

23

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР



И.А. Котельников

ОШИБКИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ  
В КВАДРУПОЛЬНОЙ АМБИПОЛЯРНОЙ  
ЛОВУШКЕ

ПРЕПРИНТ 83-36

НОВОСИБИРСК

ОШИБКИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В КВАДРУПОЛЬНОЙ  
АМБИПОЛЯРНОЙ ЛОВУШКЕ

И. А. Котельников

А Н Н О Т А Ц И Я

В параксиальном приближении рассмотрено влияние неточностей в изготовлении магнитной системы на удержание плазмы в аксиально-несимметричных ловушках. Показано, что даже малое искажение магнитного поля в области пробок приводит к сильному уходу силовых линий. Найдены дрейфовые поверхности частиц, удерживаемых в центральном пробкотроне, и поверхности постоянного давления. Получены оценки предельной величины ошибок магнитного поля, при которой не происходит существенного усиления поперечных потерь плазмы в режиме неклассической диффузии.

MAGNETIC FIELD ERRORS IN QUADRUPOLE  
TANDEM MIRROR

I. A. Kotelnikov

A B S T R A C T

The effect of magnet system manufacture inaccuracy on plasma confinement in quadrupole tandem mirror is considered. It is shown that even small distortion of magnetic field leads to a strong departure of field lines. The drift surfaces of trapped in the central cell particles are found as well as the ones of constant pressure. Maximum value of magnetic field errors which do not cause essential enhancement of plasma decay through neoclassical diffusion is evaluated.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость подавления поперечных потерь плазмы из аксиально-несимметричной амбиполярной ловушки предъявляет жесткие требования к точности изготовления магнитной системы. Нарушение квадрупольной симметрии магнитного поля в ловушках типа "Амбал" /1/ может привести к значительному усилению поперечных потерь плазмы и ухудшить тем самым энергетические характеристики установки.

Ошибки в изготовлении магнитной системы неизбежны и связаны, во-первых, с отклонением конструкции отдельно взятой катушки от проектной и, во-вторых, с ошибками во взаимном расположении и ориентации катушек. В настоящем сообщении получены оценки максимальной величины ошибок магнитного поля, при которой не происходит существенного усиления поперечных потерь плазмы в режиме неклассической диффузии. Изложение имеет следующий порядок. Во втором разделе в параксиальном приближении анализируется геометрия магнитных силовых линий при наличии возмущений магнитного поля. Этот анализ в основной своей части воспроизводит результаты, полученные в Ливерморской лаборатории (США) применительно к установкам ТМХ и ТМХ-Upgrade /2/, и приведен здесь, чтобы не нарушать связности изложения.

В третьем разделе изучается влияние возмущений поля на дрейфовые поверхности частиц, удерживаемых в центральном пробокотроне, т.е. имеющих достаточно большое значение питч-угла.

И, наконец, в четвертом разделе найдены поверхности постоянного давления для модельного случая, когда пики амбиполярного потенциала являются очень узкими и расположены вблизи экваториальных плоскостей концевых пробкотронов.

## 2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ПАРАКСИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

### 2.1. Невозмущенное поле.

В декартовой системе координат  $x, y, z$  с осью  $z$  вдоль магнитной оси, совпадающей с прямой силовой линией, и осями  $x, y$ , лежащими в плоскостях симметрии амбиполярной ловушки (рис.1) компоненты магнитного поля имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} H_{x0} &= \left(-\frac{1}{2} H'_0 - 2h\right) x \\ H_{y0} &= \left(-\frac{1}{2} H'_0 + 2h\right) y \\ H_{z0} &= H_0 - \frac{1}{4} H''_0 (x^2 + y^2) - h'(x^2 - y^2), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $H_0(z)$  — поле на оси, функция  $h(z)$  задает квадрупольную составляющую поля, а штрих означает дифференцирование по  $z$ . Функции  $H_0(z)$ ,  $h(z)$  являются четными относительно точки пересечения экваториальной плоскости ловушки с осью  $z$ . Эту точку мы примем за начало координат. Графики функций  $H_0(z)$ ,  $h(z)$  для магнитной системы ловушки АМБАЛ изображены на рис.2, 3.

Интегрирование дифференциальных уравнений силовой линии

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z} \approx \frac{dz}{H_0} \quad (2.2)$$

дает хорошо известный результат: положение силовой линии, проходящей при  $z = 0$  через точку  $x_0, y_0$  определяется равенствами:

$$\begin{aligned} x &= x_0 R^{-1/2} e^{-\phi/2} \\ y &= y_0 R^{-1/2} e^{\phi/2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\phi(z) = 4 \int_0^z \frac{h(z')}{H_0(z')} dz', \quad R = \frac{H_0(z)}{H_0(0)}. \quad (2.4)$$

Магнитная поверхность, сечение которой плоскостью  $z = 0$  представляет собой окружность, при вхождении в пробку сплющивается. Её сечение становится эллипсом, оси которого ориентированы вдоль осей  $x$  и  $y$ :

$$\frac{x^2}{R^{-1} e^{-\phi}} + \frac{y^2}{R^{-1} e^{\phi}} = x_0^2 + y_0^2 = \text{const}. \quad (2.5)$$

Отношение длин большой и малой полуосей эллипса, характеризующее степень сжатия (эллиптичность) магнитной поверхности, равно  $\exp|\phi|$ . Функция  $\phi(z)$  является нечетной, её график изображен на рис.4.

### 2.2. Дипольное возмущение.

При наличии возмущений дипольного типа на оси  $z$  появляются ненулевые составляющие магнитного поля  $H_x, H_y$ . В этом случае, вообще говоря, прямой силовой линии не существует, и понятие магнитной оси становится неопределенным. Для определенности под магнитной осью будем подразумевать силовую линию, проходящую через начало координат. В абстрактной теоретической постановке задачи относительно системы координат предполагается, что она однозначно задана идеальной (невозмущенной) геометрией поля.

В параксиальном приближении дипольная поправка к невозмущенному полю задается двумя функциями  $V_x(z), V_y(z)$ :

$$\begin{aligned} H_x &= H_{x0} + V_x(z) \\ H_y &= H_{y0} + V_y(z) \\ H_z &= H_{z0} + V'_x(z)x + V'_y(z)y, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $H_{x0}, H_{y0}, H_{z0}$  — невозмущенное поле (2.1). Так как  $H_{x0} = H_{y0} = 0$  на оси  $z$ ,  $V_x$  и  $V_y$  есть просто значения поперечных компонент поля на этой оси. Дипольное возмущение поля возникает при определенных классах деформаций катушек, а также при сдвигах (и/или поворотах) отдельно взятой катушки как единого целого вдоль (вокруг) осей  $x, y$ . При смещении и вращении катушки как целого функции  $V_x(z)$  и  $V_y(z)$  могут быть выражены через функции  $V_0(z)$  и  $\beta(z)$ , представляющие собой вклад данной катушки, соответственно, в  $H_0(z)$  и  $h(z)$ . Так, при сдвиге катушки на величину  $x_i, y_i$  в плоскости  $xy$

$$V_x(z) = \left(\frac{1}{2} V'_0(z) + 2\beta(z)\right) x_i \quad (2.7)$$

$$B_y(z) = \left(\frac{1}{2} B_0'(z) - 2\beta(z)\right) y_i.$$

Составляющие магнитного поля выражаются через функции (2.7) в соответствии с (2.6), причем, строго говоря, в выражение для  $H_z$  в (2.6) следовало бы дописать слагаемое  $-(B_x' x_i + B_y' y_i)/2$ . Однако это слагаемое квадратично по малому сдвигу  $x_i, y_i$  и его можно опустить. Если катушка повернута на малый угол  $\theta_i$  вокруг единичного вектора  $\vec{n} = (n_x, n_y, 0)$ , перпендикулярного оси  $Z$  в точке  $z_i$ , то

$$B_x(z) = -n_y \theta_i \left[ B_0(z) + \left(\frac{1}{2} B_0'(z) + 2\beta(z)\right)(z - z_i) \right] \quad (2.8)$$

$$B_y(z) = n_x \theta_i \left[ B_0(z) + \left(\frac{1}{2} B_0'(z) - 2\beta(z)\right)(z - z_i) \right].$$

Возмущения, создаваемые более чем одной катушкой, аддитивны. Подстановка (2.6) в (2.2) сразу дает уравнение силовой линии:

$$x = R^{-1/2} e^{-\phi/2} \left[ x_0 + \int_0^z dz' R^{1/2} e^{\phi/2} B_x / H_0 \right] \quad (2.9)$$

$$y = R^{-1/2} e^{\phi/2} \left[ y_0 + \int_0^z dz' R^{1/2} e^{-\phi/2} B_y / H_0 \right].$$

Магнитная поверхность (2.5) при наличии дипольного возмущения искажается таким образом, что её сечения плоскостями  $Z = \text{const}$  по-прежнему остаются эллипсами, но эти эллипсы, сохраняя неизменными свои размеры и ориентацию осей, сдвигаются в плоскости сечений:

$$R e^{\phi} \left[ x - R^{-1/2} e^{-\phi/2} \int_0^z dz' R^{1/2} e^{\phi/2} B_x / H_0 \right]^2 + R e^{-\phi} \left[ y - R^{-1/2} e^{\phi/2} \int_0^z dz' R^{1/2} e^{-\phi/2} B_y / H_0 \right]^2 = \text{const}. \quad (2.10)$$

Схематично сечения поверхности (2.10) плоскостями, перпендикулярными оси  $Z$  в различных её точках, изображены на рис.5. Там же пунктирной линией изображены сечения невозмущенной поверхности (2.5). Малое возмущение поля в области пробок может привести к сильному уходу силовых линий. Особенно чувствительно поведение силовых линий к появлению дипольной составляющей поля вдоль направления, по которому магнитная поверхность сжимается (при  $\phi > 0$  это направление соответствует оси  $x$ , при  $\phi < 0$  - оси  $y$ ). Например, если в области внутренней пробки,

где функция  $\Phi(z)$  достигает своего максимального значения  $\Phi_{II}$ , на участке оси  $Z$  длиной порядка  $L_n$  имеется отличная от нуля составляющая  $B_x \sim \alpha_x H_0$  ( $\alpha_x$  имеет смысл угла наклона силовой линии к оси  $Z$ ), то отклонение (уход) силовой линии от своего положения при идеальной геометрии поля по порядку величины будет равен  $\alpha_x L_n e^{\phi_n/2}$  в экваториальной плоскости концевой пробки и  $\alpha_x L_n e^{-\phi_n}$  - во внешней пробке. Уход силовых линий приводит к тому, что часть из них, вопреки проектным расчетам, будет пересекать диафрагмы, установленные в различных сечениях ловушки. Если диафрагма установлена в плоскости  $z = z_1$ , то её образ (который вычерчивается силовыми линиями, проходящими через края диафрагмы) в экваториальной плоскости  $z = 0$  будет сдвинут на величину

$$\Delta x = \int_{z_1}^0 dz R^{1/2} e^{\phi/2} B_x / H_0 \quad (2.11)$$

$$\Delta y = \int_{z_1}^0 dz R^{1/2} e^{-\phi/2} B_y / H_0,$$

но будет иметь ту же самую форму, что и при отсутствии возмущения. Величина сдвига тем больше, чем больше пробочное отношение  $R$  и эллиптичность  $\exp|\phi|$ . Объем ловушки, в котором реально может существовать плазма, ограничивается поверхностью постоянного давления (см. раздел 4), сечение которой плоскостью  $z = 0$  лежит целиком внутри образов всех диафрагм. Так как образы разных диафрагм сдвигаются по-разному (и даже в разные стороны), полезный объем ловушки может заметно уменьшиться. В южной части установки АМБАЛ имеется дипольная составляющая поля, направленная вертикально, т.е. вдоль оси  $x$  (см. рис.1). Измеренная зависимость величины возмущения  $B_x(z)$  показана на рис.6, а вычисленное по ней положение магнитной оси - на рис.7. На рис.8 приведены графики величины смещения образов диафрагм, установленных в различных сечениях южной половины ловушки, на экваториальные плоскости центрального и южного пробкotronов.

### 2.3. Квадрупольное возмущение.

Возмущение квадрупольного типа соответствует повороту одной из аксиально-несимметричных катушек вокруг оси  $Z$ . Если угол поворота  $\theta_z$  мал по сравнению с единицей, то составляющие поля имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} H_x &= H_{x0} - 2f(z)y \\ H_y &= H_{y0} - 2f(z)x \\ H_z &= H_{z0} - 2f'(z)xy, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $f(z) = 2\theta_z b(z)$ , а функция  $b(z)$  определена в предыдущем пункте. В более общем случае, когда наряду с поворотом катушки как целого допускается также её деформация, функция  $f(z)$  может быть измерена. Подстановка (2.12) в (2.2) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dz} &= -2 \frac{f(z)}{H_0(z)} e^{\Phi} \bar{y} \\ \frac{d\bar{y}}{dz} &= -2 \frac{f(z)}{H_0(z)} e^{-\Phi} \bar{x}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $\bar{x} = e^{\Phi/2} R^{1/2} x$ ,  $\bar{y} = e^{-\Phi/2} R^{1/2} y$ .

При  $f(z) = 0$  функции  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  постоянны вдоль силовой линии (они задают уравнения силовых линий невозмущенного поля (2.3)). Поэтому в первом приближении в правой части (2.13) можно заменить функции  $\bar{x}(z)$  и  $\bar{y}(z)$  на их значения  $x_0$ ,  $y_0$  в плоскости  $z = 0$ . После этого система (2.13) легко интегрируется:

$$\begin{aligned} x &= R^{-1/2} e^{-\Phi/2} [x_0 - 2y_0 \int_0^z dz e^{\Phi} f/H_0] \\ y &= R^{-1/2} e^{\Phi/2} [y_0 - 2x_0 \int_0^z dz e^{-\Phi} f/H_0], \end{aligned} \quad (2.14)$$

и вместо (2.5) получается следующее уравнение магнитной поверхности:

$$R[x^2 e^{\Phi} + 2\gamma xy + y^2 e^{-\Phi}] = \text{const}, \quad (2.15)$$

где  $\gamma = 4 \int_0^z dz' \text{ch} \Phi \cdot (f/H_0)$ .

Приближение, сделанное при выводе (2.14), (2.15), оправдано, если  $\gamma \ll 1$ . Сечения магнитной поверхности (2.15) плоскостями, перпендикулярными оси  $z$ , представляют собой эллипсы, повер-

нутые вокруг оси  $z$  (рис.9). Длины большой и малой полуосей эллипсов соответственно равны

$$\begin{aligned} (x_0^2 + y_0^2)^{1/2} R^{-1/2} [\text{ch} \Phi - (\text{sh}^2 \Phi + \gamma^2)^{1/2}]^{-1/2}, \\ (x_0^2 + y_0^2)^{1/2} R^{-1/2} [\text{ch} \Phi + (\text{sh}^2 \Phi + \gamma^2)^{1/2}]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Угол поворота эллипсов  $\Psi = \text{arctg}(\gamma/\text{sh} \Phi)/2$  не обязательно мал даже при малом возмущении поля (при малом угле  $\theta_z$  поворота катушки). В экваториальных плоскостях концевых пробко-ронов, где  $\Phi = 0$  и сечение невозмущенной магнитной поверхности было бы окружностью, оси эллипсов повернуты на угол  $45^\circ$  по отношению к осям  $x$ ,  $y$ .

Искажение магнитных поверхностей вызывает уход силовых линий на диафрагмы, что приводит к уменьшению реального объема ловушки, в котором может существовать плазма. Рассуждения здесь вполне аналогичны проведенным в предыдущем пункте с той лишь разницей, что изменяется не положение, а форма образов диафрагм. Оценочно относительное изменение линейных размеров образа диафрагмы, установленной в сечении  $z = z_1$ , на плоскость  $z = 0$  равно

$$\frac{\Delta x}{x_0} \sim \frac{\Delta y}{y_0} \sim 4 \int_0^{z_1} dz (f/H_0) \text{ch} \Phi \quad (2.18)$$

2.4. Рассмотрим, наконец, возмущения магнитного поля, соответствующие сдвигу катушек относительно друг друга вдоль оси  $z$ :

$$\delta H_x = r(z)x, \quad \delta H_y = t(z)y. \quad (2.19)$$

Нетрудно видеть, что это возмущение не нарушает топологию магнитного поля, так как невозмущенное поле  $H_{x0}$ ,  $H_{y0}$  имеет ту же структуру, что и (2.19). Уравнения силовых линий находятся из уравнений (2.3), (2.4), если переобозначить в них  $H_0 \rightarrow H_0 + \delta H_0$ ,  $h \rightarrow h + \delta h$ , где  $\delta H_0(z)$  и  $\delta h(z)$  очевидным образом выражаются через  $r(z)$  и  $t(z)$  (ср. (2.19) с (2.1)). Если, однако, возмущение (2.19) нарушает симметрию поля, т.е.

$\delta H_0(z)$  и  $\delta h(z)$  не являются в отличие от  $H_0(z)$  и  $h(z)$  четными функциями, то наличие возмущения (2.19) может привести к

усилению поперечных потерь плазмы.

### 3. ДРЕЙФОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ЧАСТИЦ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПРОБКОТРОНЕ

Если угол поворота ведущего центра частицы (для определенности будем говорить об ионе) вокруг оси  $Z$  за один пролет ловушки мал по сравнению с единицей, то, кроме энергии  $\varepsilon$  и магнитного момента частицы  $\mu$ , сохраняется также продольный адиабатический инвариант:

$$I(x_0, y_0, \varepsilon, \mu) = \int \left( \frac{2}{m} (\varepsilon - e\varphi - \mu H) \right)^{1/2} ds. \quad (3.1)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль силовой линии между точками отражения частицы (часть ионов отражается от потенциальных барьеров в концевых пробкотронах, а ионы с большим значением  $\mu$  отражаются магнитными пробками центрального пробкотрона). Наличие этого дополнительного интеграла движения означает, что задание в начальный момент положения частицы и значений  $\varepsilon$  и  $\mu$  однозначно определяет дрейфовую поверхность. В аксиально-несимметричном поле амбиполярной ловушки дрейфовые поверхности, проходящие через некоторую силовую линию, различны для разных  $\varepsilon$  и  $\mu$ . При рассеянии значения  $\varepsilon$  и  $\mu$  изменяются, и частица переходит с одной дрейфовой поверхности на другую. В амбиполярной ловушке размах  $\Delta r = r_{\max} - r_{\min}$  (где  $r$  — расстояние до оси  $Z$ ) дрейфовых оболочек существенно больше ларморовского радиуса иона  $r_L$ , вследствие чего время ухода ионов на стенку мало по сравнению со временем, оцененным по классической диффузии. Оно может стать еще меньше, если возмущение магнитного поля сильно исказит дрейфовые поверхности. Как показано в работе /3/, при идеальной геометрии поля дрейф частицы в аксиально-несимметричных пробках на противоположных концах ловушки частично компенсируется. При нарушении же квадрупольной симметрии магнитного поля такой компенсации не происходит. Поэтому даже малое возмущение магнитного поля может сильно исказить дрейфовые поверхности.

Введем цилиндрическую систему координат  $r_0, \psi$  согласно формулам

$$x_0 = r_0 \cos \psi, \quad y_0 = r_0 \sin \psi$$

и выделим в адиабатическом инварианте  $I$  аксиально-симметричное слагаемое  $I_0$  и часть, зависящую от азимутального угла:

$$I_0(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(r_0, \psi) d\psi \quad (3.2)$$

$$I_1(r_0, \psi) = I(r_0, \psi) - I_0(r_0).$$

(Аргументы  $\varepsilon, \mu$  для краткости опускаем). Уравнение  $I(r_0, \psi) = \text{const}$  определяет форму сечения дрейфовых поверхностей экваториальной плоскостью ловушки. Явную зависимость  $r_0(\psi)$  можно найти, разлагая  $I_0(r_0)$  вблизи среднего радиуса сечения  $r_*$  по малому отклонению  $r_0 - r_*$ . В первом порядке по  $r_0 - r_*$  имеем:

$$r_0(\psi) = r_* - \frac{I_1(r_*, \psi)}{\partial I_0(r_*) / \partial r_*}. \quad (3.3)$$

Особый случай, когда  $\partial I_0 / \partial r_0 \rightarrow 0$ , т.е. магнитный и электрический дрейфы по азимуту в аксиально-симметричной части ловушки взаимно компенсируются, требует более аккуратного исследования. Как показано в работе /3/, в этом случае траектории частиц в экваториальной плоскости оказываются ограниченными по азимутальному углу  $\psi$  (так называемые банановые траектории).

В поле идеальной геометрии /3/

$$\frac{I_1}{I_0} \sim \left( \frac{r_0}{L_n} \right)^4 \frac{L_n}{L} \frac{e^{2|\varphi_n|}}{R^2}. \quad (3.4)$$

Здесь  $L_n$  — длина пробки,  $L$  — длина центрального пробкотрона,  $I_0 \sim L v_{||}$ ,  $v_{||}$  — проекция скорости частицы на направление силовой линии (в прямом поле центрального пробкотрона  $v_{||}$  изменяется слабо). Компенсация дрейфов, о которой шла речь выше, проявляется в том, что малый параметр параксиальности  $r_0/L_n$  входит в оценку (3.4) в высокой, четвертой, степени. Появление возмущения поля изменяет как  $I_0$ , так и  $I_1$ . Соответственно изменяется размах дрейфовых поверхностей (см. (3.3)). Причем, как оказывается, для нахождения уравнения дрейфовой поверхности в поле с возмущением достаточно вычислить поправ-

ку  $\Delta I_1$  к аксиально-несимметричной части  $I_1$  продольного инварианта, так как  $I_1 \ll I_0$ , а поправка к аксиально-симметричной части  $\Delta I_0 \sim \Delta I_1$ . Вычислив  $\Delta I_1$  и сравнив её с оценкой (3.4), можно установить предельно допустимую величину ошибок магнитного поля, при которой поперечное удержание плазмы заметно не ухудшается. Используя уравнения силовых линий (2.9) или (2.14), легко найти, как меняется вдоль силовой линии модуль поля  $H = H(r_0, \psi, z)$  и дифференциал длины линии  $ds = ds(r_0, \psi, z)$ . Что касается электрического потенциала  $\psi$ , то он вместе с плотностью плазмы постоянен вдоль силовой линии  $\psi = \psi(r_0, \psi)$ . В дополнение к этому будем считать, что распределение потенциала аксиально-симметрично в экваториальной плоскости ловушки<sup>\*</sup>:  $\psi = \psi(r_0)$ . Выполняя теперь интегрирование в (3.1), можно получить явные выражения для  $I_1$  при наличии возмущений поля различного типа. Ниже приводятся результаты вычислений.

В случае дипольного возмущения (2.6) аксиально-несимметричная часть продольного инварианта  $\Delta I_1$ , линейная по возмущению, пропорциональна первой степени радиуса  $r_0$ :

$$\Delta I_1(r_0, \psi) = A_1(\epsilon, \mu) r_0 \cos \psi + A_2(\epsilon, \mu) r_0 \sin \psi. \quad (3.5)$$

В этом выражении

$$A_1(\epsilon, \mu) = \left(\frac{z}{m_i} H_0(0)\right)^{1/2} \int_{-z_1}^{z_1} dz H_0^{-5/2} (\epsilon - e\psi - \mu H)^{-1/2} \times \\ \times \left\{ e^{-\psi} H_0^{-1/2} [(\epsilon - e\psi) F_1 - \mu H_0 F_2] \cdot \int_0^z B_x H_0^{-1/2} e^{\psi/2} dz - \right. \\ \left. - e^{-\psi/2} [(\epsilon - e\psi - \frac{3}{2} \mu H_0) (\frac{1}{2} H_0' + 2h) B_x + \frac{1}{2} \mu H_0^2 B_x'] \right\}, \quad (3.6)$$

пределы интегрирования  $\pm z_1$  определяются из условия  $\epsilon = \mu H_0(\pm z_1) + e\psi$ , а функции  $F_1$  и  $F_2$  равны

$$F_1 = \left(\frac{1}{2} H_0' + 2h\right)^2 \quad (3.7)$$

$$F_2 = 6h^2 + 3h H_0' - h' H_0 + \frac{3}{8} (H_0')^2 - \frac{1}{4} H_0 H_0''.$$

<sup>\*</sup> Обоснованность этого предположения обсуждается в работе /3/.

Выражение для  $A_2(\epsilon, \mu)$  получается из (3.6), если заменить  $B_x(z)$  на  $B_y(z)$  и  $h(z)$  на  $-h(z)$  (при этом, в частности,  $\psi$  переходит в  $-\psi$  (см. (2.4)), а  $F_1$  и  $F_2$ , если следовать обозначениям работы /3/, переходят, соответственно, в  $F_3$  и  $F_4$ ). Если вновь, как и в разделе 2.2, рассмотреть возмущение, при котором дипольная поправка заметно отлична от нуля только в области пробки, где  $B_x \sim \alpha_x H_0$ , то из (3.6) получим, что

$$\frac{\Delta I_1}{I_0} \sim \frac{\alpha_x r_0}{L} \frac{e^{-\psi_n/2}}{R_n^{1/2}}, \quad (3.8)$$

где  $R_n = H_0(z_n)/H_0(0)$  - пробочное отношение. Если имеется дипольная составляющая  $B_y \sim \alpha_y H_0$ , то

$$\frac{\Delta I_1}{I_0} \sim \frac{\alpha_y r_0}{L} \frac{e^{\psi_n/2}}{R_n^{1/2}}. \quad (3.9)$$

Из сравнения (3.8) и (3.9) видно, что наиболее сильно дрейфовые поверхности искажаются в случае, когда дипольная поправка к полю направлена вдоль большой полуоси сечения магнитной поверхности в пробке (если  $\psi_n > 0$ , то наиболее опасно появление составляющей  $B_y$ ), хотя уход силовых линий, как было показано, наиболее чувствителен к появлению дипольного возмущения вдоль малой полуоси сечения. Из сравнения (3.4) с (3.8), (3.9), следует, что дипольное возмущение не вызывает заметного увеличения неклассической диффузии (см. /3/), если

$$\alpha_{x,y} < \left(\frac{a}{L_n}\right)^3 R_n^{-3/2} e^{|\psi_n/2|}, \quad (3.10)$$

где  $a$  - радиус плазмы в центральном пробкотроне. На рис. 10, II схематично изображены сечения дрейфовых поверхностей ионов экваториальной плоскостью ловушки для двух противоположных случаев, а именно, когда неравенство (3.10) с большим запасом выполняется (рис. 10) и нарушается (рис. II). Если возмущение поля сильное, так что выполняется неравенство, обратное (3.10), траектории незапертых (по азимуту  $\psi$ ) частиц, почти не меняя своей формы по сравнению со случаем невозмущенного поля, смещаются в плоскости  $x_0 y_0$  относительно начала координат, причем как величина, так и направление смещения (при наличии одновременно  $B_x$  и  $B_y$  составляющих возмущения) зависят от  $\epsilon$  и



$\mu$  (рис. IIa). Семейство траекторий запертых частиц изображено на рис. II б для частного случая, когда  $B_x \neq 0$ ,  $B_y = 0$ . В отличие от случая идеальной геометрии поля, когда имеются 4 семейства траекторий запертых частиц, в поле с дипольным возмущением остается лишь одно такое семейство.

При наличии возмущений квадрупольного типа (2.12) аксиально-несимметричная часть продольного инварианта  $I$ , линейная по возмущению, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta I_1 = & r_0^2 \sin 2\Psi \left(\frac{2}{m_i} H_0(z)\right)^{1/2} \int_{-z_1}^{z_1} dz H_0^{-3}(z) (\epsilon - e\varphi - \mu H_0)^{-1/2} \times \\ & \times \left\{ f H_0' (\epsilon - e\varphi - \frac{3}{2} \mu H_0) + \frac{1}{2} \mu H_0^2 f' - \right. \\ & - [(\epsilon - e\varphi) F_1 - \mu H_0 F_2] e^{-\varphi} \int_0^z dz' e^{\varphi} f / H_0 - \\ & \left. - [(\epsilon - e\varphi) F_3 - \mu H_0 F_4] e^{\varphi} \int_0^z dz' e^{-\varphi} f / H_0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если возмущение  $f$  заметно отлично от нуля только вблизи пробки, то по порядку величины

$$\frac{\Delta I_1}{I_0} \sim \frac{r_0^2}{L L_n} \cdot \frac{f L_n}{R_n H_0(z_n)}. \quad (3.12)$$

Если же оно проникает внутрь центрального пробкотрона, то оценка (3.12) может оказаться заниженной, и её следует увеличить в  $\exp|\varphi_n|$  раз<sup>\*)</sup>.

При повороте какой-либо аксиально-несимметричной катушки вокруг оси  $z$  отношение  $f L_n / H_0(z_n)$  по порядку величины равно углу поворота  $\theta_z$  этой катушки. Сравнивая (3.4) с оценкой (3.12), умноженной на  $\exp|\varphi_n|$ , получим предельно допустимое значение  $\theta_z$ :

$$\theta_z < \left(\frac{a}{L_n}\right)^2 \frac{e^{|\varphi_n|}}{R_n}. \quad (3.13)$$

Сечения дрейфовых поверхностей плоскостью  $z = 0$  в случае, когда неравенство (3.13) нарушается, изображены на рис. I2.

Для анализа возмущений вида (2.19) можно воспользоваться выражением для  $I_1$ , найденным в работе /3/:

<sup>\*)</sup> В строящейся в ИЯФ СО АН СССР ловушке АМБАЛ  $e^{|\varphi_n|} \approx 20$ .

$$\begin{aligned} I_1 = & (2m_i)^{-1/2} H_0(0) r_0^2 \cos 2\Psi \int_{-z_1}^{z_1} dz (\epsilon - e\varphi - \mu H_0)^{-1/2} \times \\ & \times H_0^{-3} \left\{ e^{\varphi} [(\epsilon - e\varphi) F_1 - \mu H_0 F_2] - e^{-\varphi} [(\epsilon - e\varphi) F_3 - \mu H_0 F_4] \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

в которое вместо  $H_0$  и  $h$  следует подставить  $H_0 + \delta H_0$  и  $h + \delta h$ . Если  $\delta H_0 = \delta h = 0$ , величина  $I_1$  в (3.14) обращается в нуль, что является следствием частичной компенсации дрейфа в противоположных пробках (ненулевой член, оценка которого дается формулой (3.4), появляется в следующем порядке по параксиальности). Поэтому выражение (3.14) фактически дает значение поправки  $\Delta I_1$ . Например, при сдвиге одной из катушек на  $z_i$  вдоль оси  $z$  по порядку величины

$$\Delta I_1 \sim I_0 e^{|\varphi_n|} z_i / R_n L. \quad (3.15)$$

(Если, однако, возмущение симметрично, т.е.  $\delta H_0(z)$  и  $\delta h(z)$  являются четными функциями,  $\Delta I_1 = 0$ ). Потребовав, чтобы  $\Delta I_1$  было меньше  $I_1$  (3.4), получим следующее условие

$$\frac{z_i}{L_n} < \left(\frac{a}{L_n}\right)^2 \frac{e^{|\varphi_n|}}{R_n}. \quad (3.16)$$

Сечения дрейфовых поверхностей при наличии возмущений вида (2.19) по внешнему виду похожи на сечения, изображенные на рис. I2, но повернуты относительно них на угол  $45^\circ$ .

#### 4. ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОГО ДАВЛЕНИЯ

В этом разделе найдем поверхности постоянного давления. Как известно /4/, эти поверхности определяются из уравнения

$$U = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{H} = \text{const}. \quad (4.1)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль силовой линии между точка-

ми  $S_1$  и  $S_2$ , в которых давление скачком обращается в нуль, что оказывается возможным, если пики амбиполярного потенциала в концевых пробкотронах являются очень узкими. Тогда  $S_1$  и  $S_2$  есть координаты пика потенциала на данной силовой линии. Семейство точек  $S_1, S_2$  образует две поверхности, расположенные вблизи экваториальных плоскостей крайних пробкотронов. Для оценок безразлично, что выбрать в качестве этих поверхностей: либо плоскости, перпендикулярные магнитной оси<sup>\*</sup>, либо поверхности, составленные из точек  $\frac{\partial H}{\partial S} = 0$ .

В поле идеальной геометрии в параксиальном приближении

$$U_{ug}(r_0, \psi) = U_0 + U_1 \left(\frac{r_0}{L_n}\right)^2 + U_2 \left(\frac{r_0}{L_n}\right)^4 \cos 4\psi + \dots, \quad (4.2)$$

где

$$U_0 \sim L/H_0(0), \quad U_1 \sim U_0 e^{|\phi_n|} L_n/L, \quad U_2 \sim U_0 e^{2|\phi_n|} L_n/L.$$

Уравнение сечения поверхности постоянного давления плоскостью  $Z = 0$  находится аналогично уравнению дрейфовой поверхности (3.3):

$$r_0(\psi) = r_* (1 - \nu \cos 4\psi), \quad (4.3)$$

где  $r_*$  — средний радиус сечения, а  $\nu = U_2 r_*^2 / 2U_1 L_n^2$ . Так как  $\nu \ll 1$ , сечение приблизительно является окружностью, качественно оно похоже на сечение дрейфовых поверхностей незапертых частиц (рис. 10). При наличии возмущения поля в разложении (4.2) интеграла  $U$  появляются дополнительные члены. Наиболее важными из них являются члены, зависящие от угла  $\psi$ , так как в отсутствие возмущений аксиально-несимметричная часть  $U$  сравнительно мала ввиду частичной компенсации вкладов от противоположных пробков (см. (4.2)). Ниже будут выписаны оценки аксиально-несимметричной части поправки к (4.2), линейной по возмущению магнитного поля.

Если имеется дипольное возмущение (2.6), то

$$\Delta U = \Delta U_{1x} \cos \psi + \Delta U_{1y} \sin \psi, \quad (4.4)$$

$$\Delta U_{1x} \sim U_0 e^{\phi_n/2} \frac{r_0 \alpha_x}{L R_n^{3/2}}, \quad \Delta U_{1y} \sim U_0 e^{-\phi_n/2} \frac{r_0 \alpha_y}{L R_n^{3/2}},$$

\* Напомним, что магнитной осью мы называем силовую линию, выходящую из начала координат.

где  $\phi_n$  — значение  $\phi$  во внутренней пробке (интегрирование по области внешних пробков в (4.1) не проводится). Полезно обратить внимание на то, что  $\phi$  входит в оценку (4.4) со знаком, противоположным знаку в (3.8), (3.9). Из уравнения  $U_{ug} + \Delta U = \text{const}$  можно найти уравнение сечения:  $r_0 = r_0(\psi)$ . Это сечение по форме совпадает с сечением (4.3), но будет смещено в плоскости  $x_0 y_0$  на величину

$$\Delta x = -\Delta U_{1x} L_n^2 / 2U_1 r_* \sim \frac{\alpha_x L_n}{R_n^{3/2}} e^{\phi_n/2 - |\phi_n|} \quad (4.5)$$

$$\Delta y = -\Delta U_{1y} L_n^2 / 2U_1 r_* \sim \frac{\alpha_y L_n}{R_n^{3/2}} e^{-\phi_n/2 - |\phi_n|}$$

При наличии возмущений квадрупольного типа линейная по возмущению поправка имеет следующий вид:

$$\Delta U = \Delta U_2 \sin 2\psi \quad (4.6)$$

$$\Delta U_2 \sim U_0 \frac{r_*^2}{L L_n} \left(\frac{f L_n}{H_n}\right) \frac{e^{|\phi_n|}}{R_n^2},$$

и вместо (4.3) получаем

$$r_0(\psi) = r_* (1 - \nu \cos 4\psi - \mu \sin 2\psi), \quad (4.7)$$

где

$$\mu = \Delta U_2 L_n^2 / 2U_1 r_*^2 \sim f L_n / H_n R_n^2.$$

Если возмущение достаточно сильное, так что  $\mu \gg \nu$ , сечение поверхности постоянного давления плоскостью  $Z = 0$  превращается в эллипс, оси которого повернуты под углом  $45^\circ$  к осям  $X, Y$ , а разность между длинами большой и малой плоскостей равна  $2\mu r_*$ .

И, наконец, если имеется возмущение третьего типа (2.19), создаваемое сдвигом одной из катушек на  $Z_i$  вдоль оси  $Z$ , то

$$\Delta U = \Delta U_3 \cos 2\psi$$

$$\Delta U_3 \sim U_0 \frac{r_*^2}{L L_n} \frac{Z_i}{L_n} \frac{e^{|\phi_n|}}{R_n^2}, \quad (4.8)$$

и, следовательно,

$$r_0(\psi) = r_* (1 - \nu \cos 4\psi - \eta \cos 2\psi). \quad (4.9)$$

где

$$\eta = \Delta U_3 L_n^2 / 2 U_1 r_*^2 \sim z_i / L_n R_n^2.$$

При  $\eta \gg \nu$  уравнение (4.9) есть уравнение эллипса с разностью длин полуосей  $2\eta r_*$ . Поверхности постоянного давления при наличии каждого из трех типов возмущений похожи на соответствующие этим типам возмущений дрейфовые поверхности незапертых частиц (см. рис. 11а, 12а).

## 5. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

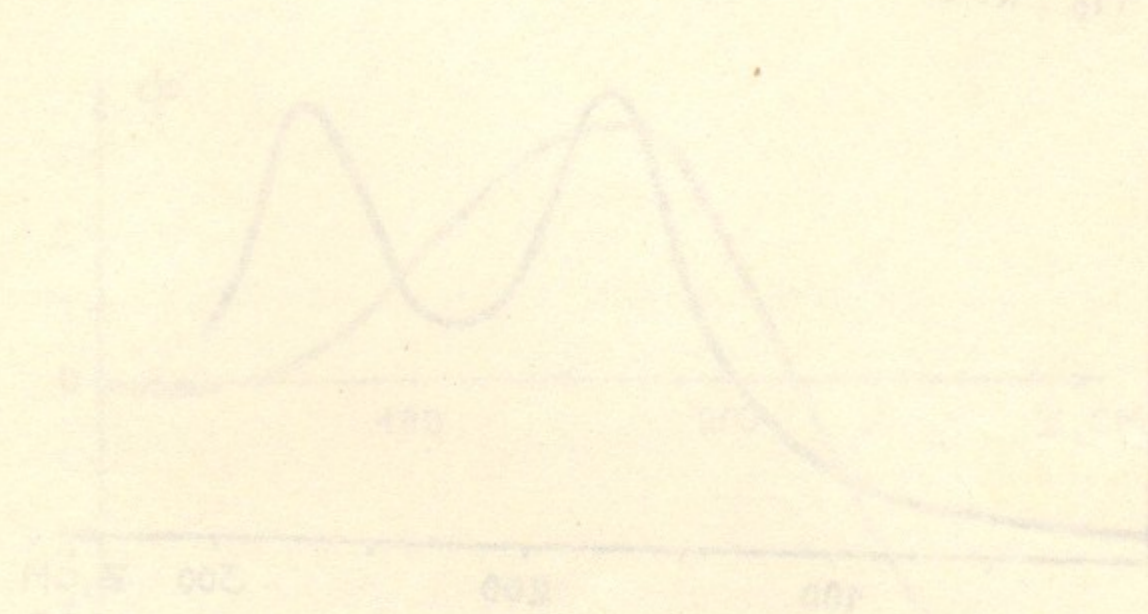
Малые неточности в изготовлении магнитной системы могут привести к существенному искажению поля, нарушить его квадрупольную симметрию. Наиболее нежелательным (и наиболее технически трудноустраняемым) является наличие ошибок магнитного поля в области пробок, где магнитные поверхности сплющиваются. Уход силовых линий на диафрагмы приводит к уменьшению объема плазмы. Отношение этого уменьшения к объему, который был бы занят плазмой при идеальной геометрии поля грубо можно оценить как относительное уменьшение площади той части экваториальной плоскости  $Z = 0$ , которая лежит внутри образов (проекций) всех диафрагм на эту плоскость. Имеющееся в настоящее время в ловушке АМБАЛ искажение поля таково, что смещение образов диафрагм достигает 2 см (см. рис. 8).

Для того, чтобы не произошло существенного усиления поперечных потерь плазмы за счет неклассической диффузии, должны одновременно выполняться условия (3.10), (3.13), (3.16). В режиме резонансной /5/, стохастической /6/ диффузии и диффузии на расщеплении дрейфовых поверхностей /7/ требования к точности магнитного поля будут, по-видимому, менее жесткими.

В заключение пользуясь случаем поблагодарить Г.И. Димова, Д.Д. Рютова, Г.В. Ступакова за обсуждение работы и П.Б. Лысянского и В.Г. Соколова за предоставление результатов измерений и расчета магнитного поля в АМБАЛе.

## Л и т е р а т у р а

1. Г.И. Димов, В.В. Закайдаков, М.Е. Кишиневский. Физика плазмы, 1976, 2, 597  
Г.И. Димов, Г.В. Росляков. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 80-152, 1980.
2. Hooper E.V. Preprint UCRL-86264, Lawrence Livermore Laboratory, 1981.
3. Д.Д. Рютов, Г.В. Ступаков. Физика плазмы, 1978, 4, 501.
4. Г.В. Ступаков. Физика плазмы, 1979, 5, 871.
5. Д.Д. Рютов, Г.В. Ступаков. Доклады АН СССР, 1978, 240, 1086.
6. Д.Д. Рютов, Г.В. Ступаков. Письма в ЖЭТФ, 1977, 26, 186.
7. П.Б. Лысянский, М.А. Тунов. Физика плазмы, 1982, 8, 963.



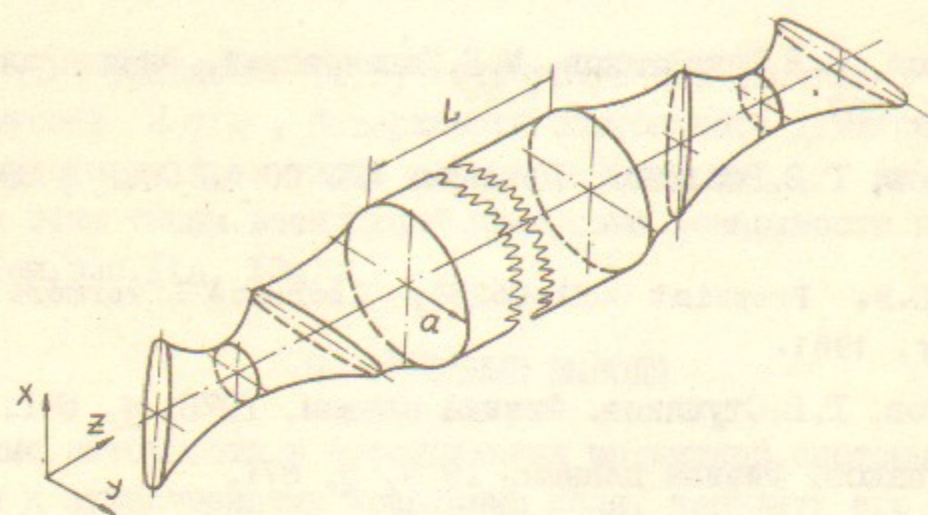


Рис.1. Геометрия магнитного поля амбиполярной ловушки;  
 $L$  - длина,  $a$  - радиус центрального пробкотрона.  
 Ловушка обладает двумя плоскостями симметрии:  $x = 0$   
 и  $y = 0$ .

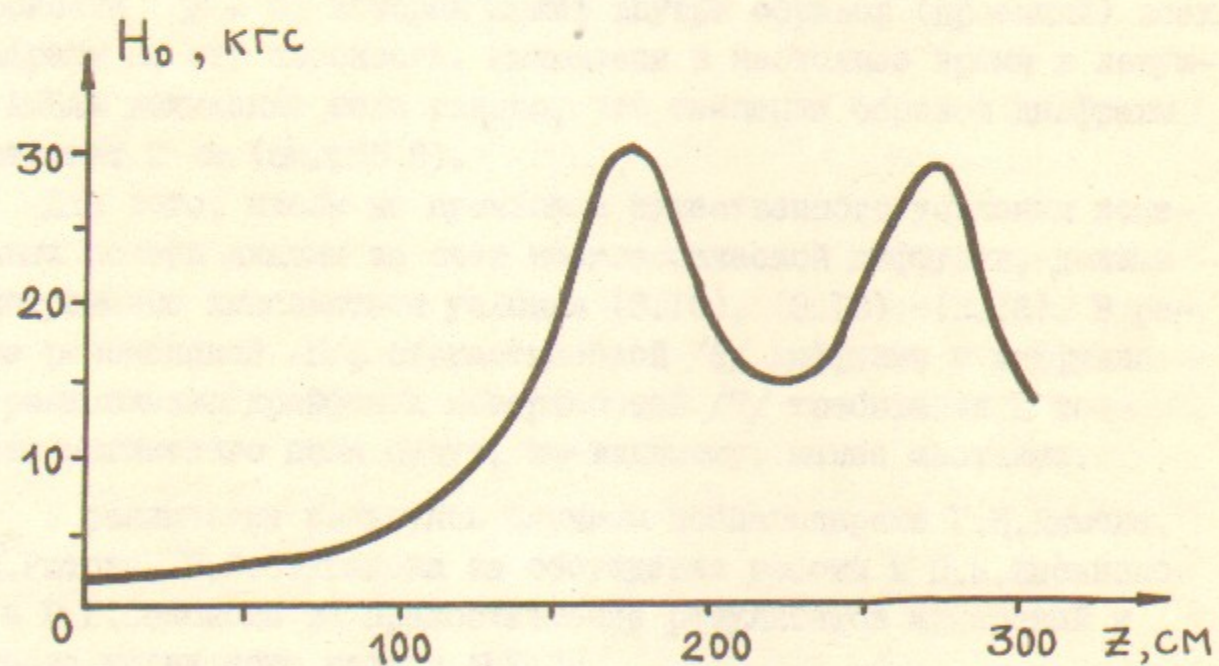


Рис.2. График функции  $H_0(z)$ . Положительное направление оси  $Z$  соответствует направлению на юг в реальной геометрии АМБАЛа;  $H_0(-z) = H_0(z)$ .

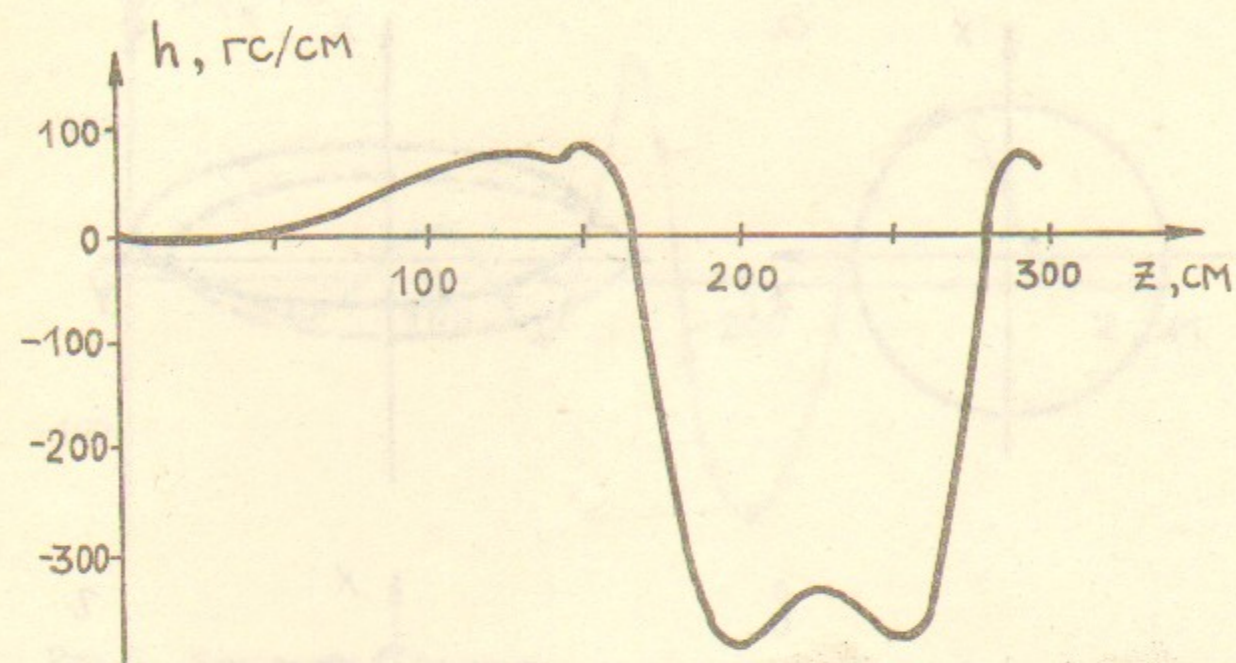


Рис.3. График функции  $h(z)$ ;  $h(-z) = +h(z)$ .

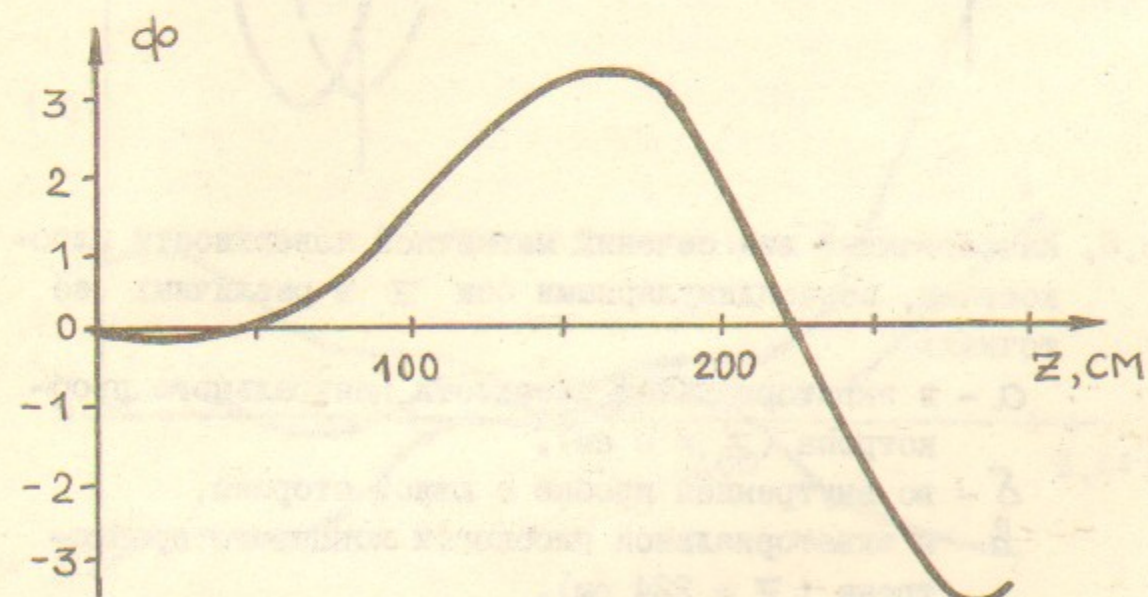


Рис.4. График функции  $\phi(z)$ ;  $\phi(-z) = -\phi(z)$ .

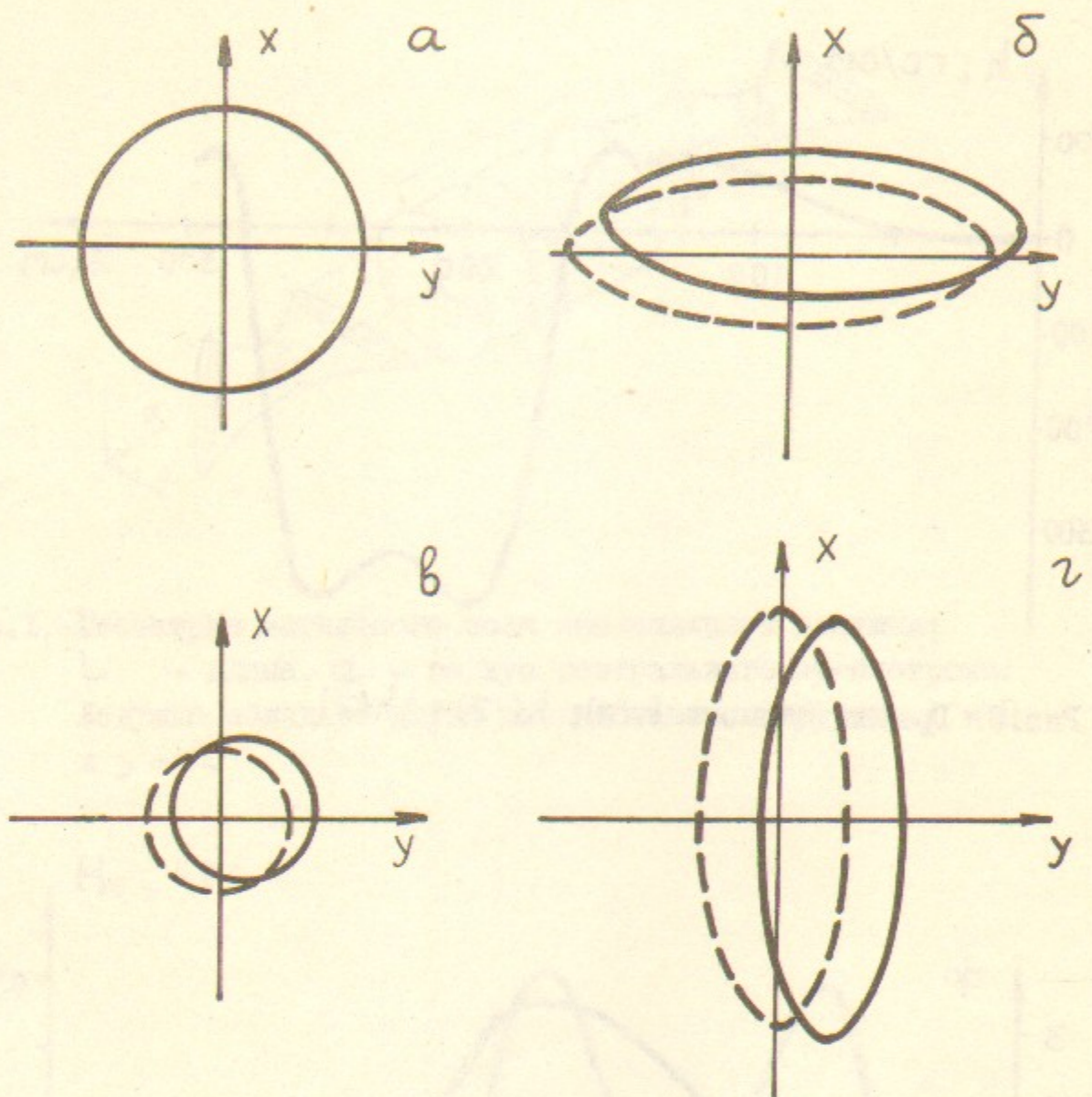


Рис.5. Качественный вид сечений магнитной поверхности плоскостями, перпендикулярными оси  $Z$  в различных её точках:

- а - в экваториальной плоскости центрального пробкотрона ( $Z = 0$  см),
- б - во внутренней пробке с южной стороны,
- в - в экваториальной плоскости концевой пробкотрона ( $Z = 224$  см),
- г - во внешней пробке.

Пунктирная линия - при идеальной геометрии поля, сплошная - при наличии дипольного возмущения.

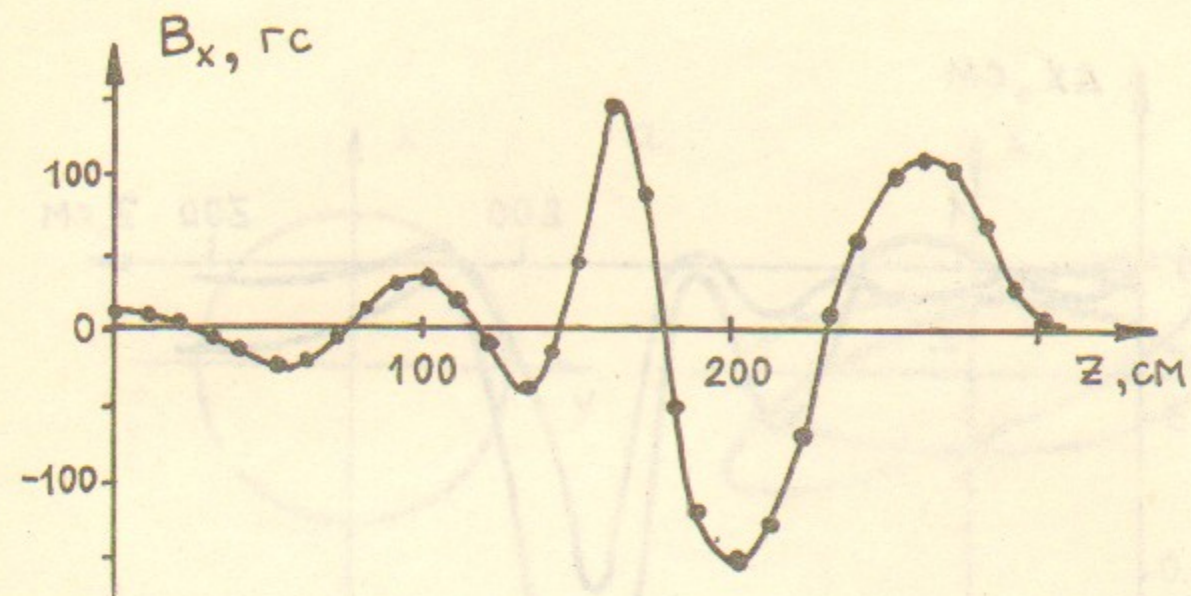


Рис.6. Измеренная зависимость величины  $B_x$  - составляющей магнитного поля на оси  $Z$ .

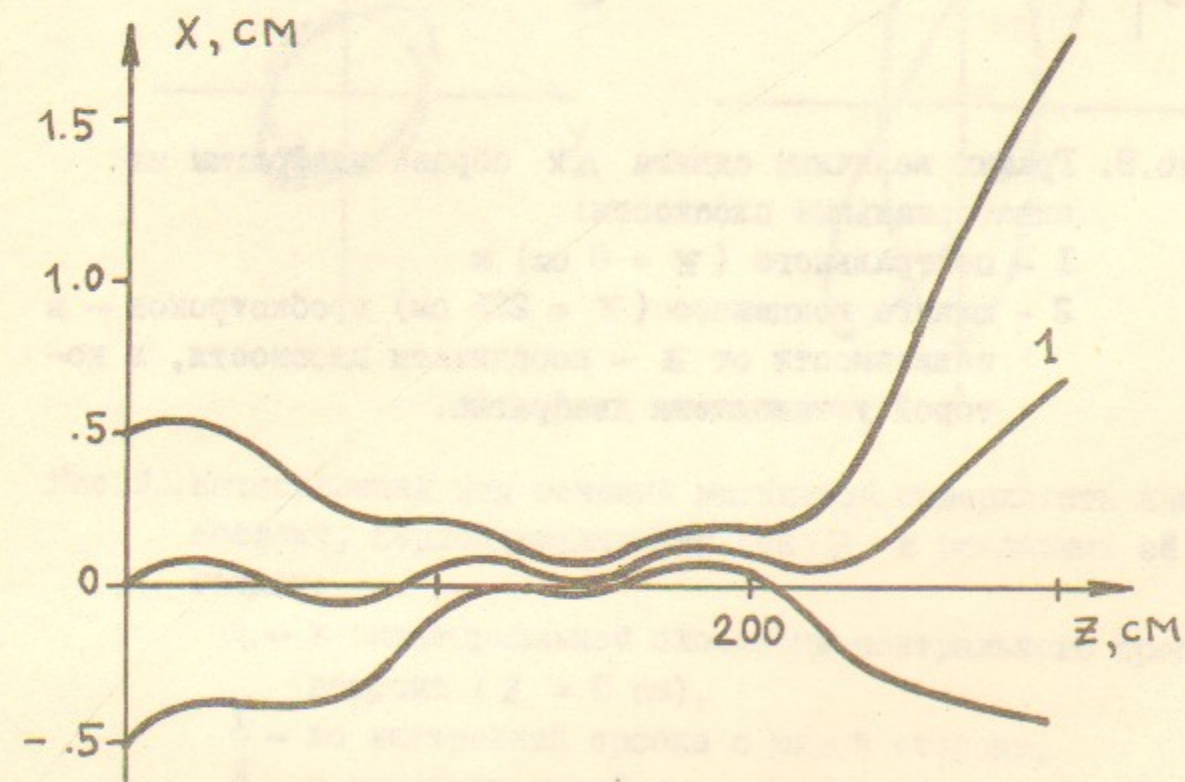


Рис.7. Проекция силовых линий на плоскость  $xZ$ . Цифрой 1 помечена "магнитная ось" - силовая линия, проходящая через начало координат.

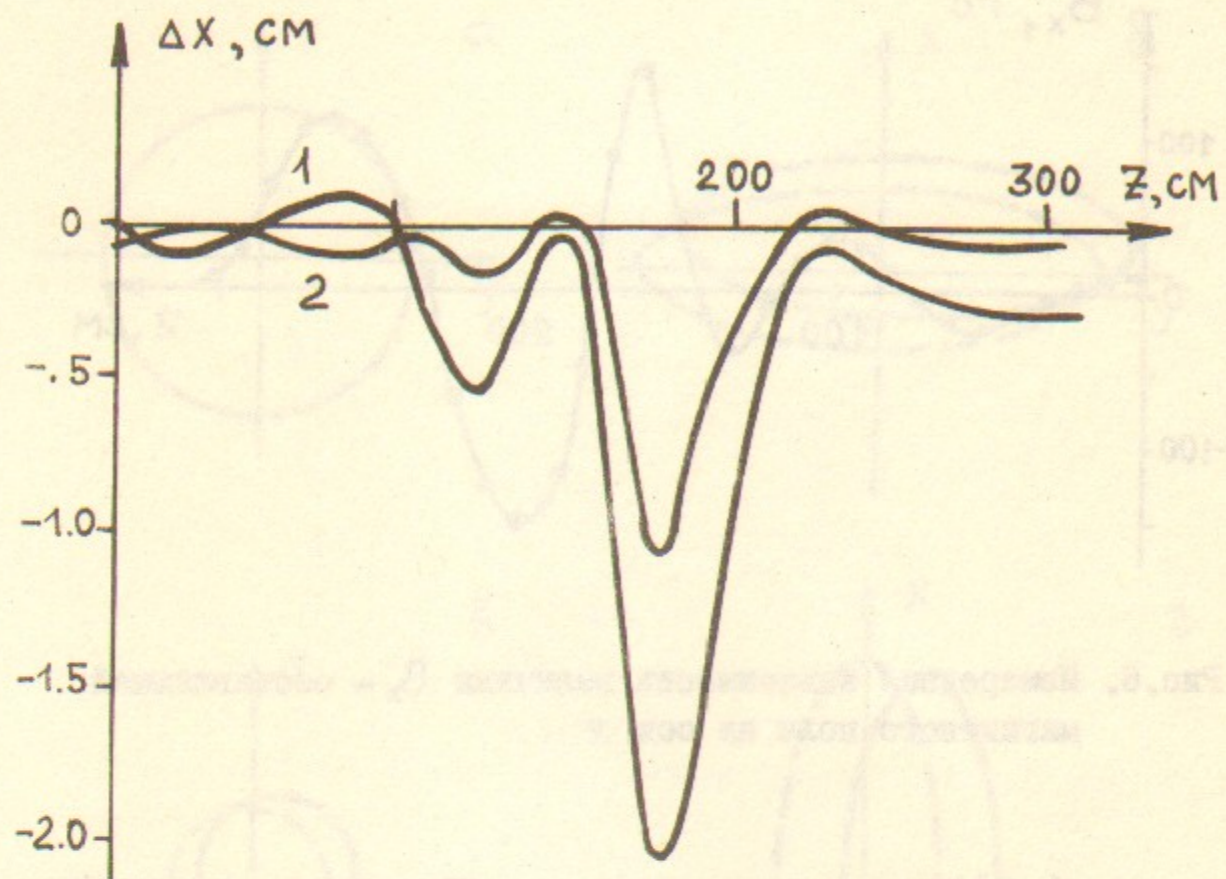


Рис.8. График величины сдвига  $\Delta X$  образа диафрагмы на экваториальные плоскости:  
 1 - центрального ( $Z = 0$  см) и  
 2 - южного концевое ( $Z = 225$  см) пробкотронов -- в зависимости от  $Z$  -- координаты плоскости, в которой установлена диафрагма.

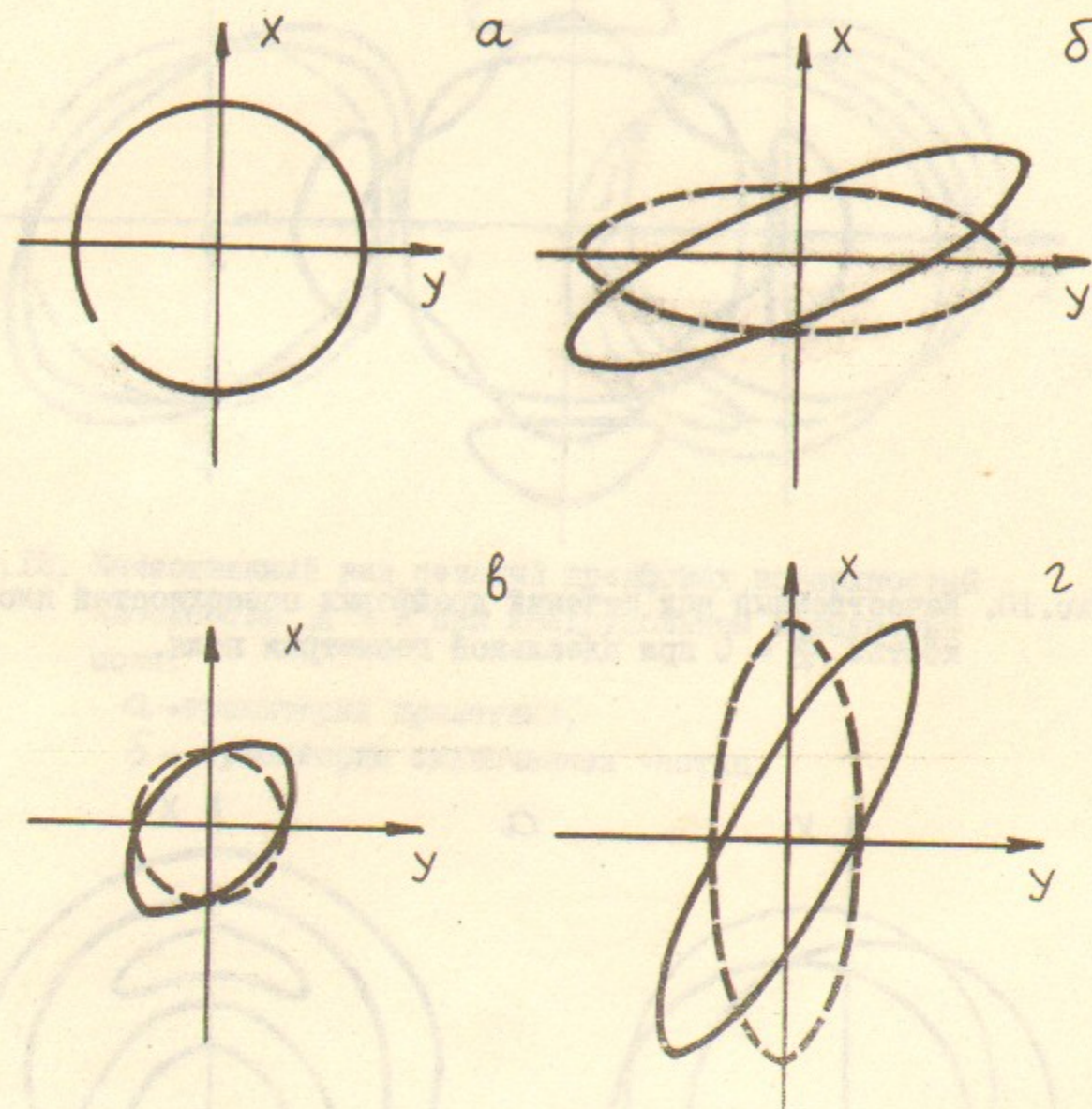


Рис.9. Качественный вид сечений магнитной поверхности плоскостями, перпендикулярными оси  $Z$  в различных её точках:

- а - в экваториальной плоскости центрального пробкотрона ( $Z = 0$  см),
- б - во внутренней пробке с южной стороны,
- в - в экваториальной плоскости концевое пробкотрона ( $Z = 224$  см),
- г - во внешней пробке с южной стороны.

Пунктирная линия - при идеальной геометрии поля, сплошная - при квадрупольном возмущении поля.

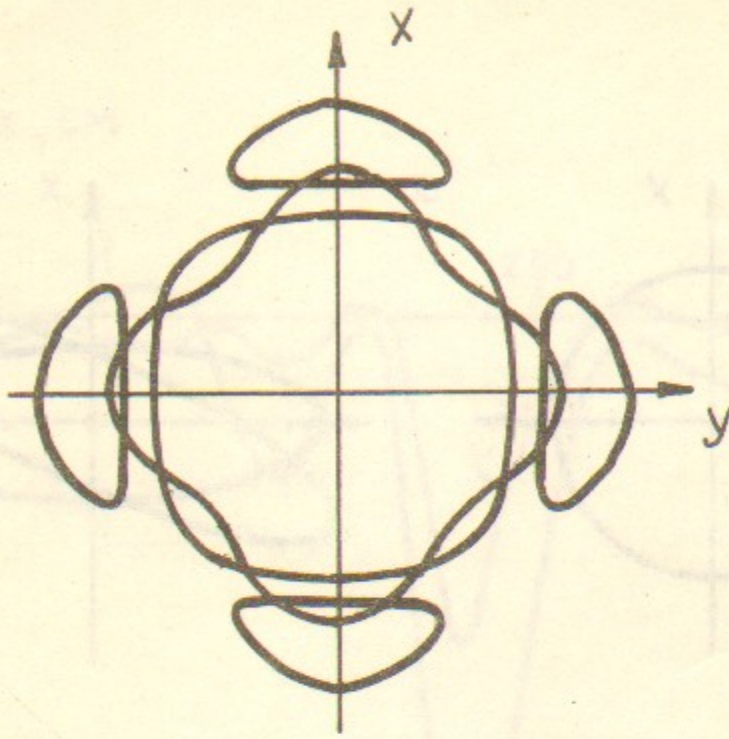


Рис.10. Качественный вид сечений дрейфовых поверхностей плоскостью  $z = 0$  при идеальной геометрии поля.

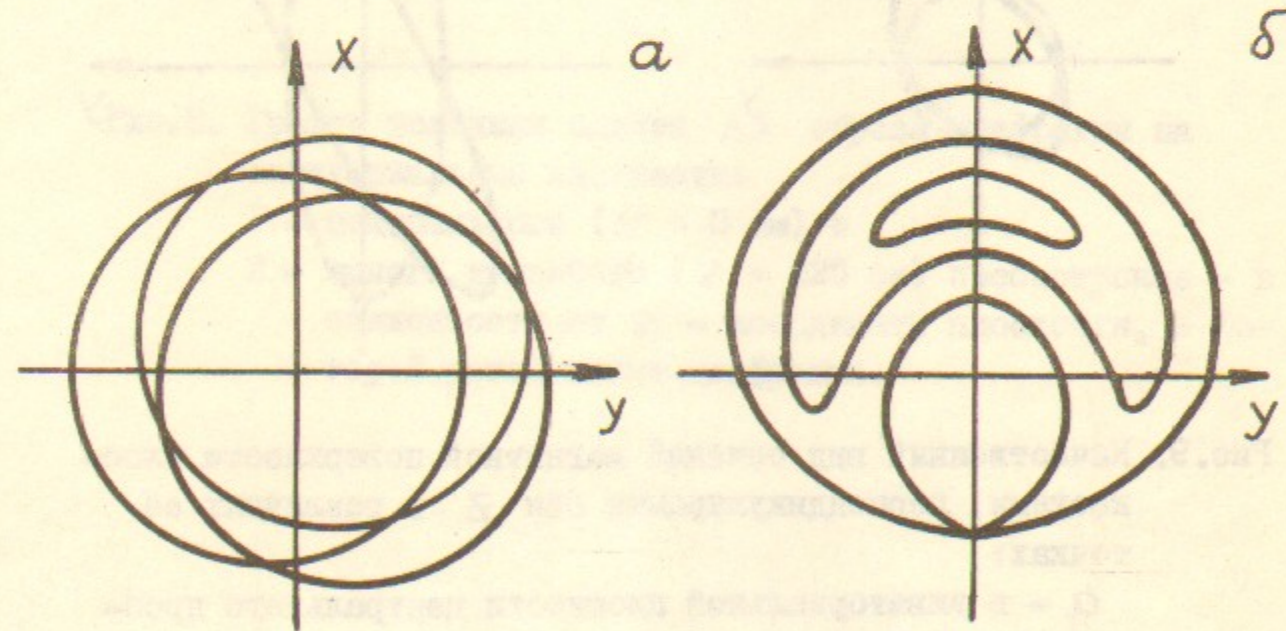


Рис.11. Качественный вид сечений дрейфовых поверхностей плоскостью  $z = 0$  при дипольном возмущении поля:

$a$  - траектории пролетных,  
 $b$  - траектории захваченных частиц.

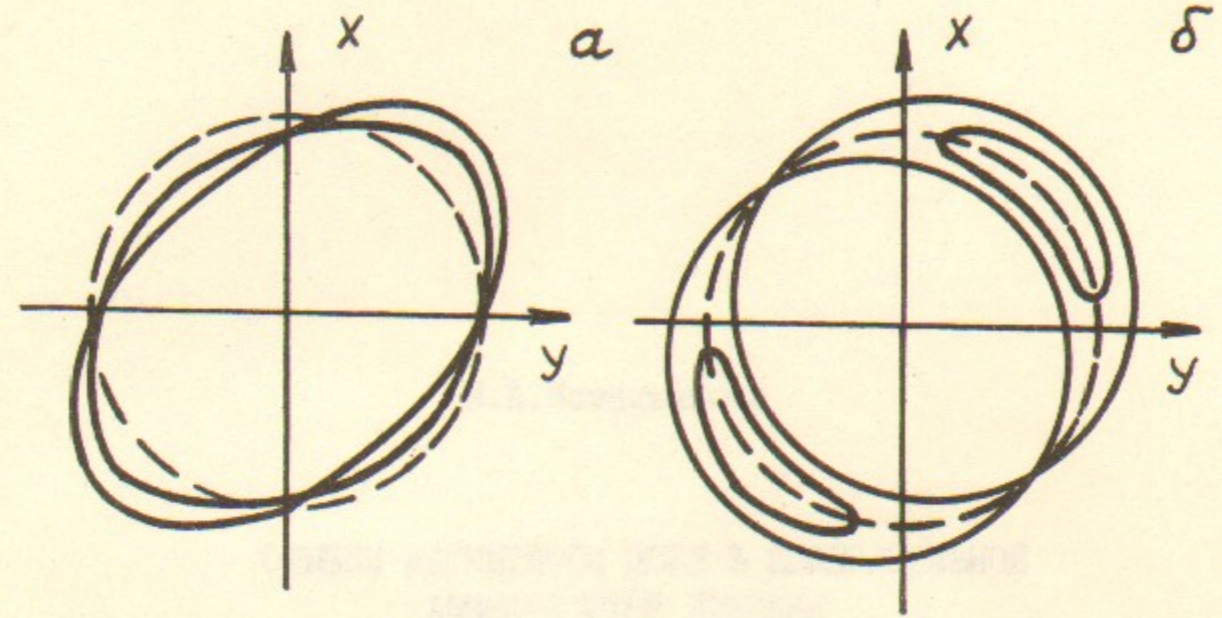


Рис.12. Качественный вид сечений дрейфовых поверхностей плоскостью  $z = 0$  при квадрупольном возмущении поля:

$a$  - траектории пролетных,  
 $b$  - траектории захваченных частиц.

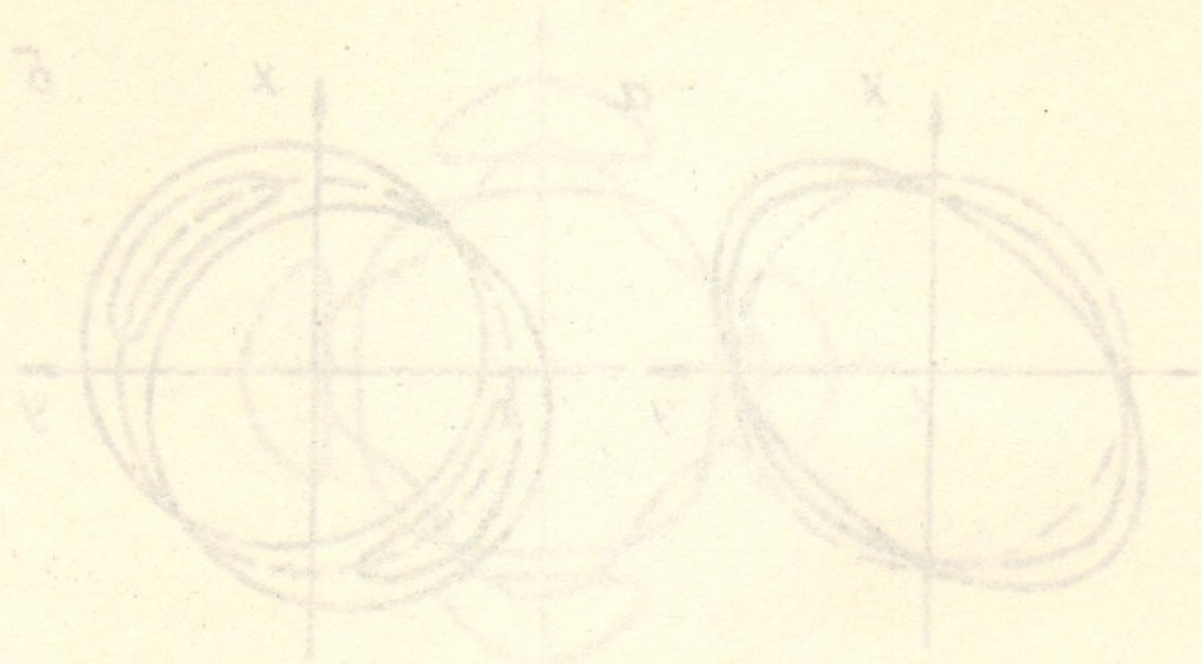


Рис. 12. Квадрупольное магнитное поле в квадрупольной амбиполярной ловушке. Показаны траектории частиц с различными энергиями и квантовыми числами. 1 - траектория частицы с минимальной энергией и нулевым квантовым числом. 2 - траектория частицы с минимальной энергией и ненулевым квантовым числом. 3 - траектория частицы с максимальной энергией и нулевым квантовым числом. 4 - траектория частицы с максимальной энергией и ненулевым квантовым числом.



Рис. 13. Квадрупольное магнитное поле в квадрупольной амбиполярной ловушке. Показаны траектории частиц с различными энергиями и квантовыми числами. 1 - траектория частицы с минимальной энергией и нулевым квантовым числом. 2 - траектория частицы с минимальной энергией и ненулевым квантовым числом. 3 - траектория частицы с максимальной энергией и нулевым квантовым числом. 4 - траектория частицы с максимальной энергией и ненулевым квантовым числом.

И.А.Котельников

ОШИБКИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В КВАДРУПОЛЬНОЙ  
АМБИПОЛЯРНОЙ ЛОВУШКЕ

Препринт  
№ 83-36

Работа поступила - I марта 1983 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
 Подписано к печати 14.03-1983 г. МН 03108  
 Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,6 печ.л., 1,3 учетно-изд.л.  
 Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 36.

---

Ротапринт ИЯБ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90