ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

В.И.Волосов, М.С.Пеккер

О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА - ПЛАНКА

ПРЕПРИНТ ИЯФ 79 - 44

Новосибирск

О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

В.И.Волосов, М.С.Пеккер

А Н Н О Т А Ц И Я

Сравниваются различные численные методы решения двумерной задачи для уравнения Фоккера-Планка. Рассматривается задача об удержании частиц в модифицированных открытых магнитных ловушках. Предложен метод решения с использованием полностью консервативной разностной схемы, которая позволяет находить численные решения при большом отношении времени удержания к времени кулоновского рассеяния. Проведены численные расчеты, показавшие эффективность этого метода.

Предложенный в работах А.А.Самарского принцип полной консервативности разностных схем является весьма результативным не только в гидродинамических задачах [I] , но также и в задачах переноса. В частности использование этого принципа является необходимым при решении ряда задач о нахождении параметров плазмы в открытых магнитных термоядерных ловушках [2,3,4] . В этих задачах требуется решать двумерное уравнение Фоккера-Планка (Ф.П.) в пространстве скоростей. Как было показано в [5] при достаточно большом отношении величины потенциального барьера , удерживающего плазму в ловушке, к температуре плазмы невозможно получить корректные решения этих задач при использовании разностных схем, в которых не выполняется принцип полной консервативности.

В данной работе анализируются ошибки, возникающие при использовании неполностью консервативных схем в задачах о магнитных ловушках. Построена полностью консервативная разностная схема решения двумерных Ф.П. уравнений для этих задач. Приведены результаты численных расчетов параметров плазмы для магнитной ловушки с вращающейся плазмой - одной из модификаций классической открытой ловушки [4] . Сравниваются результаты расчетов выполненных как по полностью консервативной, так и по обычной (неполностью консервативной) схемам.

I. Уравнение Фокеера-Планка, описывающее временную эволюцию функции распределения частиц в пространстве скоростей, имеет вид [6] :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \frac{4\pi e^4 Z_\alpha^4}{m_\alpha^2}\left[-\frac{\partial}{\partial V_k}\left(\frac{\partial H_\alpha}{\partial V_k} f_\alpha\right) + \frac{\partial^2}{\partial V_k \partial V_j}\left(f_\alpha \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial V_k \partial V_j}\right)\right] + S_\alpha \qquad \text{(I)}$$

где α - сорт частицы; m_α , Z_α - масса и заряд частицы; f_α - функция распределения частиц по скоростям;

$H_\alpha = \sum_\beta \ln\Lambda_{\alpha\beta} Z_\beta^2 / Z_\alpha^2 (1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}) h_\beta$; $G_\alpha = \sum_\beta \ln\Lambda_{\alpha\beta} Z_\beta^2 / Z_\alpha^2 g_\beta$;

S_α - функция источника; $g_\beta = \int f_\beta |v - v'| d^3 v'$; $h_\beta = \int f_\beta |v - v'|^{-1} d^3 v'$; $\ln\Lambda_{\alpha\beta}$ - кулоновский логарифм [6] . В магнитных ловушках функция распределения частиц не зависит от азимутального угла и симметрична относительно плоскости $\theta = 0$.

Граничные условия имеют вид:

$$\frac{\partial f_\alpha(\theta,v)}{\partial v} = 0 \quad \text{при} \quad v = 0;$$

$$\frac{\partial f_\alpha(\theta,v)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \text{ и } \theta = \pi/2 \quad ; \qquad (2)$$

$$f_\alpha = 0 \text{ на поверхности } (R-1)v^2\sin^2\theta - v^2\cos^2\theta + U_\alpha = 0$$

где R – пробочное отношение [2], U_α – потенциальный барьер удерживающий частицы сорта α. Поскольку, удержание частиц в ловушке растет с ростом отношения U_α к T_α (T_α – температура частиц), то обычно $U_\alpha/T_\alpha \gg 1$. Явный вид потенциала U_α и функции источника S_α определяется типом магнитной ловушки и методом инжекции.

2. Опишем обычный численный метод решения Ф.П.уравнений. Перейдем к безразмерным переменным. Как обычно, ограничимся нулевыми членами в разложении g и h по полиномам Лежандра. Для двухкомпонентной плазмы с $Z_i = I$, $m_i = I$ система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(A_\alpha f_\alpha + B_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}\right) + \frac{C_\alpha}{x^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial f_\alpha}{\partial\theta} + q_\alpha \qquad (3)$$

где:

$$A_\alpha = \frac{1}{m_\alpha^2}\sum_\beta \ln\Lambda_{\alpha\beta} N_\beta \frac{m_\alpha}{m_\beta}$$

$$B_\alpha = \frac{1}{m_\alpha^2}\sum_\beta \ln\Lambda_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{3x}E_\beta + \frac{x^2}{3}M_\beta\right)$$

$$C_\alpha = \frac{1}{m_\alpha^2}\sum_\beta \ln\Lambda_{\alpha\beta}\left(\frac{N_\beta}{2x} + \frac{x}{3}M_\beta - \frac{1}{6x^3}E_\beta\right)$$

$$N_\alpha = \int_0^x f_\alpha d^3x \;;\quad E_\alpha = \int_0^x f_\alpha x^2 d^3x \;;\quad M_\alpha = \int_0^\infty x^{-1} f_\alpha d^3x$$

$$\ln\Lambda_{\alpha\beta} = \ln\Lambda_{\alpha\beta}/\ln\Lambda_{ii}$$

Систему разностных уравнений получим заменой дифференциальных операторов

$$\ell^\alpha_{xx} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}B_\alpha\frac{\partial}{\partial x}\,,\quad \ell^\alpha_x = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}A_\alpha\,,\quad \ell^\alpha_{\theta\theta} = \frac{C_\alpha}{x^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

на разностные по формулам:

$$L_{xx}f = \frac{1}{x^2\delta x^2}\left[(f_{k,j+1} - f_{k,j})B_{j+1/2} - (f_{k,j} - f_{k,j-1})B_{j-1/2}\right]$$

$$L_x f = \frac{1}{x^2\delta x}\left[f_{k,j+1/2}A_{j+1/2} - f_{k,j-1/2}A_{j-1/2}\right] \qquad (5)$$

$$L_{\theta\theta}f = \frac{C}{x^2\sin\theta\,\delta\theta^2}\left[\sin(\theta+\delta\theta/2)(f_{k+1,j} - f_{k,j}) - \sin(\theta-\delta\theta/2)(f_{k,j} - f_{k-1,j})\right]$$

Система разностных уравнений

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \left(L^\alpha_{xx} + L^\alpha_x + L^\alpha_{\theta\theta}\right) f_\alpha + q_\alpha \qquad (6)$$

решается обычно методом переменных направлений. Система (6) является неполностью консервативной, т.к. не имеет разностного аналога закона сохранения. Энергия в (6) сохраняется с точностью δx^2. Нетрудно видеть, что аппроксимационные ошибки по x являются фиктивными источниками энергии, которые приводят к охлаждению плазмы. Сравнивая потоки за счет диссипативных свойств разностных уравнений (6) и за счет ухода частиц из ловушки получим условие при котором фиктивные потери малы и практически не влияют на результаты расчетов:

$$\frac{m_\alpha \delta x_\alpha^2}{T_\alpha} \ll e^{-U_\alpha/T_\alpha} \qquad (7)$$

где δx_α – шаг сетки по x для частиц сорта α. Это условие может накладывать более жесткие ограничения на δx_α чем условие аппроксимации. Для конкретных задач можно получить более точную оценку через параметры задачи, т.к. величины U_α и T_α сами являются результатом расчета (см. [5]). Заметим, что учет высших гармоник в g и h также приводит к фиктивным источникам энергии $\sim \delta\theta^2$ [5].

3. Уравнение (I) имеет три интегральных закона сохранения, соответствующие законам сохранения частиц, энергии и импульса, поэтому полностью консервативная разностная схема соответственно должна обладать тремя разностными аналогами законов сохранения. Ранее была предложена полностью консервативная схема для уравнения Ф.П. зависящего от одной переменной модуля скорости [7] . Для численного решения двумерной задачи изменим уравнение (2) так, чтобы можно было применить метод построения полностью консервативной разностной схемы. Это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{m_\alpha x^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x}\frac{\partial W_\alpha}{\partial x} + \frac{C_\alpha}{x^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta\frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + q_\alpha \qquad (8)$$

где : $W_\alpha = \ln\Lambda_{\alpha\beta}\int_0^x \left[P_\alpha(y,\theta) f_\alpha(x,\theta) - P_\alpha(x,\theta) f_\alpha(y,\theta)\right] y^2 dy +$

$$\sum_\beta{}' \Big[\frac{m_\alpha}{m_\beta}\ln\Lambda_{\alpha\beta}\int_0^x \left(P_\alpha(x,\theta) - P_\alpha(y,\theta)\right) f_\beta(y,\theta)\, y^2 dy +$$

$$\ln\Lambda_{\alpha\beta}\int_0^x \left(f_\alpha(y,\theta) - f_\alpha(x,\theta)\right) P_\beta(y,\theta)\, y^2 dy\Big] \;\; ; \;\; P_\alpha(x,\theta) = \int_x^\infty f_\alpha(y,\theta)\, y\, dy .$$

Заменим в уравнении (8) дифференциальные операторы

$$l^\alpha_{xx} = \frac{1}{m_\alpha^2 x^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} \;, \quad l^\alpha_{\theta\theta} = \frac{C}{x^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

на разностные по формулам:

$$L_{xx} W = \frac{1}{m^2 x^2 \delta x^2}\left[\frac{W_{k+1,j} - W_{k,j}}{x_{j+1} - x_j} - \frac{W_{k,j} - W_{k-1,j}}{x_j - x_{j+1}}\right]$$

$$L_{\theta\theta} f = \frac{C}{x^2 \sin\theta\, \delta\theta^2}\left(\sin\left(\theta + \frac{\delta\theta}{2}\right)\left(f_{k+1,j} - f_{k,j}\right) - \sin\left(\theta - \frac{\delta\theta}{2}\right)\left(f_{k,j} - f_{k-1,j}\right)\right).$$

Полученная при этом система разностных уравнений

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = L^\alpha_{xx} W_\alpha + L^\alpha_{\theta\theta} f_\alpha + q_\alpha \qquad (9)$$

является полностью консервативной т.к. обладает всеми разностными аналогами законов сохранения. Уравнение (8) после простых преобразований преобретает вид (3) с коэффициентами A_α и B_α зависящими от θ .

$$A_\alpha = \frac{2\pi}{m_\alpha^2}\sum_\beta \ln\Lambda_{\alpha\beta}\int_0^x f_\beta(\theta,y)\, y^2 dy \frac{m_\alpha}{m_\beta}$$

$$B_\alpha = \frac{2\pi}{m_\alpha^2}\sum_\beta \ln\Lambda_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{3x}\int_0^x f_\beta(\theta,y)\, y^4 dy + \frac{x^2}{3}\int_x^\infty f_\beta(\theta,y)\, y\, dy\right).$$

При $U_\alpha \gg T_\alpha$ функция распределения f_α заметно отличается от Максвелловской функции только вблизи границы области удержания. Поэтому неизотропные части A_α и B_α в e^{U_α/T_α} раз меньше изотропных частей A_α и B_α . Аналогично неизотропные части функций g и h экспоненциально малы по сравнению с изотропными частями. Таким образом, при $U_\alpha \gg T_\alpha$ решения уравнений (8) экспоненциально мало отличаются от решений уравнений (I).

4. Приведем результаты расчетов выполненных на основе разностных уравнений (6), (9) для ловушки с вращающейся плазмой [4] .

Потенциальные барьеры и источники для этой задачи имеют вид:

$$U_i = 1 - 1/R - U_e$$
$$q_i = \delta(x-1)\,\delta(\theta - \pi/2) \qquad (10)$$
$$q_e = \delta(x)$$

U_e - находится из условия квазинейтральности плазмы:

$$\frac{d}{dt}\int f_e\, d^3x = \frac{d}{dt}\int f_i\, d^3x \;. \qquad (11)$$

Обычно для упрощения задачи, вместо двумерного уравнения описывающего временную эволюцию функции распределения электронов рассматривается приближенное одномерное уравнение [8] ; тогда система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \left(l^i_{xx} + l^i_x + l^i_{\theta\theta}\right) f_i + q_i$$
$$\qquad (12)$$
$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \left(l^e_{xx} + l^e_x - \frac{C_e \lambda_e}{x^2}\right) f_e + q_e$$

где $\lambda_e = 0$ при $x < \sqrt{\frac{2U_e}{m_e}}$ и $\lambda_e = \log\left(\frac{R m_e x^2}{m_e x^2 - 2U_e}\right)$ при $x > \sqrt{\frac{2U_e}{m_e}}$

На рисунках I,2,3 приведены результаты расчетов параметров плазмы $n\tau$, T_i и $T_e, T_i/U_i$ в зависимости от R выполненных различными методами для ловушки с вращающейся плазмой ($n\tau = \frac{N^2(\infty)}{\int q_i\, d^3x}$).

А. Расчеты выполненные обычным численным методом (п2). Наличие фиктивных потерь энергии при расчете по неполностью консервативной разностной системе уравнений (6) приводит к жестким ограничениям на шаги сетки δx_i и δx_e. Условие, при котором отсутствуют численные решения в задаче об удержании частиц в ловушке с вращающейся плазмой полученное аналогично (7) имеет вид [5] :

$$\delta x_i^2 + \delta x_e^2 \sqrt{m_e} > e^{-R} R^{-2} / (0.15\, \pi^{1/2} m_e^{1/4}). \qquad (13)$$

При выполнении (I3) в численных расчетах должен наблюдаться неограниченный рост плотности плазмы и падение температуры ионов и электронов к нулю.

Из (I3) получаем, что число расчетных точек по x для нахождения f_e в $m_e^{-1/4}$ раз больше чем для f_i, что существенно затрудняет расчет, увеличивая его время. Однако, т.к. в этой задаче T_e много меньше U_e из-за большой подвижности электронов по сравнению с ионами, то функция f_e близка к Максвелловской функции f_M ($f_e = f_M \left(\frac{x^2 m_e}{2U_e}\right)^{-\lambda_e/4}$). Подставляя Максвелловскую функцию во второе уравнение (I2) и интегрируя его по d^3x и $x^2 d^3x$ получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения, описывающих изменение плотности и энергии электронов во времени. В расчетах из этих уравнений определялась температура электронов и потенциальный барьер U_e. Функция распределения f_i определялась из решения разностного уравнения (6) соответствующего (I2). Кривая II на рисунках I,2,3 была получена этим методом при $\delta x_i = 0{,}02$ и $\delta\theta = 0{,}025 \times \pi$, При $R \geqslant 7$ отсутствуют равновесные решения, что совпадает с оценкой (I3) при $\delta x_i = 0{,}02$.

Аналогичные расчеты для этой задачи были выполнены А.Мирином и А.Фатчем в Ливерморской лаборатории [9] . В их расчете f_e находилось из численного решения одномерного уравнения системы (I2). Шаги сетки по x и θ были равны $\delta x_i = 0{,}028$; $\delta\theta = 0{,}05 \times \pi$. Шаг сетки по x для электронов был переменным; с ростом x он увеличивался ($\delta x_e = 1{,}06 \times \delta x_e$); средний шаг был равен 0,73. На рисунках результаты расчета представлены кривой I. Отсутствие равновесных решений в этом расчете наблюдалась при $R \geqslant 4{,}5$ и связано с выполнением условия (I3) на шаг δx_e.

Б. Расчеты выполненные по полностью консервативной схеме (п.3). В этих расчетах температура электронов и потенциал U_e определялись из дифференциальных уравнений аналогично расчету описанному выше. Для нахождения f_i из разностного уравнения (9) использовалась схема стабилизирующей поправки, которая оказалась много эффективнее схемы переменных направлений [10] . Шаг сетки по x был равен 0,02 по $\theta - 0{,}025 \times \pi$. На рисунках результаты расчета представлены кривой III. Расхождение между кривыми II и III на рисунке 2 при $R > 4$ объясняется ростом фиктивных потерь энергии. Из графиков видно, что даже при малом отношении U_i к T_i соответствующих малому пробочному отношению измененное уравнение (8) дает результаты достаточно близкие к результатам полученным из решения уравнений (I2). Применение полностью консервативной схемы позволяет решить задачу об удержании частиц в ловушке практически для любого R.

В заключение авторы благодарят Н.Н.Яненко обратившего их внимание на эффективный метод расчета.

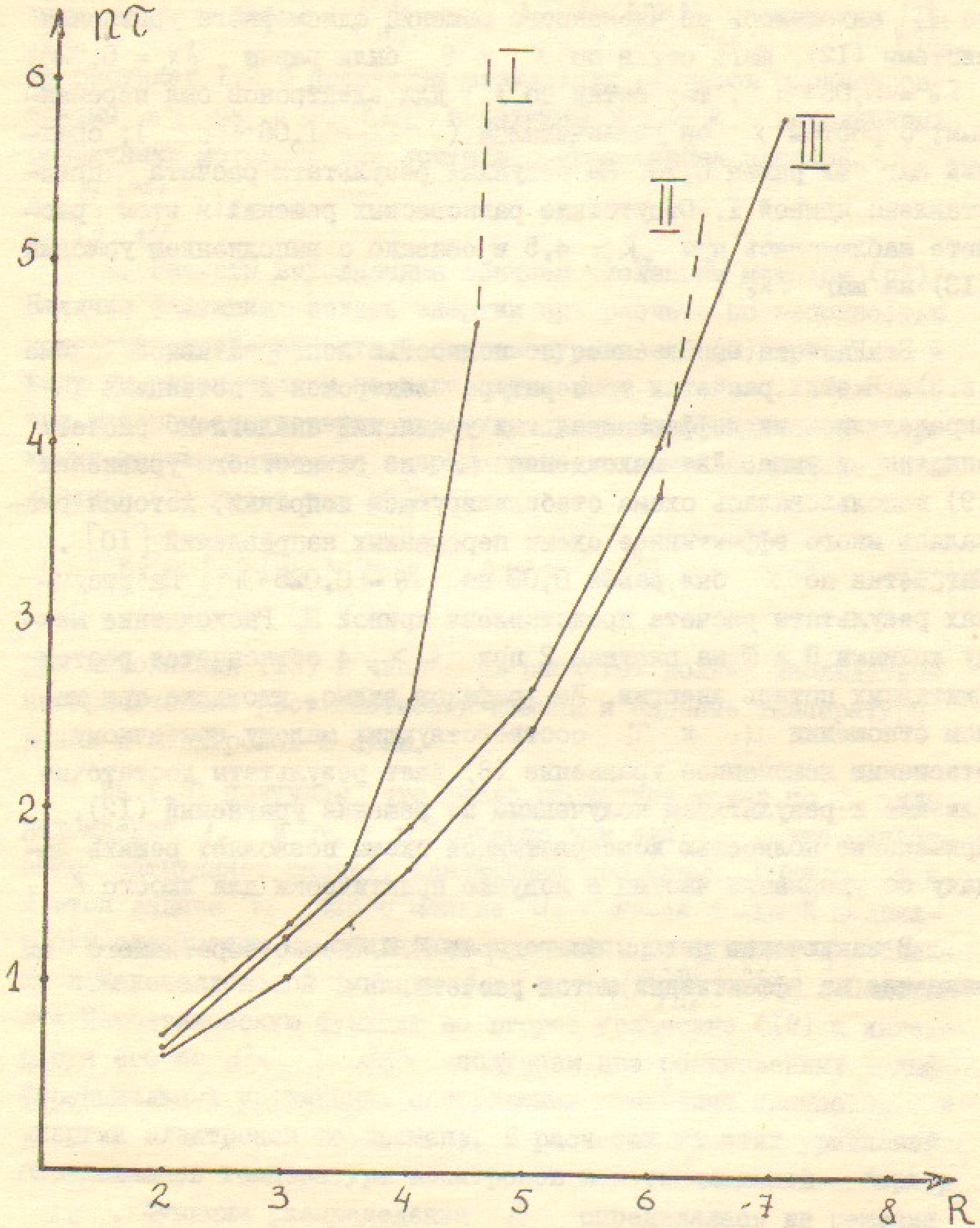

Рис.I. Зависимость величины $n\tau$ от R.

I – из работы [9], II – обычная неполностью консервативная схема, III – полностью консервативная схема. Штриховой линией показано продолжение кривых в области где нарушено условие (I3).

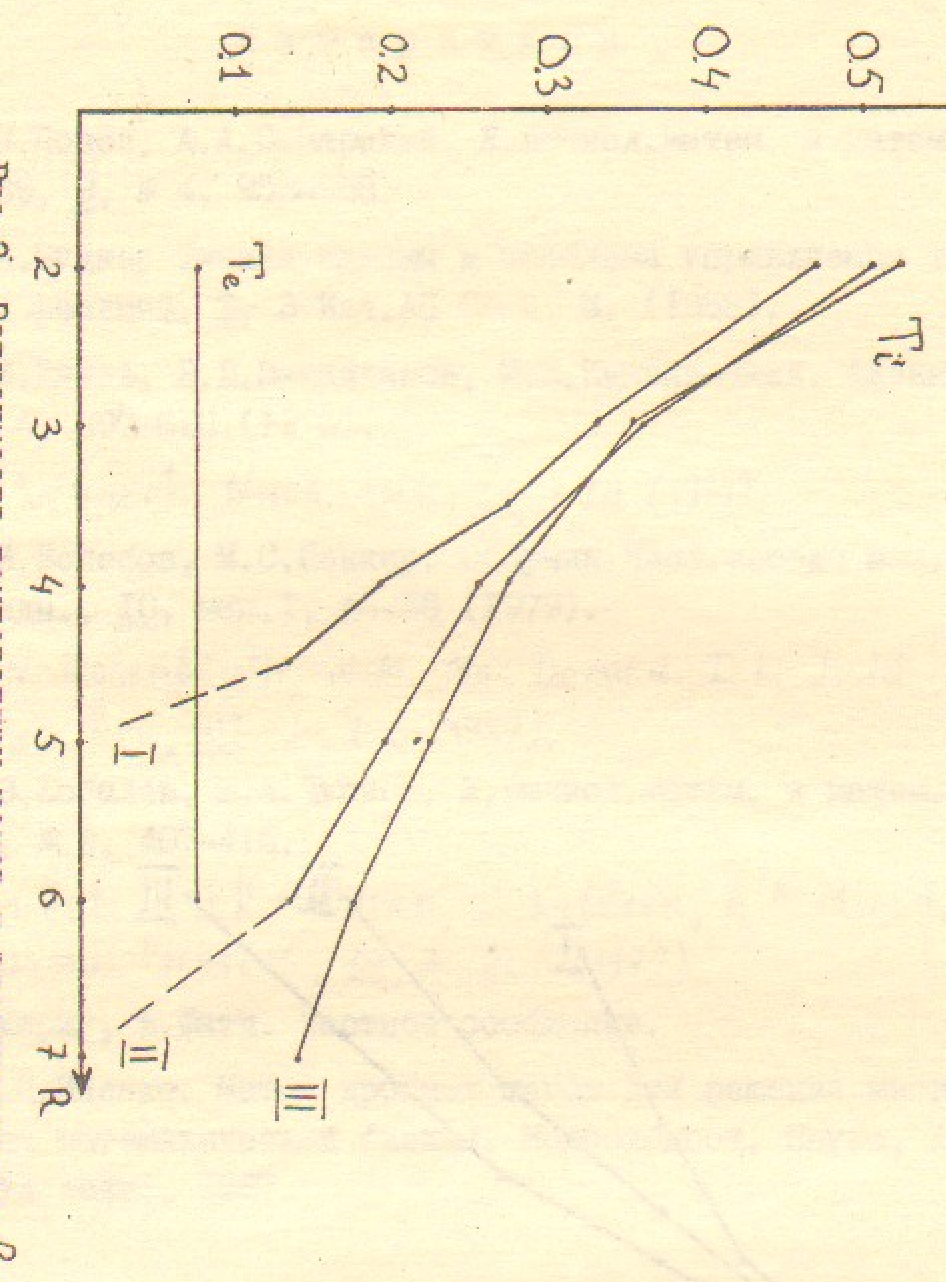

Рис.2. Зависимость температуры ионов и электронов от R. Обозначения теже, что и на рис.I.

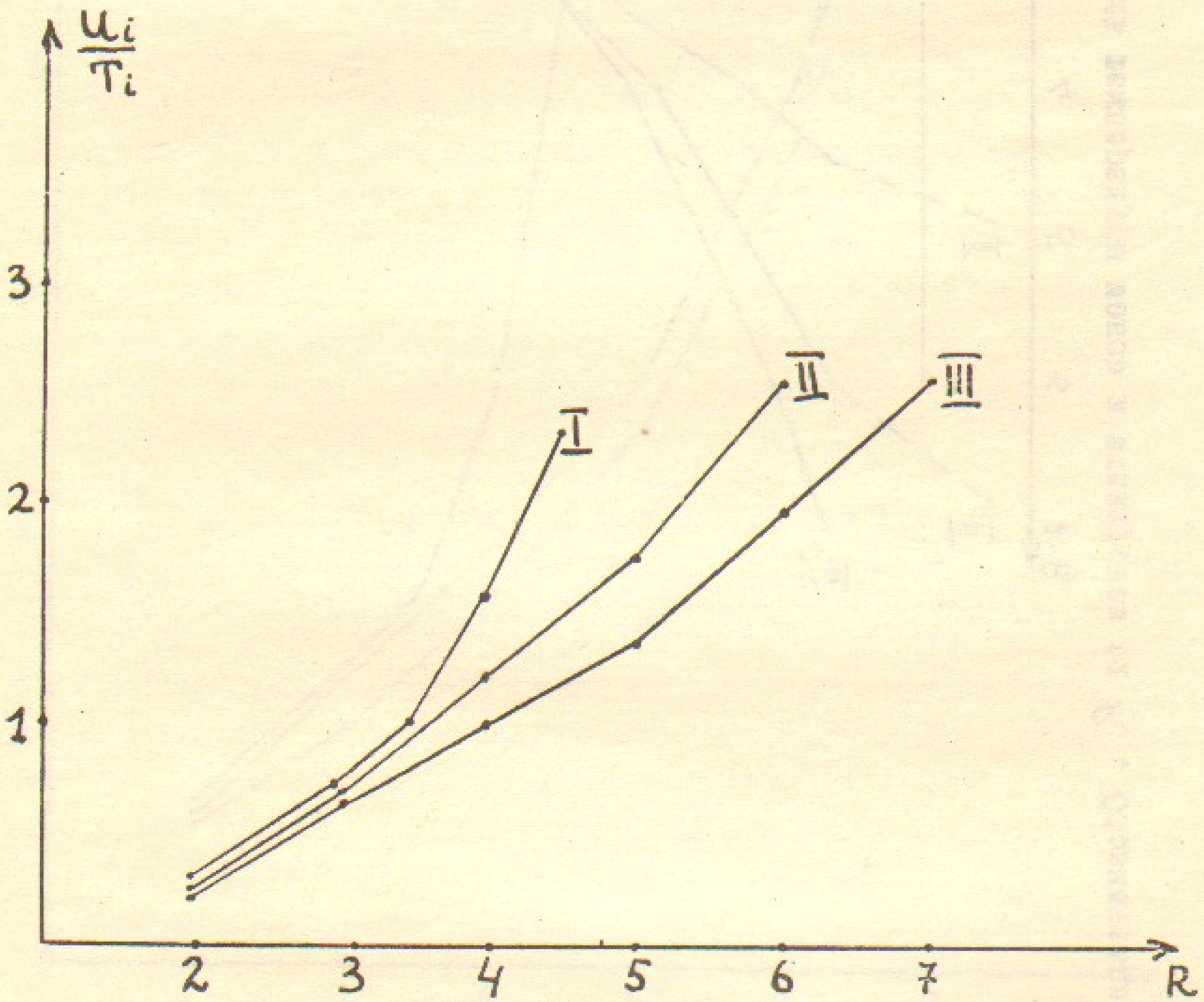

Рис.3. Зависимость величины u_i/T_i от R.
Обозначения теже, что и на рис.I.

Литература

I. Ю.П.Попов, А.А.Самарский. Ж.вычисл.матем. и матем. физ., I969, 9, № 4, 953–958.

2. Г.И.Будкер Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 3, 3 Изд.АН СССР, М. (I958).

3. Г.И.Димов, В.В.Закайдаков, М.Е.Кишеневский. Физика плазмы, 2, 4, 597–6I0 (I976).

4. B. Lehnert. Nucl. Fus., 11, 485 (1971).

5. В.И.Волосов, М.С.Пеккер. Сборник Числ.методы мех.сплошн. среды., I0, вып.I, 45–56 (I979).

6. M.N. Rosenbluth, W.M. MacDonald, D.L. Judd. Phys. Rev., 107, 1, 1-6 (1957).

7. А.В.Бобылев, В.А.Чуянов. Ж.вычисл.матем. и матем.физ., I976, I6, № 2, 407–4I6.

8. A.H. Futch, J.R. Holdren, J. Killeen, A.A. Mirin. Plasma Physics, 14, 3, 211 (1972).

9. А.Мирин, А.Фатч. Частное сообщение.

I0. Н.Н.Яненко. Метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Наука, АН СССР Сиб. отделение, I967.