10

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

В.Н.Иванченко, Э.А.Кураев, В.С.Фадин

ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ ОБРАЗОВАНИЯ СТРУЙ В e^+e^- АННИГИЛЯЦИИ

ПРЕПРИНТ ИЯФ 79 - 13

Новосибирск

ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ ОБРАЗОВАНИЯ СТРУЙ В e^+e^- АННИГИЛЯЦИИ

В.Н.Иванченко, Э.А.Кураев, В.С.Фадин

Изучено образование трех глюонов при аннигиляции e^+e^- пары при высоких энергиях в однофотонном канале по механизму рассеяния света на свете. Приводятся численные оценки для распределения в Далиц-плоскости. Проводится сравнение с процессом аннигиляции e^+e^- в пару кварк-антикварк с дополнительным глюоном. Показано, что второй механизм образования трех струй превалирует над первым во всех областях Далиц-плоскости.

Отличие амплитуд e^+e^- аннигиляции в три глюона по механизму рассеяния света светом (рис.Ia) от вклада соответствующей диаграммы в QED в амплитуду процесса $e^+e^- \to 3\gamma$ заключается в дополнительном множителе $Tr\, t^a t^b t^c = (d_{abc} + i f_{abc})/4$, где $t_a = \lambda_a/2$ – генераторы цветной группы $SU(3)$, которые согласно правилам Фейнмана сопоставляются вершинам с испусканием глюона. Здесь d_{abc} и f_{abc} – симметричная и антисимметричная по цветовым индексам a, b, c структуры. В силу антисимметричности f_{abc} выпадает в сумме амплитуд, отличающихся направлением фермионной линии в петле на рис.Ia. Таким образом, в отличие от QED, в сечении процесса образования трех глюонов, просуммированного по их цветовым степеням свободы возникает лишь множитель $d^2_{abc}/16 = 5/6$. Квантовомеханическое рассмотрение процессов с участием четырех фотонов в наиболее полной форме было проведено в работе Константини, Де Толлиса и Пистони /I/, чьими результатами мы и пользуемся в настоящей работе.

Вычисления ниже мы проведем для случая QED, а переход и QCD сделаем в конечном выражении. Дифференциальное сечение имеет вид (/I/, (76), (66)).

$$d\sigma = \frac{\alpha^5}{2^7 \pi^4 s^3} \sum |M|^2 \frac{d^3k_2\, d^3k_3\, d^3k_4}{\omega_2 \omega_3 \omega_4} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - k_2 - k_3 - k_4), \qquad (\mathrm{I})$$

$$s = 4\varepsilon^2, \quad \sum |M|^2 = 2\left[|M_{+++}|^2 + |M_{++-}|^2 + |M_{+-+}|^2 + |M_{-++}|^2 \right].$$

Входящие в (I) выражения для $|M_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}|^2$ могут быть преобразованы к виду

$$|M_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}|^2 = Sp\, \hat{p}_+ \gamma_\mu \hat{p}_- \gamma_\nu\, G_\mu^{\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \left(G_\nu^{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}\right)^* = 2s\, \delta^\perp_{\mu\nu}\, G_\mu^{\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \left(G_\nu^{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}\right)^*,$$

где величины $G_\mu^{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ даются выражением (/I/, (64))

$$G_\mu^{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234) = \frac{i}{4\sqrt{2\Delta}} \Big\{ E^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234)\left(k_3 - \frac{\nu_3}{\nu_2} k_2\right)_\mu - E^{(1)}_{\lambda_2\lambda_4\lambda_3}(243)\left(k_4 - \frac{\nu_4}{\nu_2} k_2\right)_\mu \qquad (2)$$

$$+ E^{(2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234) \cdot i\, \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\, q^\alpha k_2^\beta k_3^\gamma \Big\}, \quad q = p_+ + p_-, \quad \Delta = \varepsilon^6 (1-\nu_2)(1-\nu_3)(1-\nu_4), \quad \nu_i = \frac{\omega_i}{\varepsilon},$$

а величины $E^{(1,2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234)$ приведены в приложении I. Наша цель – получить распределение по долям энергий y_2, y_3, y_4 конечных глюонов. Мы придем к ней двумя путями. Один из них позволяет попутно получить возможно имеющее интерес распределение по угловым переменным. Для этого запишем фазовый объем конечных частиц в виде:

$$\frac{d^3k_2\, d^3k_3\, d^3k_4}{\omega_2\omega_3\omega_4}\,\delta^{(4)}(p_+ + p_- - k_2 - k_3 - k_4) = \pi s\, dy_2\, dy_3 \frac{dz_2\, dz_3}{\sqrt{\mathcal{D}_{23}}} = \pi s\, dy_3\, dy_4 \cdot \tag{3}$$

$$\cdot \frac{dz_3\, dz_4}{\sqrt{\mathcal{D}_{34}}} = \pi s\, dy_4\, dy_2 \frac{dz_4\, dz_2}{\sqrt{\mathcal{D}_{42}}}, \quad \mathcal{D}_{23} = 1 - z_2^2 - z_3^2 - c_{23}^2 + 2 z_2 z_3 c_{23},$$

где $z_i = \cos(\widehat{\vec{k}_i, \vec{p}_-})$ – косинусы углов вылета конечных глюонов к оси пучка $(\vec{p}_-)$, $c_{ik} = \cos(\widehat{\vec{k}_i, \vec{k}_k})$ – косинус угла в U_s –системе между импульсами i-го и k-го глюона. Из законов сохранения можно получить: $c_{23} = 1 - 2(1-y_4)/y_2 y_3$. Искомое распределение получается подстановкой в (I) выражений (2) и (3), где

$$\sigma_\mu^{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}\left(\sigma_\nu^{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}\right)^* \delta^{\perp}_{\mu\nu} = \frac{2}{(1-y_2)(1-y_3)(1-y_4)} \Big\{ \Big[4\frac{y_3}{y_2}(1-y_4) - y_3^2 (z_3 - z_2)^2\Big] \Big|\mathcal{E}^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234)\Big|^2 + \tag{4}$$

$$+ \Big[4\frac{y_4}{y_2}(1-y_3) - y_4^2 (z_2 - z_4)^2\Big] \Big|\mathcal{E}^{(1)}_{\lambda_2\lambda_4\lambda_3}(243)\Big|^2 - 2\Big[4\frac{(1-y_3)(1-y_4)}{y_2} - y_3 y_4 (z_3 - z_2)(z_4 - z_2)\Big] \times$$

$$\times\, \mathcal{E}^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234) \left(\mathcal{E}^{(1)}_{\lambda_2\lambda_4\lambda_3}(243)\right)^* + \Big[4(1-y_2)(1-y_3)(1-y_4) - y_2^2 y_3^2 \mathcal{D}_{23}\Big] \Big|\mathcal{E}^{(2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234)\Big|^2 \Big\},$$

$$\mathcal{E}^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234) = \frac{1}{8\varepsilon^2} E^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234), \quad \mathcal{E}^{(2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234) = \frac{1}{4} E^{(2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234).$$

Дальнейшее интегрирование по z_2, z_3 по области $\mathcal{D}_{23} > 0$ является элементарным. К примеру:

$$\int_{-1}^{1} dz_2 \int_{z_-}^{z_+} \frac{dz_3}{\sqrt{\mathcal{D}_{23}}} = 2\pi, \quad \int d^2z\, \frac{(z_2 - z_3)^2}{\sqrt{\mathcal{D}_{23}}} = \frac{4\pi}{3}(1 - c_{23}), \quad \int d^2z \sqrt{\mathcal{D}_{23}} = \frac{2\pi}{3}(1 - c_{23}^2),$$

$$\int d^2z\, \frac{(z_3 - z_2)(z_4 - z_2)}{\sqrt{\mathcal{D}_{23}}} = \frac{4\pi}{3}\, \frac{1-y_3}{y_4}(1 - c_{23}).$$

В результате приходим к распределению в Далиц-плоскости:

$$\frac{d^2\sigma}{dy_2\, dy_3} = \frac{\alpha^5}{3\pi^2 s} \frac{1}{(1-y_2)(1-y_3)(1-y_4)} \Big[A_{+++}(234) + A_{-++}(234) + A_{+-+}(234) + A_{++-}(234)\Big],$$

$$A_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234) = \frac{y_3(1-y_4)}{y_2} \Big|\mathcal{E}^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234)\Big|^2 + \frac{y_4(1-y_3)}{y_2} \Big|\mathcal{E}^{(1)}_{\lambda_2\lambda_4\lambda_3}(243)\Big|^2 - \tag{5}$$

$$-2\,\mathrm{Re}\, \mathcal{E}^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234)\, \mathcal{E}^{(1)*}_{\lambda_2\lambda_4\lambda_3}(243) \frac{(1-y_3)(1-y_4)}{y_2} + (1-y_2)(1-y_3)(1-y_4) \Big|\mathcal{E}^{(2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234)\Big|^2.$$

Этот результат можно было бы получить и минуя распределение по z_i, y_i (4). Для этого заметим, что токовый тензор начальных электрона и позитрона $J_{\mu\nu} = \mathrm{Sp}\, \hat{p}_+ \gamma_\mu \hat{p}_- \gamma_\nu$ также как и величина $\sigma_\mu \sigma_\nu^*$ удовлетворяют закону сохранения тока: $q_\mu \sigma_\mu = 0$, $q_\mu J_{\mu\nu} = 0$, $q_\mu = (p_+ + p_-)_\mu$. Усредненный по угловым переменным тензор $\sigma_\mu \sigma_\nu^*$ может зависеть лишь от $g_{\mu\nu}$ и $q_\mu q_\nu$. С условием сохранения тока это дает:

$$\overline{\sigma_\mu \sigma_\nu^*} = \frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \sigma_\lambda \sigma_\lambda^*. \tag{6}$$

Далее, поскольку токовый тензор тоже калибровочно-инвериантен, величину $q_\mu q_\nu$ можно в (6) опустить. Свертка $\sigma_\lambda \sigma_\lambda^*$ является функцией лишь y_i. Интегрирование же фазового объема дает немедленно:

$$\int \frac{d^3k_2\, d^3k_3\, d^3k_4}{\omega_2\omega_3\omega_4}\,\delta^{(4)}(p_+ + p_- - k_2 - k_3 - k_4) = 2\pi^2 s\, dy_2\, dy_3\, dy_4\, \delta(y_2 + y_3 + y_4 - 2).$$

Выражение (5) удобно записать в явно симметричном виде, пользуясь связями $E^{(i)}_{\lambda\lambda\lambda}$ (/I/, (68); (см. Приложение I)). Окончательный вид распределения в Далиц-плоскости процесса $e^+e^- \to 3g$:

$$\frac{d^2\sigma^{e^+e^-\to 3g}}{dy_2\, dy_3} = \frac{\alpha^2 \alpha_s^3}{3!\, 3\pi^2 s}\, \frac{5}{6} Q_q^2 \Big[R(423) + R(342) + R(234)\Big], \tag{7}$$

$$R(234) = R(243) = \frac{1}{3}\Big|\mathcal{E}^{(2)}_{-++}(234)\Big|^2 + \Big|\mathcal{E}^{(2)}_{+++}(234)\Big|^2 + \frac{y_2}{y_3 y_4 (1-y_2)} \Big|\mathcal{E}^{(1)}_{-++}(324)\Big|^2 +$$

$$+ \frac{1}{y_2^2}\Big|\mathcal{E}^{(1)}_{+++}(234) + \mathcal{E}^{(1)}_{+++}(243)\Big|^2 + \frac{(1-y_3)(1-y_4)}{y_2^2(1-y_2)} \left|\frac{\mathcal{E}^{(1)}_{+++}(234)}{1-y_3} - \frac{\mathcal{E}^{(1)}_{+++}(243)}{1-y_4}\right|^2.$$

Величины $\mathcal{E}^{(1,2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234)$ несколько громоздки. Они приводятся в приложении I. Мы ввели в (7) множитель $1/3!$, учитывающий тождественность глюонов, предполагая дальнейшее интегрирование по y_i. Множитель $5/6$ представляет, как говорили выше, учет цвета: $(1/16)d^2_{abc}=5/6$. Множитель Q_q^2 есть квадрат заряда кварка в единицах e. Протабулированное выражение (7) представлено на диаграмме Далица для $\varepsilon/m=1$ (рис.2). Мы приведем еще выражение для вклада в распределение по y_2, y_3, соответствующего легким кваркам ($m/\varepsilon\to 0$) для $y_i\sim 1, 1-y_i\sim 1$. При этом выражения для амплитуд $\mathcal{E}^{(i)}$ оказываются реальными и не содержат "больших" логарифмов ($\ln(\varepsilon/m)$), (рис.3, рис.5):

$$R(234)\to\tilde{R}(234)=\frac{4}{3}+\Big[\frac{2(1-y_3)}{y_3(1-y_2)}(2y_3+y_2-1)b_s+\frac{2(1-y_4)}{y_4(1-y_2)}(2y_4+y_2-1)b_t-$$
$$-\Big(\frac{2y_2}{1-y_2}+\frac{4(1-y_3)(1-y_4)}{(1-y_2)^2}\Big)\alpha\Big]^2+\frac{1}{y_2^2}\Big\{\frac{2(1-y_3)(1-y_4)(2-y_2)}{y_3y_4}+\frac{2(1-y_3)}{y_3^2(1-y_2)}\big[y_3(y_3- \qquad (8)$$
$$-y_4)(1-y_2)+2(1-y_4)(1-y_2+y_3)\big]b_s+\frac{2(1-y_4)}{y_4^2(1-y_2)}\big[y_4(y_4-y_3)(1-y_2)+2(1-y_3)(1-y_2+y_4)\big]b_t+$$
$$+\frac{2}{(1-y_2)^2}\big[(1-y_2)(y_3-y_4)^2-2y_2(1-y_3)(1-y_4)\big]\alpha\Big\}^2+\frac{(1-y_3)(1-y_4)}{y_2^2(1-y_2)}\Big\{\frac{2(1-y_2)(y_3-y_4)}{y_3y_4}+\frac{4}{y_3^2}(1-y_4-$$
$$-2y_3(1-y_3))b_s-\frac{4}{y_4^2}(1-y_3-2y_4(1-y_4))b_t+\frac{4(y_4-y_3)}{1-y_2}\alpha\Big\}^2,$$

$$b_s=\frac{1}{2}\ln(1-y_3),\quad b_t=\frac{1}{2}\ln(1-y_4),\quad \alpha=\frac{1}{2}\big[\Phi(y_3)+\Phi(y_4)+\xi_2-\ln(1-y_3)\ln(1-y_4)\big],$$
$$\Phi(x)=\int_0^x(dt/t)\ln(1-t),\quad \xi_2=\pi^2/6.$$

В качестве контроля используемых выражений для спиральных амплитуд Де-Толлиса, мы вычислим вклад в сечение от мнимой части амплитуды $e^+e^-\to 3\gamma$ по инварианту $q^2=4\varepsilon^2$ при $\varepsilon^2-m^2\ll m^2$. Имеется кинематическая область в Далиц-плоскости: $r=\varepsilon^2(1-y_2)/m^2<1$, $s=\varepsilon^2(1-y_3)/m^2<1$, $t=\varepsilon^2(1-y_4)/m^2<1$, $\varepsilon^2/m^2>1$, в которой амплитуда мнимых частей кроме указанной не имеет.

Пользуясь выражениями для инвариантных спиральных амплитуд $\mathcal{E}^{(1,2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$, приведенных в Приложении I получаем:

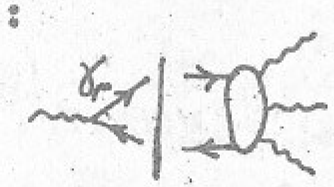
$$\mathrm{Im}\,\mathcal{E}^{(1)}_{+++}(234)=-\frac{2(1-y_3)(1-y_2)}{y_3y_4}\pi\beta,\quad \mathrm{Im}\,\mathcal{E}^{(1)}_{-++}(234)=0,\quad \mathrm{Im}\,\mathcal{E}^{(2)}_{-++}(234)=0,$$

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{E}^{(2)}_{+++}(234)=\frac{2(1-y_2)}{y_2y_4}\pi\beta,\quad \beta=\sqrt{1-\frac{m^2}{\varepsilon^2}}\ll 1$$

Соответствующий вклад в сечение имеет вид

$$d\sigma_{Im}=\frac{8\alpha^5\beta^2}{3!\cdot 3s}\Big[\Big(\frac{1-y_2}{y_3y_4}\Big)^2+\Big(\frac{1-y_3}{y_2y_4}\Big)^2+\Big(\frac{1-y_4}{y_2y_3}\Big)^2\Big]dy_2dy_3,\quad s=4\varepsilon^2 \qquad (9)$$

Получим этот результат непосредственным вычислением скачка амплитуды по ε^2:

$$\frac{e^4}{8\pi^2}\Delta\sigma_\mu=$$ 

Здесь множитель $e^4/8\pi^2$ в левой части связан с определением σ_μ /I/. (В /I/ при вычислении σ_μ учтено лишь три диаграммы вместо шести, отвечающих двум направлениям фермионной петли, кроме того, вместо множителя $(2\pi)^{-4}$ сопоставляемого петле по правилам Фейнмана в /I/ подставлен множитель π^{-2}). Правая часть отвечает амплитуде $\gamma^*\to 3\gamma$, причем перечеркнутым линиям отвечают реальные частицы.

Пренебрегая поправками $\sim\beta^2$ получим

$$\Delta\sigma_\mu=2i\sum_{ij}\bar{u}^i(0)\gamma^\mu v^j(0)\frac{A_{ij}}{e^3}\int\frac{d^3q_+}{2\varepsilon_+}\frac{d^3q_-}{2\varepsilon_-}\delta^{(4)}(q_++q_--q)=2i\sum_{ij}\bar{u}^i(0)\gamma^\mu v^j(0)\frac{A_{ij}}{e^3}\frac{\pi\beta}{2}.$$

Здесь i, j – характеризуют поляризации фермионов, A_{ij} – амплитуда аннигиляции в покое в три фотона. Пользуясь калибровочной инвариантностью запишем $\overline{\Delta\sigma_\mu(\Delta\sigma_\nu)^*}=\frac{1}{3}\Delta\sigma_\lambda(\Delta\sigma_\lambda)^*\times$ $\times(g_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu/q^2)\Rightarrow\frac{1}{3}|\Delta\sigma_\lambda|^2g_{\mu\nu}$. Поскольку

$$\bar{u}^i(0)\gamma_\mu v^j(0)[\bar{u}^{i'}(0)\gamma_\mu v^{j'}(0)]^*=-4m^2(2\delta_{ii'}\delta_{jj'}-\delta_{ij}\delta_{i'j'})$$

и $\delta_{ij}A_{ij}=0$ (аннигиляция происходит лишь в триплетном состоянии) получим

$$d\sigma_{Im}=\frac{\alpha^5}{2^7\pi^4s^3}\,Sp\,\gamma_\mu p_+\gamma_\nu p_-\sum\Big(\frac{\Delta\sigma_\mu}{2}\Big)\Big(\frac{\Delta\sigma_\nu}{2}\Big)^*\frac{d^3k_2d^3k_3d^3k_4}{3!\,\omega_2\omega_3\omega_4}\delta^{(4)}(p_++p_--k_2-k_3-k_4)=$$
$$=\frac{\alpha^2\beta^2}{3\cdot 2^{11}\pi^3}\sum_{\text{поляр}}|A_{ij}|^2\frac{dy_2dy_3}{3!}$$

Подставляя сюда $\sum_{\text{пнар}} |A_{ij}|^2 = \frac{2^{12}\pi^3\alpha^3}{m^2}\left[\left(\frac{1-y_2}{y_3 y_4}\right)^2 + \left(\frac{1-y_3}{y_2 y_4}\right)^2 + \left(\frac{1-y_4}{y_2 y_3}\right)^2\right]$, (см./2/ § 89) приходим к результату (9).

Проведем сравнение с механизмом образования трех струй, происходящих от кварк-антикварковой пары и дополнительного глюона (рис.I,б). Отличие от QED заключается в дополнительном множителе $T_z t^a t^b = \frac{1}{2}(N^2-1) = 4$, учитывающем цветовую структуру. В результате (рис.4)

$$\frac{d^2\sigma^{e^+e^-\to q\bar{q}g}}{dy_+ dy_-} = 4\frac{\alpha^2\alpha_s}{s}Q_q^2\left\{\frac{2(y_+^2+y_-^2)}{3(1-y_+)(1-y_-)} + \frac{m^2}{3s(1-y_+)(1-y_-)}\left(8(1-y) - \frac{4y^2}{(1-y_+)(1-y_-)}\right) - \frac{8}{3}\left(\frac{m^2}{s}\right)^2\frac{y^2}{(1-y_+)^2(1-y_-)^2}\right\}, \quad y = 2 - y_+ - y_-, \quad y_\pm = \frac{\varepsilon_\pm}{\varepsilon}. \tag{I0}$$

В асимптотике $m^2/\varepsilon^2 \to 0$ это выражение имеет вид:

$$\frac{d\sigma^{e^+e^-\to q\bar{q}g}}{dy_+ dy_-} = \frac{8\alpha^2\alpha_s}{3s}Q_q^2\frac{y_+^2+y_-^2}{(1-y_+)(1-y_-)}, \quad s = 4\varepsilon^2 \gg m^2. \tag{II}$$

Это распределение имеет "пиковости" при $y_\pm \to 1$. Однако эта область не имеет отношения к трехструйным процессам, поскольку в ней реализуется случай двух струй. Чтобы иметь дело с трехструйными процессами, нужно наложить дополнительные условия: энергия каждой струи больше некоторой и угол между струями больше заданного θ_m

$$\sin\theta_{ik} = \sqrt{1-c_{ik}^2} \simeq \frac{2\sqrt{(1-y_2)(1-y_3)(1-y_4)}}{y_i y_k} > \sin\theta_m, \quad y_i > b \tag{I2}$$

"Полные", в такой постановке, сечения приведены в таблице 2.

Литература

I. V. Constantini, B. De Tollis, G. Pistoni, Nuovo Cimento 2A, 733, 1971

2. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория ч.I.

Приложение I

Величины $\mathcal{E}^{(1,2)}_{\lambda\lambda\lambda}$, используемые нами, как упоминалось в тексте, связаны с используемыми в /I/ $E^{(1,2)}_{\lambda\lambda\lambda}$ следующим образом

$$\mathcal{E}^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234) = \mathcal{E}^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{8\varepsilon^2} E^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(1234),$$

$$\mathcal{E}^{(2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234) = \mathcal{E}^{(2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{4} E^{(2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(1234).$$

Подставляя в формулы (69-71) из /I/ значения инвариантов

$$z = \frac{\varepsilon^2}{m^2}(1-y_2) = \frac{(q-k_2)^2}{4m^2},\ s = \frac{\varepsilon^2}{m^2}(1-y_3) = \frac{(q-k_3)^2}{4m^2},\ t = \frac{\varepsilon^2}{m^2}(1-y_4) = \frac{(q-k_4)^2}{4m^2},$$

$$z_1 = -\frac{\varepsilon^2}{m^2}y_2,\ s_1 = -\frac{\varepsilon^2}{m^2}y_3,\ t_1 = -\frac{\varepsilon^2}{m^2}y_4,\ \mu_1 = -\frac{\varepsilon^2}{m^2},$$

представим их в виде:

$$\mathcal{E}^{(1)}_{+++}(234) = \frac{2(1-y_3)(1-y_4)}{y_3} + \left[\frac{4(1-y_3)^2(1-y_4)}{y_3(1-y_2)} + \frac{4(1-y_3)(1-y_4)}{y_3^2} - \frac{2(1-y_3)^2}{y_3}\right](B(s)-B(-\mu_1)) +$$

$$+\left[\frac{4(1-y_3)(1-y_4)}{1-y_2} + \frac{2(1-y_3)(1-y_4)}{y_4}\right](B(t)-B(-\mu_1)) + \left[\frac{2(1-y_3)(y_4-y_3)}{1-y_2} - \frac{4(1-y_3)^2(1-y_4)}{(1-y_2)^2}\right](T(s)+T(t)-$$

$$-T(-\mu_1) - I_0(s,t,\mu_1)) + \frac{m^2}{\varepsilon^2}\left\{\left(\frac{1-y_3}{1-y_2} - \frac{1-y_3}{1-y_4}\right)T(z) + \left(\frac{3(1-y_3)}{y_3} - \frac{2(1-y_3)(1-y_4)}{y_3^2} - \frac{1-y_3}{1-y_2} - \frac{1-y_3}{1-y_4} -\right.\right.$$

$$-1\Big)T(s) - \left(\frac{1-y_3}{y_4} + \frac{1-y_3}{1-y_2}\right)T(t) + \left(-\frac{3(1-y_3)}{y_3} + \frac{1-y_3}{y_4} + \frac{2(1-y_3)(1-y_4)}{y_3^2} + \frac{1-y_3}{1-y_2} + \frac{1-y_3}{1-y_4}\right)T(-\mu_1) +$$

$$\left.+\frac{y_2(y_4-y_2)}{(1-y_2)(1-y_4)} I_0(z,s,\mu_1) - \frac{y_2(1-y_3)}{(1-y_2)(1-y_4)} I_0(z,t,\mu_1) + \left(2 - \frac{1-y_3}{1-y_4} + \frac{3(1-y_3)}{1-y_2}\right) I_0(s,t,\mu_1)\right\},$$

$$\mathcal{E}^{(1)}_{-++}(234) = \frac{m^2}{\varepsilon^2}\left\{\left(\frac{1-y_3}{1-y_4} - \frac{1-y_3}{1-y_2}\right)\left[T(z)+T(s)+T(t)-T(-\mu_1)\right] - \frac{y_2}{1-y_4} I_0(z,s,\mu_1) + \frac{y_4}{1-y_2} I_0(s,t,\mu_1)\right\},$$

$$\mathcal{E}^{(2)}_{+++}(234) = \left[\frac{4(1-y_3)}{1-y_2} - \frac{2(1-y_3)}{y_3}\right](B(s)-B(-\mu_1)) + \left[\frac{4(1-y_4)}{1-y_2} - \frac{2(1-y_4)}{y_4}\right](B(t)-B(-\mu_1)) -$$

$$-\left[\frac{4(1-y_3)(1-y_4)}{(1-y_2)^2} + \frac{2y_2}{1-y_2}\right](T(s)+T(t)-T(-\mu_1)-I_0(s,t,\mu_1)) + \frac{m^2}{\varepsilon^2}\left\{-\left(\frac{1}{1-y_2} + \frac{1}{1-y_3} +\right.\right.$$

$$+\frac{1}{1-y_4}\Big)T(z) - \left(\frac{1-y_2}{y_3(1-y_4)} + \frac{3}{1-y_2}\right)T(s) - \left(\frac{1-y_2}{y_4(1-y_3)} + \frac{3}{1-y_2}\right)T(t) + \left(\frac{y_2}{(1-y_3)(1-y_4)} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{y_3} - \frac{1}{y_4} + \frac{3}{1-y_2}\right)T(-\mu_1) + \left(\frac{1-y_4}{(1-y_2)(1-y_3)} + \frac{y_3}{(1-y_2)(1-y_4)} + \frac{m^2}{\varepsilon^2(1-y_2)(1-y_3)}\right)I_0(z,s,\mu_1) + \left(\frac{1-y_3}{(1-y_2)(1-y_4)} +\right.$$

$$\left.\left.+\frac{y_4}{(1-y_3)(1-y_2)} + \frac{m^2}{\varepsilon^2(1-y_2)(1-y_4)}\right)I_0(z,t,\mu_1) + \left(\frac{y_2}{(1-y_3)(1-y_4)} + \frac{5}{1-y_2} + \frac{m^2}{\varepsilon^2(1-y_3)(1-y_4)}\right)I_0(s,t,\mu_1)\right\},$$

$$\mathcal{E}^{(2)}_{-++}(234) = -2 + \frac{m^2}{\varepsilon^2}\left\{-\left(\frac{1}{1-y_2} + \frac{1}{1-y_3} + \frac{1}{1-y_4}\right)(T(z)+T(s)+T(t)-T(-\mu_1)) + \left(\frac{1}{1-y_4} + \frac{m^2}{\varepsilon^2(1-y_2)(1-y_3)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times I_0(z,s,\mu_1) + \left(\frac{1}{1-y_3} + \frac{m^2}{\varepsilon^2(1-y_2)(1-y_4)}\right)I_0(z,t,\mu_1) + \left(\frac{1}{1-y_2} + \frac{m^2}{\varepsilon^2(1-y_3)(1-y_4)}\right)I_0(s,t,\mu_1)\right\}$$

Входящие в (I.I) спецфункции имеют вид (/I/, App II):

$$B(z) = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \ln(1-i\varepsilon-z(1-x^2)),\quad B(z) = -1+\sqrt{\frac{1}{z}-1}\arcsin\sqrt{z},\quad z<1$$

$$B(z) = -1+\sqrt{1-\frac{1}{z}}\ln(\sqrt{z}+\sqrt{z-1}) - \frac{i\pi}{2}\sqrt{1-\frac{1}{z}},\quad z>1;$$

$$T(z) = \int_0^1 dx \frac{\ln(1-i\varepsilon-z(1-x^2))}{1-x^2},\quad T(z) = -(\arcsin\sqrt{z})^2,\quad z<1,$$

$$T(z) = -\frac{\pi^2}{4} + \ln^2(\sqrt{z}+\sqrt{z-1}) - i\pi\ln(\sqrt{z}+\sqrt{z-1}),\quad z>1.$$

Величина $I_0(z,t,\mu_1) = F(z,a_{zt}) + F(t,a_{zt}) - F(\mu_1,a_{zt}),\quad a_{zt} = \sqrt{1+\frac{s}{zt}} > 1,$

$$F(z,a) = \int_0^1 \frac{dx}{a^2-x^2}\ln(1-i\varepsilon-z(1-x^2)),\quad F(z,a) = \int_0^1 \frac{dx}{a^2-x^2}\ln(1-z(1-x^2)),\quad z<1,$$

$$F(z,a) = \frac{1}{2a}\left\{\ln[z(a^2-b^2)]\ln\frac{a+1}{a-1} + \phi\left(\frac{a+1}{a+b}\right) + \phi\left(\frac{a+1}{a-b}\right) - \phi\left(\frac{a-1}{a+b}\right) - \phi\left(\frac{a-1}{a-b}\right)\right\} +$$

$$+ i\frac{\pi}{2a}\ln\frac{a-b}{a+b},\quad z>1,\quad b = \sqrt{1-\frac{1}{z}},$$

где $\phi(x) = \int_0^x \frac{dt}{t}\ln|1-t|.$

Для больших значений инвариантов $z, t, s, -\mu_1$, полезно соотношение $F(s,a_{zt}) - T(s) = -\frac{1}{2}\phi\left(\frac{y_3}{1-y_4}\right) + \frac{\pi^2}{12} + i\frac{\pi}{2}\ln\frac{y_3}{1-y_4}$.
Так, пользуясь им, можно получить

$$T(s)+T(t)-T(-\mu_1) - I_0(s,t,\mu_1) = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{6} + \phi(y_3) + \phi(y_4) - \ln(1-y_3)\ln(1-y_4)\right].$$

Предельные значения $\mathcal{E}^{(i)}_{\lambda\lambda\lambda}$ в асимптотике на границах Далиц-плоскости приведены в таблице I. В выражении для квадрата модуля матричного элемента (I) входят кроме приведенных $\mathcal{E}^{(1,2)}_{+++}(234)$. $\mathcal{E}^{(1,2)}_{-++}(234)$ еще и $\mathcal{E}^{(1,2)}_{+-+}$, $\mathcal{E}^{(1,2)}_{++-}$, которые строятся из приведенных в (I,I) с помощью соотношений [/1/, (68)]:

$$\mathcal{E}^{(1)}_{+-+}(234) = \mathcal{E}^{(1)}_{+++}(432),\ \mathcal{E}^{(1)}_{++-}(234) = -\frac{y_2}{y_3}\mathcal{E}^{(1)}_{+++}(324) + \frac{y_4}{y_3}\mathcal{E}^{(1)}_{+++}(342),$$

$$\mathcal{E}^{(2)}_{++-}(234) = \mathcal{E}^{(2)}_{+++}(324),\ \ \mathcal{E}^{(2)}_{+-+}(234) = \mathcal{E}^{(2)}_{+++}(432).$$

Таблица I

	$y_2\to 1,\ y_3\sim 1$	$y_3\to 1,\ y_4\sim 1$	$y_4\to 1,\ y_2\sim 1$
$\mathcal{E}^{(1)}_{+++}(234)$	$(1-y_3)+\ln y_3+\frac{1-y_3}{y_3}\ln(1-y_3)$	0	$\frac{y_2^2}{1-y_2}\left[-(1+\ln(1-y_4))\ln y_2+\Phi(1-y_2)\right]$
$\mathcal{E}^{(1)}_{-++}(234)$	0	0	0
$\mathcal{E}^{(2)}_{+++}(234)$	$-1-\frac{1}{1-y_3}\ln y_3-\frac{1}{y_3}\ln(1-y_3)$	$\frac{1-y_4}{y_4}\left[(1+\ln(1-y_3))\ln(1-y_4)-\Phi(y_4)\right]$	$\frac{y_2}{1-y_2}\left[(1+\ln(1-y_4))\ln y_2-\Phi(1-y_2)\right]$
$\mathcal{E}^{(2)}_{-++}(234)$	-2	-2	-2

η	θ_m	$\sigma(e^+e^-\to q\bar{q}g)$	$\sigma(e^+e^-\to ggg)$ $\varepsilon/m\gg 1$	$\sigma(e^+e^-\to ggg)$ $\varepsilon/m=1$
0,1	60°	1,07	$6\cdot 10^{-3}$	$2,5\cdot 10^{-3}$
0,1	30°	2,16	$9,2\cdot 10^{-3}$	$9,4\cdot 10^{-3}$
0,05	60°	1,42	$6,6\cdot 10^{-3}$	$2,9\cdot 10^{-3}$
0,05	30°	2,96	$9,6\cdot 10^{-3}$	$11,5\cdot 10^{-3}$

Таблица II. Полные сечения при различных η (минимальная энергия глюона) и θ_m (минимальный угол между глюонами) для $\varepsilon/m \gg 1$ и $\varepsilon/m = 1$ в нанобарнах.

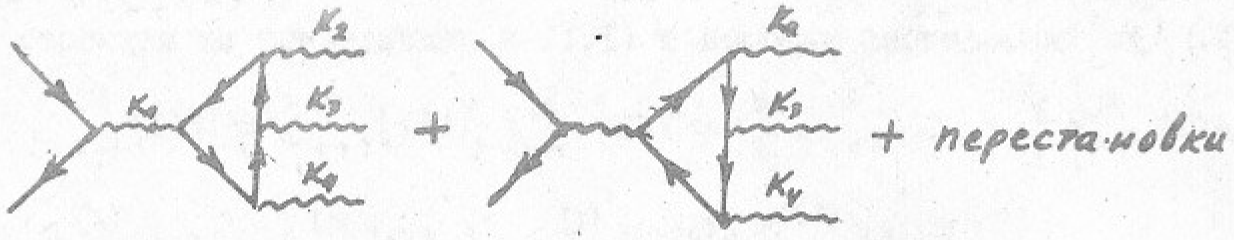


Рис. 1а

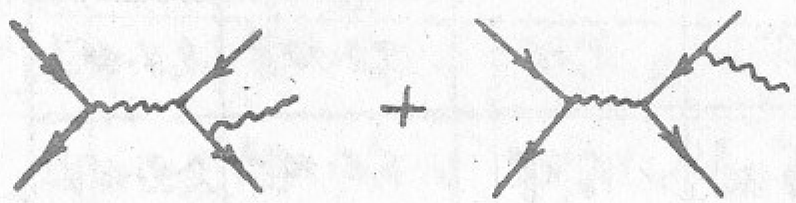


Рис. 1б

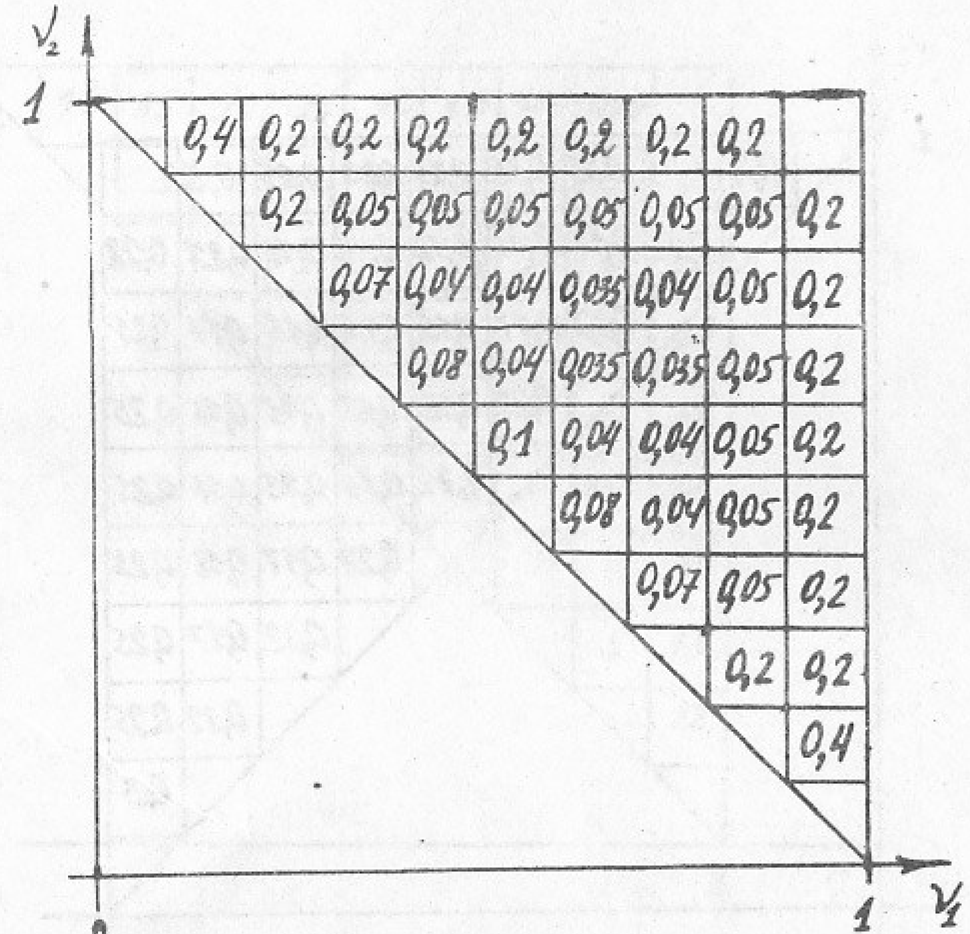


Рис.2

Распределение в Далиц-плоскости для реакции $e^+e^- \longrightarrow ggg$ (при ε/m = I). В каждой клетке указано сечение в пикабарнах.

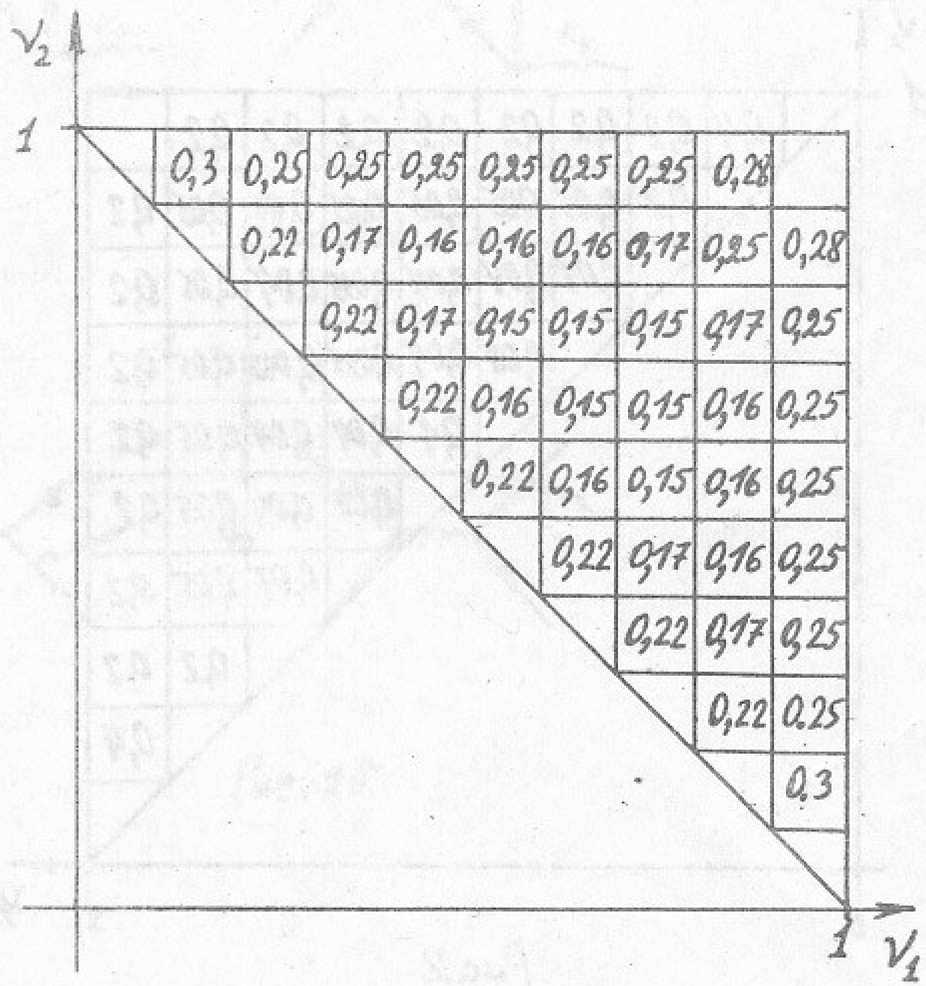


Рис. 3

Распределение в Далиц-плоскости для реакции $e^+e^- \to ggg$ (при $\varepsilon/m \gg 1$). В каждой клетке указано сечение в пинобарнах.

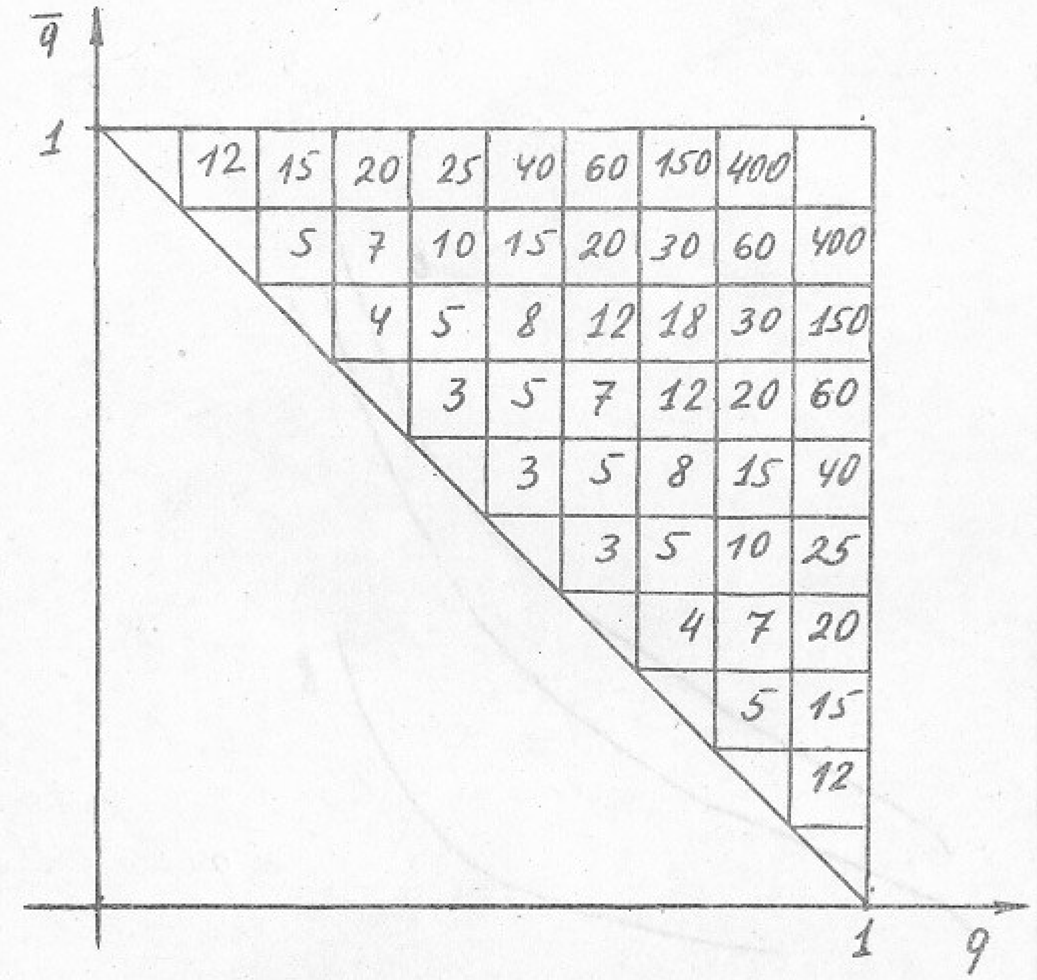


Рис. 4

Распределение в Далиц-плоскости для реакции $e^+e^- \to q\bar{q}g$, (при $\varepsilon/m \gg 1$). В каждой клетке указано сечение в пинобарнах.

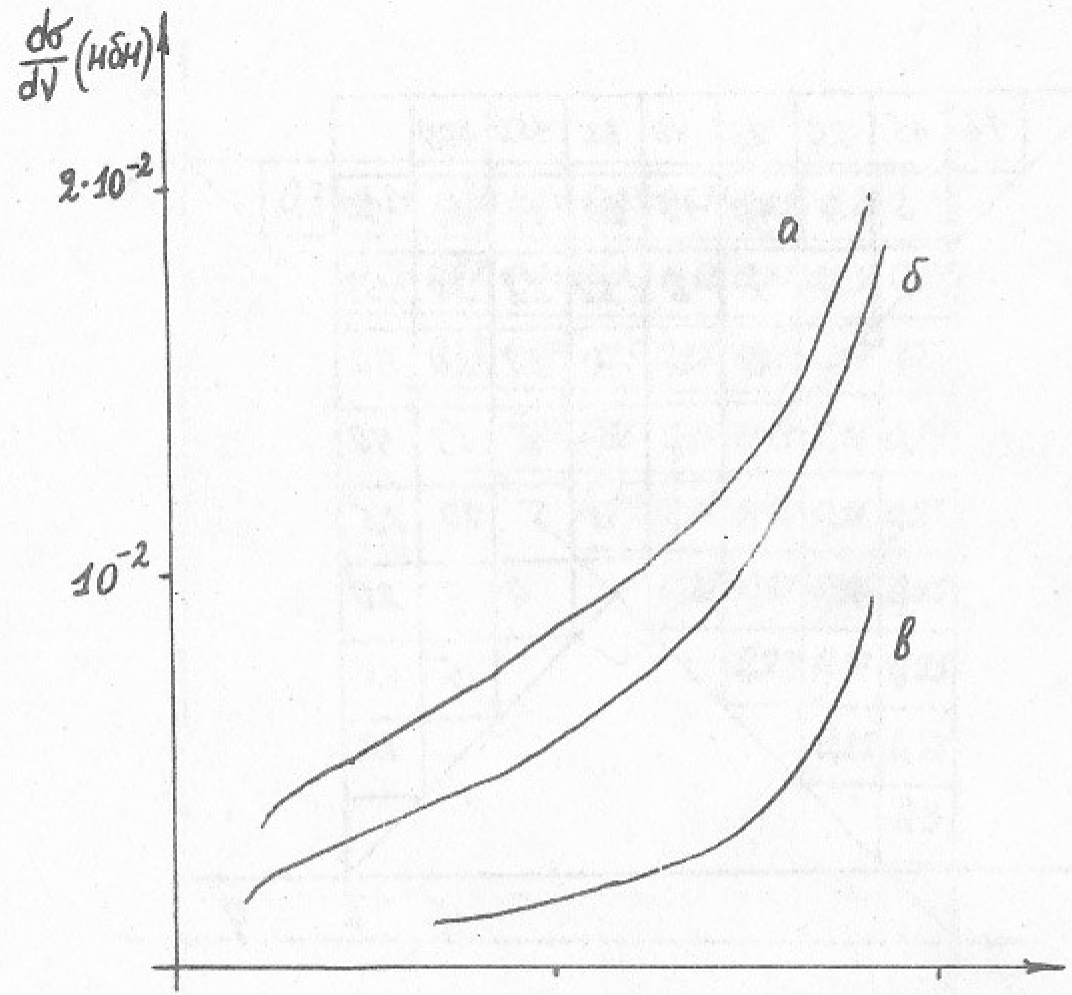


Рис.5

Инклюзивные сечения для реакции $e^+e^- \to ggg$

а) $\mathcal{E}/m \gg I$, $\theta_m = 30^0$;
б) $\mathcal{E}/m \gg I$, $\theta_m = 60^0$;
в) $\mathcal{E}/m = I$, $\theta_m = 60^0$.

Работа поступила - I3 марта I979 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 22.Ш-I979 г. МН 074I3
Усл. I,0 печ.л., 0,9 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № I3.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР