



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

31

А.П.Бухвостов, Э.А.Кураев, Л.Н.Липатов

ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ
НА ПОЛЯРИЗОВАННОЙ МИШЕНИ В КХД

ПРЕПРИНТ 83-147

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИЯФ. Я.



НОВОСИБИРСК

ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ НА
ПОЛЯРИЗОВАННОЙ МИШЕНИ В КХД

А.П.Бухвостов, Э.А.Кураев, Л.Н.Липатов

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрен процесс глубоконеупругого рассеяния электронов на поляризованном нуклоне в КХД. Построены уравнения эволюции, описывающие в главно-логарифмическом приближении зависимость структурных функций $g_{1,2}$ от Q^2 . Синглетный и несинглетный каналы принимаются во внимание. Способ построения существенно опирается на свойство перенормируемости теории. Использована аксиальная калибровка глюонного поля, где вопросы перенормировок детально изучены. Построен базис фермионных и глюонных операторов твиста 3 с простыми свойствами перенормировок, описывающих матрицу аномальных размерностей для $g_{1,2}$. Разработан метод построения соответствующей системы уравнений эволюции, основанной на использовании уравнений движения и формализма спиральных амплитуд, позволяющий на всех этапах вычисления считать промежуточные частицы реальными.

Система уравнений эволюции сформулирована на языке моментов. Причем оказывается, что ранг матрицы аномальных размерностей растет с номером момента n . Низшие моменты найдены.

В опытах по глубоконеупругому рассеянию продольно-поляризованных электронов на поляризованном протоне можно [1] получить^{*)} информацию о двух дополнительных структурных функциях g_1, g_2 . Сечение этого процесса дается формулой [2]:

$$\frac{d\sigma}{dE_2 d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ \frac{F_2}{E_1 - E_2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{2F_1}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{2\xi |\vec{a}|}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (I)$$

$$\cdot \left[g_1 \frac{E_1 \cos \varphi + E_2 \cos \chi}{E_1 - E_2} - g_2 \frac{2E_1 E_2}{(E_1 - E_2)^2} (\cos \varphi - \cos \chi) \right] \left. \right\}$$

где E_1, ξ - энергия начального электрона и степень его продольной поляризации, E_2, θ - энергия и угол рассеяния конечного электрона, M, \vec{a} - масса протона и вектор его поляризации в лабораторной системе, углы θ, φ, χ определены следующим образом (см. рис. 1).

$$(\vec{p}_1, \vec{a}) = |\vec{p}_1| |\vec{a}| \cos \varphi, \quad (\vec{p}_2, \vec{a}) = |\vec{p}_2| |\vec{a}| \cos \chi, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cos \theta,$$

\vec{p}_1, \vec{p}_2 - 3-импульсы начального и конечного электронов в лабораторной системе

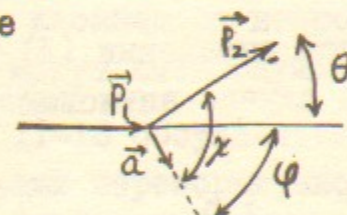


рис 1

Выражение (I) получается при свертке токового тензора продольно-поляризованного электрона, описываемого матрицей плотности

$$U(p_1) \bar{U}(p_1) = \frac{1}{2} (\hat{p}_1 + M) (1 - \xi \gamma_5), \quad |\xi| < 1, \quad \gamma_5 = -\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

С мнимой частью $W_{\mu\nu}$ амплитуды рассеяния на угол ноль виртуального γ -кванта с импульсом q на протоне с импульсом p и матрицей плотности

$$U(p, a) \bar{U}(p, a) = \frac{1}{2} (p + M) (1 - \xi_5 a), \quad (ap) = 0, \quad |a^2| < 1$$

тензор $W_{\mu\nu}$ представляется в виде суммы калибровочно-инвариантных структур [3]:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi} \gamma_m T_{\mu\nu} = 2F_1(x, Q^2) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + 2 \left(p_\mu - \frac{p q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p q}{q^2} q_\nu \right) \frac{F_2(x, Q^2)}{p q} \quad (2)$$

^{*)} Помимо измерения известных структурных функций F_1, F_2

$$+ \frac{i}{pq} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} q^\lambda [S_1^{\sigma} g_1(x, Q^2) + g_2(x, Q^2) S_1^{\sigma}], S_1 = S - \frac{Sq}{pq} P, S^{\sigma} = -2M a^{\sigma},$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ — полностью антисимметричный тензор $\varepsilon_{0123} = 1, \chi = \frac{Q^2}{2pq},$
 $Q^2 = -q^2 = 2E_1 E_2 (1 - \cos\theta).$

В бёркенском пределе

$$\chi \sim 1, Q^2 \gg M^2, \quad (3)$$

структурные функции $F_{1,2}, g_{1,2}$ зависят только от переменной χ с точностью до медленно меняющихся множителей $(\ln Q^2/M^2)^\delta$, возникающих за счет взаимодействия партонов на малых расстояниях.

Аналогичное (2) представление имеет место для всей амплитуды

$$T_{\mu\nu} = i \int d^4x e^{iqx} \langle p, \alpha | T(j_\mu(x) j_\nu(0)) | p, \alpha \rangle = 2 \bar{F}_1(x, Q^2) (-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}) + (4)$$

$$+ \frac{2\bar{F}_2(x, Q^2)}{pq} (p_\mu - \frac{pq}{q^2} q_\mu)(p_\nu - \frac{pq}{q^2} q_\nu) + \frac{i}{pq} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} q^\lambda [S_1^{\sigma} \bar{g}_1(x, Q^2) + S_1^{\sigma} g_2(x, Q^2)].$$

Применяя в подынтегральном выражении (4) разложение Вильсона для произведения токов в случае антисимметричной части амплитуды имеем [3]:

$$T_{\mu\nu}^A = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) = -i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{q^\rho}{Q^2} \sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n) \left(\frac{2}{Q^2}\right)^n q_{\mu_1} \dots q_{\mu_n} \sum_k \varphi_{1,n}^k(Q^2) \langle h | R_{i\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^k | h \rangle \quad (5)$$

$$+ \frac{i}{Q^2} (\varepsilon_{\mu\rho\lambda\sigma} q_\nu q^\rho - \varepsilon_{\nu\rho\lambda\sigma} q_\mu q^\rho - q^2 \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}) \sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n) \left(\frac{2}{Q^2}\right)^n q_{\mu_1} \dots q_{\mu_n} \sum_k \varphi_{2,n}^k(Q^2).$$

$$\cdot \langle h | R_{2\sigma\lambda\mu_1 \dots \mu_{n-1}}^k | h \rangle,$$

где индекс k нумерует различные локальные операторы R_i^k с отрицательной пространственной и положительной зарядовой четностью. В квантовой хромодинамике операторы R_1, R_2 должны быть калибровочно-инвариантными комбинациями кварковых и глюонных полей и квариатных производных, имеющими твист (разность размерности и спина) два и три соответственно. Простейшими операторами такого типа являются следующие

$$R_{1\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^1 = i^n S \bar{\Psi}_q \gamma_5 \gamma_\sigma \mathcal{D}_{\mu_1} \dots \mathcal{D}_{\mu_n} \Psi_q$$

— следы

$R_{2\sigma\mu_1 \dots \mu_n} = i^n A \frac{S}{\sigma_{\mu_1 \dots \mu_n}} \bar{\Psi}_q \gamma_5 \gamma_\sigma \mathcal{D}_{\mu_1} \dots \mathcal{D}_{\mu_n} \Psi_q$ — следы (6);
 где $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu, A_\mu = t^a A_\mu^a, t^a$ — генераторы калибровочной группы $SU(N), [t^a, t^b] = i f^{abc} t^c; \Psi_q$ — гейзенберговские операторы, описывающие кварковые поля сортов $q = u, d, s, c, \dots$. Хотя в низшем порядке теории возмущений по $\alpha_s(Q^2)$ в разложении (5) должны фигурировать только операторы, содержащие заряженные фермионы, взаимодействующие с внешним электромагнитным полем (глюоны не заряжены), при исследовании зависимости $g_{1,2}$ от Q^2 , что составляет цель нашей статьи, необходимо учитывать и другие операторы, в том числе построенные только из глюонных полей.*

В разделах 2–4 устанавливается связь функций $g_{1,2}$ со средними по адронному состоянию локальных операторов твиста 2 и 3. В разделах (5, 6, 8, 10) строится система уравнений эволюции для этих средних с учетом несинглетного канала в ГЛП ($g^2 \ll 1, g^2 \ln(Q^2/Q_0^2) \sim 1$). При первом чтении раздел 7, где связь средних от операторов с $g_{1,2}$ обсуждается исходя из диаграмм Фейнмана и часть раздела 9, касающаяся вопросов перенормировок в аксиальной калибровке, могут быть опущены.

В разделах II–I3 обсуждается выбор системы операторов с простыми свойствами перенормировок описывающий также синглетный канал, развивается формализм спиральных амплитуд, позволяющий при расчетах считать частицы лежащими на массовой поверхности, полная система уравнений эволюции переписывается на языке моментов от структурных функций. Оказывается, что ранг матрицы аномальных размерностей растет с ростом момента. Возможность экспериментальной проверки обсуждается в разделе I4. В приложениях обсуждается роль уравнений движения и приведены спиральные амплитуды парных процессов.

2. Несмотря на то, что главный вклад в $T_{\mu\nu}$ дают операторы твиста 2, ограничиться в разложении (5) только оператором R_1 нельзя, поскольку, как мы увидим ниже, при этом возникает вполне определенная связь между структурными функциями g_1, g_2 :

$$g_1(x) + g_2(x) = \int dy g_1(y)/y, \quad (7)$$

которая не выполняется в борновском приближении, где:

$$g_1(x) = \frac{1}{2} e_q^2 \delta(x-1), g_2(x) = 0, \bar{g}_1(x) = e_q^2 \frac{x}{x^2-1-i\epsilon}, \bar{g}_2(x) = 0. \quad (8)$$

* Важность их учета подчеркивалась также в [12].

Рассмотрим глубоконеупругое рассеяние на кварке q с импульсом P и вектором поляризации S (см. (2)), тогда в низшем порядке т.в.

$$\langle q_1 | R_{1\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^q | q_1 \rangle = -\frac{\delta_{qq_1}}{n+1} [S_{\sigma\mu_1} \dots \mu_n + n P_{\sigma} S_{\mu_1} \dots \mu_n - \text{следы}] \quad (9)$$

$$\langle q_1 | R_{2\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^q | q_1 \rangle = -\frac{1}{2} \delta_{qq_1} (S_{\sigma\mu_1} - P_{\sigma} S_{\mu_1}) P_{\mu_2} \dots \mu_n - \text{следы}$$

При подстановке (9) в (5), пользуясь тождеством

$$(\sum_{\mu\nu\lambda\alpha} q_{\nu} q^{\lambda} - \sum_{\nu\lambda\alpha} q_{\nu} q^{\lambda} - q^2 \sum_{\mu\nu\lambda\alpha} S_{\mu\nu} S_{\lambda\alpha}) (S_{\sigma\mu_1} - S_{\lambda\mu_1}) = -2P_{\sigma} \sum_{\mu\nu\lambda\alpha} q^{\lambda} (a_{\sigma} - \frac{q_{\sigma}}{P_{\sigma}} P_{\alpha})$$

получим

$$T_{\mu\nu}^A = -i \varepsilon_{\mu\nu\sigma\alpha} \frac{X}{2P_{\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n) \left(\frac{2}{Q^2}\right)^n \left\{ \varphi_1(Pq) q^{\sigma} \left(a_{\sigma} - \frac{n}{n+1} a_{\perp}^{\sigma}\right) + \varphi_2(Pq) \cdot q^{\sigma} a_{\perp}^{\sigma} \right\}$$

откуда видно, что это выражение совпадает с антисимметричной частью (4) с \bar{g}_1 , \bar{g}_2 , приведенными в (8) при

$$\varphi_{1,n}^q = e_q^2, \quad \varphi_{2,n}^q = \frac{n}{n+1} e_q^2. \quad (10)$$

С учетом того, что коэффициентные функции $\varphi_{1,2,n}$ в операторном разложении не зависят от сорта мишени в низшем по $q_s^2/4n = d_s$ порядке т.в. выражение (5) в общем случае рассеяния на адроне h можно записать в виде [3]:

$$T_{\mu\nu}^A = -i \varepsilon_{\mu\nu\sigma\alpha} \frac{q^{\sigma}}{Q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_q e_q^2 (1+(-1)^n) \left(\frac{1}{X}\right)^n \langle h | R_{1\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^q + \frac{2n}{n+1} R_{2\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^q | h \rangle, \quad (11)$$

где введено обозначение

$$\frac{1}{(Pq)^n} q^{\mu_1} \dots q^{\mu_n} R_{i\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^q = R_{i\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^q, \quad (12)$$

причем использование "светоподобного" вектора

$$q^1 = q - X P, \quad q^1{}^2 = 0, \quad (13)$$

вместо вектора q законно в области (3) т.к. в силу Лоренц-ковариантности среднее по адронному состоянию операторов $R_{1,2}$ отличается от правых частей (9) только общим множителем:

$$\langle h | R_{1\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^q | h \rangle = -\sum_n^1 S_{(\sigma\mu_1 \dots \mu_n)} S^{\sigma\mu_1 \dots \mu_n} - \text{следы}$$

$$\langle h | R_{2\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^q | h \rangle = -\frac{1}{2} \sum_n^2 (S_{\sigma\mu_1} - P_{\sigma} S_{\mu_1}) P_{\mu_2} \dots \mu_n - \text{следы}$$

По поводу разложения (II) следует заключить, что в противоположность R_2 , оператор твиста 3 билинейный по кварковым полям Ψ_q не единственен. При условии, что токовая масса кварка m_q отлична от нуля, существует оператор

$$R_{3\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^q = m_q i^{n-1} S_{(\mu_1 \dots \mu_n)} \bar{\Psi}_q \gamma_5 \gamma_{\sigma} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_n} \Psi_q - \text{следы}. \quad (14)$$

Более того, его матричные элементы по кварковому состоянию с учетом (2) пропорциональны матричным элементам оператора R_2 :

$$\langle q_1 | R_{3\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^q | q_1 \rangle = 2 \langle q_1 | R_{2\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^q | q_1 \rangle, \quad d_s = 0. \quad (15)$$

Поэтому при использовании только кварковых обкладок для матричных элементов в низшем порядке по d_s в (5) невозможно отделить коэффициентные функции, отвечающие R_2 и R_3 . Наличие взаимодействия с глюонным полем приводит к тому, что операторы R_2 и $\frac{1}{2} R_3$ имеют различные матричные элементы между кварковым и кварк-глюонным состояниями. Именно, используя гейзенберговские уравнения движения для полей Ψ_q :

$$(i\hat{D} - m_q) \Psi_q = 0, \quad \bar{\Psi} (i\hat{D} - m_q) = 0, \quad (16)$$

можно проверить следующее представление для разности этих операторов (опуская индексы q):

$$R_{2\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^{\perp} - \frac{1}{2} R_{3\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^{\perp} = \frac{1}{2n} \sum_{l=1}^{n-1} (n-l) Y_{\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^{l\perp}. \quad (17)$$

Набор операторов Y^l , $l = 1, \dots, n-1$ определяется в терминах калибровочно-инвариантных величин R_4, R_5 , обладающих положительной зарядовой четностью (при $n = 2, 4, \dots$)

$$-Y_{\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^l + Y_{\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^{n-l} = R_{4\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^l - R_{4\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^{n-l} = S_{(\mu_1 \dots \mu_n)} \bar{\Psi} \gamma_5 \gamma_{\sigma} (i\hat{D}_{\mu_1}) \dots (i\hat{D}_{\mu_n}) \Psi - (l \rightarrow n-l), \quad (18)$$

$$Y_{\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^l + Y_{\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^{n-l} = R_{5\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^l + R_{5\sigma\mu_1 \dots \mu_n}^{n-l} = S_{(\mu_1 \dots \mu_n)} \bar{\Psi} \gamma_{\sigma} (i\hat{D}_{\mu_1}) \dots (i\hat{D}_{\mu_n}) \Psi - (l \rightarrow n-l),$$

$$\cdot (i\hat{D}_{\mu_{l+2}}) \dots (i\hat{D}_{\mu_n}) \Psi + (l \rightarrow n-l),$$

где $G_{\mu\nu} = (-i/g) [\alpha^a_{\mu\nu}, D_\mu]$ тензор напряженности глюонного поля
 ля $\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} G^{\lambda\sigma}$ - дуальный тензор, g - константа связи:

$$G_{\mu\nu} = t^a G_{\mu\nu}^a, \quad G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + ig f^{abc} A_\mu^c A_\nu^b. \quad (19)$$

В низшем порядке теории возмущений операторы (18) имеют отличные от нуля матричные элементы только между кварковым и кварк-глюонным состоянием.

Вычисляя в низшем порядке теории возмущений амплитуду перехода между этими состояниями и сравнивая результат с выражением (II) можно убедиться в том, что в данном приближении оператор R_3 (14) действительно отсутствует в операторном разложении [4] (см. также следующий раздел). Остановимся на партонной интерпретации формул операторного разложения.

3. Партонные представления структурных функций.

Выберем сначала вектор поляризации протона продольным (2)

$$a = a_{||} = \frac{1}{M} \lambda_h (P - \frac{M^2}{Pq'} q'), \quad a^2 = -1 \quad (20)$$

где $\frac{1}{2} \lambda_h$ - спиральность нуклона. Из сравнения выражений (4) и (II) с учетом (9a) получаем следующее представление для функции g_1 :

$$g_1(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n) x^{-n-1} \sum_q e_q^2 E_n^q \quad (21)$$

$$E_n^q = -\frac{1}{2} \lambda_h \langle h | R_1 \dots R_{n+1} | h \rangle = -\tau_{n+1}^{1,q}.$$

В частности для рассеяния на кварке $E_n^q = -\delta_{qq}$ и из (21) следует (8).

Для вывода соотношений, выражающих структурные функции в терминах плотностей числа кварков, при вычислении матричных элементов типа (21) следует перейти к представлению взаимодействия в рамках старой (нековариантной) теории возмущений. В системе с бесконечным адронным импульсом $|\vec{p}'| \rightarrow \infty$ трехмерные импульсы реальных частиц в промежуточных состояниях раскладываются следующим образом:

$$\vec{K} = \beta \vec{p}' + \vec{K}_\perp, \quad (\vec{K}_\perp \vec{p}') = 0. \quad (22)$$

Параметры β и K_\perp в (22) совпадают с соответствующими су-
 даковскими параметрами разложения четырехмерного импульса K :

$$K = \alpha q' + \beta p' + K_\perp, \quad p' = P - \frac{M^2}{2Pq'} q' \approx P. \quad (23)$$

При партонном описании в калибровочных моделях необходимо использовать такую калибровку вектор-потенциала A_μ^a , при которой у виртуальных глюонов отсутствуют состояния с отрицательной нормой (духи). Такой калибровкой, в частности, является калибровка на световом конусе

$$q'_\mu A^\mu = 0, \quad q'^2 = 0. \quad (24)$$

В калибровке (24) в пренебрежении радиационными поправками отсутствуют матричные элементы оператора $R_1^q \dots$ (6) между состояниями, содержащими помимо кварка также глюоны, поэтому (21) можно представить в форме

$$E_n = -\frac{1}{2} \lambda_h \int d\beta \cdot \beta^n \langle \frac{\delta_5 q'}{Pq'} \rangle \equiv \int d\beta \cdot \beta^{n-1} E(\beta), \quad (25)$$

где символ $\langle \rangle$ означает по определению сумму диаграмм для вершинной функции с кварковым током 0, в котором снято интегрирование по доле импульса кварка $\beta = (\vec{p}K) / \vec{p}^2$ (см. рис. I):

$$\langle \rangle = \int p T_2 \int d^4 k G(k, p) O \delta(\frac{kq'}{Pq'} - \beta), \quad (26)$$

где $G(k, p)$ - четыреххвостная амплитуда, отвечающая блоку на рис. I с включенными кварковыми линиями. Символ $\int p$ означает взятие следов по лоренцевским индексам, T_2 - по цветовым индексам волновой функции кварков.

При вычислении $\int p$ в матричном элементе тока $O = \gamma_5 \hat{q}'$ можно считать, что кварки с импульсом K находятся на массовой поверхности. Действительно, числитель каждого из кварковых пропагаторов можно записать в форме:

$$K + m_q = \hat{K} + m_q + \frac{K^2 - m_q^2}{s\beta} \hat{q}', \quad (27)$$

$$\tilde{K} = \beta p' + \frac{m_q^2 - K_\perp^2}{s\beta} q' + K_\perp, \quad \tilde{K}^2 = m_q^2.$$

Причем, поскольку $q'^2 = 0$ можно заменить \hat{k} на \hat{K} при вычислении вершинной функции для тока $\gamma_5 \hat{q}'$

$$\hat{K} + m = \hat{k} + m = \sum_{\lambda=\pm 1} u_{\lambda}(\vec{k}) \bar{u}_{\lambda}(\vec{k}) \theta(\beta) - \sum_{\lambda=\pm 1} v_{\lambda}(-\vec{k}) \bar{v}_{\lambda}(-\vec{k}) \theta(\beta). \quad (28)$$

Переходя в матричном элементе оператора R_1 (21) к представлению взаимодействия, где поля $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ представляют собой линейные комбинации операторов рождения $(d_{\lambda}^{\pm}(k))$ $b_{\lambda}^{\pm}(k)$ и уничтожения $b_{\lambda}(k)$ $(d_{\lambda}(k))$ свободных кварков (антикварков):

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2E_k}} [b_{\lambda}(k) u_{\lambda}(k) e^{-ikx} + d_{\lambda}^{\dagger}(k) v_{\lambda}(k) e^{ikx}] \quad (29)$$

С учетом (28) можно (26) переписать в виде

$$\langle 0 | = \frac{1}{2V} \langle h | \int d^2k_{\perp} \left[\frac{\theta(\beta)}{\beta} b_{\lambda_2}^{\dagger}(k) b_{\lambda_1}(k) \bar{u}_{\lambda_2}(k) u_{\lambda_1}(k) - \frac{\theta(\beta)}{\beta} d_{\lambda_1}^{\dagger}(k) d_{\lambda_2}(k) \cdot \bar{v}_{\lambda_2}(k) v_{\lambda_1}(k) \right] | h \rangle \quad (30)$$

Слагаемые типа $b^{\dagger} d$, $b d$ не дают вклада в системе с бесконечным импульсом. Интегрирование в (25) идет по области $|\beta| < 1$. Отрицательным β отвечают антикварки с положительной энергией $|\beta| |\vec{p}'|$.

Подставляя (25) в (21) получим

$$g_1(x) = -\frac{1}{2|k|} \sum_q e_q^2 (E_q(x) + E_q(-x)), \quad 0 < x < 1. \quad (31)$$

Структурную функцию $g_1(x)$ можно выразить в терминах плотностей числа кварков и антикварков в адроне с долей импульса x :

$$q^{\pm}(x) = \frac{1}{2V} \int d^2k_{\perp} \langle h | b_{\pm}^{\dagger}(k) b_{\pm}(k) | h \rangle \quad (32)$$

$$\bar{q}^{\pm}(x) = \frac{1}{2V} \int d^2k_{\perp} \langle h | d_{\pm}^{\dagger}(k) d_{\pm}(k) | h \rangle.$$

Пользуясь

$$\bar{u}_{\lambda_2}(k) \gamma_5 \hat{q}' u_{\lambda_1}(k) = \lambda_1 \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \beta S, \quad \bar{v}_{\lambda_2}(-k) \gamma_5 \hat{q}' v_{\lambda_1}(-k) = -\lambda_1 \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \beta S, \quad S = \not{x} \not{q}' \quad (33)$$

и определением (30) имеем

$$\frac{1}{S} \langle \gamma_5 \hat{q}' \rangle = \theta(\beta) [q^+(\beta) - q^-(\beta)] + \theta(-\beta) [\bar{q}^+(\beta) - \bar{q}^-(\beta)] \quad (34)$$

$$-\frac{\lambda h}{\beta} E(\beta) = \theta(\beta) [q^+(\beta) - q^-(\beta)] + \theta(-\beta) [\bar{q}^+(\beta) - \bar{q}^-(\beta)].$$

Откуда следует соотношение Фейнмана:

$$g_1(x) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 [q^+(x) - q^-(x) + \bar{q}^+(x) - \bar{q}^-(x)], \quad (35)$$

где $q^{\pm}(x)$ — плотность числа кварков со спиральностью \pm , долей импульса x и зарядом e_q , $\bar{q}^{\pm}(x)$ — плотность числа антикварков со спиральностью \pm , долей импульса x и зарядом e_q .

Выражение (31) может быть получено из Фейнмановских диаграмм (см. рис. 2)



Вклады этих диаграмм в антисимметричную часть $W_{\mu\nu}^A$ имеют вид

$$W_{\mu\nu}^A = -\frac{1}{\pi} \sum_q e_q^2 \int d^4k G(k) \left[\frac{A_{\mu\nu} \gamma_{\mu}(k+q+m) \gamma_{\nu}}{(k+q)^2 - m_q^2 + i0} + \frac{A_{\nu\mu} \gamma_{\nu}(k-q+m) \gamma_{\mu}}{(k-q)^2 - m_q^2 + i0} \right] = \quad (36)$$

$$= -\frac{i}{pq} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} q^{\lambda} \sum_q \frac{1}{2} e_q^2 \int d\beta \langle \gamma_5 \gamma^{\sigma} \rangle [\delta(\beta-x) + \delta(\beta+x)],$$

где мы воспользовались определением (26), а также

$$(k \pm q)^2 - m_q^2 + i0 = S(\beta \mp x) + i0$$

$$A_{\mu\nu} \gamma_{\mu}(k+q+m) \gamma_{\nu} = A_{\nu\mu} \gamma_{\nu}(k-q+m) \gamma_{\mu} = -i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} q^{\lambda} q^{\sigma}$$

Отметим, что для того, чтобы можно было опустить вклад диаграмм рис. 2в необходимо использовать следующую калибровку внешних фотонов $p_{\mu} \epsilon_{\mu} = 0^{*}$

В случае продольно поляризованного кварка величина $\langle \gamma_5 \gamma^{\sigma} \rangle$ пропорциональна p^{σ} (см. (20)) и, т.о.

$$\langle \gamma_5 \gamma^{\sigma} \rangle = -S_{\mu\nu} \cdot \lambda_{\mu} \cdot \frac{\langle \gamma_5 \hat{q}' \rangle}{2pq'} \quad (37)$$

т.о. из сравнения (2) с (36) следует

$$g_1(x) = \sum_q \frac{1}{2} e_q^2 \lambda_h \int d\beta \frac{\langle \gamma_5 \hat{q}' \rangle}{2pq'} [\delta(\beta-x) + \delta(\beta+x)], \quad (38)$$

что эквивалентно (31).

При поперечно-поляризованном нуклоне из (2) и (36) аналогично находим:

*) Общий случай рассмотрен в разделе 7.

$$[g_1(x) + g_2(x)] S_\sigma^\perp = -\sum_q \frac{1}{2} e_q^2 \int d\beta \langle \gamma_5 \gamma_\sigma^\perp \rangle [\delta(\beta-x) + \delta(\beta+x)]. \quad (39)$$

Фактически формулы (36) и (II) эквивалентны. Действительно, вычисляя мнимую часть от амплитуды (II) получаем

$$W_{\mu\nu}^A = \frac{-i}{pq} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} q^\lambda \sum_q \frac{1}{2} e_q^2 \frac{1}{\pi} \ln \sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n) \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} \langle h | A_{\sigma n}^q | h \rangle, \quad (40)$$

где, в силу (6)

$$A_{\sigma n}^q = R_{1\sigma\dots}^q + \frac{2n}{n+1} R_{2\sigma\dots}^q = \bar{\Psi}_q \gamma_5 \gamma_\sigma (iD.)^n \Psi_q. \quad (41)$$

При аксиальной калибровке глюонного поля (24) ковариантные производные совпадают с обычными. Переходя при вычислении $\langle h | A_{\sigma n} | h \rangle$ к представлению взаимодействия

$$\langle h | A_{\sigma n}^q | h \rangle = \int d\beta \cdot \beta^n \langle \gamma_5 \gamma_\sigma \rangle \quad (42)$$

и вычисляя после суммирования в (40) мнимую часть приходим к (36).

Отметим, что оператор A (41) не обладает определенным твистом, и поэтому не может перенормироваться мультипликативно [5].

В силу релятивистской инвариантности различные компоненты матричного элемента оператора R_1 , пропорциональны, в частности

$$\langle h | R_{1\sigma\dots}^\perp | h \rangle = \frac{1}{n+1} \frac{S_\sigma^\perp}{sq'} (pq') \langle h | R_1 \dots | h \rangle. \quad (43)$$

Пользуясь (43), а также равенством (I7), являющимся следствием уравнений движения, можно переписать поперечную компоненту матричного элемента вектора A_σ (41) в виде

$$\langle h | A_{\sigma n}^\perp | h \rangle = \frac{1}{n+1} S_\sigma^\perp \frac{pq'}{sq'} \langle h | R_{1\sigma\dots}^\perp | h \rangle + \frac{n}{n+1} \langle h | R_{3\sigma\dots}^\perp | h \rangle + \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=1}^n (n-\ell) \langle h | Y_{\sigma\dots}^{\ell-1} | h \rangle. \quad (44)$$

Введем по аналогии с (25) производящие функции для вычисления моментов матричных элементов операторов A , R_3 , Y^ℓ :

$$\langle h | A_{\sigma n}^\perp | h \rangle = \int d\beta \cdot \beta^n \langle \gamma_5 \gamma_\sigma^\perp \rangle \equiv \int d\beta \cdot \beta^{n-1} A_\sigma(\beta), \quad (45)$$

$$\langle h | R_{3\sigma\dots}^\perp | h \rangle = \int d\beta \cdot \beta^n \cdot \frac{1}{\beta} \langle \gamma_5 \gamma_\sigma^\perp \gamma \rangle \equiv \int d\beta \cdot \beta^{n-1} C_\sigma(\beta)$$

$$\langle h | Y_{\sigma\dots}^{\ell-1} | h \rangle = \int d\beta_1 d\beta_2 \beta_1^{\ell-1} \beta_2^{n-\ell-1} Y_\sigma(\beta_1, \beta_2).$$

Из формул (39), (45) получим

$$[g_1(x) + g_2(x)] S_\sigma^\perp = -\sum_q \frac{e_q^2}{2x} (A_\sigma^q(x) - A_\sigma^q(-x)), \quad 0 < x < 1, \quad (46)$$

причем в силу уравнения (44) имеется связь между введенными выше функциями:

$$(1 - \beta \frac{d}{d\beta}) A(\beta) = E(\beta) - \beta \frac{d}{d\beta} C(\beta) + \beta \int \frac{d\beta_1}{\beta_1 - \beta} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} Y(\beta_1, \beta) + \frac{\partial}{\partial \beta_1} Y(\beta, \beta_1) \right], \quad (47)$$

где мы выделили в виде множителя из всех вершин общий для них вектор

$$A_\sigma^\perp = S_\sigma^\perp \cdot A, \quad C_\sigma^\perp = S_\sigma^\perp \cdot C, \quad Y_\sigma^\perp = S_\sigma^\perp \cdot Y.$$

При решении дифференциального уравнения (47) относительно $A(\beta)$ константу интегрирования следует фиксировать из того условия, что $A(\beta) = 0$ при $|\beta| > 1$. Переписав уравнение (47) в виде

$$\frac{1}{\beta} [A(\beta) - E(\beta)] = \frac{d}{d\beta} [A(\beta) - C(\beta)] + \int \frac{d\beta_1}{\beta_1 - \beta} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} Y(\beta_1, \beta) + \frac{\partial}{\partial \beta_1} Y(\beta, \beta_1) \right]$$

и проинтегрировав обе части по β в предположении, что $A(\beta)$ непрерывна при $\beta = 0$ (это следует из уравнений эволюции (95), см. ниже), получим

$$\int_{-1}^1 \frac{d\beta}{\beta} [A(\beta) - E(\beta)] = 0 \quad (49)$$

откуда с учетом (31) и (46) вытекает правило сумм Коттингема $\int_0^1 dx g_2(x) = 0$; оно является следствием того факта, что оператор R_2 (6) отсутствует при $n = 0$. (Заметим, что в скалярной теории правило сумм Коттингема нарушается [4] за счет скачка у функции $A(\beta)$ в точке $\beta = 0$, который обусловлен наличием в правой части уравнения эволюции члена вида $\theta(\beta)$). Учитывая (31), (46) и уравнение (47) получаем следующее соотношение между функциями $g_1 + g_2$ и g_1 :

$$g_1(x) + g_2(x) = \int_x^1 \frac{dx'}{x'} g_1(x') - \sum_q \frac{1}{2} e_q^2 \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \left\{ -\frac{d}{dx'} c(x') + \left(\frac{dx_1}{x_1 - x'} \left[\frac{\partial}{\partial x'} Y^q(x_1, x') + \frac{\partial}{\partial x_1} Y^q(x', x_1) \right] - (x' \leftrightarrow -x') \right) \right\} \quad (50)$$

В частности, если масса токовых кварков мала ($c \ll 1$) и невелика компонента волновой функции нуклона, содержащая глюоны ($Y \ll 1$), то получаем следующую приближенную связь структурных функций g_1, g_2 (\bar{x}), совместную с правилом сумм Коттингема:

$$g_1(x) + g_2(x) = \int_x^1 \frac{dx'}{x'} g_1(x').$$

Полученные в этом пункте формулы (31), (47), (46), (48), позволяют выразить $g_1(x), g_2(x)$ через функции E, C, Y , уравнения

для которых будут получены в следующем пункте.

Рассмотрим более подробно партонную интерпретацию уравнений (47), (50) на языке фейнмановских диаграмм. Заметим, что в отличие от случая продольно-поляризованного протона величину $\langle \gamma_5 \gamma_\sigma^\perp \rangle$ в (39) нельзя представить в партонной форме (30), где предполагается, что спиноры, описывающие кварки и антикварки удовлетворяют уравнению Дирака. Действительно, воспользовавшись судаковским разложением числителя кварковых пропагаторов на рис. I можно записать в виде

$$\hat{K} = \hat{\tilde{K}} + \frac{k_\perp^2}{s\beta} \hat{q}' \quad , \quad \tilde{\nu} = \beta p - \frac{k_\perp^2}{s\beta} q' + k_\perp \quad (51)$$

поскольку $q'^2 = 0$ для вершины $O = \gamma_5 \hat{q}'$ описывающий продольно-поляризованный адрон в (51) несущественно слагаемое $\sim \hat{q}'$, первое же слагаемое есть проектор на состояние реальных частиц: $\hat{K} = \sum_\lambda u_\lambda(\tilde{\nu}) \bar{u}_\lambda(\tilde{\nu})$, $\tilde{\nu}^2 = 0$. Т.е. здесь обоснован переход от (26) к (30), а затем (34). Для тока $\gamma_5 \gamma_\sigma^\perp$ оба слагаемых в (51) дают вклад одного порядка. Обсудим модификацию партонной интерпретации в этом случае.

Воспользуемся следующим тождеством γ -матриц:

$$\gamma_5 \gamma_\sigma^\perp = \gamma_5 \frac{\hat{q}' k_\sigma^\perp}{k q'} + m_q \gamma_5 \gamma_\sigma^\perp - \frac{(\hat{k} - m_q) \gamma_5 \hat{q}' \gamma_\sigma^\perp}{2k q'} - \frac{\gamma_5 \hat{q}' \gamma_\sigma^\perp (\hat{k} - m_q)}{2k q'} \quad (52)$$

В последних двух слагаемых множитель $(\hat{k} - m_q)$ сокращает знаменатель одного из соседних кварковых пропагаторов для тока $\gamma_5 \gamma_\sigma^\perp$ на рис. 3 и ближайшая кварк-глюонная вершина $g t^a \gamma^\delta$ "подтягивается" к двухкварковой токовой вершине O , образуя, тем самым локальную трехчастичную вершину. Таким образом, в соответствии с графическим равенством рис. 4 из тождества (52) получаем соотношение

$$A_\sigma(\beta) = B_\sigma(\beta) + C_\sigma(\beta) - \int d\beta_1 D_\sigma(\beta_1, \beta) \quad (53)$$

где

$$D_\sigma(\beta_1, \beta) = \frac{1}{2} (D_\sigma^\perp(\beta_1, \beta) + D_\sigma^\parallel(\beta_1, \beta)) \quad (54)$$

а функции B_σ, C_σ определяются по аналогии с (45) формулами

$$B_\sigma(\beta) = \langle \gamma_5 \frac{\hat{q}'}{\rho q'} K_\sigma^\dagger \rangle, \quad C_\sigma(\beta) = \langle m_q \gamma_5 \gamma_\sigma^\dagger \frac{\hat{q}'}{\rho q'} \rangle. \quad (55)$$

Функции $\mathcal{D}_{1,2\sigma}(\beta_1, \beta_2)$ совпадают с вершинной частью рис. 5, в которой снято интегрирование по переменным β_1, β_2 :

$$\mathcal{D}_{1,2\sigma}(\beta_1, \beta_2) = \int d^4 k_1 d^4 k_2 \delta(\beta_1 - \frac{k_1 q'}{\rho q'}) \delta(\beta_2 - \frac{k_2 q'}{\rho q'}) \gamma_\rho \gamma_\alpha^\delta(k_1, k_2) \mathcal{D}_{1,2\sigma}^{\delta, \alpha}, \quad (56)$$

$$\mathcal{D}_{1,\sigma}^{\delta, \alpha} = g t^a \frac{\gamma_5 \hat{q}' \gamma_\rho \delta \gamma_{1\sigma}}{\rho q'}, \quad \mathcal{D}_{2,\sigma}^{\delta, \alpha} = g t^a \frac{\gamma_5 \hat{q}' \gamma_{1\sigma} \delta}{\rho q'},$$

где $\gamma_\alpha^\delta(k_1, k_2)$ равна амплитуде пятихвостного блока на рис. 5 (с неудаленными внешними кварковыми и глюонными линиями), k_1, k_2 — импульсы входящего и выходящего кварков; δ и α обозначают лоренцевы и цветовые индексы глюона, причем по индексу δ величины $\mathcal{D}_{i\sigma}^{\delta, \alpha}$ можно считать поперечными, т.к. рядом с γ_σ^δ стоит \hat{q}' в вершине и для глюонов используется аксиальная калибровка (24).

Важно заметить, что числители пропагаторов партонов, непосредственно взаимодействующих с токами $\mathcal{D}_{i\sigma}^{\delta, \alpha}$, совпадают с токовыми для партонов, лежащих на массовой поверхности. Это можно увидеть, если переписать тензорную структуру числителя глюонного пропагатора в аксиальной калибровке в виде

$$-\delta_{\rho\sigma} + \frac{1}{k q'} (k_\rho q'_\sigma + k_\sigma q'_\rho) = \sum_{\lambda=\pm 1} e_\rho^\lambda(\vec{k}) e_\sigma^{\lambda*}(\vec{k}) + \frac{k^2}{(k q')^2} q'_\rho q'_\sigma, \quad (57)$$

$$\vec{k} = k - \frac{k^2}{2k q'} q', \quad \vec{k}^2 = 0.$$

В силу поперечности токов $\mathcal{D}_{i\sigma}^{\delta, \alpha}$ по индексу δ последнее слагаемое в (57) несущественно, т.е.

$$-\delta_{\rho\sigma} + \frac{1}{k q'} (k_\rho q'_\sigma + k_\sigma q'_\rho) \rightarrow \sum_{\lambda=\pm 1} e_\rho^\lambda(\vec{k}) e_\sigma^{\lambda*}(\vec{k}), \quad (58)$$

где $e_\rho^\lambda(\vec{k})$ — векторы поляризации, описывающие глюоны со спиральностями $\lambda = \pm 1$, они удовлетворяют соотношениям:

$$e_\rho^\lambda e_\rho^{\lambda*} = -\delta_{\lambda\lambda'}, \quad k_\rho e_\rho^\lambda = q'_\rho e_\rho^\lambda = 0. \quad (59)$$

Аналогично, для числителей кваркового пропагатора, взаимодействующего с токами B_σ, C_σ в (51) несущественно последнее слагаемое, т.е. можно сделать замену:

$$\hat{k} \rightarrow \sum_\lambda u^\lambda(\vec{k}) \bar{u}^\lambda(\vec{k}), \quad \bar{u}^\lambda(\vec{k}) \hat{q}' u^\lambda(\vec{k}) = 2k q'. \quad (60)$$

Упрощения спиновой структуры (60), (58) позволяют переписать функции C, B, \mathcal{D} (55, 56) в виде, аналогичном партонному представлению (30). Положим для простоты массу токового кварка m_q равной нулю ($C_\sigma = 0$). Тогда в силу γ_5 -инвариантности калибровочных теорий спиральность кварка будет хорошим квантовым числом, сохраняющимся при испускании и поглощении глюонов. Для оператора $B_\sigma(\beta)$ по аналогии с (34) имеем, в частности

$$B_\sigma(\beta) = 2 \int d^2 k_\perp k_{1\sigma} [\theta(\beta) (q^+(\beta, k_\perp) - q^-(\beta, k_\perp)) + \alpha(\beta) (\bar{q}^-(\beta, k_\perp) - \bar{q}^+(\beta, k_\perp))], \quad (61)$$

где $q^\pm(\beta, k_\perp), \bar{q}^\pm(\beta, k_\perp)$ — распределения кварков и антикварков со спиральностями $\pm \frac{1}{2}$ по β и k_\perp , нормированные следующим образом

$$q^\pm(\beta) = \int d^2 k_\perp q^\pm(\beta, k_\perp), \quad \bar{q}^\pm(\beta) = \int d^2 k_\perp \bar{q}^\pm(\beta, k_\perp). \quad (62)$$

Отметим, что $B_\sigma(\beta)$ вообще говоря не обращается в нуль, так как в плотностях числа партонов возможна корреляция:

$$q^\lambda(\beta, k_\perp) \sim \lambda (s k_\perp) f(k_\perp^2, \beta). \quad (63)$$

Матричные элементы операторов R_{4n}^l, R_{5n}^l (18), обладающих положительной зарядовой четностью могут быть выражены через определенные моменты от функций $\mathcal{D}_\sigma(\beta_1, \beta_2)$:

$$\langle h | R_{4\sigma \dots \sigma}^l - R_{4\sigma \dots \sigma}^{n-l} | h \rangle = Y_{\sigma n}^{n-l} - Y_{\sigma n}^l, \quad (64)$$

$$\langle h | R_{5\sigma \dots \sigma}^l + R_{5\sigma \dots \sigma}^{n-l} | h \rangle = Y_{\sigma n}^{n-l} + Y_{\sigma n}^l,$$

$$Y_{\sigma n}^l = \mathcal{D}_{\sigma n}^{l+1} - \mathcal{D}_{\sigma n}^l, \quad \mathcal{D}_{\sigma n}^l = \int d\beta_1 d\beta_2 \beta_1^{l-1} \beta_2^{n-l-1} \mathcal{D}_\sigma(\beta_1, \beta_2),$$

причем функция $Y_\sigma(\beta_1, \beta_2)$ связана с $\mathcal{D}_\sigma(\beta_1, \beta_2)$ следующим соотношением

$$Y_\sigma(\beta_1, \beta_2) = (\beta_1 - \beta_2) \mathcal{D}_\sigma(\beta_1, \beta_2). \quad (65)$$

Для матричного элемента от поперечной по индексу σ компоненты оператора твиста 2 $R_{1\sigma} \dots$

$$\langle h | R_{1\sigma} \dots | h \rangle = \frac{1}{n+1} S_{\sigma}^{\perp} \int dx \cdot E(x) \cdot x^{n-1} \quad (66)$$

с учетом определений (45), (55), (56) можно вывести соотношение

$$E(x) = \left(1 - x \frac{d}{dx}\right) B(x) + C(x) + \int \frac{x d\beta_1}{\beta_1 - x} [\mathcal{D}(\beta_1, x) + \mathcal{D}(x, \beta_1)] - \int d\beta_1 \mathcal{D}(\beta_1, x). \quad (67)$$

Исключая из (67) $B(x)$ с помощью уравнений движения (53) получаем уравнение

$$\left(1 - x \frac{d}{dx}\right) A(x) = E(x) - x \frac{d}{dx} C(x) + \int d\beta_1 \left[\frac{1}{x - \beta_1} \mathcal{D}(x, \beta_1) + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x - \beta_1}\right) \mathcal{D}(\beta_1, x) \right], \quad (68)$$

позволяющее выразить матричный элемент тока $\gamma_5 \gamma_{\sigma}^{\perp}$ через другие матричные элементы, в которых партоны лежат на массовой поверхности. Пользуясь определением γ_{σ} (65) и $\mathcal{D}_{\sigma} = S_{\sigma}^{\perp} \cdot \mathcal{D}$ легко проверить эквивалентность формул (68) и (47).

4. Матричные элементы глюонных операторов твиста 2 и 3

Помимо операторов (6, 14, 18) содержащих фермионные поля, при вычислении матрицы аномальных размерностей в синглетном канале необходимо также учитывать операторы, построенные из глюонных полей. Существует только один глюонный оператор твиста 2:

$$\Sigma_{\sigma M_1 \dots M_n} = \sum_{(\sigma M_1 \dots M_n)} \text{Tr} G_{\beta M_1} (i\mathcal{D}_{M_2}) \dots (i\mathcal{D}_{M_n}) \tilde{G}_{\beta\sigma} \quad (69)$$

где $G_{\beta M} = t^a G_{\beta M}^a$, $\tilde{G}_{\beta\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\sigma\lambda\eta} G^{\lambda\eta}$ - тензора глюонного поля. В (69) след берется по цветовым индексам.

По аналогии с (25) можно ввести производящую функцию $\xi(\beta)$

$$\frac{1}{n+1} \lambda_h \langle h | \Sigma_{\sigma \dots} | h \rangle = \int d\beta \cdot \beta^{n-1} \xi(\beta). \quad (70)$$

Эта функция может быть выражена через разность числа глюонов с

противоположными спиральностями

$$\lambda_h \frac{1}{\beta} \xi(\beta) = g^+(\beta) - g^-(\beta), \quad (71)$$

причем, в силу сохранения зарядовой четности

$$\xi(\beta) = -\xi(-\beta). \quad (72)$$

По аналогии с (43) имеем:

$$\langle h | \Sigma_{\sigma \dots}^{\perp} | h \rangle = \frac{1}{n+1} \frac{S_{\sigma}^{\perp}}{S_{q_1}} (p q_1) \langle h | \Sigma_{\sigma \dots} | h \rangle. \quad (73)$$

Матричный элемент левой части (73) содержит двух и трехглюонные вклады. Двухглюонные матричные элементы по аналогии с (25) выражаются через некоторую вершину $\langle 0 \rangle$ (ср. (25)), где ток 0 представляет некоторую линейную комбинацию двух тензорных структур

$$i(\varepsilon_{\sigma\alpha}^{\perp} K_{\beta} + \varepsilon_{\sigma\beta}^{\perp} K_{\alpha}), \quad i(-\varepsilon_{\sigma\alpha}^{\perp} K_{\beta}^{\perp} + \varepsilon_{\sigma\beta}^{\perp} K_{\alpha}^{\perp}) = i \varepsilon_{\alpha\beta}^{\perp} K_{\sigma}^{\perp}, \quad (74)$$

$$\frac{1}{p q_1} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q_{\mu}^{\perp} p_{\nu} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{\perp}$$

индексы α, β обозначают лоренцевы индексы глюонов.

Второе соотношение, куда входят две структуры (74) следует из уравнений движения для глюонного поля

$$\mathcal{D}_{\beta} G^{\beta M} = g j^M, \quad j^M = \bar{\Psi} \gamma_M \Psi. \quad (75)$$

Действительно, матричный элемент следующего глюонного оператора твиста 3

$$\sum_{(M_1 \dots M_n)} \text{Tr} \tilde{G}^{\sigma M_1} (i\mathcal{D})^{M_2} \dots (i\mathcal{D})^{M_{n-1}} \mathcal{D}_{\beta} G^{\beta M_n}, \quad (76)$$

умноженный по индексам M_i на $q_{M_i}^{\perp}$ с использованием уравнений движения (75) может быть выражен через линейную комбинацию матричных элементов оператора R_5 (18). С другой стороны, он содержит как двухглюонные, так и трехглюонные вклады.

Таким образом, для вычисления матрицы аномальных размерностей для операторов твиста 3 достаточно рассмотреть помимо (15) и (18) только трехглюонные операторы. Из требования зарядовой четности по отношению к преобразованию $G_{\alpha}^{\beta} \rightarrow -G_{\beta}^{\alpha}$, как легко видеть, возможна только R -связь глюонных полей. Напи-

шем сразу только нужные в дальнейшем компоненты соответствующих тензоров:

$$R_{6\sigma\dots}^l = i f_{abc} G_g^a (iD)^{l-2} i g G_{\sigma}^b (iD)^{n-l-1} (-i \tilde{G}_g^c), \quad (77)$$

$$R_{7\sigma\dots}^l = i f_{abc} i G_g^a (iD)^{l-2} (-i g) \tilde{G}_{\sigma}^b (iD)^{n-l-1} G_g^c, \quad 2 \leq l \leq n-1.$$

Отметим, что наличие операторов $R_{6,7}$ — характерная черта неабелевых теорий, где существует антисимметричный тензор f_{abc} .

Заметим, что в силу бозе-статистики для глюонов не все операторы (77) линейно независимы. Действительно, с точностью до величин, являющихся полными производными и не дающих вкладов в матричные элементы между адронными состояниями с одинаковыми импульсами, при четных значениях моментов справедливы соотношения

$$R_{6\sigma\dots}^l = -R_{6\sigma\dots}^{n-l+1}, \quad R_{7\sigma\dots}^l = R_{7\sigma\dots}^{n-l+1}, \quad (78)$$

$$R_{6\sigma\dots}^l = \sum_s R_{7\sigma\dots}^s (-1)^s (C_{l-2}^{z-2} - C_{n-l-1}^{z-2}), \quad C_z^s = \frac{z!}{s!(z-s)!}.$$

Чтобы увидеть справедливость (78) операторы (77) с учетом калибровки (24) запишем в виде

$$R_{6\sigma\dots}^l = i g f_{abc} A_{g_1}^a (i\partial)^{l-1} (i\partial A_{\sigma_1}^b) (i\partial)^{n-l} (i\varepsilon_{\rho\delta}^{\perp}) A_{\perp}^{c\delta} \quad (79)$$

$$R_{7\sigma\dots}^l = i g f_{abc} A_{g_1}^a (i\partial)^{l-1} (i\varepsilon_{\rho\delta}) (i\partial A^{\rho\delta}) (i\partial)^{n-l} A_{g_2}^c.$$

С учетом четности n и антисимметрии по индексам abc из (79) легко получить первые два соотношения (78) путем "перекидывания" производных. Пользуясь тождеством (74) и правилом дифференцирования произведения, получим последнее соотношение (78).

Введем, по аналогии с (56) следующую функцию

$$h_{\sigma}(\beta_1, \beta_2) = \int d^4 k_1 d^4 k_2 d^4 k_3 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3) \delta(\beta_1 + \frac{q' k_1'}{q' p}) \delta(\beta_2 - \frac{q' k_2'}{q' p}). \quad (80)$$

$$g M_{abc}^{\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2, k_3) f_{abc} \delta_{\alpha\beta}^{\perp} \varepsilon_{\sigma\gamma}^{\perp},$$

отвечающую диаграмме рис.7 (ср. рис.4). В формуле (80) $M_{abc}^{\alpha\beta\gamma}$ — пятихвостная амплитуда, отвечающая блоку на рис.6б (с включен-

ными глюонными функциями Грина), индексы $\alpha\beta\gamma$ и abc связаны с лоренцевой и цветовой структурой. В силу бозе-статистики

$$M_{\alpha\beta\gamma}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = M_{\rho\alpha\gamma}^{bac}(k_2, k_1, k_3) = M_{\alpha\gamma\beta}^{acb}(k_1, k_3, k_2) = \dots \quad (81)$$

Следовательно $h_{\sigma}(\beta_1, \beta_2)$ обладает свойством симметрии:

$$h_{\sigma}(\beta_1, \beta_2) = -h_{\sigma}(-\beta_2, -\beta_1). \quad (82)$$

Определим новую функцию $H_{\sigma}(\beta_1, \beta_2)$:

$$H_{\sigma}(\beta_1, \beta_2) = S_{\sigma}^{\perp} h(\beta_1, \beta_2), \quad h_{\sigma} = S_{\sigma}^{\perp} h, \quad (83)$$

$$2 H(\beta_1, \beta_2) = -h(\beta_1, \beta_2) + h(-\beta_2, \beta_1 - \beta_2) + h(\beta_2 - \beta_1, -\beta_1) + h(\beta_2, \beta_1) - h(-\beta_1, \beta_2 - \beta_1) - h(\beta_1 - \beta_2, -\beta_2).$$

В силу (82) она удовлетворяет соотношению

$$H(\beta_1, \beta_2) = -H(\beta_2, \beta_1).$$

Матричные элементы операторов $R_{6\sigma\dots}^l, R_{7\sigma\dots}^l$ (77) в терминах этой функции записываются в виде

$$\langle h | R_{6\sigma\dots}^l | h \rangle = \frac{3}{2} \int d^3 \beta \delta(\sum \beta) \beta_i H^{\sigma}(\beta_1, \beta_3) \left[\beta_2^{\perp} \beta_3^{\perp} + \beta_3^{\perp} \beta_2^{\perp} \right], \quad (84)$$

$$\langle h | R_{7\sigma\dots}^l | h \rangle = \frac{3}{2} \int d^3 \beta \delta(\sum \beta) \beta_i H^{\sigma}(\beta_1, \beta_3) \left[\beta_2^{\perp} \beta_3^{\perp} - \beta_3^{\perp} \beta_2^{\perp} \right].$$

5. Уравнения эволюции для матричных элементов операторов твиста 2 и 3.

Присутствие ультрафиолетовых расходимостей в теории возмущений приводит к логарифмической зависимости матричных элементов операторов от Q^2 . Для нахождения этой зависимости надо построить для них уравнения эволюции. Общий метод построения таких уравнений известен [6]. Выберем параметр ультрафиолетового обрезания μ равным модулю наибольшего вектора задачи

$$\mu = Q. \quad (85)$$

Это допустимо в силу перенормируемости теории — независимости амплитуды рассеяния от μ . Выбор (85) удобен т.к. коэффициентные функции $\varphi_{1,2}$ не содержат логарифмических вкладов при разложении их в ряд теории возмущений по $\alpha(\mu^2) = \alpha(Q^2)$. Построение уравнений эволюции заключается в дифференцировании (26), (56), (80) по логарифму ультрафиолетового обрезания (85) интегралов по поперечным импульсам.

Имеется два источника зависимости от μ^2 . Во-первых вследствие ренорм-инвариантности все ультрафиолетовые расходимости из блоков на рис. 6а, б выделяются в виде множителя $\prod_1^3 (z_i)^{1/2}$, где z_i — константы перенормировки соответствующей функции Грина (напомним, что мы включаем в блок двухчастичные функции Грина, отвечающие кваркам и глюонам, непосредственно взаимодействующим с внешним током. Кроме того надо учитывать зависимость множителей в токе: m в R_3 , g в $R_{4,5,6,7}$ ($g_\mu = \sqrt{z_1} g_c$, $m_\mu = \sqrt{z_1} m_c$). Этот вклад в уравнения эволюции не смешивает разные матричные элементы C, Y, H , что является следствием удачного выбора системы операторов, при котором партонны лежат на массовой поверхности $[\chi]$. Если бы мы включили в набор операторов оператор $A_6(4I)$, то эффекты смешивания за счет перенормировки имели бы место.

Второй источник зависимости от μ^2 в вершинных функциях рис. 6а, б связан с ультрафиолетовой расходимостью интегралов по поперечным импульсам $k_{1\perp}, k_{2\perp}$ тех частиц, которые непосредственно взаимодействуют с внешним током. Для нахождения этой зависимости нужно частично расшифровать блоки на рис. 6а, б, выделив в явном виде петлевую диаграмму, приводящую к указанной расходимости. На рис. 8 это сделано для случая, когда исходно в вершине стоит оператор, содержащий кварк-антикварковую пару, а на рис. 8 — для случая трехглюонного оператора. Заштрихованным блокам отвечает полная калибровочно-инвариантная сумма фейнмановских диаграмм для соответствующих процессов в борновском приближении (рис. 10). Заметим, что диаграммы типа рис. 8г, Эг ответственны за смешивание кварковых и глюонных операторов.

Важно для дальнейшего, что, как было показано выше, числители пропагаторов партонных, отвечающие промежуточным линиям на рис. 8, 9, могут считаться совпадающими с проекторами на состояния свободных частиц. Это позволяет в качестве промежуточного

этапа вычислений найти все двухчастичные амплитуды рассеяния, отвечающие процессам рис. 10 для физических частиц, имеющих только два значения спиральности $\lambda = \pm 1$.

Отметим, что уравнения движения (16), (75), с помощью которых нам удалось исключить "плохие" операторы проявятся при вычислении в рамках фейнмановской диаграммной техники в необходимости учета в числителях пропагаторов виртуальных частиц последних слагаемых в формулах (57), (51). Эти слагаемые после сокращения знаменателя соответствующего пропагатора приводят к эффекту "подтягивания" одной только вершины к другой. На рис. 10 линии, в которых срабатывает только эффект "подтягивания", перечеркнуты. Заметим, однако, что этим линиям с той же точностью можно сопоставить и полный пропагатор, так как вклад первых слагаемых в (51), (57) обращается в нуль при усреднении по направлениям в плоскости k_{\perp} . Таким образом, вклад диаграмм рис. 10 может строиться в полном соответствии с фейнмановскими правилами, что обеспечивает калибровочную инвариантность результатов вычисления.

6. Уравнения эволюции операторов твиста 2.

Соответствующие токи имеют вид $\gamma_5 \hat{q}'/s$ для фермионных операторов и $i\varepsilon^{\alpha\beta}$ для глюонных. Введем, согласно определению (56) производящие функции моментов операторов твиста 2 для синглетного и несинглетного каналов:

$$\begin{aligned} E(\beta) &= \int d^4k_1 \delta(\beta_1 - \beta) \gamma_p T_2 \sigma(k_1) \gamma_5 \hat{q}'/s, \\ G(\beta) &= \int d^4k_1 \delta(\beta_1 - \beta) M^{\gamma\delta}(k_1) \Delta_{\gamma\alpha}(k_1) \Delta_{\delta\beta}(k_1) i\varepsilon^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (86)$$

где $\Delta_{\gamma\alpha}(k)$ — лоренцева часть глюонного пропагатора $G_{\mu\nu}$ (23, 24) в аксиальной калибровке

$$\Delta_{\gamma\alpha}(k) = \frac{1}{k^2} d_{\gamma\alpha}(k), \quad d_{\gamma\beta}(k) = g_{\gamma\beta} - \frac{k_\gamma q'_\beta + k_\beta q'_\gamma}{k q'} = g_{\gamma\beta} - \frac{k_\gamma q'_\beta + k_\beta q'_\gamma}{k q'} - 2\alpha q'_\gamma q'_\beta / (k q'), \quad (87)$$

величины G, M в (86) обозначают фермионный и глюонный блоки на диаграммах рис. 11, описывающих переходы $E \rightarrow E, \xi \rightarrow \xi$ и $E \rightarrow \xi, \xi \rightarrow E$ в результате эволюции.

Вычисление с логарифмической точностью, образец которого для перехода $E \rightarrow E$ дан в конце этого пункта, приводит к системе уравнений

$$\dot{E}(\beta) = C_F E(\beta) \left(3 - 4 \int_0^\beta \frac{dx}{x}\right) + n_f \int dx G(x) \left[\beta^2 Y'_{21}(\beta, \beta-x) - (\beta-x) Y''_{21}(\beta, \beta-x)\right] - 2C_F \int \frac{dx}{\beta-x} E(x) \left[2\beta^2 Y'_{21}(\beta, \beta-x) - (\beta+x) Y''_{21}(\beta, \beta-x)\right], \quad (88)$$

$$\dot{G}(\beta) = -\left(\frac{2}{3}n_f - \frac{11}{3}C_V + 4C_V \int \frac{dx}{x} G(x)\right) G(\beta) - 4C_V \int \frac{dx G(x)}{\beta(\beta-x)} \left[\beta x Y''_{11}(\beta, \beta-x) + 2x(\beta-x) Y''_{21}(\beta, \beta-x)\right] - 2C_F \int dx E(x) \left[Y'_{21}(\beta, \beta-x) - \frac{2}{\beta} Y''_{21}(\beta, \beta-x)\right],$$

где первые слагаемые в правых частях (88) отвечают учету перенормировок волновых функций глюона и фермиона (рис. II а-г), n_f — число сортов фермионов (кварков) $C_V = N$, $C_F = (N^2 - 1)/(2N)$ для цветной группы $SU(N)$, пределы интегрирования определяются свойствами входящих в (88) величин Y_{np}^m :

$$Y_{21}^0(a, b) = \frac{b}{(a-b)^2} \theta_{ab}, \quad Y_{11}^0(a, b) = \frac{\theta_{ab}}{a-b}, \quad Y_{21}^1(a, b) = \frac{a\theta_{ab}}{(a-b)^2}, \quad (89)$$

$$\theta_{ab} = \theta(a) - \theta(b), \quad Y_{np}^m(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(dy/2\pi i) y^m}{(ya-1+io)^n (yb-1+io)^p}.$$

Величины $\dot{A}(\beta)$ в левых частях (88) означают (см. раздел 10)

$$\dot{E}(\beta) = \partial E(\beta) / \partial \left(\frac{g^2}{16\pi^2} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \right) \equiv \partial E(\beta, \bar{\zeta}) / \partial \bar{\zeta} \quad (90)$$

дифференцирование по $\bar{\zeta}$ инвариантно к заряду. На языке моментов

$$E_n = \int dx \cdot x^n E(x), \quad G_n = \int dx \cdot x^n G(x). \quad (91)$$

Система (88) может быть переписана в известном [8] виде

$$\dot{G}_n = G_n \left(-\frac{2}{3}n_f + \frac{11}{3}C_V + \frac{8}{n(n+1)}C_V - 4C_V \sum_{k=1}^n 1/k \right) - 2C_F E_{n-1} \frac{n+2}{n(n+1)} \quad (92)$$

$$\dot{E}_n = E_n \left(3 + \frac{2(2n+3)}{(n+1)(n+2)} - 4 \sum_{k=1}^{n+2} 1/k \right) C_F + n_f G_{n+1} \left(\frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Для диаграмм рис. II в, г, е имеем

$$C_F^{-1} E(\beta, \bar{\zeta}) = \frac{g^2(\Lambda)}{16\pi^2} \ln(\Lambda^2/m^2) \left(3 - 4 \int_0^\beta \frac{dx}{x}\right) \int p G(k_1) \gamma_5 \hat{q}' / s \delta(\beta_1 - \beta) \quad (93)$$

$$\cdot d^4 k_1 + \int \frac{(d^4 k_1 / i\pi^2) g^2(k_1^2) / 16\pi^2 d^4 k_2}{(k_1^2 - m^2 + io)(k_2 - k_1)^2} \delta(\beta_1 - \beta) \int p T_2 G(k_2) \gamma_m(k_1 + m) \cdot \gamma_5 \hat{q}'(k_1 + m) \gamma_\nu d_{\mu\nu}(k - k_1).$$

Оставляя в числителе (см. (23)) лишь члены, приводящие к логарифмическому ($\sim \ln \Lambda^2$) вкладу, преобразуем его к виду:

$$\frac{\gamma_5 \hat{q}'}{s} \left(2k_{1\perp}^2 + \frac{4\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} k_{1\perp}^2 + \frac{4\beta_1^2}{\beta_2 - \beta_1} s d_1 \right).$$

При этом знаменатель примет вид

$$(k_{1\perp}^2 + s d_1 \beta_1 + io)^2 (k_2 - k_1)^2 + s(d_2 - d_1)(\beta_2 - \beta_1 + io) = (-k_{1\perp}^2)^3 (y\beta_1 - 1 + io)^2 (y\beta_2 - 1 + \frac{2k_2 k_{1\perp}}{k_1^2} + io),$$

где

$$d^4 k_1 / i\pi^2 = \frac{sd_1 d\beta}{2\pi i} \cdot \frac{d^2 k_1}{\pi} = (-k_1^2) \frac{d^2 k_1}{\pi} d\beta \frac{dy}{2\pi i}, \quad y = s d_1 / (-k_1^2).$$

Дифференцирование (93) по $(g^2 \ln \Lambda^2) / (16\pi^2)$ (см. (90)) приводит к соответствующему вкладу в I-е уравнение (88).

7 Диаграммная интерпретация структурных функций

g_1, g_2

Связь структурных функций g_1, g_2 и функций описывающих средние по адронному состоянию операторов твиста 3 можно получить из рассмотрения вкладов в амплитуду рассеяния тяжелого фотона на угол нуль от диаграмм рис. 2а, в:

Вклады диаграмм с излучением из блока двух и более глюонов отвечают учету высших чем 3 твистов. Вклады от диаграмм с переставленными фотонами не имеют мнимой части при $(p+q)^2 > 0$.

В кинематической области главного $\sim (g^2 \ln Q^2/M^2)^N$ вклада в $2N$ - порядке теории возмущений компоненты по P 4 - импульсов K_i линий в блоке, $K_i = \alpha_i q' + \beta_i p + k_{i\perp}$ являются величинами порядка единицы $\beta_i \sim 1$, тогда как поперечные их компоненты упорядочены, уменьшаясь от величин $\sim Q$ в ближайшей к вершинам электромагнитного тока петле, до величин $\sim m$ в петле включающей начальный протон (кварк).

Поляризационные эффекты описываются антисимметричной по векторным индексам фотонов токового тензора (5). Применяя антисимметризацию для числителя подынтегрального выражения отвечающего диаграмме рис.2а, приведет его к виду

$$\frac{1}{2} [\gamma^\mu(q+k+m)\gamma^\nu - (m \leftrightarrow \nu)] = i\varepsilon^{m\nu\rho\sigma} [\frac{1}{2} m \gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\sigma + (k+q)_\rho \gamma_\sigma \gamma_5],$$

$$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{0123} = 1.$$

Результат эволюции соответствующей токовой вставки мы должны усреднить по состоянию протона с матрицей плотности $(\hat{p}+M) \cdot (1 - \hat{\alpha}\gamma_5)$. Выберем вектор поляризации протона поперечным $\alpha = \alpha_\perp$, тогда из сравнения с видом токового тензора $W_{\mu\nu}^A$ (5) заключаем, что из индексов σ, ρ один должен отвечать поперечным компонентам, а другой - продольным. Оставляя выживающие в ГЛП члены:

$$k_\rho = \beta p_\rho + k_{\perp\rho}, \quad \gamma_\rho'' = p_\rho \frac{\hat{q}'}{pq'} + q'_\rho \frac{\hat{p}}{pq'} = p_\rho \frac{\hat{q}'}{pq'},$$

вклад диаграммы (рис.2а) запишем в виде

$$\int \frac{d^4 k}{s(\beta-x)+i0} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu G(k) \right\} - m \gamma_5 \gamma_\sigma \hat{q}' \frac{p_\rho}{2pq'} + q'_\rho \gamma_\sigma \gamma_5 + \beta p_\rho \gamma_\sigma \gamma_5 -$$

$$- k_{\perp\rho} p_\rho \frac{\hat{q}' \gamma_5}{pq'}$$

Для диаграммы (рис.2), аналогично, имеем

$$\frac{1}{2} \int d^4 k_1 d^4 k_2 \frac{\text{Tr} T_2 t^d G^{\delta,d}(k_1, k_2)}{[(q+k_1)^2+i0][(q+k_2)^2+i0]} [\gamma_\nu''(q+k_2+m)\gamma_\perp^\delta(q+k_1+m)\gamma_\mu^\perp$$

$$+ \gamma_\nu^\perp(q+k_2+m)\gamma_\perp^\delta(q+k_1+m)\gamma_\mu'' - (m \leftrightarrow \nu)] = \frac{1}{2} \int d^4 k_1 d^4 k_2 \text{Tr} T_2$$

$$t^d G^{\delta,d}(k_1, k_2) \left(\frac{\gamma_\perp^\delta \gamma_\nu'' \gamma_\mu^\perp}{s(\beta_1-x)+i0} + \frac{\gamma_\nu^\perp \gamma_\mu'' \gamma_\perp^\delta}{s(\beta_2-x)+i0} - (m \leftrightarrow \nu) \right) = \int d^4 k_1 d^4 k_2$$

$$i\varepsilon^{m\nu\rho\sigma} p_\rho \text{Tr} T_2 t^d G^{\delta,d}(k_1, k_2) \left(\gamma_\perp^\delta \gamma_\perp^\sigma \gamma_5 \hat{q}' (s(\beta_1-x)+i\varepsilon)^{-1} + \right.$$

$$\left. + \gamma_\perp^\sigma \gamma_5 \hat{q}' \gamma_\perp^\delta (s(\beta_2-x)+i\varepsilon)^{-1} \right).$$

Полный вклад в антисимметричную часть токового тензора имеет вид

$$\int \frac{d\beta}{s(\beta-x)+i\varepsilon} i\varepsilon^{m\nu\rho\sigma} \left\{ \beta p_\rho [-A_\sigma + B_\sigma + \frac{2}{\beta} C_\sigma + \frac{2}{\beta} \int d\beta_1 \mathcal{D}_\sigma(\beta, \beta_1)] - \beta q_\rho A_\sigma \right\}, \quad (94a)$$

где мы ввели функции (ср. 54,55,45,18)

$$A^\sigma(\beta) = \int d^4 k_1 \text{Tr} T_2 \gamma_5 \gamma_\perp^\sigma G(k_1) \delta(\beta_1 - \beta),$$

$$B^\sigma(\beta) = \int d^4 k_1 \text{Tr} T_2 \gamma_5 \hat{q}' G(k_1) \frac{k_{1\perp}^\sigma}{k_{1q'}} \delta(\beta_1 - \beta), \quad (94b)$$

$$C^\sigma(\beta) = \int d^4 k_1 \text{Tr} T_2 \frac{m_0}{2pq'} \hat{q}' \gamma_5 \gamma_\perp^\sigma G(k_1) \delta(\beta_1 - \beta),$$

$$\mathcal{D}_1^\sigma(\beta, \beta_1) = \int d^4 \tilde{k}_1 d^4 \tilde{k}_2 \text{Tr} T_2 \frac{g_0}{2pq'} \gamma_5 \hat{q}' \gamma_\perp^\sigma \gamma_\perp^\delta t^d G^{\delta,d}(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \delta(\tilde{\beta} - \beta) \delta(\tilde{\beta} - \beta_1),$$

$$\mathcal{D}_2^\sigma(\beta_1, \beta) = \int d^4 \tilde{k}_1 d^4 \tilde{k}_2 \text{Tr} T_2 \frac{g_0}{2pq'} \gamma_5 \hat{q}' \gamma_\perp^\sigma \gamma_\perp^\delta t^d G^{\delta,d}(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \delta(\tilde{\beta} - \beta) \delta(\tilde{\beta} - \beta_1),$$

$$\mathcal{D}^\sigma(\beta, \beta_1) = \mathcal{D}_1^\sigma(\beta, \beta_1) + \mathcal{D}_2^\sigma(\beta_1, \beta).$$

Величины m_0, g_0 в (96) обозначают перенормированные массу кварка и константу кварк-глюонного взаимодействия (см. 85). Символ $\int p T_x$ обозначает суммирование по лоренцевым и цветовым индексам. Как мы показали выше (53) в силу уравнений движения имеется соотношение

$$-A_\sigma(\beta) + B_\sigma(\beta) + \frac{2}{\beta} C_\sigma(\beta) + \frac{2}{\beta} \int d\beta_1 \mathcal{D}_\sigma(\beta, \beta_1) = 0$$

и, следовательно, антисимметричная часть токового тензора, а вместе с ней и структурные функции g_1, g_2 определяются только функцией $A_\sigma(\beta)$ (см. предыдущий раздел):

$$\int \frac{d\beta}{s(\beta-x)+iz} i\varepsilon^{m\nu\rho\sigma} (\beta q_\rho) A_\sigma(\beta) \quad (94)$$

8. Уравнения эволюции для функций $A \div \mathcal{D}$ в несинглетном канале.

Зависимость функции $A_\sigma(\beta)$ от $\ln Q^2/Q_0^2$ определяется из системы уравнений эволюции для функций A, B, C, \mathcal{D} (см. 96).

Мы перейдем сейчас к построению этой системы уравнений эволюции для несинглетного канала. В следующем разделе результаты воспроизводятся с использованием техники спиральных амплитуд; рассматривается также синглетный канал.

Построение уравнений эволюции заключается в учете эффекта перенормировок m_0, g_0 и волновых функций кварка и глюона в аксиальной калибровке, который мы рассмотрим в конце этого раздела, и "расшифровке" блока на рис. (2а, б) в однопетлевом приближении. Для функций A, B, C достаточно рассмотреть диаграммы



Рис. 12

где диаграмма рис. 12а отвечает переходам $2 \rightarrow 2$ ($A, B, C \rightarrow A, B, C$), а рис. 12б, в, г - переходам $2 \rightarrow 3$ ($A, B, C \rightarrow \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$).

Для токовой вставки (обозначенной крестиком на (рис. 12), отвечающей функции A_σ , $a_\sigma = \gamma_5 \delta_\sigma^\perp$, возникает выражение

$$C_F \int d^4 k_1 \int p T_x G(k_1) \int \frac{d^4 k'_1 g^2(k'_1)}{i\pi^2 16\pi^2} \delta(\beta' - \beta) \frac{\gamma_m(k'+m) \gamma_5 \delta_\perp^\sigma(k'+m) \delta_\nu d(k'-k)}{(k'^2)^2 (k_1 - k')^2} =$$

$$= C_F \int d^4 k_1 \int p T_x G(k_1) \int \frac{d^2 k'_1 g^2(k'_1)}{\pi (-k'^2)} \frac{d\beta' \delta(\beta' - \beta) dy/2\pi i}{(y\beta' - 1 + iz)^2 (y(\beta' - \beta) - 1 + \frac{2k_1 k'_1}{k_1'^2})^2} \times$$

$$\times \left\{ 2s_\alpha \beta' \gamma_5 \delta_\perp^\sigma - 4d' k'_\perp \gamma_5 \hat{q}' + \frac{4m}{s(\beta' - \beta)} (k_1'^2 + 2s_\alpha \beta') \gamma_5 \delta_\perp^\sigma \hat{q}' - \right.$$

$$- \frac{2}{s(\beta' - \beta)} \left[\gamma_5 \delta_\sigma^\perp \cdot s (s_\alpha \beta' \beta_1 - s_\alpha \beta'^2 - k_1'^2 \beta') - 2(s_\alpha \beta' + k_1'^2) \cdot \right.$$

$$\left. \left. k_1'^\sigma \gamma_5 \hat{q}' - 2k_1'^\sigma \cdot \gamma_5 \hat{q}' \cdot s_\alpha \beta' \right] \right\}$$

Выделяя в этом выражении логарифмический вклад ($\sim \int d^2 k'_1 / (-k_1'^2)$) (при этом бывает необходимо разложить множитель перед фигурной скобкой) и вспоминая определение функций $A \div \mathcal{D}$ (94) и функций

$$y_{npq}^m \text{ (a, b, c) получим}$$

$$A^\sigma(\beta, \frac{g^2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}) = C_F \int \frac{d(-k_1'^2)}{(-k_1'^2)} \frac{g^2(k_1'^2)}{16\pi^2} \int d\beta' y_{11}^0(\beta, \beta - \beta') \left\{ \frac{2\beta}{\beta'} A^\sigma(\beta') + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{(2\beta^2 + \beta'^2 - \beta\beta')}{\beta'(\beta' - \beta)} B^\sigma(\beta') + \frac{4(\beta + \beta')}{\beta'(\beta' - \beta)} C^\sigma(\beta') \right\} \quad (95a)$$

$$+ 2 \frac{(2\beta^2 + \beta'^2 - \beta\beta')}{\beta'(\beta' - \beta)} B^\sigma(\beta') + \frac{4(\beta + \beta')}{\beta'(\beta' - \beta)} C^\sigma(\beta') \left\}$$

Для токовой вставки $b_\sigma = \gamma_5 \hat{q}' \frac{k_1^\sigma}{k_1 q'}$, отвечающей функции $B_\sigma(\beta)$, возникает выражение

$$C_F \int d^4 k_1 \int p T_x G(k_1) \int \frac{d^2 k'_1 / \pi}{(-k_1'^2)^2} \frac{g^2(k'_1)}{16\pi^2} \int \frac{d\beta' \delta(\beta' - \beta) dy/2\pi i}{(y\beta' - 1 + iz)^2 (y(\beta' - \beta) - 1 + \frac{2k_1 k'_1}{k_1'^2})^2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{2m_0}{s\beta} k_1'^2 \gamma_5 \hat{q}' \gamma_\perp^\sigma + \frac{2}{s\beta'} k_1'^2 \cdot k_1'^\sigma \gamma_5 \hat{q}' - k_1'^2 \gamma_5 \delta_\sigma^\perp \right\},$$

что дает

$$B^{\sigma}(\beta, \frac{g^2}{16\pi^2} \ln \Lambda^2/m^2) = C_F \int \frac{d(-k_1^2)}{(-k_1^2)} \frac{g^2(k_1^2)}{16\pi^2} \int d\beta' \left\{ \frac{2}{\beta' - \beta} (-\beta A^{\sigma}(\beta')) + \right. \\ \left. + 2C(\beta') Y_{21}^{\sigma}(\beta, \beta - \beta') + \beta' B^{\sigma}(\beta') \left[\frac{2}{\beta} Y_{22}^{\sigma}(\beta, \beta - \beta') + \frac{2}{\beta' - \beta} Y_{21}^{\sigma}(\beta, \beta - \beta') \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4}{\beta' - \beta} (Y_{22}^{\sigma}(\beta, \beta - \beta') - \beta Y_{22}'(\beta, \beta - \beta')) \right] \right\}. \quad (96a)$$

Для токовой вставки $C_{\sigma} = \frac{m_0}{s} \hat{q}^{\perp} \gamma_5 \gamma_{\sigma}^{\perp}$, отвечающей функции $C_{\sigma}(\beta)$ только диаграмма (рис. I2a) дает ненулевой логарифмический вклад

$$C_F \int d^4 k_1 \delta_{pT_2} G(k_1) \int \frac{d^4 k'}{i\pi^2} \frac{g^2(k')}{16\pi^2} \cdot \frac{m_0/s}{(k'^2)(k_1 - k')^2} \left\{ \gamma_m k' q' \gamma_5 k' \gamma_m - \right. \\ \left. - \frac{2}{s(\beta - \beta')} [(k - k') k' q' \gamma_5 \gamma_{\perp}^{\sigma} k' q' + q' k' q' \gamma_5 \gamma_{\perp}^{\sigma} k' (k - k')] \right\}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках не дает вклада в силу

$$\gamma_m^{\perp} \gamma_{\sigma}^{\perp} \gamma_m^{\perp} = 0.$$

Второе слагаемое в фигурных скобках $4 k'^2 q' \gamma_5 \gamma_{\sigma}^{\perp} \beta' (\beta' - \beta)^{-1}$ приводит к вкладу

$$C_{\sigma}^{\perp}(\beta, \frac{g^2}{16\pi^2} \ln \Lambda^2/m^2) = C_F \int \frac{d(-k_1^2)}{(-k_1^2)} \frac{g^2(k_1^2)}{16\pi^2} \int d\beta' C_{\sigma}^{\perp}(\beta'). \quad (97a) \\ \cdot \frac{4\beta}{\beta' - \beta} Y_{11}^{\sigma}(\beta, \beta - \beta').$$

При вычислении перехода $A, B \rightarrow D_1, D_2$ (рис. I2б, в, г), члены $\sim M$ можно опустить в числителях, т.к. они не приводят к логарифмическому вкладу. Для токовой вставки, отвечающей от диаграммы (рис. I2), получается вклад

$$(C_F - \frac{C_V}{2}) \int d^4 k_1 d^4 k_2 \delta_{pT_2} t^d G^{d, \delta}(k_1, k_2) \int \frac{d^4 k'}{i\pi^2} \frac{g^3(k')}{16\pi^2} (k'^2)^{-2} (k - k')^{-2} (k + k_2 - k_1)^{-2}$$

$$\cdot \left\{ \gamma_m k' \gamma_{\perp}^{\delta} k' \gamma_5 \gamma_{\perp}^{\sigma} k' \gamma_m - \frac{2}{s(\beta_1 - \beta')} [(k_1 - k') (k_1 + k_2 - k_1) \gamma_{\perp}^{\delta} k' \gamma_5 \gamma_{\perp}^{\sigma} k' q' \right. \\ \left. + q' (k_1 + k_2 - k_1) \gamma_{\perp}^{\delta} k' \gamma_5 \gamma_{\perp}^{\sigma} (k_1 - k')] \right\} = \\ = 2(C_F - \frac{C_V}{2}) \int \frac{d(-k_1^2)}{(-k_1^2)} \frac{g^2(k_1^2)}{16\pi^2} \int d\beta_1 d\beta_2 \left\{ \mathcal{D}_{\sigma}^{(2)}(\beta_1, \beta_2) Y_{211}^2(\beta_2, \beta_1, \beta) + \right. \\ \left. + \mathcal{D}_{\sigma}^{(1)}(\beta_1, \beta_2) \left[Y_{211}'(\beta_2, \beta_1, \beta) - \frac{1}{\beta_1 - \beta} (2\beta(\beta + \beta_2 - \beta_1) Y_{211}^2(\beta_2, \beta_1, \beta) - (2\beta + \beta_2 - \beta_1) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot Y_{211}'(\beta_2, \beta_1, \beta)) \right] \right\}. \quad (95d)$$

Учет диаграммы (рис. I2в) приведет к замене $\mathcal{D}^{(1,2)}$ в правой части на $\mathcal{D}(\beta_1, \beta_2) = \mathcal{D}^{(1)}(\beta_1, \beta_2) + \mathcal{D}^{(2)}(\beta_2, \beta_1)$.

Для функции $B_{\sigma}(\beta)$ имеем, аналогично, вклад от диаграммы (рис. I2б, в):

$$B_{\sigma}(\beta, \frac{g^2}{16\pi^2} \ln \Lambda^2/m^2) = 2(C_F - \frac{C_V}{2}) \int \frac{d(-k_1^2)}{(-k_1^2)} \frac{g^2(k_1^2)}{16\pi^2} \int \frac{d\beta_1 d\beta_2}{\beta} \mathcal{D}_{\sigma}(\beta_1, \beta_2) \left\{ Y_{211}^{\sigma}(\beta_2, \beta_1, \beta) + Y_{211}'(\beta_2, \beta_1, \beta) - \frac{1}{\beta_1 - \beta} (2(\beta + \beta_2 - \beta_1) Y_{211}'(\beta_2, \beta_1, \beta) \right. \\ \left. - (2\beta + \beta_2 - \beta_1) Y_{211}^{\sigma}(\beta_2, \beta_1, \beta)) - \frac{2\beta}{\beta_1 - \beta} (\beta Y_{211}'(\beta_2, \beta_1, \beta) - Y_{211}^{\sigma}(\beta_2, \beta_1, \beta)) \right\}. \quad (96б)$$

При вычислении вкладов от диаграммы (рис. I2г) необходима величина

$$\Delta_{\beta\beta_1}(k' - k_1) [g_{2\beta}(-2k_1^{\perp} \gamma) + g_{\beta\gamma}^{\perp}(k_2 - 2k_1 + k')_{\alpha} + g_{\delta\alpha}^{\perp}(k' - 2k_2 + k_1)_{\beta}] \Delta_{\alpha\alpha}(k' - k_2) \equiv \\ \equiv (V\Delta\Delta)_{\beta_1\alpha_1\gamma}.$$

Пользуясь свойствами $\Delta_{\alpha\beta}(k)$:

$$\Delta_{\beta\sigma} q'_{\sigma} = 0, \quad \Delta_{\beta\beta_1}(k' - k) P_{\beta} = \frac{-1}{\beta' - \beta} [k'_{\perp\beta_1} + 2\alpha' q'_{\beta_1}]$$

преобразуем ее к виду

$$(V\Delta\Delta)_{\beta_1\alpha_1\gamma} = -2k'_{\perp\gamma} g_{\alpha_1\beta_1}^{\perp} + 4k'_{\perp\gamma} \left[\frac{q'_{\alpha_1} k'_{\perp\beta_1}}{s(\beta' - \beta_2)} + \frac{q'_{\beta_1} k'_{\perp\alpha_1}}{s(\beta' - \beta_1)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2K_1'^2 q_{\alpha_1}' q_{\beta_1}'}{S^2(\beta'-\beta_1)(\beta'-\beta_2)} \Big] - 2 \left[g_{\alpha_1 \gamma}^{\perp} - 2 \frac{q_{\alpha_1}' K_{1\gamma}'}{S(\beta'-\beta_2)} \right] \left[\frac{S d'(\beta'+\beta_1-2\beta_2)}{S(\beta'-\beta_1)} q_{\beta_1}' + \right. \\
& + \frac{\beta_1-\beta_2}{\beta'-\beta_1} K_{1\beta_1}' + \frac{K_1'^2}{S(\beta'-\beta_1)} q_{\beta_1}' \Big] - 2 \left[g_{\beta_1 \gamma}^{\perp} - 2 \frac{q_{\beta_1}' K_{1\gamma}'}{S(\beta'-\beta_1)} \right] \left[\frac{\beta_2-\beta_1}{\beta'-\beta_2} K_{1\alpha_1}' + \right. \\
& \left. + \frac{K_1'^2}{S(\beta'-\beta_2)} q_{\alpha_1}' + \frac{S d'(\beta_2+\beta_1-2\beta_1)}{S(\beta'-\beta_2)} \right].
\end{aligned}$$

Для функции А возникает выражение

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha_1}' K_1' \gamma_5 \gamma_{\perp}^{\sigma} K_1' \gamma_{\beta_1}' (V \Delta \Delta)_{\alpha_1 \beta_1} &= \frac{1}{S} \gamma_5 q_{\perp}' \gamma_{\perp}^{\sigma} \gamma_{\perp}^{\sigma} \left\{ \frac{2(K_1'^2)^2}{\beta'-\beta_1} + \right. \\
& + 2 \left(1 + \frac{2\beta'+\beta_1-\beta_2}{\beta'-\beta_1} \right) K_1'^2 S d' + \frac{2\beta'(\beta'+\beta_1-2\beta_2)}{\beta'-\beta_1} (S d')^2 \Big\} + \frac{1}{S} \gamma_5 q_{\perp}' \gamma_{\perp}^{\sigma} \gamma_{\perp}^{\sigma} \\
& \cdot \left\{ \frac{2(K_1'^2)^2}{\beta'-\beta_2} + \frac{2(2\beta'+\beta_2-\beta_1)}{\beta'-\beta_2} K_1'^2 S d' + \frac{2\beta'(\beta'+\beta_2-2\beta_1)}{\beta'-\beta_2} (S d')^2 \right\}. \quad (95b)
\end{aligned}$$

Для функции В, аналогично:

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha_1}' K_1' \gamma_5 q' K_1' \gamma_{\beta_1}' \cdot \frac{2}{S \beta'} K_1'^{\sigma} (V \Delta \Delta)_{\alpha_1 \beta_1} &= \frac{1}{S} \gamma_5 q_{\perp}' \gamma_{\perp}^{\sigma} \gamma_{\perp}^{\sigma} \left\{ \frac{2(K_1'^2)^2}{\beta'(\beta'+\beta_1)(\beta'+\beta_2)} \right. \\
& \cdot \left[\beta'(2\beta_2-\beta_1) - \beta_2^2 \right] + S d' \cdot K_1'^2 \left[\frac{2\beta_2(\beta'+\beta_1-2\beta_2)}{(\beta'-\beta_1)(\beta'-\beta_2)} + \frac{2\beta'(\beta'+\beta_2-2\beta_1)}{(\beta'-\beta_1)(\beta'-\beta_2)} \right] \Big\} + \\
& + \frac{1}{S} \gamma_5 q_{\perp}' \gamma_{\perp}^{\sigma} \gamma_{\perp}^{\sigma} \left\{ \frac{(K_1'^2)^2}{\beta'(\beta'+\beta_1)(\beta'+\beta_2)} \left[\beta'(2\beta_1-\beta_2) - \beta_1^2 \right] + S d' \cdot K_1'^2 (\beta'+\beta_1)^{-1} (\beta'+\beta_2)^{-1} \right. \\
& \cdot \left. \left[\beta_1(\beta'+\beta_2-2\beta_1) + \beta'(\beta'+\beta_1-2\beta_2) \right] \right\}. \quad (96b)
\end{aligned}$$

Эволюция токовых вставок $d_{\sigma\delta}^{(1)} = \frac{g}{S} \gamma_5 q_{\perp}' \gamma_{\perp}^{\sigma} \gamma_{\perp}^{\delta}$, $d_{\sigma\delta}^{(2)} = \frac{g}{S} \gamma_5 q_{\perp}' \gamma_{\perp}^{\sigma} \gamma_{\perp}^{\delta}$ описывается диаграммами



Рис.13

Можно проверить, что вклады в переход $3 \rightarrow 2$ от вставки $d^{(1)}$ в диаграмме (рис.13а) и $d^{(2)}$ в (рис.13б) компенсируются. Вклады от вставки $d^{(2)}$ в (рис.13а) и $d^{(1)}$ в (рис.13б) соответственно равны:

$$\begin{aligned}
D_{\sigma}^{(2)}(\tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_1, \frac{g^2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}) &= C_F \int d^4 k_1 \int \frac{d^4 k_2 g^3(k_2)}{i\pi^2 \cdot 16\pi^2} \frac{\delta(\beta_1-\tilde{\beta}_1) \delta(\beta_2-\tilde{\beta}_2)}{K_2^2 (K_2-K_1)^2} \not{p} \not{T}_2 \left\{ \frac{2m}{S} \right. \\
& \cdot \left. \gamma_5 q_{\perp}' \gamma_{\sigma}^{\perp} + \frac{2\beta_2}{S} \gamma_5 \gamma_{\sigma}^{\perp} \hat{q}' \hat{p}' - \frac{2\beta_2}{S(\beta_1+\beta_2)} \gamma_5 \hat{q}' \gamma_{\sigma}^{\perp} (K_1-K_2)_{\perp} \right\}, \quad (98a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\sigma}^{(1)}(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \frac{g^2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}) &= C_F \int d^4 k_1 \int \frac{d^4 k_2 g^3(k_2)}{i\pi^2 \cdot 16\pi^2} \frac{\delta(\beta_1-\tilde{\beta}_1) \delta(\beta_2-\tilde{\beta}_2)}{K_2^2 (K_2-K_1)^2} \not{p} \not{T}_2 \left\{ \frac{2m}{S} \right. \\
& \cdot \left. \gamma_5 \hat{q}' \gamma_{\sigma}^{\perp} + \frac{2\beta_2}{S} \gamma_5 \gamma_{\sigma}^{\perp} \hat{p}' \hat{q}' - \frac{2\beta_2}{S(\beta_1+\beta_2)} \gamma_5 \hat{q}' (K_1-K_2)_{\perp} \gamma_{\sigma}^{\perp} \right\}. \quad (98b)
\end{aligned}$$

Здесь появляются новые по сравнению с $a \div d$ токовые структуры. Для суммы же левых частей, отвечающей функции $\mathcal{D}(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)$ эти структуры исчезают - в правой части появляются только функции А, В, С.

Напомним, что именно комбинация $D_{\sigma}(\beta_1, \beta_2) = D_{\sigma}^{(1)}(\beta_1, \beta_2) + D_{\sigma}^{(2)}(\beta_2, \beta_1)$ отвечает зарядово-четному состоянию системы кварк-антикварк глюон в t -канале, переходящей затем в зарядово-четное состояние двух фотонов (см.рис.2).

Вставка $d^{(1)}$ в (рис.13в,г) дает, соответственно

$$\left(C_F - \frac{C_A}{2} \right) \int \frac{d^4 k_1}{i\pi^2} \frac{g^3(k_1)}{16\pi^2} \int d^4 k_1 d^4 k_2 \not{p} \not{T}_2 t \not{G}_{\sigma, d}(k_1, k_2) \frac{\delta(\beta_1-\tilde{\beta}_1) \delta(\beta_2-\tilde{\beta}_2)}{S K_1^2 (K_1-K_2)^2 (K_2+K_1)^2}$$

$$\cdot \left\{ \gamma_5 \gamma_\perp^M \gamma_\perp^\sigma q' k' \gamma_\perp^\rho (k-k) \gamma_\perp^\mu - \frac{2}{s(\beta_2-\beta')} \gamma_5 (k_2-k)_\perp \gamma_\perp^\sigma q' k' \gamma_\perp^\delta (k-k) q' \right\} =$$

$$= 2(C_F - \frac{C_V}{2}) \int dx \mathcal{D}_\sigma^{(1)}(x, \tilde{\beta}_2) \left[-\tilde{\beta}_1 \gamma_{III}^I(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_1+x-\tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_1-\tilde{\beta}_2) - \right. \quad (98в)$$

$$\left. - \frac{\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_1} \gamma_{III}^0(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_1+x-\tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_1-\tilde{\beta}_2) \right];$$

$$(C_F - \frac{C_V}{2}) \int \frac{d^4 k'}{i\pi^2} \frac{g^3(k')}{16\pi^2} \int d^4 k_1 d^4 k_2 \rho T_2 t^d \sigma^{d,d}(k_1, k_2) \frac{\delta(\beta-\tilde{\beta}_1) \delta(\beta_2-\tilde{\beta}_2)}{s k'^2 (k-k_1)^2 (k+k_2)^2}$$

$$\cdot \left\{ \gamma_\perp^M (k+k) \gamma_\perp^\delta k' \gamma_5 q' \gamma_\perp^\mu \gamma_\perp^\sigma - \frac{2}{s(\beta_1-\beta')} q' (k+k) \gamma_\perp^\delta k' \gamma_5 (k-k') \gamma_\perp^\sigma q' \right\} =$$

$$= -2(C_F - \frac{C_V}{2}) \int dx \mathcal{D}_\sigma^{(1)}(\tilde{\beta}_1, x) \frac{\tilde{\beta}_2+x-\tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_1-\tilde{\beta}_2} \gamma_{III}^0(\tilde{\beta}_2, x+\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_1). \quad (98г)$$

Вставка $d^{(2)}$ в (рис.13 в, г) дает, соответственно

$$-2(C_F - \frac{C_V}{2}) \int dx \mathcal{D}_\sigma^{(2)}(x, \tilde{\beta}_2) \frac{\tilde{\beta}_1+x-\tilde{\beta}_2}{\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_1} \gamma_{III}^0(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_1+x-\tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_1-\tilde{\beta}_2);$$

$$2(C_F - \frac{C_V}{2}) \int dx \mathcal{D}_\sigma^{(2)}(\tilde{\beta}_1, x) \left[-\tilde{\beta}_2 \gamma_{III}^I(\tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_2+x-\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_1) - \right. \quad (98д)$$

$$\left. - \frac{\tilde{\beta}_2}{\tilde{\beta}_1-\tilde{\beta}_2} \gamma_{III}^0(\tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_2+x-\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_1) \right].$$

Вклады вставок $d^{(1)}$ и $d^{(2)}$ от диаграмм (рис.13 г) имеют соответственно вид

$$2(C_F - \frac{C_V}{2}) \int dx \mathcal{D}_\sigma^{(1)}(x, x+\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_1) \frac{1}{x-\tilde{\beta}_1} \left[-\gamma_{III}^0(\tilde{\beta}_2+x) + 2\tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 \gamma_{III}^I \right], \quad (98е)$$

$$2(C_F - \frac{C_V}{2}) \int dx \mathcal{D}_\sigma^{(2)}(x, x+\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_1) \frac{1}{x-\tilde{\beta}_1} \left[-(x+\tilde{\beta}_2) \gamma_{III}^0 + 2\tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 \gamma_{III}^I \right], \quad (98ж)$$

где аргументы функций γ_{III}^K есть $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_1-x$. При вычислении вкладов в уравнение эволюции для вставки $d^{(1)}$ в (рис.13ж) возникает выражения

$$\frac{g}{s} \gamma_5 q' \gamma_\perp^\alpha \gamma_\perp^\sigma k' \gamma_\perp^\beta (V\Delta\Delta)_{\delta\alpha\beta} = \frac{2g}{s} \gamma_5 q' \gamma_\perp^\sigma \left\{ \frac{k_1'^2}{(\beta'-\beta_1)(\beta'-\beta_2)} \right.$$

$$\cdot \left[-\beta'^2 + \beta'(3\beta_2-\beta_1) - \beta_2(\beta_2-\beta_1) \right] - \frac{s\alpha'\beta'}{\beta'-\beta_1} \left[\beta'+\beta_1-2\beta_2 \right] \left. \right\},$$

$$\frac{g}{s} \gamma_\perp^\alpha k' \gamma_5 q' \gamma_\perp^\beta \gamma_\perp^\sigma (V\Delta\Delta)_{\delta\alpha\beta} = \frac{2g}{s} \gamma_5 \gamma_\perp^\sigma \left\{ \frac{k_1'^2 (\beta_1-\beta_2)(\beta'+\beta_2-\beta_1)}{(\beta'-\beta_1)(\beta'-\beta_2)} - \frac{s\alpha'\beta'(\beta'+\beta_2-2\beta_1)}{\beta'-\beta_2} \right\}$$

Что приводит к вкладу

$$\mathcal{D}_\sigma^{(1)}(\beta_1, \beta_2, \frac{g^2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}) = C_V \int \frac{d(-k_1'^2)}{(-k_1'^2)} \frac{g^2(k')}{16\pi^2} \int dx \mathcal{D}_\sigma^{(1)}(x, \beta_2) \left\{ (1 - \right.$$

$$\left. - \frac{(\beta_2-x)(2\beta_1-\beta_2)}{(\beta_1-x)(\beta_1-\beta_2)} \gamma_{III}^0(\beta_1, \beta_1-x, \beta_1-\beta_2) - \frac{\beta_1}{\beta_1-x} (\beta_1+x-2\beta_2) \gamma_{III}^I(\beta_1, \beta_1-x, \beta_1-\beta_2) \right\} +$$

$$+ C_V \int \frac{d(-k_1'^2)}{(-k_1'^2)} g^2(k') \int dx \mathcal{D}_\sigma^{(1)}(\beta_1, x) \left\{ - \frac{(\beta_1-x)(\beta_2+x-\beta_1)}{(\beta_2-x)(\beta_2-\beta_1)} \gamma_{III}^0(\beta_2, \right.$$

$$\left. \beta_2-\beta_1, \beta_2-x) - \frac{\beta_2(\beta_2+x-2\beta_1)}{\beta_2-x} \gamma_{III}^I(\beta_2, \beta_2-\beta_1, \beta_2-x) \right\}. \quad (98з)$$

Для вставки $d^{(2)}$ в (рис.13е, ж) получим, аналогично

$$\mathcal{D}_\sigma^{(2)}(\beta_1, \beta_2, \frac{g^2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}) = C_V \int \frac{d(-k_1'^2)}{(-k_1'^2)} \frac{g^2(k')}{16\pi^2} \int dx \left\{ \mathcal{D}_\sigma^{(2)}(x, \beta_2) \left[- \frac{(\beta_2-x)}{(\beta_1-x)} \right. \right.$$

$$\left. \cdot \frac{(\beta_1+x-\beta_2)}{\beta_1-\beta_2} \gamma_{III}^0(\beta_1, \beta_1-x, \beta_1-\beta_2) - \frac{\beta_1(\beta_1+x-2\beta_2)}{\beta_1-x} \gamma_{III}^I(\beta_1, \beta_1-x, \beta_1-\beta_2) \right] + \quad (98и)$$

$$+ D_{\sigma}^{(2)}(\beta_1, X) \left[\left(1 - \frac{(\beta_1 - X)(2\beta_2 - \beta_1)}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 - X)} \right) \gamma_{III}^0(\beta_2, \beta_2 - X, \beta_2 - \beta_1) - \right. \\ \left. - \frac{\beta_2(\beta_2 + X - 2\beta_1)}{\beta_2 - X} \gamma_{III}'(\beta_2, \beta_2 - X, \beta_2 - \beta_1) \right] \Bigg\}.$$

Заметим, что при сложении этих уравнений (с заменой во втором $\beta_1 \leftrightarrow \beta_2$) в левой и правой частях образуется функция $D_{\sigma}(\beta_1, \beta_2)$.

9. Вклад в уравнения эволюции, происходящий от учета перенормировок.

Выбор аксиальной калибровки векторного поля $A_{\mu} q^{\mu} = 0$, $q^2 = 0$, позволивший ограничиться системой 4-х функций $A + D$ для описания эволюции операторов твиста 2 и 3, обуславливает некоторые трудности учета зависимости блоков G , G^{δ} на рис.2 от параметра обрезания Λ . Эта зависимость происходит от наличия в блоках ультрафиолетово-расходящихся поддиаграмм, а также присутствием неперенормированных зарядов и масс g_0 , m_0 . В некалибровочных теориях, также как и в QED при выборе калибровки Фейнмана, в силу перенормируемости все такие расходимости могли быть выделены в виде произведения множителей $Z_j^{1/2}$ соответствующих внешним виртуальным частицам (Z_j - константа перенормировки функции Грина j -й частицы), зависимость которых от Λ известна.

В аксиальной калибровке константы перенормировок функций Грина фермиона и глюона являются матрицами действующими на спинорные и векторные индексы; набор расходящихся поддиаграмм иной; осложнения возникают для частиц не лежащих на массовой поверхности.*

* Процедура перенормировок в аксиальной и планарной калибровке обсуждалась ранее в работах [9,10], но в них не содержится ответа на интересующий нас вопрос.

Специфику аксиальной калибровки, где пропагатор глюона $k^{-2} \cdot \Delta_{\mu\nu}(k)$, $\Delta_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - (k_{\mu} q'_{\nu} + k_{\nu} q'_{\mu}) / (k q')$ на первый взгляд не содержит лишних степеней импульса, а в действительности может привести к возникновению расходимостей, продемонстрируем на интеграле $I \sim \ln \Lambda$:

$$I = \int \frac{d^4 k (k p)}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k^2 + i\epsilon)(k q')} = \frac{i\pi}{2p q'} \int \frac{d^2 k_{\perp}}{k_{\perp}^2} \int \frac{d\beta}{\beta} \gamma_{12}^L(\beta, \beta-1).$$

Отбрасывание $(k q')$ в знаменателе делает интеграл [сходящимся].

Сначала мы построим схему перенормировок в QED для аксиальной калибровки, а затем обсудим изменения её для случая QCD.

В дополнение к обычным расходящимся вершинной и собственно-энергетической диаграммам в QED с аксиальной калибровкой векторного поля расходящимися являются вклады в амплитуды комптоновского рассеяния и рассеяния фермиона на фермионе в g^4 порядке теории возмущений (см. рис.14b-g). Для последней, однако, ультрафиолетовые расходимости от двух диаграмм, отличающихся перестановкой внутренних линий компенсируются. (В QCD это не так). В случае, когда все внешние частицы реальны, в силу калибровочной инвариантности, происходит сокращение расходящихся вкладов в данном порядке т.в. и для комптоновской диаграммы, но полного сокращения нет, если внешние частицы виртуальны.

Ограничимся рассмотрением однопетлевых диаграмм, что достаточно для восстановления уравнений в ГШ с помощью ренорм-группы.

Рассмотрим функцию Грина фермиона $G(k)$:

$$G^{-1}(k) = \hat{k} - m - \hat{\Sigma}(k). \quad (99)$$

Здесь собственно-энергетический оператор $\hat{\Sigma}$ имеет вид:

$$\hat{\Sigma}(k) = \frac{-ig_0^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{k'^2 (k-k')^2 - m_0^2} \gamma^{\mu} (\hat{k} - \hat{k}' + m_0) \gamma^{\nu} \Delta_{\mu\nu}(k') = \frac{-ig_0^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{k'^2 ((k-k')^2 - m^2)}$$

$$\cdot \left[-\hat{k} + 4m_0 - \frac{1}{k' q'} (\hat{k}' (\hat{k} - \hat{k}' + m_0) \hat{q}' + \hat{q}' (\hat{k} - \hat{k}' + m_0) \hat{k}') \right].$$

Последний член в скобках содержит квадратичную расходимость, которая является фиктивной - исчезает если интеграл по $(k'q')$ понимать в смысле главного значения. Действительно, представляя \hat{k}' в числителе в виде $(\hat{k}-m) - (\hat{k}-\hat{k}'-m)$ мы можем квадратично-расходящиеся члены после сокращения на $(k-k')^2 - m^2$ выделить в форме интеграла $\int d^4k' k'^{-2} (k'q')^{-1}$, который равен нулю в смысле главного значения. В результате

$$\hat{\Sigma}(k) = -\Sigma_1 \cdot \hat{k} + 4m_0 \Sigma_1 + (\hat{k}-m_0) \hat{R}(k) \hat{q}' + \hat{q}' \hat{R}(k) (\hat{k}-m_0),$$

где

$$\Sigma_1 = \frac{-ig^2}{16\pi^2} \int \frac{d^4k}{k^2(k-k')^2} = l, \quad \Sigma_2(\beta) = \frac{-ig^2}{16\pi^4} \int \frac{d^4k (kq')}{k'^2(k-k')^2(k'q')} =$$

$$= l \int \frac{d\beta'}{\beta'} y_{111}^0(\beta', \beta-\beta), \quad \Sigma_3 = \Sigma_1 - \Sigma_2, \quad l = \frac{g^2}{16\pi^2} l_m \frac{\Lambda^2}{k^2}, \quad \hat{R}(k) = \frac{\hat{k} \Sigma_3 - m_0 \Sigma_2}{kq'}$$

В формуле (100) интегралы вычислены с логарифмической точностью; кроме того, в $\hat{R}(k)$ опущено слагаемое пропорциональное \hat{q}' , выпадающее после подстановки в (100).

С помощью (100) и (99) мы можем в пределах используемого приближения переписать $G(k)$ в виде

$$G(k) = (1-\Sigma_1) \hat{U}_1(k) \frac{1}{\hat{k}-m_c} \hat{U}_2^{-1}(k), \quad (101)$$

где

$$\hat{U}_1(k) = 1 + \hat{R}(k) \hat{q}' = 1 + 2\Sigma_3 - \hat{q}' \left(\hat{k} + \frac{2m}{kq'} \Sigma_2 \right);$$

$$\hat{U}_2(k) = 1 - \hat{q}' \hat{R}(k) = 1 - 2\Sigma_3 + \left(\hat{k} + \frac{2m}{kq'} \Sigma_2 \right) \hat{q}'.$$

Мы видим, что полученный фермионный пропагатор отличается от затравочного $(\hat{k}-m_0)^{-1}$ не только числовым множителем $(1-\Sigma_1)$ и перенормировкой массы (последняя не зависит от калибровки), но еще и умножением на матрицы \hat{U}_2 , \hat{U}_1^{-1} действующие на спинорные индексы.

Вычислим теперь поправку к векторной вершине $\delta\Gamma_\mu$ (см. рис 148):

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_\mu &= -\frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int d^4k' \frac{\delta^\lambda(k+k_2+m) \delta_\mu(k+k_1+m) \delta^\sigma}{k^2 [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_1)^2 - m^2]} \left(g_{\lambda\sigma} - \frac{1}{(kq')} (k_\lambda q'_\sigma + k_\sigma q'_\lambda) \right) = \\ &= \Sigma_1 \delta_\mu - \delta_\mu \hat{R}(k_1) \hat{q}' - \hat{q}' \hat{R}(k_2) \delta_\mu + (k_2-m) \hat{Q}_\mu(k_2, k_1) \hat{q}' + \hat{q}' \hat{Q}_\mu(k_2, k_1) (\hat{k}-m), \\ \hat{Q}_\mu(k_2, k_1) &= \frac{-ig^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{(\hat{k}+\hat{k}_2+m) \delta_\mu (\hat{k}+\hat{k}_1+m)}{k^2 [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_1)^2 - m^2] (kq')} = \\ &= -l \int \frac{d\beta}{\beta} y_{111}^L(\beta, \beta+\beta_1, \beta+\beta_2) \frac{2}{\Sigma_2} \delta_\mu^+ [(\beta+\beta_2) \hat{p} \hat{q}' + (\beta+\beta_1) \hat{q}' \hat{p}]. \end{aligned} \quad (102)$$

Продольная часть в последнем выражении для \hat{Q}_μ отброшена, т.к. соответствующие члены содержат либо \hat{q}' , либо q'_μ и выпадают после подстановки в $\delta\Gamma_\mu$ и умножения на аксиальный пропагатор глюона.

С учетом (102) получаем для векторной вершины выражение

$$\Gamma_\mu = \delta_\mu + \delta\Gamma_\mu = (1+\Sigma_1) U_2(k_2) \Gamma_\mu^{(c)} U_1^{-1}(k_1); \quad (103)$$

$$\Gamma_\mu^{(c)}(k_2, k_1) = \delta_\mu + \hat{q}' \hat{Q}_\mu(k_2, k_1) (\hat{k}-m) + (\hat{k}_2-m) \hat{Q}_\mu(k_2, k_1) \hat{q}'.$$

Из формул (101) и (103) следует, что и перенормировочная константа $(1-\Sigma_1)$, и матричные множители U_1 , U_2 сокращаются во всех внутренних частях графика. Таким образом, мы можем заменить фермионный пропагатор $G(k)$ перенормированным $(\hat{k}-m_c)^{-1}$, а вершину Γ_μ - перенормированной вершиной $\Gamma_\mu^{(c)}$, которая, однако, пока еще содержит расходимости, как видно из (103). Нужно также иметь в виду, что на каждой внешней фермионной линии остается лишний множитель $(1-\Sigma_1)^{1/2} U_1$ (для выходящих) или $(1-\Sigma_1)^{1/2} U_2^{-1}$ (для входящих линий). В случае реального фермиона этот множитель перенормирует волновую функцию, уничтожая зависимость от Λ , поэтому при дифференцировании по Λ

реальные концы можно не принимать в рассмотрение. Что же касается виртуальных концов, то с них перенормировочные множители переходят на ту вершину Γ_X , к которой эти концы присоединены, и перенормируют ее следующим образом:

$$\Gamma_X \rightarrow \Gamma_X^{(c)} = (1 - \Sigma_1) U_2^{-1} \Gamma_X U_1. \quad (104)$$

Подставляя в (104) в качестве Γ_X токовые вставки $a^\sigma = \gamma_5 \gamma_\sigma^\perp$,

$$b_\sigma = \frac{2}{5\beta} \gamma_5 \hat{q}' k_1^\sigma, \quad c_\sigma = \frac{m_0}{5} \gamma_5 \hat{q}' \gamma_\sigma^\perp, \quad d_\sigma^{(1)} = \frac{g_0}{5} \gamma_5 \hat{q}' \gamma_\sigma^\perp \gamma_\sigma^\perp,$$

$$d_\sigma^{(2)} = \frac{g_0}{5} \gamma_5 \hat{q}' \gamma_\sigma^\perp \gamma_\sigma^\perp,$$

получим, пользуясь (101) а также тем, что в QED учет константы перенормировки волновой функции фотона приводит к замене неперенормированного заряда g_0 на перенормированный g , соответствующие вклады в уравнения эволюции:

$$A_\sigma(\beta, l) = -l A_\sigma + 2l \left(2 - 4 \int_0^\beta \frac{dx}{\beta-x} \right) C_\sigma + 4l \left(1 - \int_0^\beta \frac{dx}{\beta-x} \right) B_\sigma, \quad (95b)$$

$$B_\sigma(\beta, l) = l \left(3 - 4 \int_0^\beta \frac{dx}{\beta-x} \right) B_\sigma, \quad (96b)$$

$$C_\sigma(\beta, l) = -l \int_0^\beta \frac{dx}{\beta-x} C_\sigma, \quad (97b)$$

$$D_\sigma(\beta_1, \beta_2; l) = l D_\sigma(\beta_1, \beta_2) \left[3 - 2 \int_0^{\beta_1} \frac{dx}{\beta_1-x} - 2 \int_0^{\beta_2} \frac{dx}{\beta_2-x} \right]. \quad (98b)$$

Наконец, найдем поправку к комptonовской амплитуде (рис. 14b):

$$\delta K_{\mu\nu} = \frac{-ig^2}{16\pi^2} \int d^4k \frac{\gamma^\lambda (\hat{k} + \hat{k}_3 + m) \gamma_\mu (k + k_2 + m) \gamma_\nu (k + k_1 + m) \gamma^\sigma}{k^2 [(k+k_3)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_1)^2 - m^2]}. \quad (105)$$

$$\cdot \left(g_{\lambda\sigma} - \frac{1}{kq'} (k_\lambda q'_\sigma + k_\sigma q'_\lambda) \right).$$

Поскольку нас интересует лишь ультрафиолетово расходящаяся часть, мы можем выбросить член $g_{\lambda\sigma}$ в последней скобке, а возникающие из последнего члена множители \hat{k} заменить на $(\hat{k} + \hat{k}_3 - m)$ и $(\hat{k} + \hat{k}_1 - m)$; в результате получим:

$$\delta K_{\mu\nu} = -\hat{q}' \hat{Q}_\mu(k_3, k_2) \gamma_\nu - \gamma_\mu \hat{Q}_\nu(k_2, k_1) \hat{q}'. \quad (106)$$

Нетрудно видеть, что при рассмотрении сложного графика эта поправка как раз сокращает расходящиеся члены в (103) для всех внутренних вершин, т.е. таких, для которых оба фермионных хвоста являются внутренними линиями. Если же от вершины отходит внешний виртуальный конец (упирающийся в вершину Γ_X), то соответствующий член в формуле (103) остается нескомпенсированным. Для всех вершин, кроме A_σ , это обстоятельство несущественно ввиду наличия в этих вершинах множителя \hat{q}' , благодаря чему указанные члены не дают вклада ($q'^2 = 0$).

Именно поэтому проводимый здесь анализ перенормировок не был необходим при изучении величин, связанных с операторами гланта 2. Но в случае вершины Γ_A после сокращения множителя $(\hat{k} - m)$ в (103) с пропагатором фермиона (перечеркнутая линия на рис. 15а, б) фотонная линия подтягивается к двухчастичной вершине, которая, таким образом, приобретает трехчастичную добавку

$$\int d^4k_1 d^4k_2 N_\sigma^{(c)}(k, k') \left[\hat{q}' \hat{Q}^\sigma(k, k') \Gamma_A \delta(\beta - \beta_1) + \Gamma_A \hat{Q}^c(k, k') \hat{q}' \cdot \delta(\beta - \beta') \right],$$

где перенормированное ядро уже не зависит от Λ . Это приводит к вкладу в уравнение эволюции для A_σ :

$$A_\sigma(\beta, l) = \frac{2}{\beta} l \int dx D_\sigma(\beta, x) \left[1 + \frac{\beta}{x-\beta} l m \frac{\beta}{x} + 2 \left(\int_0^\beta \frac{dx}{\beta-x} - 1 \right) \right]. \quad (95г)$$

Для случая QCD полученные выше результаты переносятся: выражения (95в, 96в, 97б, 98к) входят с весом C_F ; (95г) с весом $(C_F - \frac{C_V}{2})$. Кроме того не происходит полной компенсации констант перенормировки заряда и волновой функции глюона:

$$D_\sigma(\beta_1, \beta_2; l) = l \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} n_f - \frac{11}{3} C_V \right) - \frac{1}{4} \left[\frac{4}{3} n_f + 4 C_V \left(-\frac{11}{6} + 2 \int_0^{\beta_1 - \beta_2} \frac{dx}{x} \right) \right] \right\} D_\sigma. \quad (98л)$$

Второе слагаемое в (98л) происходит из вида функции Грина глюона в аксиальной калибровке:

$$D_{g\sigma}^{ab}(k) = \frac{\delta^{ab}}{k^2} (1+\alpha)^{-1} \left[\Delta_{g\sigma}(k) - \frac{b \cdot k^2}{(kq)^2} q'_\sigma q'_\alpha \right],$$

$$\alpha = l \cdot \int_0^1 dx \left[\frac{4}{3} n_f + 4 C_V \frac{(1-x+x^2)^2}{x(1-x)} \right], \quad (107)$$

$$b = l \cdot C_V \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} (2-5x+11x^2-12x^3+6x^4).$$

Этим, однако, не исчерпываются все вклады в уравнение эволюции для функции A_σ , поскольку наряду с комptonовской амплитудой и амплитудой рассеяния кварка на кварке в QCD расходящимися являются радиационные поправки к неупругим амплитудам $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}g$, $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}g$ и т.д. (рис.16).

Вклад этот можно восстановить используя уравнения движения (53) он имеет вид

$$A_\sigma(\beta, l) = \frac{1}{\beta} C_V \int dz D_\sigma(\beta, z) \left(2 \int_0^\beta \frac{dx}{x} - 1 \right). \quad (95д)$$

10. Окончательный вид уравнений эволюции для несинглетного канала.

Принимая во внимание оба типа вкладов в уравнения эволюции для функций $A_\sigma \div D_\sigma$: от "расшифровки блока" в однопетлевом приближении (95а - 98а) и от учета эффекта перенормировок (95б - 98к), уравнения эволюции получатся дифференцированием обеих частей соответствующих уравнений по l :

$$\partial A(\beta, l) / \partial l = \partial A(\beta, \bar{l}) / \partial \bar{l} \equiv \dot{A}(\beta),$$

$$\bar{l} = \frac{1}{l} \ln(1 + b \cdot l), \quad b = \frac{4}{3} n_f - \frac{22}{3} C_V.$$

Окончательно, система уравнений эволюции для функций $A - D$ для несинглетного канала имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{A}(\beta) = & C_F \int dx \gamma_{11}^0(\beta, \beta-x) \left\{ \frac{2\beta}{x} A(x) + \frac{2(2\beta^2+x^2-\beta x)}{x(x-\beta)} B(x) - \frac{4(x+\beta)}{x(x-\beta)} C(x) \right\} + \\ & + 2(C_F - \frac{C_V}{2}) \int d\beta_1 d\beta_2 D(\beta_1, \beta_2) \left\{ \gamma_{111}^1(\beta, \beta+\beta_1-\beta_2, \beta-\beta_2) + \gamma_{211}^1(\beta, \beta+\beta_1-\beta_2, \beta-\beta_2) + \right. \\ & \left. \frac{1}{\beta-\beta_1} [2\beta \gamma_{21}^1(\beta, \beta-\beta_1) + (\beta-\beta_2) \gamma_{211}^1(\beta, \beta+\beta_2-\beta_1, \beta-\beta_1)] \right\} + C_V \int d\beta_1 d\beta_2 D(\beta_1, \beta_2) \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{\beta-\beta_1} \gamma_{211}^0(\beta, \beta-\beta_1, \beta-\beta_2) - \left(1 + \frac{2\beta+\beta_1-\beta_2}{\beta-\beta_1} \right) \gamma_{211}^1(\beta, \beta-\beta_1, \beta-\beta_2) + \frac{\beta(\beta+\beta_1-2\beta_2)}{\beta-\beta_1} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \gamma_{211}^2(\beta, \beta-\beta_1, \beta-\beta_2) \right\} + C_F \left\{ -A(\beta) - 4 \left(\int_0^\beta \frac{dx}{x} - 1 \right) B(\beta) - \frac{4}{\beta} \left(2 \int_0^\beta \frac{dx}{x} - 1 \right) C(\beta) \right\} \\ & + (C_F - \frac{C_V}{2}) \cdot \frac{2}{\beta} \int d\beta_2 D(\beta, \beta_2) \left[2 \int_0^\beta \frac{dx}{x} - 1 + \frac{\beta}{\beta_2 - \beta} \ln \frac{\beta}{\beta_2} \right] + \\ & + C_V \cdot \frac{1}{\beta} \int dz D(\beta, z) \left(-1 + 2 \int_0^\beta \frac{dx}{x} \right); \quad (95) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{B}(\beta) = & C_F \int dx \gamma_{II}^0(\beta, \beta-x) \left\{ \frac{2\beta}{x} A(x) + \frac{2(2\beta^2+x^2-\beta x)}{x(x-\beta)} B(x) - \frac{4}{x} C(x) \right\} + \\ & + \frac{2}{\beta} (C_F - \frac{C_V}{2}) \int d\beta_1 d\beta_2 \mathcal{D}(\beta_1, \beta_2) \left\{ \gamma_{2II}^0(\beta, \beta+\beta_1-\beta_2, \beta-\beta_2) + \frac{2\beta-\beta_2}{\beta-\beta_2} \gamma_{III}^0(\beta, \beta+ \right. \\ & + \beta_1-\beta_2, \beta-\beta_2) + \frac{2\beta}{\beta-\beta_1} \gamma_{2I}^0(\beta, \beta-\beta_1) + \frac{\beta-\beta_2}{\beta-\beta_1} \gamma_{2II}^0(\beta, \beta+\beta_2-\beta_1, \beta-\beta_1) \left. \right\} + C_V \int d\beta_1 d\beta_2 \\ & \mathcal{D}(\beta_1, \beta_2) \left\{ \frac{\beta(2\beta_2-\beta_1)-\beta_2^2}{\beta(\beta-\beta_1)(\beta-\beta_2)} \gamma_{2II}^0(\beta, \beta-\beta_1, \beta-\beta_2) - \frac{\beta^2+2\beta(\beta_2-\beta_1)+\beta_2(\beta_1-2\beta_2)}{(\beta-\beta_1)(\beta-\beta_2)} \gamma_{2II}'(\beta, \right. \\ & \left. \beta-\beta_1, \beta-\beta_2) \right\} + C_F (3-4 \int_0^\beta \frac{dx}{x}) \cdot B(\beta); \end{aligned} \quad (96)$$

$$\dot{C}(\beta) = 4C_F \cdot \beta \int \frac{dx}{x-\beta} \gamma_{II}^0(\beta, \beta-x) C(x) - 4C_F C(\beta) \int_0^\beta \frac{dx}{x}; \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{D}}(\beta_1, \beta_2) = & 2C_F \beta_2 \cdot \gamma_{II}^0(\beta_2, \beta_2-\beta_1) [A(\beta_1) - B(\beta_1) - \frac{2}{\beta_2} C(\beta_1)] + C_F (3-2 \int_0^{\beta_1} \frac{dx}{x} - \\ & - 2 \int_0^{\beta_2} \frac{dx}{x}) \mathcal{D}(\beta_1, \beta_2) - 2C_V \int_0^{\beta_1-\beta_2} \frac{dx}{x} \cdot \mathcal{D}(\beta_1, \beta_2) + 2(C_F - \frac{C_V}{2}) \left\{ \int dx \mathcal{D}(x, \beta_2) [-\beta_1 \gamma_{III}'(\beta_1, \right. \\ & \left. \beta_1+x-\beta_2, \beta_1-\beta_2) - \frac{\beta_1}{\beta_2-\beta_1} \gamma_{III}^0(\beta_1, \beta_1+x-\beta_2, \beta_1-\beta_2)] - \int dx \mathcal{D}(\beta_1, x) \frac{\beta_2+x-\beta_1}{\beta_1-\beta_2} \cdot \right. \\ & \cdot \gamma_{III}^0(\beta_2, \beta_2+x-\beta_1, \beta_2-\beta_1) + \int \frac{dx}{x-\beta_1} \mathcal{D}(x, x+\beta_2-\beta_1) [-(x+\beta_2) \gamma_{III}^0(\beta_1, \beta_2, \beta_1-x) + \\ & + 2\beta_1 \beta_2 \gamma_{III}'(\beta_1, \beta_2, \beta_1-x)] \left. \right\} + C_V \int dx \mathcal{D}(x, \beta_2) \left[(1 - \frac{(\beta_2-x)(2\beta_1-\beta_2)}{(\beta_1-x)(\beta_1-\beta_2)}) \gamma_{III}^0(\beta_1, \beta_1-x, \right. \\ & \left. \beta_1-\beta_2) - \frac{\beta_1(\beta_1+x-2\beta_2)}{\beta_1-x} \gamma_{III}'(\beta_1, \beta_1-x, \beta_1-\beta_2) \right] + \int dx \mathcal{D}(\beta_1, x) \left[- \frac{(\beta_1-x)(\beta_2+x-\beta_1)}{(\beta_2-x)(\beta_2-\beta_1)} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \gamma_{III}^0(\beta_2, \beta_2-\beta_1, \beta_2-x) - \frac{\beta_2(\beta_2+x-2\beta_1)}{\beta_2-x} \gamma_{III}'(\beta_2, \beta_2-\beta_1, \beta_2-x) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (98)$$

где мы опустили индекс σ и зависимость от β в обозначениях $A + \mathcal{D}$. Несмотря на то, что уравнения движения использованы при построении системы уравнений эволюции (95 - 98), имеется дополнительный контроль правильности наших вычислений. Именно, комбинация функций A, B, \mathcal{D} :

$$S_\sigma \cdot E(\beta) = A_\sigma(\beta) - \frac{d}{d\beta} (\beta B_\sigma(\beta)) - \int \frac{dx}{\beta-x} (\mathcal{D}_\sigma(x, \beta) + \mathcal{D}_\sigma(\beta, x)) \quad (108)$$

Как было отмечено выше (88), должна удовлетворять уравнению эволюции несинглетного вклада в функцию, отвечающую оператору гамильтона 2:

$$\begin{aligned} \dot{E}(\beta) = & (3-4 \int_0^\beta \frac{dx}{x}) E(\beta) - 2 \int dx E(x) \left[\frac{\beta+x}{x-\beta} \gamma_{2I}^0(\beta, \beta-x) - \right. \\ & \left. - \frac{2\beta^2}{x-\beta} \gamma_{2I}'(\beta, \beta-x) \right]. \end{aligned} \quad (109)$$

Непосредственной подстановкой (95 - 98) в (108) можно убедиться в справедливости (109).

Другой проверкой является сокращение инфракрасных расходимостей (типа $\int dx/x$) при вычислении моментов от функций $A_\sigma - \mathcal{D}_\sigma$.

Систему уравнений эволюции нам решить в общем виде не удалось, однако она может быть проанализирована на языке моментов:

$$A_\sigma(\beta) = S_\sigma A(\beta), \quad B_\sigma(\beta) = S_\sigma B(\beta), \quad C_\sigma(\beta) = S_\sigma C(\beta),$$

$$\mathcal{D}_\sigma(\beta_1, \beta_2) = S_\sigma \mathcal{D}(\beta_1, \beta_2);$$

$$a_n, b_n, c_n = \int d\beta \cdot \beta^n A(\beta), B(\beta), C(\beta); \quad z_n^m = \int d\beta_1 d\beta_2 \beta_1^m \beta_2^n (A/\beta_2) \mathcal{D}(\beta_1, \beta_2).$$

Более естественной функцией вместо функции $\mathcal{D}(\beta_1, \beta_2)$ является

$$Y(\beta_1, \beta_2) = (\beta_1 - \beta_2) \mathcal{D}(\beta_1, \beta_2) \quad (111)$$

Это следует из вида операторов $R_{4,5}$ (18), где излучение глюона в вершинах, отвечающих вставкам $d^{(1,2)}$, ассоциируется с тензором напряженности глюонного поля. При вычислении моментов от функции \mathcal{D} возникает величина $\int d\beta_1 d\beta_2 \beta_1^k \beta_2^{n-k} (v_{1,2}) \mathcal{D}(\beta_1, \beta_2)$, так, что замкнутой системы дифференциальных уравнений не возникает. Замкнутая система из n дифференциальных уравнений для моментов возникает для разности моментов \mathcal{D} , отвечающей (11).

11. Синглетный канал.

Структурные функции $g_{1,2}$ для несинглетного канала могут быть выделены из разности дифференциальных сечений (I) глубоко-неупругого рассеяния на протоне и нейтроне. При описании же каждого из них необходим учет операторов, построенных из глюонных полей (см. (69) и далее в этом разделе). Можно построить "двух" и "трехглюонные" функции, аналоги E, A, B, D для несинглетного канала. Для построения матрицы аномальных размерностей операторов твиста 3 с учетом синглетного канала достаточно, как говорилось выше, ограничиться рассмотрением трехчастичных функций \mathcal{D} и \mathcal{H} (80, 83), и функции \mathcal{C} , исключив двухчастичные функции с помощью уравнений движения. Схематически система уравнений эволюции (см. рис. 8, 9) может быть записана в виде (функция \mathcal{C} опущена)

$$\mathcal{D}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \mathcal{D}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + \int d^3\beta' \delta(\frac{3}{T}\beta'_i) \{ \mathcal{K}_{\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}}(\beta_{123}, \beta'_{123}) \mathcal{H}(\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3) + \mathcal{K}_{\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}}(\beta_{123}, \beta'_{123}) \mathcal{D}(\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3) \}; \quad (112)$$

$$\mathcal{H}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \mathcal{H}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + \int d^3\beta' \delta(\frac{3}{T}\beta'_i) \{ \mathcal{K}_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}}(\beta_{123}, \beta'_{123}) \mathcal{H}(\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3) + \mathcal{K}_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}}(\beta_{123}, \beta'_{123}) \mathcal{D}(\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3) \};$$

где мы для симметричности записи ввели в обозначениях функций \mathcal{D}, \mathcal{H} третий аргумент: $\mathcal{D}(\beta_1, \beta_2) \equiv \mathcal{D}(\beta_1, -\beta_2, \beta_2 - \beta_1)$, $\mathcal{H}(\beta_1, \beta_2) \equiv \mathcal{H}(\beta_1, -\beta_2, \beta_2 - \beta_1)$. Первые слагаемые в правых частях (112) происходят от учета перенормировок (98к), (98л) для функции \mathcal{D} и

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = -2C_V \left[\int_0^{\beta_1} \frac{dx}{x} + \int_0^{\beta_2} \frac{dx}{x} + \int_0^{|\beta_1 - \beta_2|} \frac{dx}{x} \right] + \frac{11}{3}C_V - \frac{2}{3}n_f \quad (113)$$

для функции \mathcal{H} . Отметим, что при выборе базисных функций \mathcal{D}, \mathcal{C} и \mathcal{H} вклад в систему уравнений эволюции от перенормировок диагонален, т.е. не происходит их смешивания. Ядра $\mathcal{K}_{i \rightarrow j}$ являются обобщениями потенциалов Бродского-Ленажа для высших твистов, они имеют структуру (см. рис. 8, 9) [10]:

$$\mathcal{K}_{i \rightarrow j}(\beta_{123}, \beta'_{123}) = \delta(\beta_1 - \beta'_1) A_{i \rightarrow j}(\beta_2, \beta_3; \beta'_2, \beta'_3) + \delta(\beta_2 - \beta'_2) A_{i \rightarrow j}(\beta_1, \beta_3; \beta'_1, \beta'_3) + \delta(\beta_3 - \beta'_3) A_{i \rightarrow j}(\beta_1, \beta_2; \beta'_1, \beta'_2) \quad (114)$$

Вся система уравнений (112) имеет вид уравнений Фаддеева для задачи трех тел с парным взаимодействием между телами. Величины A в (114) отвечают заштрихованным блокам на рис. 8, 9 и получаются после выделения множителя $\ell = g^2/16\pi^2 v_{1,2} \Lambda^2/m^2$ в соответствующих амплитудах.

Для вычисления ядер $\mathcal{K}_{i \rightarrow j}$ (114) удобным оказывается формализм спиральных амплитуд, который мы опишем.

12. Формализм спиральных амплитуд.

В этом разделе мы будем рассматривать безмассовые частицы. Уравнения эволюции для функции \mathcal{C} и вклад в переход $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, для которых неприменим формализм спиральных амплитуд, были получены выше (97а, 98а) "прямым счетом".

Рассмотрим сначала функцию Грина виртуального кварка. Представим ее числитель (ср. 609) в виде суммы

$$\frac{1}{\hat{K}} = \frac{\hat{K}}{K^2}, \quad \hat{K} = \frac{1}{\beta} \sum_{\lambda} [u_{\lambda}(K) \bar{u}_{\lambda}(K) - v_{\lambda}(K) \bar{v}_{\lambda}(K)] + \frac{K^2}{Kq_1} \hat{q}', \quad (115)$$

$$\tilde{K}^2 = 0, \quad \tilde{K} = \beta P + \frac{K^2}{2\rho q_1} q' + K_L = \beta P + K_L, \quad \tilde{K}^2 = 0$$

проектора на состояние реальных частиц и добавки пропорциональной \hat{q}' . Спиноры $u_{\lambda}(K)$ в (115) удобно выбрать нормированными следующим образом:

$$\gamma_5 u^{(\lambda)}(K) = -\lambda u^{(\lambda)}(K), \quad \bar{u}^{(\lambda)}(\tilde{K}) \gamma_m u^{(\lambda')}(\tilde{K}) = 2\tilde{K}_m \delta_{\lambda\lambda'} \approx 2\beta P_m \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (116)$$

$$\tilde{K}^2 = 0, \quad \tilde{K} u(\tilde{K}) = 0, \quad \bar{u}^{(\lambda)}(\tilde{K}) u^{(\lambda')}(\tilde{K}) = 0.$$

Введем постоянный спинор $U(p)$ со свойствами

$$\bar{U}^{(\lambda)}(p) \gamma_m U^{(\lambda')}(p) = 2P_m \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \gamma_5 U^{(\lambda)}(p) = -\lambda U^{(\lambda)}(p), \quad \hat{P} U^{(\lambda)}(p) = 0. \quad (117)$$

Спинор реального кварка с импульсом K в состоянии со спиральностью λ , удовлетворяющий (II6), выразится через $u(p)$ в виде

$$u^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{2pq'} \hat{k} \hat{q}' u^{(\lambda)}(p), \quad k^2 = 0 \quad (II8)$$

Аналогично для глюонного пропагатора, представим величину $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ в виде проектора на состояние реальных глюонов и продольной ($\sim q'_\alpha q'_\beta$) добавки (ср.57):

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{\beta^2} \sum_{\lambda} e_{\alpha}^{(\lambda)}(k) e_{\beta}^{(\lambda)}(k)^* + \frac{k^2}{(q'k)^2} q'_\alpha q'_\beta, \quad (II9)$$

где вектора поляризации $e_{\alpha}^{(\lambda)}(k)$ реального глюона импульса K в состоянии поляризации со спиральностью λ можно выразить через постоянный вектор $e_{\alpha}^{(\lambda)}(p)$:

$$e_{\alpha}^{(\lambda)}(k) = \beta e_{\alpha}^{(\lambda)}(p) - \frac{(k_{\alpha} e^{(\lambda)}(p))}{pq'} q'_{\alpha}, \quad (I20)$$

со свойствами

$$pe(p) = q'e(p) = 0, \quad e^{(\lambda)}(p)^* = -e^{(-\lambda)}(p), \quad e^{(\lambda)}(p) e^{(\lambda')}^*(p) = -\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (I21)$$

Из (II9)-(I21) находим свойства вектора $e_{\alpha}^{(\lambda)}(k)$:

$$e^{(\lambda_1)}(k_1) e^{(\lambda_2)*}(k_2) = -\beta_1 \beta_2 \delta_{\lambda_1 \lambda_2}, \quad \frac{i}{pq'} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k^{\alpha} q'^{\beta} e^{(\lambda)}(k) = \beta \cdot \lambda \cdot e_{\alpha}^{(\lambda)}(k), \quad (I22)$$

$$e^{(\lambda)}(k)^* = e^{(-\lambda)}(-k). \quad (I23)$$

В силу свойства преобразования вектора $e^{(\lambda)}(k)$ при сопряжении (I23) при описании вершины с излучением или поглощением глюона можно одновременно менять направление импульса и спиральности глюона, считая его поглощенным, если до этого изменения он излучался.

Из свойств спинора $u^{(\lambda)}(k)$ (II6-II8), а также соотношения

$$\hat{q}' \gamma_{\mu}^{\perp} \gamma_{\nu}^{\perp} = \hat{q}' (g_{\mu\nu}^{\perp} + i \gamma_5 \Sigma_{\mu\nu}^{\perp}), \quad \Sigma_{\alpha\beta}^{\perp} = \frac{1}{pq'} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\gamma} q'^{\delta}, \quad (I24)$$

можно получить полезные соотношения для билинейных комбинаций спиноров

$$\bar{u}^{(\lambda_1)}(k_1) \hat{q}' u^{(\lambda_2)}(k_2) = \beta_1 \beta_2 \delta_{\lambda_1 \lambda_2}; \quad \bar{u}^{(\lambda_1)}(k_1) \hat{q}' \gamma_{\mu}^{\perp} \gamma_{\nu}^{\perp} u^{(\lambda_2)}(k_2) = S \delta_{\lambda_1 \lambda_2} (g_{\mu\nu}^{\perp} - (I25)$$

$$-i \lambda \Sigma_{\mu\nu}^{\perp}); \quad \bar{u}^{(\lambda_1)}(k_1) \gamma_{\mu}^{\perp} u^{(\lambda_2)}(k_2) = \beta_1 (k_{2\mu} - i \lambda \Sigma_{\mu\nu}^{\perp} k_{2\nu}) + \beta_2 (k_{1\mu} + i \lambda \Sigma_{\mu\nu}^{\perp} k_{1\nu}).$$

Пользуясь (I25) и (I22), можно построить элементарные 3-вершины (см.рис. I7а,б) для случая, когда все частицы реальны:

$$\bar{u}^{(\lambda_1)}(k_1) \hat{e}^{(\lambda_3)}(k_3) u^{(\lambda_2)}(k_2) = 2(e^{(\lambda_3)}(p) \mathcal{K}) (\delta_{\lambda_1 \lambda_3} \beta_1 + \delta_{\lambda_2 \lambda_3} \beta_2), \quad (I26)$$

$$e_{\alpha}^{(\lambda_1)}(k_1) e_{\beta}^{(\lambda_2)}(k_2) e_{\gamma}^{(\lambda_3)}(k_3) [-g^{\alpha\beta} (k_1+k_2)^{\gamma} + g^{\beta\gamma} (k_2+k_3)^{\alpha} + g^{\gamma\alpha} (k_1+k_3)^{\beta}] =$$

$$= 2\beta_1^2 \delta_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} (e^{(\lambda_2)}(p) \mathcal{K}) + 2\beta_2^2 \delta_{\lambda_1 \lambda_2 -\lambda_3} (e^{(\lambda_3)}(p) \mathcal{K}) + 2\beta_3^2 \delta_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} (e^{(\lambda_1)}(p) \mathcal{K}),$$

где

$$\delta_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\lambda_2 \lambda_3}, \quad \mathcal{K} = \beta_1 k_{2\perp} - \beta_2 k_{1\perp} = \beta_3 k_{2\perp} - \beta_2 k_{3\perp} = \beta_3 k_{1\perp} - \beta_1 k_{3\perp}, \quad K_1 = K_2 + K_3 \quad (I27)$$

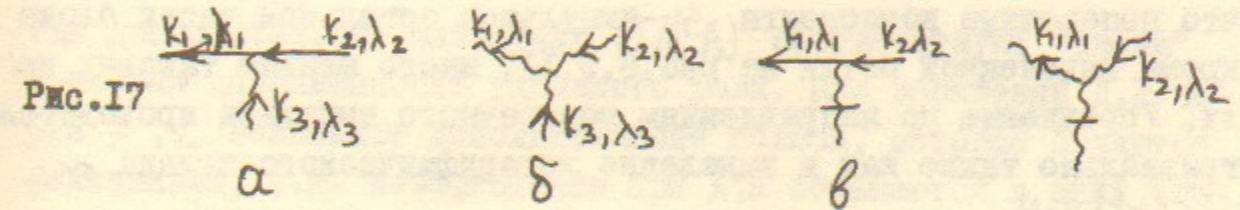


Рис. I7

Формулы (I26, I27) являются обобщением известных результатов [6,8] для 3-вершины в случае $K_1^2 \sim K_2^2$. В случае, когда в пропагаторе глюона в $\bar{q}q\bar{q}$ вершине используется продольная компонента (рис. I7в) возникает выражение

$$\bar{u}^{(\lambda_1)}(k_1) \frac{2}{S} \hat{q}' u^{(\lambda_2)}(k_2) = 2\beta_1 \beta_2 \quad (I28)$$

и для $3q$ -вершины (рис. I7г)

$$e_{\alpha}^{(\lambda_1)}(k_1) e_{\beta}^{(\lambda_2)}(k_2) \frac{2}{S} q'_{\gamma} \delta_{\alpha\beta} (-k_1 - k_2)_{\gamma} = \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2) \delta_{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (I29)$$

В случае, когда в двух или всех трех глюонных пропагаторах берутся продольные компоненты, вершина обращается в нуль.

Изложенный формализм можно сформулировать в виде правил:

I. Каждой внутренней линии диаграммы, отвечающей виртуальной частице с импульсом K_i , сопоставляется множитель $\beta_i^{-1} (K_i^2)^{-1} (\gamma_{\beta_i} - 1 + i0)^{-1}$ для фермионов и $\beta_i^{-2} (K_i^2)^{-1} (\gamma_{\beta_i} - 1 + i0)^{-1}$ для глюонов. Стрелка показывает направление импульса, знак β -

любой,

2. Линии приписывается спиральность \pm . Вдоль фермионной линии спиральность сохраняется. Спиральность глюонной линии можно менять на обратную одновременно с направлением стрелки.

3. Учесть возможность, когда удерживаются продольные компоненты пропагаторов.

4. Вершинам сопоставляется выражение согласно (I26-I29).

5. Замкнутой петле сопоставляется $\int dy (2\pi i)^{-1} d\beta g^2 (16\pi^2)^{-1} d^2 k_L (-k_L^2)^{-1}$. Импульсы линиям приписываются согласно закону сохранения 4-импульсов в каждой вершине.

6. Производится суммирование по различным конфигурациям спиральностей линий. Приписывается соответствующий цветовой множитель.

Пункты 1,4,5 основаны на замечании, что в ГЛП поперечные компоненты импульсов петель упорядочены, т.е. использовано, что поперечные компоненты 4-импульсов остальной части блока кроме выделенной петли на рис.8,9,II, много меньше таковых петли. Усреднение по направлениям поперечного импульса проводится тривиально также как и выделение логарифмического вклада $\sim \int d(-k_L^2)/(-k_L^2)$.

Принимая во внимание сказанное, вычисление величин $A_{i \rightarrow j}$, входящих в определение ядер $K_{i \rightarrow j}$, не представляет труда. Эти величины для различных спиральностей частиц, отвечающие бесцветному состоянию в t -канале, приведены в приложении.

Приведем, наконец, выражение для токовых вставок $d^{(1,2)}$, H в обкладках реальных частиц определенных спиральностей. С помощью (I25), (I20, I21) можно получить для вставок $d^{(1,2)}$ (см. рис. I8a, б):

$$\langle d^{(1)} \rangle \Rightarrow \frac{1}{5} \bar{u}^{(\lambda_1)}(k_1) \gamma_5 \hat{q} \gamma_3^\perp \gamma_\sigma^\perp u^{(\lambda_2)}(k_2) e_\rho^{(\lambda_3)}(k_3) = 2\beta_1 \beta_2 \beta_3 \lambda_1 \delta_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} e_\sigma^{(\lambda_3)}(p), \quad (I30)$$

$$\langle d^{(2)} \rangle \Rightarrow \frac{1}{5} \bar{u}^{(\lambda_1)}(k_1) \gamma_5 \hat{q} \gamma_\sigma^\perp \gamma_\rho^\perp u^{(\lambda_2)}(k_2) e_\rho^{(\lambda_3)}(k_3) = 2\beta_1 \beta_2 \beta_3 \lambda_1 \delta_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} e_\sigma^{(\lambda_3)}(p).$$

Для вставки H_σ имеем (см. рис. I8в)

$$e_\alpha^{(\lambda_1)}(p) e_\beta^{(\lambda_2)}(p) e_\gamma^{(\lambda_3)}(p) i [-\varepsilon_{\alpha 2}^\perp \delta_{\beta \gamma}^\perp + \varepsilon_{\sigma \rho}^\perp \delta_{\alpha \gamma}^\perp + \varepsilon_{\sigma \gamma}^\perp \delta_{\alpha \rho}^\perp] = 2\lambda_2 \delta_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} e_\sigma^{(\lambda_2)}(p) \quad (I31)$$

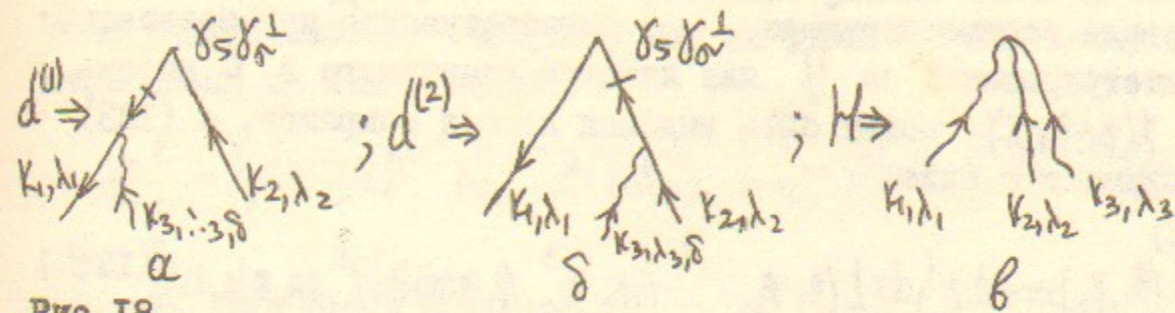


Рис. I8

13. Окончательный вид уравнений эволюции с учетом синглетного канала.

Естественными являются величины (см. определения $R_{4,5}$, $R_{6,7}$)

$$Z(\beta_1, \beta_2) = (\beta_1 - \beta_2) D(\beta_1, \beta_2), \quad L(\beta_1, \beta_2) = \beta_1 \beta_2 (\beta_1 - \beta_2) H(\beta_1, \beta_2), \quad (I32)$$

где дополнительные множители $\beta_i / (\beta_1 - \beta_2)$ соответствуют "своим" тензорам напряженности глюонного поля. При выражении D, H через Z, L возникают дополнительные полюса, которые являются фактивными, т.к. коэффициенты при D, H обращаются в этих точках в нуль. Например, для вклада диаграммы рис.8г, отвечающей переходу $D \rightarrow H$ имеем

$$\dot{Z}(\beta_1, \beta_2) = +n_f \int \frac{dx L(\beta_1 - \beta_2, x)}{x(\beta_1 - \beta_2 - x)} \left\{ \beta_1 \beta_2 \gamma_{III}^1(\beta_1, \beta_2, \beta_1 - x) - (\beta_2 + x) \gamma_{III}^0(\beta_1, \beta_2, \beta_2 + x) \right\} \quad (I33)$$

$$-2(2x + \beta_2 - \beta_1) \frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_1 - \beta_2)^2} \gamma_{III}^0(\beta_1, \beta_2) \left\{ \right\} \equiv +n_f \int \frac{dx L(\beta_1 - \beta_2, x)}{x(\beta_1 - \beta_2 - x)} f(\beta_1, \beta_2, x)$$

Заметим, что функция f обладает свойствами

$$f(\beta_1, \beta_2, x)|_{x=0} = 0, \quad f(\beta_1, \beta_2, x)|_{x=\beta_1 - \beta_2} = 0.$$

Составим вспомогательную функцию

$$\varphi = f(\beta_1, \beta_2, x) - \frac{x}{\beta_1 - \beta_2} f(\beta_1, \beta_2, \beta_1 - \beta_2) - \frac{\beta_1 - \beta_2 - x}{\beta_1 - \beta_2} f(\beta_1, \beta_2, 0)$$

для преобразования отдельных слагаемых в f (в сумме, конечно, $\varphi = f$) тогда, пользуясь явным видом γ_{III}^m :

$$\gamma_{III}^m(a, b, c) = \int_{-\infty}^{\infty} dy y^m (2\pi i)^{-1} (ya - 1 + i0)^{-n} (yb - 1 + i0)^{-k} (yc - 1 + i0)^p \quad (I34)$$

и проводя соответствующие алгебраические преобразования до интегрирования по y для каждого слагаемого в f множитель $\chi(\beta_1 - \beta_2 - x)$ может быть выделен явно и сокращен, а (I33) переписывается в виде

$$\dot{Z}(\beta_1, \beta_2) = +n_{\beta} \int dx L(\beta_1 - \beta_2, x) \left\{ -\beta_1 \beta_2 \gamma_{221}^3(\beta_1, \beta_2, \beta_1 - x) + \gamma_{221}'(\beta_1, \beta_2, \beta_2 + x) \right\} \quad (I35.)$$

Пользуясь этой процедурой уравнения эволюции для Z, L, C переписываем в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot{Z}(\beta_2, \beta_1) = & -8C_F C(\beta_2) (\beta_1 - \beta_2) \gamma_{21}^0(\beta_1, \beta_1 - \beta_2) + C_F Z(\beta_2, \beta_1) \left(3 - 2 \int_0^{\beta_1} \frac{dx}{x} - \right. \\ & \left. - 2 \int_0^{\beta_2} \frac{dx}{x} \right) - 2C_V Z(\beta_2, \beta_1) \int_0^{\beta_1 - \beta_2} \frac{dx}{x} - 2 \left(C_F - \frac{C_V}{2} \right) \int dx Z(\beta_2, x) \gamma_{211}^0(\beta_1, \beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2 + x) + \\ & + \int dx Z(x, \beta_1) \gamma_{12}^0(\beta_2, \beta_2 - \beta_1 + x) + \int dx Z(\beta_2 - x, \beta_1 - x) \frac{1}{x} \left[(\beta_2 - \beta_1 + x) \gamma_{111}^0(\beta_1, \beta_2, x) + 2\beta_2 \gamma_{11}^0(\beta_2, x) \right] \left. \right\} + \\ & + C_V \int dx Z(\beta_2, x) \left[-\beta_1 (\beta_1 - \beta_2) \gamma_{211}^2(\beta_1 - \beta_2, \beta_1, \beta_1 - x) - \frac{\beta_1 + \beta_2 - x}{\beta_1 - x} \gamma_{111}^0(\beta_1, \beta_1 - \beta_2, \beta_1 - x) - \frac{2\beta_1}{\beta_1 - x} \gamma_{11}^0(\beta_1, \beta_1 - x) \right] \\ & + C_V \int dx Z(x, \beta_1) \left[\gamma_{12}^0(\beta_2 - \beta_1, \beta_2 - x) - \frac{\beta_1}{\beta_2 - x} \gamma_{111}^0(\beta_2, \beta_2 - \beta_1, \beta_2 - x) - \frac{2x}{\beta_2 - x} \gamma_{11}^0(\beta_2, \beta_2 - x) \right] + \\ & + 2n_{\beta} \frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_1 - \beta_2)^2} \gamma_{11}^0(\beta_1, \beta_2) \int dx \left[Z(\beta_2 - x, \beta_1 - x) + Z(\beta_1 - x, \beta_2 - x) \right] - n_{\beta} \int dx L(x, \beta_2, \beta_1). \quad (I36) \end{aligned}$$

$$\cdot \left[\beta_1 \beta_2 \gamma_{221}^3(\beta_1, \beta_2, \beta_2 - x) - \gamma_{221}'(\beta_1, \beta_2, \beta_1 + x) \right];$$

$$\begin{aligned} \dot{L}(\beta_1, \beta_2) = & 2L(\beta_1, \beta_2) \left[-\frac{1}{3}n_{\beta} + \frac{11}{6}C_V - C_V \left(\int_0^{\beta_1} \frac{dx}{x} + \int_0^{\beta_2} \frac{dx}{x} + \int_0^{\beta_1 - \beta_2} \frac{dx}{x} \right) \right] + C_V \int dx \cdot \\ & \cdot L(\beta_1 - x, \beta_2 - x) \frac{\beta_2}{x} \gamma_{12}^0(\beta_2, x) + C_V \int dx L(\beta_1, x) \left[\gamma_{221}^0(\beta_2, \beta_2 - \beta_1, \beta_2 - \beta_1 + x) - \beta_2^2 \gamma_{221}^2(\beta_2, \beta_2 - \beta_1, \right. \\ & \left. \beta_2 - x) + 2x^2 \gamma_{211}^2(\beta_2, \beta_2 - \beta_1, \beta_2 - x) - \frac{\beta_2}{\beta_2 - x} \gamma_{12}^0(\beta_2, \beta_1 - x) - \frac{\beta_1 - x}{\beta_2 - x} \gamma_{11}^0(\beta_2 - \beta_1, \beta_2 - x) \right] - \\ & - \frac{1}{2}C_V \int dx \left[Z(x - \beta_2, x) + Z(\beta_2 - x, -x) \right] \left\{ (\beta_2 - x) \gamma_{11}^0(\beta_1, \beta_1 - \beta_2 + x) + \right. \\ & + \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{\beta_2 - x} \gamma_{11}^0(\beta_1, \beta_1 - \beta_2) - \frac{(\beta_1 - x)^2}{\beta_2 - x} \gamma_{11}^0(\beta_1, \beta_1 - x) - \frac{2}{\beta_2^2} (\beta_1 - \beta_2)^2 (2\beta_1 + \beta_2) \gamma_{11}^0(\beta_1, \beta_1 - \beta_2) \left. \right\} + \\ & + C_V \int dx \cdot \frac{\beta_1}{x} \gamma_{12}^0(\beta_1, x) L(\beta_1 - x, \beta_2 - x) + (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2). \quad (I37) \end{aligned}$$

Уравнение для функции C было приведено раньше (97). В общем виде решить систему (I36, I37) нам не удалось. Она может быть переписана на языке моментов

$$Z_n^{\ell} = \int d\beta_1 d\beta_2 \beta_1^{\ell-1} \beta_2^{n-\ell-1} Z(\beta_1, \beta_2), \quad L_n^{\ell} = \int d\beta_1 d\beta_2 \beta_1^{\ell-1} \beta_2^{n-\ell-1} L(\beta_1, \beta_2), \quad (I38)$$

$$C_n = \int d\beta_1 \cdot \beta_1^{n-1} C(\beta_1).$$

Для моментов из (I36, I37) можно получить систему зацепляющихся дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_n^{n-\ell} = & -8C_F B(\ell, 3) \left\{ Z_n^{n-\ell} \right\} 3C_F + 2 \left(C_F - \frac{C_V}{2} \right) \left[(-1)^{\ell} B(\ell, 3) + \frac{(-1)^{n-\ell}}{n-\ell+1} + \frac{1}{n} \right. \\ & \left. - S_{\ell} - S_{n-\ell} \right] + C_V \left[\frac{2}{\ell(\ell+2)} - \frac{n+2}{(\ell+1)(n-\ell+1)} - 2S_{\ell} - 2S_{n-\ell} \right] \left. \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^{\ell-1} Z_n^{n-k} \left\{ 2(-1)^k \left(C_F - \frac{C_V}{2} \right) \left[C_{\ell}^k B(\ell, 3) + (-1)^{\ell} \frac{n+\ell-k}{n(\ell-k)} \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_{n-1}^{\ell-1}} \right] + C_V \frac{(k+1)(k+2)}{(\ell+1)(\ell+2)(\ell-k)} \right\} \\ & + \sum_{k=\ell+1}^{n-1} Z_n^{n-k} \left\{ 2(-1)^k \left(C_F - \frac{C_V}{2} \right) \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n-\ell+1} C_{n-\ell-1}^{k-\ell} + (-1)^{\ell} \frac{n+k-\ell}{n(k-\ell)} \frac{C_{n-1}^k}{C_{n-1}^{\ell}} \right] + C_V \frac{(n-k)(n-k+1)}{(n-\ell)(n-\ell+1)(k-\ell)} \right\} \\ & + 2n_{\beta} \frac{1+(-1)^n}{(n+1)C_n^{\ell}} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{\ell+k-1} C_{n-2}^{k-1} Z_n^{n-k} + n_{\beta} \sum_{k=1}^{n-2} L_{n-1}^k \sum_{m=k+1}^{n-1} (-1)^m. \quad (I39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot & \left[(m-k) B(m, 3) C_{n-\ell-1}^{n-m-1} + (-1)^n \frac{m-k}{m+2} C_{\ell}^{n-m-1} \right]; \\ \dot{L}_n^{\ell} = & 2L_n^{\ell} \left[-\frac{1}{3}n_{\beta} + C_V \left(\frac{11}{6} - S_{\ell-1} - S_{\ell+1} - S_{\ell+3} \right) \right] + C_V \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} L_n^k (-1)^k B(\ell, 4) \cdot \right. \\ & \cdot C_{\ell+1}^{k+1} + \sum_{k=1}^{\ell-1} L_n^k \left[\frac{(-1)^{\ell-k} C_{\ell-1}^{k-1}}{(n-k+1)C_{n-k}^{n-\ell+1}} + \frac{(k+2)(k+3)}{(\ell+2)(\ell+3)(\ell-k)} \right] \left. \right\} + \frac{1}{2}C_V (1 - (-1)^n) \cdot \\ & \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n-\ell} Z_{n+1}^{n+1-k} \frac{(-1)^k}{\ell} C_{n-\ell-1}^{k-1} - \sum_{k=\ell+2}^n Z_{n+1}^{n+1-k} (-1)^k B(\ell, 3) C_{n-\ell-1}^{k-\ell-2} + \right. \\ & + \sum_{k=1}^n (-1)^k Z_{n+1}^{n+1+k} \frac{2C_{n-1}^{k-1}}{\ell(\ell+2)} \left(\frac{n}{(\ell+1)(n-k+1)} - \frac{6}{\ell+3} \right) \left. \right\} + (\ell \leftrightarrow n-\ell), \quad (I40) \end{aligned}$$

где C_n^m - биномиальные коэффициенты,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}; B(n, k) = \frac{(n-1)!(k-1)!}{(n+k-1)!}, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Приведем значения низших моментов. Для $n=2$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{z}_2^1 &= -4\eta_F B(2,2) z_2^1 + \left(\frac{1}{3}C_F - 3C_V\right) z_2^1 - \frac{2}{3}C_F C_2, \\ \dot{C}_2 &= -4C_F \cdot \frac{2}{3} C_2. \end{aligned} \quad (I41)$$

Этот результат согласуется с полученным в работе Е.Щуряка и А.Вайнштейна [11]. Для $n=4$ появляются моменты функции L :

$$\begin{aligned} \dot{z}_4^1 &= \eta_F \left\{ -\frac{1}{5}(z_4^1 - 2z_4^2 + z_4^3) - \frac{1}{20}L_3^1 \right\} + NS, \\ \dot{z}_4^2 &= \eta_F \left\{ \frac{2}{15}(z_4^1 - 2z_4^2 + z_4^3) + \frac{7}{60}L_3^1 \right\} + NS, \\ \dot{z}_4^3 &= \eta_F \left\{ -\frac{1}{5}(z_4^1 - 2z_4^2 + z_4^3) + \frac{17}{60}L_3^1 \right\} + NS, \\ \dot{L}_3^1 &= \left(-\frac{2}{3}\eta_F - \frac{307}{60}C_V\right)L_3^1 + \frac{37}{60}C_V z_4^1 + \frac{7}{20}C_V z_4^2 - \frac{23}{60}C_V z_4^3, \\ \dot{C}_4 &= -4C_F S_4 C_4, \end{aligned} \quad (I42)$$

где (NS) означает вклад несинглетного канала [98] [46]

$$\begin{aligned} (\dot{z}_4^1)_{NS} &= -\left(\frac{37}{30}C_F + \frac{25}{6}C_V\right)z_4^1 - \left(\frac{23}{10}C_F - \frac{7}{4}C_V\right)z_4^2 + \frac{3}{10}C_F z_4^3 - \frac{1}{15}C_F C_4, \\ (\dot{z}_4^2)_{NS} &= -\left(\frac{1}{6}C_F - \frac{5}{12}C_V\right)z_4^1 - \left(3C_F + \frac{41}{12}C_V\right)z_4^2 - \left(\frac{7}{6}C_F - \frac{13}{12}C_V\right)z_4^3 - \frac{1}{6}C_F C_4, \\ (\dot{z}_4^3)_{NS} &= \left(C_F - \frac{5}{12}C_V\right)z_4^1 - \left(\frac{7}{2}C_F - \frac{9}{4}C_V\right)z_4^2 - \left(\frac{7}{4}C_F + \frac{37}{12}C_V\right)z_4^3 - \frac{2}{3}C_F C_4. \end{aligned} \quad (I43)$$

Ранг матрицы аномальных размерностей растет с номером момента n , как видно из (I39, I40).

Системы дифференциальных уравнений для моментов должны быть дополнены начальными условиями. Для случая твиста 2 (92) их два; можно, например, задать значения структурной функции g_1 в точке $Q^2 = Q_0^2$ для рассеяния на протоне и на нейтроне. Для твиста 3 в качестве начального условия надо задавать некоторую функцию от X при $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0$, даваемую, скажем, наивной партонной моделью. В случае, когда имеются экспериментальные данные об измерении $g(x, Q) = g_1 + g_2$ для нескольких значений $Q: Q_1, \dots, Q_m$, возможна следующая схема проверки результатов на опыте.

I4. Схема экспериментальной проверки

Заметим прежде, что для извлечения высоких моментов функций $g_{1,2}$ необходимы прецизионные измерения в области $X \approx 1$. В этой области (это область резонансов) точность невелика, поэтому имеет смысл говорить о небольшом числе первых моментов структурных функций $g_{1,2}$.

В случае когда имеются данные для значений Q_1, \dots, Q_m , $m > 2n$, имеется возможность проверить их самосогласованность. Действительно, построим моменты

$$\gamma_i(n) = \int dx x^n g(x, \bar{\xi}_i) = \sum_{z=1}^{2n} C_z a_{zi}, a_{zi} = \exp(\nu_z(n) \bar{\xi}_i), \bar{\xi}_i = \ln(Q_i^2/Q_0^2), \quad (I44)$$

где величины $\nu_z(n)$, $z=1, \dots, 2n$ можно получить при диагонализации матрицы аномальных размерностей (I39, I40). Система (I44) при $m > 2n$ является переопределенной. Именно имеется условие

$$\det \| a_{zi}, \gamma_i \| = 0, \quad i=1, \dots, 2n+1, \quad z=1, \dots, 2n, \quad (I45)$$

которое можно использовать для контроля согласованности экспериментальных результатов.

Заметим в заключение, что измерение величины (см. (7)):

$$G(x) = g_1(x) + g_2(x) - \int_x^1 \frac{dy}{y} g_1(y), \quad (I46)$$

позволило бы выделить вклад операторов твиста 3.

Нам приятно поблагодарить за интерес к работе и полезные обсуждения В.С.Фадина, А.И.Вайнштейна, В.А.Хозе, Б.Л.Иоффе.

Л и т е р а т у р а

1. Р.Фейнман. Взаимодействие фотонов с адронами. "Мир", 1975.
2. A.J.G. Hey, J.E. Mandula Phys. Rev. D5, 2610 (1972).
3. Y. Kodaira, S. Matsuda, K. Sasaki, T. Nematsu Nucl. Phys. B159, 99 (1979)
4. А.П.Бухвостов, Э.П.Кураев, Л.Н.Липатов. а. ЯФ 38 N2 (1983)
в. ПЖЭТФ 37 вып 8 (1982) б. ЯФ 39 N1 (1983)
5. Ю.М.Манкеенко. Препринт ИГЭФ-124, Москва, 1980.
6. Л.Н.Липатов. ЯФ, 1974, 20, 181.
7. R.K. Ellis, W. Furmanski, R. Petronzio Nucl. Phys. B 212, 29 (1983).
8. G. Altarelli G. Parisi Nucl. Phys. B 126, 298 (1977).
9. Ю.Доктицер, Д.Дьяконов, С.Троян Phys. Reports 58C, 269 (1980)
10. G.P. Lepage, S.J. Brodsky Phys. Rev D22, 915 (1980).
11. E.V. Shuryak and A.I. Vainshtein Phys. Lett 105B, 65 (1981);
Nucl. Phys. B 201, 141 (1982)
12. А.В.Ефремов, О.В.Теряев. Труды международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий, Дубна, 1982 г., стр.53.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Рассмотрим вклады в систему уравнений эволюции функций \mathcal{D}, H , описывающих переходы $3 \rightarrow 3$ происходящие от диаграмм, содержащих в t -канале в качестве промежуточного двухчастичное состояние. На рис.10 соответствующие диаграммы блока содержат перечеркнутую внутреннюю линию. Как мы видели при рассмотрении несинглетного канала эти амплитуды приводят к переходам $3 \rightarrow 2$. В частности для диаграмм рис.13 а, б имеем (см. 98 а, б):

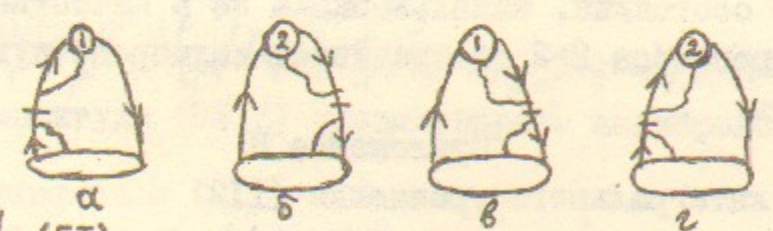
$$\dot{\mathcal{D}}(\beta_1, \beta_2) = 2C_F \beta_2 \gamma_{11}^0(\beta_2, \beta_2 - \beta_1) \left[A(\beta_1) - B(\beta_1) - \frac{2}{\beta_2} C(\beta_1) \right] \quad (\text{III.1})$$

Функции А, В могут быть исключены из правой части уравнения (III.1) с помощью уравнения движения (53):

$$\dot{\mathcal{D}}(\beta_1, \beta_2) = 2C_F \beta_2 \gamma_{11}^0(\beta_2, \beta_2 - \beta_1) \left[\frac{2(\beta_2 - \beta_1)}{\beta_1 \beta_2} C(\beta_1) - \frac{1}{\beta_1} \int dx \mathcal{D}(\beta_1, x) \right] \quad (\text{III.2})$$

Покажем теперь, что с точностью до функции C (она не важна при вычислении матрицы переходов $3 \rightarrow 3$) этот результат воспроизводится при удержании в пропагаторе внутренней фермионной линии блока комптоновского рассеяния рис.10 $\delta 2$ (см.рис.19, где ей также отвечает перечеркнутая линия)

Рис.19



слагаемого $\sim \hat{q}'$ (51):

$$\frac{\hat{k}}{k^2} \rightarrow \frac{\hat{q}'}{2kq'} \quad (\text{III.3})$$

В этом проще всего убедиться прямым вычислением. Во первых как следует из вида токовых вставок $d^{(1,2)}$ и (51) можно для глюона петли положить $\Delta_{\mu\nu}(K_1 - K_2) = g_{\mu\nu}$. Вклады диаграмм рис.19 а, б равны нулю вследствие $\gamma_\mu^\dagger \gamma_\sigma^\dagger \gamma_\mu^\dagger = 0$. Для диаграммы рис.19 в возникает выражение

$$\dot{D}_\sigma^{(1)}(\beta_1, \beta_2) = \frac{g}{5} C_F \int d\beta \gamma_{II}^0(\beta_2, \beta_2 - \beta) G^\delta(\beta_1, \beta) \gamma_L^\delta \frac{\hat{q}'}{s\beta_1} \gamma_L^M \hat{K}_2.$$

$$\gamma_5 \hat{q}' \gamma_{Lm} \gamma_L^\delta = -2C_F \frac{\beta_2}{\beta_1} \gamma_{II}^0(\beta_2, \beta_2 - \beta) \int dx D_\sigma^{(1)}(\beta_1, x).$$

Прибавляя к этому уравнению аналогичный вклад для $D_\sigma^{(2)}(\beta_2, \beta_1)$ (см. рис. I9г) получим (Ср. П.2):

$$\dot{D}_\sigma(\beta_1, \beta_2) = -2C_F \frac{\beta_2}{\beta_1} \gamma_{II}^0(\beta_2, \beta_2 - \beta) \int dx D_\sigma(\beta_1, x). \quad (\text{П.4})$$

Прямым вычислением мы проверили, что для амплитуд рис. 8, 9 содержащих остальные блоки рис. 10 справедливо утверждение аналогичное доказанному выше: Использование точного пропагатора для частиц в t -полюсных диаграммах блоков рис. 10 приводящее к промежуточному двухчастичному состоянию в t -канале с последующим включением двухчастичных функций с помощью уравнений движения (53) и (75) приводит к тому же вкладу в уравнения эволюции $3 \rightarrow 3$, что получится при использовании в этих пропагаторах только добавки $\sim \hat{q}'/s\beta$ для кварков и $\sim q'_\alpha q'_\beta / (s\beta)^2$ для глюонов (см. (51), (57), сокращающей t -канальный полюс (механизм "подтягивания") и не имеющий промежуточного 2-х частичного состояния. Использование же в качестве блоков полных амплитуд процессов $2 \rightarrow 2$ обеспечивает калибровочную инвариантность результатов.

Приложение II

Ядра интегрального уравнения (II2) описываются борновскими амплитудами парных процессов $T_{\lambda_3 \lambda_4}^{\lambda_1 \lambda_2}$ (см. рис. 10):

$$K_1 + K_2 = K_3 + K_4; \quad K_1 + K_4 = K_2 + K_3, \quad a \div d = q, \bar{q}, g \quad (\text{П.1})$$

в состоянии по цвету, обеспечивающему бесцветное состояние трех частиц в t -канале. В случае $SU(3)$ это состояние, преобразующееся по представлению 3 для амплитуды комитоновского рассеяния глюона на кварке и 8 для остальных амплитуд. Вследствие простой структуры средних по состояниям с определенной

спиральностью токовых вставок $d^{(1)}, d^{(2)}, H$ (I30, I31) суммирование по спиральностям в (II2) фактически отсутствует.

Логарифмический вклад при интегрировании по 4-импульсу петли $K_i = \alpha q' + \beta_i p + K_L$

$$d^4 K_i / (i\pi^2) = (-k_L^2) d(-k_L^2) dy (2\pi i)^{-1} d\beta \cdot d\varphi (2\pi)^{-1}, \quad y = 2pq'd_i / (-k_L^2) \quad (\text{П.2})$$

происходит из области

$$|K_{1L}| = |K_{2L}| = |K_L| \gg |K_{3L}|, |K_{4L}|, \quad \alpha_1 = -\alpha_2, \quad |\alpha_1| \gg |\alpha_3|, |\alpha_4|, \quad \beta_i \sim 1 \quad (\text{П.3})$$

и имеет вид (См. (89)):

$$ig^2 \int d^4 K T_{\lambda_3, \lambda_4}^{\lambda_1, \lambda_2}(K, \beta) / (K^2 K_2^2) = \int \frac{d(-k_L^2)}{(-k_L^2)} \int d\beta \int \frac{dy A_{\lambda_3 \lambda_4}^{\lambda_1 \lambda_2}(\beta, y) (k_L^2)^2}{K^2 K_2^2} \quad (\text{П.4})$$

$$ig^2 A_{\lambda_3 \lambda_4}^{\lambda_1 \lambda_2}(\beta, y) = \int \frac{d\varphi}{2\pi} T_{\lambda_3, \lambda_4}^{\lambda_1, \lambda_2}(\beta, \vec{K}_L). \quad (\text{П.5})$$

Величины A , входящие в определение ядер (II4) вычислены ниже.

Борновская амплитуда рассеяния глюона на кварке имеет вид (рис. 10б)

$$T_{ab, \lambda_3 \lambda_4}^{\lambda_1 \lambda_2} = ig^2 \bar{u}^{(\lambda_3)}(k_3) O_{ab}^{m\nu} u^{(\lambda_1)}(k_1) e_{\mu}^{(\lambda_2)*}(k_2) e_{\nu}^{(\lambda_4)}(k_4) \equiv ig^2 \langle \lambda_1 | O_{ab}^{m\nu} | \lambda_3 \rangle e_{\mu}^{(\lambda_2)*} e_{\nu}^{(\lambda_4)} \quad (\text{П.6})$$

где

$$O_{ab}^{m\nu} = t^{\beta_1 a} \frac{\hat{a}^{(\lambda_1)*}(\hat{k}_1 + \hat{k}_2)}{(k_1 + k_2)^2} \hat{e}^{(\lambda_2)} + t^{\alpha_1 b} \frac{\hat{a}^{(\lambda_2)}(\hat{k}_1 - \hat{k}_4)}{k_{14}^2} + (t^{\alpha_1 b} - t^{\beta_1 a}) \gamma_5 \frac{\Delta^{\beta_1 \nu}(k_{13})}{k_{13}^2}. \quad (\text{П.7})$$

$$\cdot V_{\beta_1 \nu}(-k_4, k_2) e_{\nu}^{(\lambda_2)*} e_{\mu}^{(\lambda_4)*}, \quad V_{\beta_1 \nu}(k_4, k_2) = g_{\beta_1 \nu}(k_2 + k_4) + g_{\mu \rho}(k_4 - 2k_2) + g_{\nu \rho}(k_2 - 2k_4), \quad K_{ij} = k_i \cdot k_j.$$

Заметим, что амплитуда (П.6) удовлетворяет калибровочному условию

$$K_{2\mu} \langle \lambda_1 | O_{ab}^{m\nu} | \lambda_3 \rangle = 0, \quad K_{4\nu} \langle \lambda_1 | O_{ab}^{m\nu} | \lambda_3 \rangle = 0, \quad k_i^2 = 0, \quad e_i \cdot k_i = 0. \quad (\text{П.8})$$

Применяя к амплитуде (П.6) проектор на состояние преобразующееся по фундаментальному представлению $SU(N)$ получим для соответствующих спиральных амплитуд (см. П.5):

$$ig^2 T_{\lambda_3 \lambda_4}^{\lambda_1 \lambda_2}(\beta, k) = \bar{u}^{(\lambda_3)}(k_3) \left\{ C_F \hat{e}^{(\lambda_2)*}(k_2) \frac{(k_2 + k_4)}{(k_2 + k_4)^2} \hat{e}^{(\lambda_4)}(k_4) + (C_F - \frac{C_A}{2}) \hat{e}^{(\lambda_4)}(k_4) \right\} \quad (\text{П.9})$$

$$\cdot \frac{\hat{K}_{14}}{K_4^2} e^{(\lambda_2)*}(k_2) - \frac{1}{2} C_V \frac{\Delta^{\beta_1 \nu}(k_{13})}{k_{13}^2} \gamma_5 V_{\beta_1 \nu} e_{\mu}^{(\lambda_2)*} e_{\nu}^{(\lambda_4)} \left\{ u^{(\lambda_1)}(k_1) \right\}.$$

Пользуясь разложением функций Грина кварков и глюона в промежуточном состоянии (51,57) (для I-го слагаемого в фигурных скобках П2.9 дает вклад только член $\sim \hat{q}'$ (см. приложение I), свойствами спиноров и векторов поляризации глюонов (I20, I17) и (I26-I20) получим ($\beta_{ij} = \beta_i - \beta_j$):

$$A_{++}^{++} = A_{--}^{--} = 2(C_F - \frac{C_V}{2}) \beta_3 \beta_4 (-y \beta_2 - 1)(y \beta_4 - 1) - C_V \frac{\beta_3 \beta_4}{\beta_{13}} \frac{[-y \beta_1 \beta_2 (\beta_2 + \beta_4) + \beta_2^2 - \beta_1 \beta_4]}{y \beta_{13} - 1} \quad (П2.10)$$

$$A_{+-}^{+-} = A_{-+}^{-+} = \left(2C_F \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} - 2(C_F - \frac{C_V}{2}) \frac{\beta_1 \beta_4}{(y \beta_{14} - 1)} + \frac{C_V}{\beta_{13}} \frac{y \beta_1 \beta_2 (\beta_2 + \beta_4) + \beta_4 \beta_{14}}{y \beta_{13} - 1} \right) \beta_3 \beta_4, \beta_1 + \beta_2 = \beta_3 + \beta_4.$$

Остальные амплитуды сворачиваются в нуль. Ниже мы приводим только амплитуды отличные от нуля.

Для спиральных амплитуд процесса рассеяния кварка на антикварке (рис. 10а) в цветном состоянии преобразуем по присоединенному (октетному) представлению $SU(N)$ получим

$$T_{\lambda_3 \lambda_4}^{\lambda_1 \lambda_2} = ig^2 \left\{ (C_F - \frac{C_V}{2}) \bar{u}^{(N_3)}(k_3) \gamma_\mu u^{(N_1)}(k_1) \frac{\Delta_{\mu\nu}(k_{13})}{k_{13}^2} \bar{v}^{(N_2)}(k_2) \right. \quad (П2.11)$$

$$\left. \cdot \gamma_\nu v^{(N_4)}(k_4) - \frac{1}{2} n_F \bar{v}^{(N_2)}(k_2) \gamma_\nu u^{(N_1)}(k_1) \cdot \frac{\Delta_{\mu\nu}(k_{12})}{(k_{12})^2} \bar{u}^{(N_3)}(k_3) \gamma_\mu v^{(N_4)}(k_4) \right\}.$$

Соответствующие величины (П2.5) равны ($\beta_1 + \beta_4 = \beta_2 + \beta_3$):

$$A_{++}^{++} = A_{--}^{--} = 2(C_F - \frac{C_V}{2}) \frac{[-2y \beta_1 \beta_2 + \beta_2 + \beta_3]}{\beta_{13}(y \beta_{13} - 1)} + 2 \frac{n_F}{\beta_{12}^2} \beta_3 \beta_4; \quad A_{+-}^{+-} = A_{-+}^{-+} =$$

$$= \frac{2\beta_3 \beta_4}{\beta_{13}} (C_F - \frac{C_V}{2}) (-2y \beta_1 \beta_2 + \beta_1 + \beta_2)(y \beta_{13} - 1)^{-1}; \quad A_{+-}^{+-} = A_{-+}^{-+} = 2n_F \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_{12}^{-2}, \beta_{ij} = \beta_i - \beta_j.$$

Для амплитуд перехода кварка и антикварка в два глюона в октетном состоянии по цвету имеем (рис. 102)

$$A_{\lambda_3 \lambda_4}^{\lambda_1 \lambda_2} = -\frac{1}{4} n_F \bar{v}^{(N_2)}(k_2) \left\{ e_4 \frac{k_{13}}{k_{13}^2} e_3^* - e_3^* \frac{k_1 + k_4}{(k_1 + k_4)^2} e_4 + 2 \frac{\Delta^{\rho\sigma}(k_{12})}{k_{12}^2} \gamma_{\rho\sigma} \right. \quad (П2.13)$$

$$\left. \cdot V_{\mu\nu\rho}(k_4, k_3) e_3^{*\mu} e_4^\nu \right\} u^{(N_1)}(k_1).$$

Соответствующие величины (П2.5) равны

$$A_{++}^{++} = A_{--}^{--} = \beta_3 \beta_4 \left(-\frac{y \beta_1 \beta_2}{2(y \beta_{13} - 1)} - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_3 + \beta_4)}{\beta_{12}^2} + \frac{\beta_1 + \beta_4}{2(y(\beta_1 + \beta_4) - 1)} \right) n_F, \quad (П2.14)$$

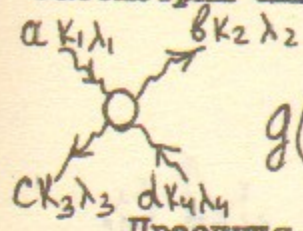
$$A_{+-}^{+-} = A_{-+}^{-+} = n_F \frac{\beta_3 \beta_4}{2} \left(-\frac{\beta_{13}}{y \beta_{13} - 1} - 2 \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_3 + \beta_4)}{\beta_{12}^2} + y \beta_1 \beta_2 (y(\beta_1 + \beta_4) - 1)^{-1} \right); \quad \beta_1 + \beta_4 = \beta_2 + \beta_3.$$

Аналогично, для перехода двух глюонов в кварк-антикварковое октетное по цвету состояние, получим

$$A_{++}^{++} = A_{--}^{--} = C_V \left\{ 2 \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\beta_{12}^2} - \frac{(y \beta_1 \beta_2 - \beta_2 \beta_3)}{(y \beta_{13} - 1)} - \frac{\beta_1 + \beta_4}{y(\beta_1 + \beta_4) - 1} \right\} \beta_3 \beta_4, \quad (П2.15)$$

$$A_{+-}^{+-} = A_{-+}^{-+} = C_V \beta_3 \beta_4 \left\{ \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\beta_{12}^2} - \frac{\beta_{13}}{y \beta_{13} - 1} - \frac{y \beta_1 \beta_2 - \beta_{13}}{y(\beta_1 + \beta_4) - 1} \right\}; \quad \beta_1 + \beta_4 = \beta_2 + \beta_3.$$

Рассмотрим амплитуду рассеяния глюона на глюоне



$$g(k_1, \lambda_1) + g(k_4, \lambda_4) \Rightarrow g(k_2, \lambda_2) + g(k_3, \lambda_3). \quad (П2.16)$$

Проекция борновской амплитуды на октетное по цвету состояние в t -канале имеет вид (см. рис. 10в)

$$-i f^{abcd} T_{cd, \rho\sigma}^{ab, \mu\nu} e_\mu^{(\lambda_1)} e_\nu^{(\lambda_2)} e_\rho^{(\lambda_3)} e_\sigma^{(\lambda_4)} = \frac{g^2}{2} C_V f^{cd} y^{\mu\nu} e_\mu e_\nu e_\rho e_\sigma, \quad (П2.17)$$

где

$$y_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = \frac{2\Delta^{\rho\sigma}(k_{12})}{k_{12}^2} V^{\mu\nu\rho}(k_2, k_1) V^{\sigma\mu\nu}(k_3, k_4) + \frac{\Delta^{\rho\sigma}(k_{13})}{k_{13}^2} V^{\mu\rho\nu}(k_1, k_3) V^{\sigma\nu\mu}(k_4, k_2)$$

$$- \frac{\Delta^{\rho\sigma}(k_1 + k_4)}{(k_1 + k_4)^2} V^{\mu\rho\nu}(k_1, k_4) V^{\sigma\nu\mu}(k_3, k_2) + 3g^{\mu\rho} g^{\sigma\nu} - 3g^{\rho\mu} g^{\nu\sigma}, \quad k_{ij} = k_i - k_j. \quad (П2.18)$$

Полезно убедиться что величина $y_{\rho\sigma}^{\mu\nu}$ удовлетворяет калибровочному условию

$$y_{\rho\sigma}^{\mu\nu} k_{1\mu} e_{2\nu} e_3^* e_4^\sigma = y_{\rho\sigma}^{\mu\nu} e_{1\mu} e_{2\nu} e_3^* e_4^\sigma = y_{\rho\sigma}^{\mu\nu} e_{1\mu} k_{2\nu} e_3^* e_4^\sigma = y_{\rho\sigma}^{\mu\nu} e_{1\mu} e_{2\nu}^*$$

$$\times e_4^\sigma k_3^2 = 0, \quad k_i^2 = e_i k_i = 0.$$

Прямое, но несколько продолжительное вычисление приводит к выражению для величин Λ (П2.5) ($\beta_{ij} = \beta_i - \beta_j$):

$$A_{++}^{++} = A_{--}^{--} = \frac{1}{2} C_V \beta_3 \beta_4 \left\{ -3\beta_1 \beta_2 - 2 \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_{12}^2} (\beta_1 + \beta_2)(\beta_3 + \beta_4) + \frac{2(\beta_1 + \beta_4)^2}{y(\beta_1 + \beta_4) - 1} - \beta_{13}^{-1} (y \beta_{13} - 1)^{-1} [y \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2) + \beta_2^2 + \beta_1 \beta_4] \right\},$$

$$A_{+-}^{+-} = A_{-+}^{-+} = \frac{1}{2} C_V \beta_3 \beta_4 \left\{ 3\beta_1 \beta_2 - 2 \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_{12}^2} (\beta_1 + \beta_2)(\beta_3 + \beta_4) - \frac{2\beta_{13}^2}{y \beta_{13} - 1} + (\beta_1 + \beta_4)^{-1} \times \right. \quad (П2.19)$$

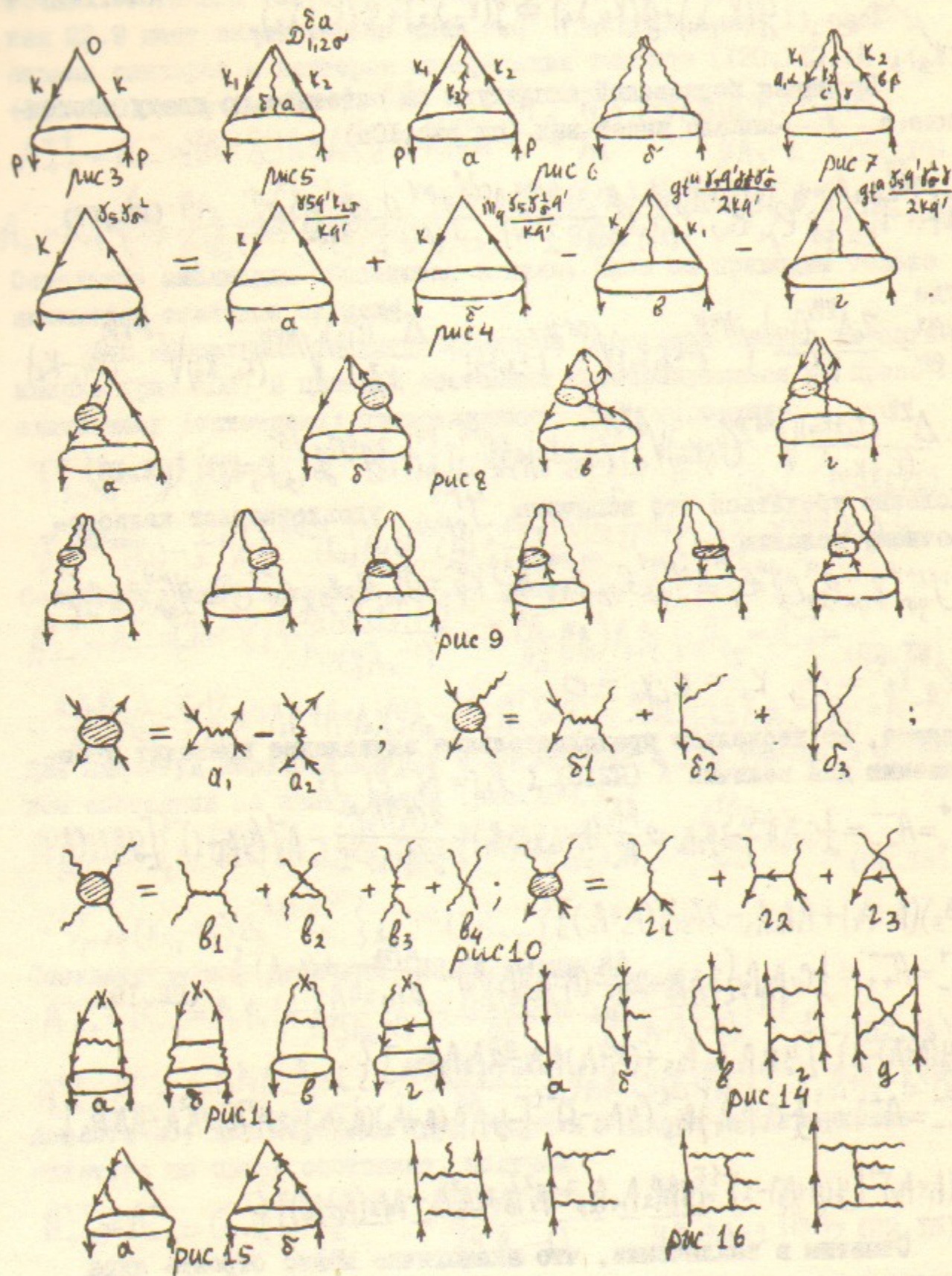
$$\left. \times (y(\beta_1 + \beta_4) - 1)^{-1} [y \beta_1 \beta_2 \beta_4 \beta_{23} + (\beta_1 + \beta_4) \beta_1 \beta_2 - 2\beta_3 \beta_4 \beta_{24}] \right\};$$

$$A_{+-}^{+-} = A_{-+}^{-+} = \frac{1}{2} C_V \beta_3 \beta_4 \left\{ \beta_{13}^{-1} (y \beta_{13} - 1)^{-1} [-y \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)(\beta_2 + \beta_4) - 2\beta_1^2 \beta_4 - 2\beta_2^2 \beta_3 - \beta_1 \beta_2 \beta_{13}] \right.$$

$$\left. + (\beta_1 + \beta_4)^{-1} (y(\beta_1 + \beta_4) - 1)^{-1} [y \beta_1 \beta_2 \beta_4 \beta_{23} + 2\beta_1^2 \beta_3 + 2\beta_2^2 \beta_4 - \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_4)] \right\}.$$

Отметим в заключение, что аналогично можно строить ядра интегральных уравнений, описывающих эволюцию матричных элементов операторов более высоких тензоров: отличие будет только в проекторах на соответствующее цветное состояние (6, 27, и т.д.).

Рисунки, кроме приведенных в тексте.



А.П.Бухвостов, Э.А.Кураев, Л.Н.Липатов

ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ НА
ПОЛЯРИЗОВАННОЙ МИШЕНИ В КХД

Препринт
№ 83-147

Работа поступила - 22 ноября 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 6.12-1983 г. МН 03464
Формат бумаги 60x90 I/16 Усл.3,4 печ.л., 3,0 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ №147.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90