varphi}{mc} \right| \ll \omega |v_z|; \quad (99)$$

$$|v_z| \ll c; \quad (100)$$

$$|v_r| \ll c. \quad (101)$$

Нам нужно из условий (93) – (101) получить неравенства, связывающие ω и \bar{n}_b . Для этого оценим, на каком расстоянии по радиусу Δr участвующие в (93) – (101) величины существенно изменяются (это нужно для оценки производной $\partial/\partial r$), а также каково характерное значение магнитного поля H_φ .

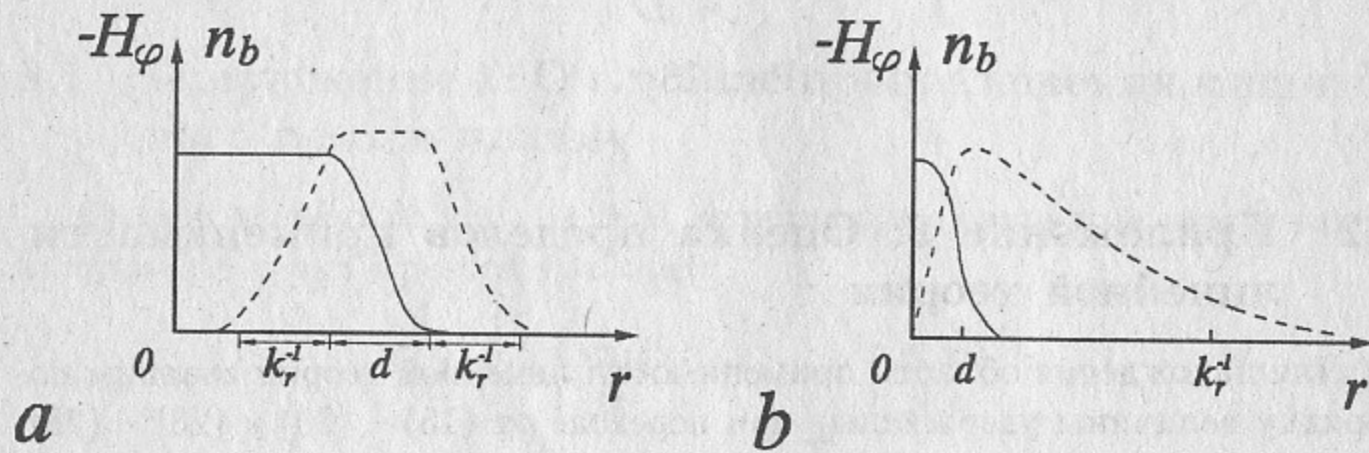


Рис. 19.

Пусть плотность пучка на некотором промежутке d плавно меняется от \bar{n}_b до нуля (рис.19, сплошные линии). Тогда (рис.19, штриховые линии) H_φ будет отлично от нуля на промежутке длины

$$\Delta r \sim d + \frac{2}{k_r} \sim d + \frac{1}{k_r}. \quad (102)$$

Как нетрудно видеть из (30)–(34), Δr является характерным размером

изменения также и для других входящих в (93) – (101) величин:

$$\frac{\partial}{\partial r} \sim \frac{1}{\Delta r} \sim \frac{k_r}{1 + k_r d}. \quad (103)$$

Интегрируя (29) по указанному промежутку Δr , получаем искомую оценку для H_φ в случае широкого ($k_r a \gg 1$) пучка²¹:

$$\begin{aligned} -k_r^2 H_\varphi \Delta r &\sim 4\pi e \bar{n}_b, \\ |H_\varphi| &\sim \frac{4\pi e \bar{n}_b}{k_r (1 + k_r d)}. \end{aligned} \quad (104)$$

В случае узкого пучка ($k_r a \ll 1$) интегрировать (29) нужно от 0 до a (принимая во внимание линейный рост H_φ при малых r). Оценка H_φ при этом получается следующей:

$$|H_\varphi| \sim 2\pi e a \bar{n}_b. \quad (105)$$

Из (31) и (33), с учётом (103) и (35), имеем

$$|v_r| \sim \frac{\omega_b^2 \omega}{k_r D |\omega^2 - \omega_p^2|}, \quad |v_z| \sim \frac{\omega_b^2 c}{|\omega^2 - \omega_p^2|} \quad \text{при } k_r a \gg 1; \quad (106)$$

$$|v_r| \sim \frac{\omega_b^2 \omega a}{|\omega^2 - \omega_p^2|}, \quad |v_z| \sim \frac{\omega_b^2 c}{D_n |\omega^2 - \omega_p^2|} \quad \text{при } k_r a \ll 1. \quad (107)$$

Подстановка (102) – (107) в (93) – (101) приводит к неравенствам (41), причём первое условие в (41) следует из (93), (95), (98) и (100); второе — из (96); и третье — из (99). Неравенства (94), (97) и (101) дают условия

широкий пучок ($k_r a \gg 1$)	узкий пучок ($k_r a \ll 1$)	
$\omega_b^2 \ll D^2 \omega^2 - \omega_p^2 ,$	$\omega_b^2 \ll D_n \omega^2 - \omega_p^2 ,$	(108)
$\omega_b^2 \ll D \frac{\omega_p}{\omega} \omega^2 - \omega_p^2 ,$	$\omega_b^2 \ll D_n \frac{\omega_p}{\omega} \omega^2 - \omega_p^2 ,$	

которые выполняются автоматически при выполнении (41).

²¹Строго говоря, такие рассуждения правомерны при $d \ll a$, однако в случае $d \sim a$ оценка (104) также верна.

8.3 Приложение 3: Алгоритм исследования реакции плазмы на пучок

Перепишем основные формулы раздела 5 в безразмерных переменных. Поскольку

$$\gamma = \sqrt{1+p^2}, \quad \hat{v}_z = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \hat{v}_z \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial x} = \frac{p}{(1+p^2)^2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (109)$$

уравнение (61) примет вид

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{p}{1+p^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 - (\hat{n}_i - \hat{n}_b) p \sqrt{1+p^2} = \hat{n}_b (1+p^2). \quad (110)$$

В зависимости от величины параметра ε , граничными условиями для (110) будут

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p = 0 \quad (111)$$

либо

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=x_*} = \frac{1}{x_*} \int_0^{x_*} \hat{n}_b x' dx', \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p = 0, \quad (112)$$

$$p(x_*) = \frac{\hat{v}_z(x_*)}{\sqrt{1-\hat{v}_z^2(x_*)}}, \quad \text{где} \quad \hat{v}_z(x_*) = \frac{\int_0^{x_*} (\hat{n}_b - \hat{n}_i) x' dx'}{\int_0^{x_*} \hat{n}_b x' dx'}. \quad (113)$$

В области $x < x_*$ (если таковая существует) поля определяются интегралами

$$\hat{H}_\varphi(x) = -\frac{1}{x} \int_0^x \hat{n}_b x' dx', \quad \hat{E}_r(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (\hat{n}_i - \hat{n}_b) x' dx'. \quad (114)$$

В остальном пространстве \hat{H}_φ и \hat{E}_r выражаются через функцию $p(x)$:

$$\hat{H}_\varphi(x) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \hat{E}_r(x) = \hat{v}_z \hat{H}_\varphi = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (115)$$

Формулу (60) удобно с помощью (61) преобразовать к виду, не содержащему второй производной $\partial^2 p / \partial x^2$:

$$n = n_i - n_b + \frac{m}{4\pi e^2} \left\{ \frac{\partial v_z}{\partial r} \frac{\partial \gamma v_z}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \gamma^2 v_z \left[\frac{v_z}{c^2} \frac{\partial v_z}{\partial r} \frac{\partial \gamma v_z}{\partial r} + \frac{4\pi e^2}{mc^2} (u n_b + v_z n_i - v_z n_b) \right] \right\},$$

$$n = \gamma^2 \left(n_i - n_b + \frac{u v_z}{c^2} n_b \right) + \frac{m}{4\pi e^2 \gamma} \left(\frac{\partial \gamma v_z}{\partial r} \right)^2 \quad (116)$$

или, в безразмерных переменных,

$$\hat{n} = (1+p^2) \left(\hat{n}_i - \hat{n}_b + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \hat{n}_b \right) + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2. \quad (117)$$

Для исследования реакции плазмы на пучок будем использовать следующий алгоритм.

1. Ищется такое число p_0 , чтобы решение задачи Коши²² для уравнения (110) с начальными условиями

$$p(0) = p_0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (118)$$

обращалось в нуль в некоторой удалённой точке $x = x_{max}$ ($x_{max} \gg 1$). Функция $p(x)$, соответствующая p_0 , будет решением краевой задачи (110), (111).

В случае ионного пучка ($\hat{n}_b < 0$) требуемое значение p_0 существует всегда и является положительным. В случае же электронного пучка поиск p_0 ведётся лишь при условии

$$\hat{n}_b(0) < \hat{n}_i(0), \quad (119)$$

причём число p_0 , как следует из Приложения 4 (формулы (124), (125)), должно лежать в промежутке

$$p_{vac} < p_0 < 0, \quad (120)$$

где

$$p_{vac} = \begin{cases} v_{v0} / \sqrt{1-v_{v0}^2}, & |v_{v0}| < 1, \\ -\infty, & |v_{v0}| > 1, \end{cases} \quad v_{v0} = 1 - \frac{\hat{n}_i(0)}{\hat{n}_b(0)}. \quad (121)$$

²²Для решения задачи Коши используется метод Рунге-Кутты ([21], стр 607).

2. Отсутствие искомого p_0 или выполнение обратного к (119) неравенства означает, что вблизи оси есть область с $n = 0$. В этом случае подбирается такое значение x_* , чтобы решение задачи Коши (110) с начальными условиями (112), (113) обращалось в нуль при $x = x_{max}$.
3. По формулам (114), (115) и (117) определяются поля в плазме и плотность электронов. Если при вычислении $\hat{n}(x)$ результат оказывается нефизическим ($\hat{n}(x) < 0$ в какой либо точке), то это указывает на несправедливость предположения о наличии только одной области с $\hat{n} = 0$, причём лежащей в центре системы.

8.4 Приложение 4: О скорости плазменных электронов на оси пучка

Выпишем ограничения, накладываемые на $v_z(0)$ уравнением (47). При малых r имеем

$$E_r(r) = 2\pi e r (n_i(0) - n(0) - n_b(0)), \quad H_\varphi = -2\pi e r (n_b(0) + n(0)v_z(0)/c) \quad (122)$$

(считаем $u = c$). Следовательно, при $r = 0$ (см. (47))

$$\frac{v_z}{c} = \frac{n + n_b - n_i}{n_b + n v_z/c} = -\frac{n_b}{2n} + \sqrt{\frac{n_b^2}{4n^2} + \frac{n + n_b - n_i}{n}},$$

$$\frac{v_z}{c} = -\frac{n_b}{2n} + \sqrt{\left(\frac{n_b}{2n} - \frac{n_i - n_b}{n_b}\right)^2 - \frac{n_i(n_i - 2n_b)}{n_b^2}}. \quad (123)$$

Из (123), в зависимости от соотношения между n_i , n_b и n , вытекают неравенства

$$n_b > \frac{n_i}{2}, \quad \frac{n_b}{2n} > \frac{n_i - n_b}{n_b} \implies \frac{v_z}{c} > -\frac{n_i - n_b}{n_b}; \quad (124)$$

$$n_b > \frac{n_i}{2}, \quad \frac{n_b}{2n} < \frac{n_i - n_b}{n_b} \implies \frac{v_z}{c} > \frac{n_i - n_b}{n_b} - \frac{n_b}{n} > -\frac{n_i - n_b}{n_b}; \quad (125)$$

$$n_b < \frac{n_i}{2}, \quad \frac{n_b}{2n} > \frac{n_i - n_b}{n_b} \implies \frac{v_z}{c} < -\frac{n_i - n_b}{n_b} < -1 \quad (\text{не бывает});$$

$$n_b < \frac{n_i}{2}, \quad \frac{n_b}{2n} < \frac{n_i - n_b}{n_b} \implies \frac{v_z}{c} < \frac{n_i - n_b}{n_b} - \frac{n_b}{n}. \quad (126)$$

Список литературы

- [1] Cox J. L., Bennett W. H. Reverse Current Induced by Injection of a Relativistic Electron Beam into a Pinched Plasma. — Phys. Fluids, 1970, v. 13, N 1, p. 182 – 192.
- [2] Hammer D. A., Rostoker N. Propagation of High Current Relativistic Electron Beams. — Phys. Fluids, 1970, v. 13, N 7, p. 1831 – 1850.
- [3] Рухадзе А. А., Рухлин В. Г. Инжекция релятивистского электронного пучка в плазму. — ЖЭТФ, 1971, т. 61, N 1(7), с. 177 – 189.
- [4] Lee R., Sudan R. N. Return Current Induced by Relativistic Beam Propagating in a Magnetized Plasma. — Phys. Fluids, 1971, v. 14, N 6, p. 1213 – 1225.
- [5] Küppers G., Salat A., Wimmel H. K. Current and fields induced in plasmas by relativistic electron beams with arbitrary radial and axial density profiles. — Plasma Physics, 1973, v. 15, N 5, p. 429 – 439.
- [6] Wurtele J. S. The role of plasma in advanced accelerators. — Phys. Fluids B, 1993, v. 5, N 7, p. 2363 – 2370.
- [7] Sessler A. M. Frontiers of particle beam physics. — Phys. Fluids B, 1990, v. 2, N 6, p. 1325 – 1330.
- [8] Рухадзе А. А., Богданкевич Л. С., Росинский С. Е., Рухлин В. Г. Физика сильноточных релятивистских пучков. — М., Атомиздат, 1980.
- [9] Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей, т. 1. М.: Атомиздат, 1975.
- [10] Swanekamp S. B., Holloway J. P., Kammash T., Gilgenbach R. M. The theory and stimulation of relativistic electron beam transport in the ion-focused regime. — Phys. Fluids B, 1992, v. 4, N 5, p. 1332 – 1348.
- [11] Chen P., Su J. J. et al. Energy Transfer in a Plasma Wake-Field Accelerator. — Phys. Rev. Lett., 1986, v. 56, N 12, p. 1252 – 1255.
- [12] Katsouleas T. Physical mechanism in the plasma wakefield accelerator. — Phys. Rev. A., 1986, v. 33, N 3, p. 2056 – 2064.

- [13] *Chen P.* A possible final focusing mechanism for linear colliders. — Part. Accel., 1987, v. 20, N 3-4, p. 171 – 182.
- [14] *Rosenzweig J. B., Chen P.* Beam optics of a self-focusing plasma lens. — Phys. Rev. D, 1989, v. 39, N 7, p. 2039 – 2045.
- [15] *Chen P., Rajagopalan S., Rosenzweig J. B.* Final focusing and enhanced disruption from an underdense plasma lens in a linear collider. — Phys. Rev. D, 1989, v. 40, N 3, p. 923 – 926.
- [16] *Keinigs R., Jones M. R.* Two-dimensional dynamics of the plasma wakefield accelerator. — Phys. Fluids, 1987, v. 30, N 1, p. 252 – 263.
- [17] *Miller R. B.* An Introduction to the Physics of Intense Charged Particle Beams — New York and London, Plenum Press, 1982.
- [18] *Росинский С. Е., Рухадзе А. А.* К вопросу об инжекции релятивистского электронного пучка в плазму. — ЖТФ, 1971, т. 41, N 12, с. 2504 – 2512.
- [19] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
- [20] *Katsouleas T., Su J. J., Mori W. B., Dawson J. M.* Plasma physics at the final focus of high-energy colliders. — Phys. Fluids B, 1990, v. 2, N 6, p. 1384 – 1389.
- [21] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М., Наука, 1968.
- [22] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., Наука, 1971.

Содержание

1 Введение	3
2 Исходные уравнения	6
3 Линейная теория зарядовой и токовой компенсации	8
4 Пределы применимости линейной теории	10
5 Нелинейная теория реакции плазмы на пучок	12
6 Примеры применения нелинейной теории	16
6.1 Образование ионного канала	17
6.2 Аксиальное движение плазменных электронов	21
6.3 Токовая компенсация пучка	23
6.4 Зарядовая компенсация пучка	26
6.5 Фокусирующая сила, действующая на пучок	29
7 Заключение	30
8 Приложения	32
8.1 Приложение 1: О глубине проникновения магнитного поля в плазму	32
8.2 Приложение 2: Оценка пределов применимости линейной теории	33
8.3 Приложение 3: Алгоритм исследования реакции плазмы на пучок	36
8.4 Приложение 4: О скорости плазменных электронов на оси пучка	38

К.В. Лотов

**Реакция плазмы
на ультрарелятивистский пучок
заряженных частиц**

ИЯФ 95-17

Ответственный за выпуск С.Г. Попов
Работа поступила 24 февраля 1995 г.

Сдано в набор 27.02. 1995 г.

Подписано в печать 27.02 1995 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2,1 печ.л., 1,7 уч.-изд.л.

Тираж 230 экз. Бесплатно. Заказ N 17

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапинтере ГНЦ РФ "ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН",
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.