

53

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И ЯФ 77-72

В.Г.Давидовский

КОГЕРЕНТНАЯ ДИПОЛЬНАЯ НЕУСТОЙ-
ЧИВОСТЬ НЕПРЕРЫВНОГО ПУЧКА
ЧАСТИЦ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕ-
ЛЯХ С ОТКРЫТЫМ НА ПУЧОК
ШИХТОВАННЫМ ЖЕЛЕЗОМ

Новосибирск

1977

КОГЕРЕНТНАЯ ДИПОЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕПРЕРЫВНОГО ПУЧКА ЧАСТИЦ
В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ С ОТКРЫТЫМ НА ПУЧОК ШИХТОВАННЫМ ЖЕЛЕЗОМ

В.Г. Давидовский

А Н Н О Т А Ц И Я

В квазистатическом приближении рассмотрены длинноволновые когерентные поперечные дипольные колебания непрерывного тонкого цилиндрического пучка частиц, находящегося между двумя толстыми шихтованными плитами. Приводятся графики, позволяющие определить вещественную и мнимую части силы, действующей на частицы пучка, как функции частоты колебания при ряде значений параметров шихтовки. Показано, что инкременты вертикальных и горизонтальных колебаний пучка — величины одного порядка.

В неквазистатическом приближении рассмотрены когерентные вертикальные дипольные колебания непрерывного тонкого плоского пучка частиц в ускорителе с упрощенной геометрией поперечного сечения и открытым на пучок шихтованным железом. Приводятся графики, позволяющие определить вещественную и мнимую части силы, действующей на частицы пучка, как функции номера моды при ряде значений параметров шихтовки для релятивистского и нерелятивистского пучков.

Зависимость мнимой части силы от номера моды, в области высоких номеров мод, может иметь резонансный характер при определенных совокупностях параметров. Инкременты таких "резонансных" мод с высоким номером могут быть сравнимы по величине с инкрементами самых первых низких мод. В таблицах приводятся значения предельных токов для ряда случаев.

Всё рассмотрение проведено с учётом затухания поля в зазорах шихтовки. Результаты работы полезны для понимания ограничений по току в ускорителях без внутренней вакуумной камеры.

COHERENT TRANSVERSE INSTABILITY OF AN AZIMUTHALLY UNIFORM BEAM OF PARTICLES

CIRCULATING IN A CYCLIC ACCELERATOR WITHOUT INNER VACUUM CHAMBER

V.G. Davidovskij

S U M M A R Y

For the quasi-static case the longwave coherent transverse dipole oscillations of a longitudinally uniform thin cylindrical beam of particles in a gap between two thick laminated slabs of iron are investigated. The figures show the real and imaginary parts of the force acting on the particles of the beam as a function of the oscillation frequency at a number of values of the iron lamination parameters. It is shown that the increments of vertical and horizontal oscillations of the beam have values of the same order.

In the general case, the coherent vertical transverse oscillations of an azimuthally uniform thin plane beam of particles in a cyclic accelerator with the laminated iron of the magnet opened onto the beam are considered for the case of a simplified model of the magnet cross section. The figures show the real and imaginary parts of the force acting on the particles of the beam as a function of the mode number at some values of the iron lamination parameters for the cases of non-relativistic and ultrarelativistic beams.

The dependence of imaginary part of the force on the mode number in the high-mode region may turn out to be of a resonance type at some values of the parameters. The values of the increments of such "resonance" modes may be of the same order as those of the first lowest modes. The tables show the limiting currents in some cases.

The field damping inside the gaps between the sheets of laminated iron is taken into account throughout the work. The results are useful for understanding the current limitations in the cyclic accelerators without inner vacuum chamber.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
§ 1. В в е д е н и е	5
§ 2. Поле в зазоре между листами шихтованного железа и граничные условия	6
§ 3. Поле линейного высокочастотного тока между двумя толстыми плитами из шихтованного железа	7
§ 4. Поля и силы, действующие на частицы тонкого цилиндрического пучка при его когерентных дипольных колебаниях в системе рис.3 в квазистатическом приближении	10
§ 5. Поля и силы, действующие на частицы модельного пучка в неквазистатическом приближении в системе с геометрией рис.4	13
§ 6. Инкременты неустойчивости и стабилизирующий энергетический разброс	19
§ 7. З а к л ю ч е н и е	23
Приложение	25
Таблицы	42
Л и т е р а т у р а	47

C O N T E N T S

	Page
§ 1. Introduction	5
§ 2. Fields in the gaps between the sheets of the laminated iron and the boundary conditions	6
§ 3. Fields of a linear high frequency current between two thick slabs of laminated iron	7
§ 4. Fields and forces acting on the particles of a thin cylindrical beam which performs coherent dipole oscillations inside the system shown in Fig.3. Quasi-static case	10
§ 5. Fields and forces acting on the particles of a thin plane beam which performs coherent vertical dipole oscillations inside the system shown in Fig.4. General case	13
§ 6. Increments of instability and stabilizing energy spread	19
§ 7. Conclusions	23
Appendix	25
Tables	42
References	47

§ I. Введение

Одним из путей увеличения среднего числа частиц, ускоренных в единицу времени ускорителем, является уменьшение длительности цикла ускорения и соответственно увеличение числа ускорительных циклов в единицу времени. Если в ускорителе имеется внутренняя вакуумная камера, то сокращение длительности цикла ускорения ведет к росту индуцированных в стенках камеры токов, искажающих ведущее магнитное поле. Радикальным решением этой проблемы является создание ускорителей без внутренней вакуумной камеры. Примерами таких ускорителей могут служить крупнейший в мире электронный синхротрон Корнельского университета на энергию 10 ГэВ /1/, протонный бустер в Батавии на энергию 8 ГэВ /2/, электронные синхротроны БЗМ на энергию 360 МэВ /3/ и Б4 на энергию 500 МэВ/4/ Новосибирского Института ядерной физики.

В ускорителях этого типа шихтованное железо открыто для полей пучка. При этом могут иметь место ряд своеобразных эффектов, изучение которых важно для повышения интенсивности пучка таких ускорителей. Начало изучению этих эффектов было положено, насколько нам известно, в работе /5/, где рассматривались когерентные поперечные дипольные колебания непрерывного пучка в длинноволновом квазистатическом приближении в пренебрежении специфическим эффектом затухания поля при проникновении его в зазоры шихтовки¹⁾.

В работе /6/, в приложении к бустеру в Батавии, рассматривались обусловленные окружающим шихтованным железом продольные силы, действующие на частицы бунчируемого пучка, и связанные с этим потери энергии частицами пучка. Своеобразным радиотехническим методом было получено двумерное телеграфное уравнение для поля в зазорах шихтовки, учитывающее затухание поля в зазорах.

В предлагаемой работе рассматриваются когерентные поперечные дипольные колебания пучка. В §2 получено уравнение, описывающее поле в зазорах шихтовки и приводятся граничные условия на границе шихтованной области. В §3 приводятся выражения для поля линейного высокочастотного тока, помещенного между двумя параллельными толстыми шихтованными плитами, случай плит конечной толщины приведен в приложении. В §4 приводятся выражения для сил, действующих на частицы круглого тонкого пучка, помещенного между толстыми шихтованными плитами, при длинноволновых когерентных дипольных колебаниях пучка. Результаты получены в квазистатическом приближении. Приводятся графики для вещественной и мнимой частей индуцированного магнитного поля, как функции частоты колебания, при ряде значений параметра затухания.

В §5 рассмотрены когерентные дипольные колебания по ведущему полю тонкого плоского пучка частиц в прямоугольной модельной камере. При этом условии квазистатичности не накладывалось. В качестве примера рассмотрены поля, индуцированные дипольным колебанием пучка в ускорителе радиуса 150 см. Приводятся графики для вещественной и мнимой частей индуцированных сил, действующих на частицы пучка, при различных значениях параметров системы и двух значениях средней продольной скорости частиц: $v/c = 0,5$ и $v/c \rightarrow 1$. Оказалось, что в области коротковолновых мод, при определенной совокупности параметров, могут наблюдаться своеобразные резонансы. Результаты рассмотренных примеров для достаточно коротковолновых мод могут быть использованы для оценки явлений и в ускорителях большого радиуса. В §6 на основе анализа дисперсионного уравнения дипольных колебаний непрерывного пучка, проведенного в работе /7/, дается графический метод определения инкремента неустойчивости поперечных когерентных дипольных колебаний модельного пучка и величины энергетического разброса в пучке, необходимого для стабилизации. В §7 дано краткое заключение по результатам данной работы. После завершения аналитической части этой работы мне стало известно, что когерентные дипольные колебания по полю в модельной прямоугольной камере с шихтованным железом рассматривались также в работе /8/.

1) В работе /5/ была допущена неточность, смотри §4 и §6 настоящей работы.

§ 2. Поле в зазоре между листами шихтованного железа и граничные условия

Рассмотрим систему рис.1 с шихтованным металлом, геометрия которой, без учета шихтовки, не зависит от координаты X (см. также рис.3 и 4). В пустой области I расположен возбуждающий поле ток $J = J_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}$, направленный по оси X . Область II, граничащая с областью I заполнена шихтованным металлом, плоскости листов которого параллельны плоскости yz . Структура шихтованного железа представлена на рис.2. Толщина листов металла - d , магнитная проницаемость его μ_e (в этой работе она считается вещественной), проводимость - σ , зазор между листами металла - δ . Этот зазор заполнен клеем, склеивающим листы. Диэлектрическая проницаемость клея - ϵ .

В этой работе мы считаем, что период шихтовки $d + \delta$ много меньше характерных размеров задачи - поперечных размеров области I, расстояния от возбуждающего тока до границ области I, длины волны рассматриваемого процесса. В области I пульсации поля периода $d + \delta$ быстро спадают при удалении от границы шихтованного металла на расстояниях порядка $d + \delta$. Мы рассматриваем в области I только поля, усредненные по периоду шихтовки $d + \delta$.

Магнитное поле в зазорах между листами металла \vec{H}_g и поле внутри листов \vec{H}_i описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \Delta \vec{H}_g + \frac{\omega^2 \epsilon}{c^2} \vec{H}_g &= 0 \\ \Delta \vec{H}_i + (i \cdot 4\pi \sigma \mu_0 \omega + \mu_0 \omega^2) \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \vec{H}_i &= 0 \end{aligned} \quad (I)$$

В области шихтовки, на расстояниях от границы больших зазора между листами δ , поля \vec{H}_g и \vec{H}_i можно считать плоскими и параллельными поверхностям листов металла. Поместим локальную систему координат в области шихтовки так, что её начало лежит посередине какого-либо зазора, а плоскость yz параллельна листу шихтовки. Решение уравнений (I) на периоде шихтовки можно записать в листе металла, т.е. в области $\delta/2 \leq x \leq \delta/2 + d/2$:

$$\vec{H}_i = \int \vec{T}_0(p, q) \cdot \frac{\text{ch}(\eta_0 \delta/2)}{\text{ch}(\eta d/2)} \cdot \text{ch} \eta (x - \frac{d+\delta}{2}) \cdot e^{i(py + qz)} dp \cdot dq, \quad (2)$$

в зазоре, т.е. в области $-\delta/2 < x < \delta/2$:

$$\vec{H}_g = \int \vec{T}_0(p, q) \cdot \text{ch}(\eta_0 x) \cdot e^{i(py + qz)} dp dq,$$

где

$$\eta = \sqrt{p^2 + q^2 - (i \cdot 4\pi \sigma \mu_0 \omega + \omega^2 \mu_0) / c^2}, \quad \eta_0 = \sqrt{p^2 + q^2 - \omega^2 \epsilon / c^2}$$

При этом

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_g &= -\frac{i\omega\epsilon}{c} \cdot \vec{E}_g \\ \text{rot } \vec{H}_i &= (\frac{4\pi}{c} \sigma - \frac{i\omega}{c}) \cdot \vec{E}_i \end{aligned}$$

Приравнявая Фурье-гармоники тангенциальных компонент полей \vec{E}_g и \vec{E}_i на границе металла при $x = \delta/2$, получаем дисперсионное уравнение:

$$\eta \cdot \text{th}(\eta d/2) - \frac{1}{\epsilon} \cdot (1 + i \cdot 4\pi \sigma / \omega) \cdot \eta_0 \cdot \text{th}(\eta_0 \delta/2) = 0. \quad (3)$$

В этой работе мы рассматриваем когерентные поперечные колебания пучка в ускорителе. Частоты этих колебаний больше или порядка частоты обращения частиц по орбите, т.е. достаточно велики. Поэтому, если шихтовка выполнена из металла, например, железа, то практически всегда

$$4\pi \sigma \mu_0 \omega / c^2 \gg p^2, q^2, \omega^2 \epsilon / c^2, \quad (4)$$

так что $\eta \approx \sqrt{-i \cdot 4\pi \sigma \mu_0 \omega / c^2} = (1-i) / \Delta_c$,

где $\Delta_c = c / \sqrt{2\pi \sigma \mu_0 \omega}$ - глубина скин-слоя.

Отметим, что $\Delta_c / d \ll 1$, также практически всегда.

При этом выражения для полей (2) упрощаются:

$$\begin{aligned} \vec{H}_g(y, z) &= \int \vec{T}_0(p, q) \cdot e^{i(py + qz)} dp \cdot dq; & -\delta/2 < x < \delta/2; \\ \vec{H}_i(y, z) &= \vec{H}_g(y, z) \cdot e^{-\frac{x - \delta/2}{\Delta_c} \cdot (1-i)}; & \delta/2 < x < (\delta + d)/2; \end{aligned} \quad (5)$$

Дисперсионное уравнение (3) принимает вид:

$$p^2 + q^2 + \alpha^2 = 0, \quad (6)$$

где
$$\alpha^2 = \left\{ (1+i)\mu_0 \Delta c / \delta - 1 \right\} \cdot \varepsilon \omega^2 / c^2$$

Величина α определяет затухание поля вглубь зазора шихтовки.

Отметим, что дисперсионное уравнение (6) легко получить, рассматривая лишь поле \vec{H}_y в зазоре в форме (2) и соответствующее \vec{E}_y и связывая их компоненты Фурье граничным условием Леонтовича на границе листов железа. Из (5) следует, что поле \vec{H}_y в зазоре однородно по X и, как отмечалось выше, параллельно плоскостям листов шихтовки. Такое поле удобно описывать вектор-потенциалом

$A_{yx}(y, z)$, при этом

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) A_{yx} - \alpha^2 A_{yx} = 0 \quad (7)$$

Граничные условия для магнитного поля на границе пустой области и шихтованной области были получены в работах /9,5/. Наметьте здесь их вывод. Пусть произвольная точка S лежит на границе областей в зазоре между листами железа (рис.1). Проведем через S плоскость, параллельную листам железа, и возьмем на этой плоскости вытянутый по оси y прямоугольный контур с центром в S . Причем верхняя длинная сторона прямоугольника углублена в зазор на расстояние, большее ширины зазора δ , а нижняя — находится от границы на расстоянии, большем, чем период шихтовки $d + \delta$, так что пульсации периода шихтовки уже не сказываются. Можно сказать, что в области тока I рассматриваются поля, усредненные по периоду шихтовки. Краевые эффекты на углах листов железа нас не интересуют. Рассматривая циркуляцию поля по выбранному контуру, получаем граничное условие для тангенциальных компонент:

$$H_{gt}(s) = H_{ot}(s) \quad (8)$$

Приравняв в точке S границы, усредненные по периоду шихтовки нормальные к границе потоки индукции в пустой области и в шихтованной области, получаем:

$$H_{gn}(s) \cdot \mu = H_{on}(s) \quad (9)$$

где

$$\mu = \frac{(1+i) \cdot \mu_0 \Delta c + \delta}{d + \delta} \quad (10)$$

Для справедливости этих соотношений существенно, чтобы $d + \delta \ll R(s)$, h , где $R(s)$ — локальный радиус кривизны границы в точке S , h — расстояние от тока до границы. В области пучка поле существенно меняется на расстояниях порядка апертуры h . Согласно (7), если $\alpha h \ll 1$, то поле A_{yx} в зазорах шихтовки удовлетворяет уравнению Лапласа. В этом случае, например, задача определения магнитного поля, индуцированного линейным током между двумя шихтованными плитами, может быть решена по методу отражений, как если бы плиты состояли из сплошного материала с магнитной проницаемостью μ по (10). При этом предполагается квазистационарность задачи в области тока, т.е. считается $kh \ll 1$. При интересующих нас частотах и параметрах шихтовки поперечное к пучку электрическое поле практически не проникает в зазоры шихтовки. Поэтому при определении перпендикулярной к пучку компоненты электрического поля стенки из шихтованного металла будем рассматривать как сплошные сверхпроводящие плоскости. При этом можно использовать метод отражений.

§ 3. Поле линейного высокочастотного тока между двумя толстыми плитами из шихтованного железа

Геометрия рассматриваемой задачи представлена на рис.3, структура шихтовки представлена на рис.2, параметры шихтовки определены в начале § 2. Ток $J = J_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ направлен по оси X и проходит через точку $y = 0$, $z = z_0$. Здесь мы ограничимся случаем неограниченной толщины плит. Случай плит конечной толщины рассмотрен в Приложении. При решении задачи определения магнитного поля используем известный метод определения поля в следящих средах /10/. В квазистатическом ($\omega / kv \ll 1$) длинноволновом ($kh \ll 1$) пределе усредненное по периоду шихтовки магнитное поле в области тока можно считать плоским и перпендикулярным пучку. Такое поле удобно описывать однокомпонентным вектор-потенциалом A_0 направленным по пучку. Множитель $e^{i(kx - \omega t)}$ опускаем. Представим A_0 как сумму вектор-потенциала собственно тока A_{0s} и вектор-потенциала индуцированного (обусловленного окружающей средой) поля A_{0i} :

$$A_0 = A_{0s} + A_{0i}$$

$$A_{0s} = \frac{2J}{c} \cdot K_0(\kappa_0 z), \quad \kappa_0^2 = \kappa^2 - \omega^2/c^2$$

$K_0(\kappa_0 z)$ - функция Макдональда.

Используя известное интегральное представление $K_0(\kappa_0 z)$, запишем:

$$A_{0s} = \frac{2J}{c} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-|\kappa - z_0| \cdot \sqrt{\lambda^2 + \kappa_0^2}}}{\sqrt{\lambda^2 + \kappa_0^2}} \cdot \cos(\lambda y) \cdot d\lambda$$

Вектор-потенциал индуцированного поля A_{0i} ищем в виде:

$$A_{0i} = \frac{2J}{c} \cdot \int_0^\infty (\beta_{10}(\lambda) \cdot e^{-z\sqrt{\lambda^2 + \kappa_0^2}} + \beta_{20}(\lambda) \cdot e^{z\sqrt{\lambda^2 + \kappa_0^2}}) \cdot \cos(\lambda y) \cdot d\lambda \quad (II)$$

Вектор-потенциал поля в зазоре шихтовки A_g ищем, согласно (7), в виде

$$A_{g\pm} = \frac{2J}{c} \cdot \int_0^\infty \beta_{g\pm}(\lambda) \cdot e^{\mp z\sqrt{\lambda^2 + \kappa^2}} \cdot \cos(\lambda y) \cdot d\lambda \quad (I2)$$

Здесь верхний знак относится к верхней шихтованной плите, нижний - к нижней плите. Используя граничные условия (8) и (9) при $z = \pm h$, определим функции $\beta_0(\lambda)$ и $\beta_{g\pm}(\lambda)$. В результате получим:

$$A_{0i} = \frac{4J}{c} \cdot \int_0^\infty \frac{(\mu^2 - M^2) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{z+z_0}{h} \cdot \sqrt{\xi^2 + (\kappa_0 h)^2}\right) + (\mu - M)^2 \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{z-z_0}{h} \cdot \sqrt{\xi^2 + (\kappa_0 h)^2}\right) \cdot e^{-2\sqrt{\xi^2 + (\kappa_0 h)^2}}}{(\mu + M)^2 - (\mu - M)^2 \cdot e^{-4\sqrt{\xi^2 + (\kappa_0 h)^2}}} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{\xi^2 + (\kappa_0 h)^2}}}{\sqrt{\xi^2 + (\kappa_0 h)^2}} \cdot \cos\left(\frac{y}{h} \xi\right) \cdot d\xi, \quad (I3)$$

где

$$M = \sqrt{\frac{\xi^2 + (\kappa h)^2}{\xi^2 + (\kappa_0 h)^2}}$$

А для потенциала поля в зазорах шихтовки верхней плиты, в квазистатическом приближении $\kappa_0 h \rightarrow 0$, получим:

$$A_{g+} = \frac{4J}{c} \cdot \int_0^\infty e^{-(\frac{z}{h} - 1)\sqrt{\xi^2 + (\kappa h)^2} - \xi} \cdot \frac{(\mu \xi + \sqrt{\xi^2 + (\kappa h)^2}) \cdot e^{\frac{\xi}{h} - \xi} + (\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\kappa h)^2}) \cdot e^{-\frac{\xi}{h} - 2\xi}}{(\mu \xi + \sqrt{\xi^2 + (\kappa h)^2})^2 - (\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\kappa h)^2})^2 \cdot e^{-4\xi}} \cdot \cos\left(\frac{y}{h} \xi\right) \cdot d\xi \quad (I4)$$

Выпишем выражения для индуцированных в области тока полей в квазистатическом пределе $\kappa_0 h \rightarrow 0$

$$H_{0yi} = \frac{4J}{ch} \cdot \int_0^\infty \frac{(\mu^2 \xi^2 - (\xi^2 + (\kappa h)^2)) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{z+z_0}{h} \xi\right) + (\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\kappa h)^2})^2 \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{z-z_0}{h} \xi\right) \cdot e^{-2\xi}}{(\mu \xi + \sqrt{\xi^2 + (\kappa h)^2})^2 - (\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\kappa h)^2})^2 \cdot e^{-4\xi}} \cdot e^{-2\xi} \cdot \cos\left(\frac{y}{h} \xi\right) \cdot d\xi \quad (I5)$$

$$H_{0zi} = \frac{4J}{ch} \cdot \int_0^\infty \frac{(\mu^2 \xi^2 - (\xi^2 + (\kappa h)^2)) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{z+z_0}{h} \xi\right) + (\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\kappa h)^2})^2 \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{z-z_0}{h} \xi\right) \cdot e^{-2\xi}}{(\mu \xi + \sqrt{\xi^2 + (\kappa h)^2})^2 - (\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\kappa h)^2})^2 \cdot e^{-4\xi}} \cdot e^{-2\xi} \cdot \sin\left(\frac{y}{h} \xi\right) \cdot d\xi \quad (I6)$$

Если возбуждающий линейный ток проходит через начало координат, т.е. лежит посередине между плитами ($z_0 = 0$), или если поле ищется лишь в плоскости $z = 0$, то выражения (I5) и (I6) существенно упрощаются.

В пределе $\kappa h \rightarrow 0$ выражения (I5, I6) дают:

$$H_{0yi} = \frac{4J}{ch} \cdot d \cdot \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{z+z_0}{h} \xi\right) + d \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{z-z_0}{h} \xi\right) \cdot e^{-2\xi}}{1 - d^2 \cdot e^{-4\xi}} \cdot e^{-2\xi} \cdot \cos\left(\frac{y}{h} \xi\right) \cdot d\xi, \quad (I7)$$

$$H_{0zi} = \frac{4J}{ch} \cdot d \cdot \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{z+z_0}{h} \xi\right) + d \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{z-z_0}{h} \xi\right) \cdot e^{-2\xi}}{1 - d^2 \cdot e^{-4\xi}} \cdot e^{-2\xi} \cdot \sin\left(\frac{y}{h} \xi\right) \cdot d\xi,$$

где $d = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}$.

Считая $z_0/h, z/h, y/h \ll 1$,
 ванке, получим:

разложим подынтегральные выражения в ряд и, проведя интегриро-

$$H_{0y_i} = \frac{2j}{c} \cdot \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \cdot \alpha^{|n|} \cdot \frac{2nh + (-1)^n z_0 - z}{(2nh + (-1)^n z_0 - z)^2 + y^2} \quad (18)$$

$$H_{0z_i} = \frac{2j}{c} \cdot \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \cdot \alpha^{|n|} \cdot \frac{y}{(2nh + (-1)^n z_0 - z)^2 + y^2} \quad (19)$$

Выражения (18) и (19) были получены в /5/ методом отражений. В случае конечных zh рассмотрим предел малых $z/h, z_0/h, y/h$. Разлагая в (15) и (16) подынтегральные выражения в ряд по этим величинам и сохраняя лишь линейные члены, получим:

$$H_{0y_i} = \frac{4j}{ch^2} \cdot \left(z \cdot \int_0^{\infty} \frac{(\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) \cdot \xi \cdot e^{-2\xi} d\xi}{(\mu \xi + \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) - (\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) \cdot e^{-2\xi}} + \right. \\ \left. + z_0 \cdot \int_0^{\infty} \frac{(\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) \cdot \xi \cdot e^{-2\xi} d\xi}{(\mu \xi + \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) + (\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) \cdot e^{-2\xi}} \right) \quad (20)$$

$$H_{0z_i} = \frac{4j}{ch^2} y \int_0^{\infty} \frac{(\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) \cdot \xi \cdot e^{-2\xi} d\xi}{(\mu \xi + \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) - (\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) \cdot e^{-2\xi}} \quad (21)$$

Рассмотрим теперь электрическое поле, создаваемое в системе рис. I линейным зарядом $eN \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ параллельным оси X и проходящим через точку $y=0, z=z_0$. Множитель $e^{i(kx - \omega t)}$ опускаем. Как отмечалось в конце § 2, в квазистатическом приближении при определении электрического поля границу шихтованной области можно рассматривать как сверхпроводящую поверхность. Потенциал индуцированного электрического поля ищем в форме аналогичной (II).

Используя граничные условия на сверхпроводящей поверхности при $z = \pm h$, получим:

$$E_{y_i} = -\frac{2}{h} \cdot eN \cdot \int_0^{\infty} \frac{ch \left(\frac{z+z_0}{h} \xi \right) - e^{-2\xi} \cdot ch \left(\frac{z-z_0}{h} \xi \right)}{sh(2\xi)} \cdot \sin \left(\xi \frac{y}{h} \right) d\xi \quad (22)$$

$$E_{z_i} = \frac{2}{h} \cdot eN \cdot \int_0^{\infty} \left(sh \left(\frac{z+z_0}{h} \xi \right) - e^{-2\xi} \cdot sh \left(\frac{z-z_0}{h} \xi \right) \right) \cdot \frac{\cos \left(\xi \frac{y}{h} \right)}{sh(2\xi)} d\xi$$

Здесь можно провести интегрирование и получить ответ в виде аналитических выражений. Тот же результат дает и метод конформного отображения полосы на полуплоскость. Ограничимся лишь случаем малых $z/h, z_0/h, y/h$. Разлагая подынтегральные выражения в ряды по этим величинам, ограничиваясь линейным приближением и проведя элементарное интегрирование, получаем:

$$E_{y_i} = -eN \cdot \frac{\pi^2}{12 h^2} \cdot y \quad (23)$$

$$E_{z_i} = eN \cdot \frac{\pi^2}{12 h^2} \cdot (2z_0 + z). \quad (24)$$

Это известные выражения, полученные в /II/ методом отражений и методом конформного преобразования. Если линейный ток (заряд) проходит через точку $y_0 \neq 0$, то во всех приведенных выше выражениях надо y заменить на $y - y_0$.

§ 4. Поля и силы, действующие на частицы тонкого цилиндрического пучка при его когерентных дипольных колебаниях в системе рис.3 в квазистатическом приближении

В системе рис.3 пучок частиц расположен по оси X , скорость частиц пучка V . Плотность частиц пучка $n_0(y, z)$ однородна по X и стационарна во времени. Пучок, не изменяя сечения и плотности, совершает малые когерентные z -колебания амплитуды a_z , так что ось пучка имеет координату $z_0 = a_z \cdot e^{i(kx - \omega t)}$. При этом плотность пучка:

$$n(x, y, z, t) = n_0(y, z - a_z \cdot e^{i(kx - \omega t)}) = n_0(y, z) - \frac{\partial n_0(y, z)}{\partial z} \cdot a_z \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

Следовательно когерентные колебания плотности частиц пучка:

$$\delta n = -\frac{\partial n_0(y, z)}{\partial z} \cdot a_z \cdot e^{i(kx - \omega t)} \quad (25)$$

Рассмотрим простейший случай тонкого цилиндрического пучка радиуса $r_0 \ll h$ с однородной по сечению пучка плотностью N_0 . Если амплитуда когерентного колебания $a_z \ll r_0$, то из (25) следует, что когерентные колебания плотности заряда и тока равны:

$$\delta \rho = e N_0 \cdot \delta(r_0 - r) \cdot a_z \cdot e^{i(kx - \omega t)} \cdot \sin \theta \quad (26)$$

$$\delta j_x = v \cdot \delta \rho \quad (27)$$

где z и θ - полярные координаты в плоскости yz с центром на оси покоящегося пучка. Возникающие при этом магнитные и электрические поля, действующие на частицы пучка, удобно формально представить, как сумму полей собственно пучка H_s, E_s и индуцированных полей H_i, E_i , обусловленных окружающей средой. Если поперечные размеры камеры неограниченно увеличивать так, что расстояние от тока до шихтованного железа тоже неограниченно растет, то собственные поля пучка не изменяются, а величина индуцированных полей стремится к нулю.

Множитель $e^{i(kx - \omega t)}$ опускаем. Подставив выражение (27) для δj_x вместо J в (20) и проведя интегрирование по z и θ , получаем следующее выражение для H_{iy} :

$$H_{iy} = \frac{e N v}{c h^2} \cdot a_z \cdot W_y(\mu, \alpha h), \quad (28)$$

где
$$W_y(\mu, \alpha h) = 2 \cdot \int_0^\infty \frac{(\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) \cdot \xi \cdot e^{-\xi}}{\mu \xi c h \xi + \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2} s h \xi} \cdot d\xi \quad (29)$$

Здесь $N = N_0 \pi r_0^2$ - линейная плотность частиц пучка.

Напомним, что α определено выражением (6). Подставив выражение (26) для $\delta \rho$ вместо eN в (24) и проведя интегрирование по z и θ , получаем следующее выражение для E_{zi} :

$$E_{zi} = \frac{\pi^2 e N}{6 h^2} \cdot a_z \quad (30)$$

Здесь $N = N_0 \pi r_0^2$ - линейная плотность частиц пучка.

Собственные поля пучка при когерентном колебании известны:

$$H_{sy} = \frac{2 e N v}{c r_0^2} a_z, \quad E_{sz} = -\frac{2 e N}{r_0^2} \cdot a_z \quad (31)$$

Используя (28), (30) и (31), получаем, что при когерентном квазистационарном z -колебании пучка, на частицы пучка действует сила

$$F_z = a_z \cdot e^2 \cdot N \cdot \left\{ -\frac{2}{r_0^2} + \frac{1}{h^2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{6} + \beta^2 \cdot W_y(\mu, \alpha h) \right) \right\} \quad (32)$$

Если пучок совершает когерентное y -колебание, так что его ось имеет y координату $y = a_y \cdot e^{i(kx - \omega t)}$, то совершенно аналогично случаю z -колебаний, используя (21) и (23), получим:

$$H_{iz} = -\frac{e N v}{c h^2} \cdot a_z \cdot W_z(\mu, \alpha h), \quad (33)$$

где

$$W_z(\mu, \alpha h) = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{(\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) \xi e^{-\xi}}{\mu \xi \operatorname{sh} \xi + \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2} \operatorname{ch} \xi} d\xi, \quad (34)$$

$$E_{iy} = \frac{\pi^2 e N}{12 h^2} a_z, \quad (35)$$

$$H_{sz} = -\frac{2eNv}{c z_0^2}, \quad E_{sy} = -\frac{2eN}{z_0^2} a_y. \quad (36)$$

Используя эти выражения получаем, что при когерентном квазистационарном y -колебании пучка на его частицы действует сила:

$$F_y = a_y \cdot e^2 N \cdot \left\{ -\frac{2}{y^2 z_0^2} + \frac{1}{h^2} \left(\frac{\pi^2}{12} + \beta^2 W_z(\mu, \alpha h) \right) \right\} \quad (37)$$

Отметим, что в пределе $\alpha h \rightarrow 0$

$$W_z(\mu, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^2}, \quad (29A)$$

$$W_y(\mu, 0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n^2}, \quad (34A)$$

где $\alpha = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}$.

В приближении $a_z \ll z_0 \ll h$ выражения H_{iy} и E_{iz} можно также получить, рассматривая когерентные колебания плотности заряда (26) и плотности тока (27), как результат наложения двух цилиндрических пучков радиуса z_0 с плотностями тока $e N_0 v \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ и $-e N_0 v \cdot e^{i(kx - \omega t)}$, с осями, проходящими соответственно через точки $z_{0+} = a_z/2$ и $z_{0-} = -a_z/2$. Поле, индуцированное каждым из этих пучков, можно вычислять, как поле от линейного тока. Иначе говоря, поле индуцированное когерентными колебаниями пучка можно рассматривать как поле токового диполя. Аналогично для y -колебаний. Существенно, что в рассматриваемом приближении ($a_z, a_y \ll z_0; z_0 \ll h$) силы F_z и F_y согласно (32, 37), действующие на частицы пучка при его когерентных колебаниях, однородны по сечению пучка и пропорциональны амплитуде рассматриваемых колебаний. В работе /5/ вся задача решалась в приближении $\alpha h = 0$ и использовался метод отражений. В этом приближении были получены правильные выражения (18, 19) для индуцированного линейным током магнитного поля. Однако магнитное поле, индуцированное когерентным колебанием пучка, отождествлялось с полем, индуцированным лишь одним линейным током величины $e N_0 v \cdot e^{i(kx - \omega t)}$, проходящим через точку $z_0 = a_z$ (a_z - амплитуда когерентных колебаний оси пучка), а не с полем токового диполя. Аналогично для y -колебаний. То же самое можно сказать и о проведенном там вычислении электрических полей. В результате, полученные в /5/ силы F_z и F_y , содержат наряду с "когерентными" членами, однородными по сечению пучка, еще и "некогерентные" члены, пропорциональные смещению частицы от оси пучка. "Когерентная" часть сил F_z и F_y работы /5/ совпадает соответственно с (32) и (37), взятыми в пределе $\alpha h \rightarrow 0$, т.е. при использовании для W_z и W_y выражений (29A) и (34A).

Рассмотрим поведение функций $W_y(\mu, \alpha h)$ и $W_z(\mu, \alpha h)$. Напомним, что согласно (6) и (10):

$$(\alpha h)^2 = \left(\frac{\mu_0 \Delta c}{\delta} - 1 + i \frac{\mu_0 \Delta c}{\delta} \right) \cdot \epsilon \cdot \frac{\omega^2 h^2}{c^2}$$

$$\mu = \frac{\delta + (1+i) \mu_0 \Delta c}{\delta + d}, \quad \Delta c = c / \sqrt{2\pi \sigma \mu_0 \omega}$$

Введем безразмерные переменные

$$\rho = \delta/d; \quad q = \epsilon \cdot \left(\frac{c \mu_0 h}{2\pi \sigma d^2} \right)^2; \quad \beta = \beta_c / \beta_0; \quad (38)$$

где $\beta_0 = \frac{c^2 \mu_0}{(2\pi)^2 \sigma d}$ и $\beta_c = \frac{\omega}{2\pi}$.

В этих переменных

$$\begin{aligned} (\alpha h)^2 &= (1 - p\sqrt{\beta} + i) \cdot \beta^{3/2} q / p, \\ \mu &= (1 + p\sqrt{\beta} + i) / ((1 + p) \cdot \beta^{1/2}). \end{aligned} \quad (39)$$

Так что теперь $W_y(\mu, \alpha h) = W_{yH}(\beta, q, p)$, $W_z(\mu, \alpha h) = W_{zH}(\beta, q, p)$. Индекс "H" дальше опускаем. На рис. 5 формально представлено поведение мнимой и вещественной частей W_y и W_z , как функций β , для случая $p = \delta/d = 0.15$. При этом кривой с номером I соответствует $q = 0$, кривым с номером $J = 2, \dots, 8$ соответствует $q = 10^{-8 + J}$. Следует помнить, что дисперсионное уравнение (6), лежащее в основе проведенного расчета, справедливо в предположении $\Delta_c/d \ll 1$ ($\Delta_c = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu_0\omega}$). Это условие ограничивает область охваченных расчетом частот снизу. Однако, для ускорителей с обычными параметрами это условие хорошо выполняется. В этом разделе задача решалась в квазистатическом приближении. Это ограничивает область частот сверху. В следующем разделе рассмотрен пример без наложения условия квазистатичности.

Из проведенного там рассмотрения следует, что отклонение от квазистатического приближения становится существенным, когда отношение длины волны когерентного колебания к вертикальной апертуре становится меньше $15 + 20$. Исходя из этого можно определить верхнюю границу допустимых при квазистатическом расчете частот, следовательно и верхнюю границу переменной β для каждой кривой рис. 5.

Характерной особенностью $\text{Im } W_y$ и $\text{Im } W_z$, как функций частоты β (см. рис. 5) является наличие у них максимума, который с ростом параметра q смещается в сторону более низких частот.

Существенно, что мнимые части W_y и W_z , вообще говоря, величины одного порядка. При $p = \delta/d < 0.05$ мнимые части W_y и W_z практически положительны во всей допустимой области изменения β . Но при $\delta/d > 0.05$ в области высоких частот $\text{Im } W_y$ и $\text{Im } W_z$ становятся отрицательными. С уменьшением δ/d величины максимумов $\text{Im } W_y$ и $\text{Im } W_z$ несколько увеличиваются, при этом максимум $\text{Im } W_y$ стремится по величине к максимуму $\text{Im } W_z$.

В низкочастотном пределе $\beta \ll 1$, следовательно $\mu \gg 1$, если при этом еще и $q\beta^{3/2}/p \ll 1$, то $\alpha h \ll 1$. При этом из (29.A) и (34A), или непосредственно из (29) и (34) следует, что

$$W_y \cong -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad (40)$$

$$W_z \cong \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (41)$$

Таким образом в низкочастотном пределе при когерентном z -колебании, амплитуды α_z , в области пучка индуцируется поле, определяемое согласно (28):

$$H_{iy} = \frac{eNv}{ch^2} \cdot \alpha_z \cdot \frac{\pi^2}{12}.$$

Аналогично при y -колебаниях, согласно (33):

$$H_{iz} = \frac{eNv}{ch^2} \cdot \alpha_y \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

Эти выражения можно было бы получить, как поля индуцированные статистическим токовым диполем $eNv\alpha_z$, помещенным между двумя плитами сплошного железа с бесконечной магнитной проницаемостью, вместо шихтованных плит.

Рассмотрим теперь высокочастотный предел $p\beta^{1/2} \gg 1$. При этом, согласно (39):

$$(\alpha h)^2 \cong -q\beta^2; \quad \mu \cong \frac{p}{1+p}; \quad \alpha \cong -\frac{1}{1+2p}.$$

В области, где еще и $q\beta^2 \gg 1$, выражения (29) и (34) дают

$$\begin{aligned} W_y &\cong -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6} \\ W_z &\cong \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \end{aligned} \quad (42)$$

Соответственно для поля H_{iy} при z - колебания пучка получим:

$$H_{iy} = - \frac{eNv}{ch^2} \cdot a_z \cdot \frac{\pi^2}{6},$$

а для поля H_{iz} при y - колебаниях пучка:

$$H_{iz} = - \frac{eNv}{ch^2} \cdot a_y \cdot \frac{\pi^2}{12}.$$

Эти выражения можно было бы получить, как поля индуцированные статическим токовым диполем $eNva$, помещенным между двумя сверхпроводящими плитами, расположенными на месте шихтованных плит.

Если же $\rho\beta^{1/2} \gg 1$, но $q\beta^2 \ll 1$, то $(\alpha h)^2 \ll 1$, тогда W_y и W_z определяются выражениями (29А, 34А), при этом в них следует положить $\alpha = -1/(1+2\rho)$. Получаемый результат совпадает с (42) в пределе $\rho \rightarrow 0$.

Использованные в этом параграфе выражения для полей основывались на результатах § 3, полученных в предположении, что плиты шихтованного железа неограничены и по толщине, и в поперечном направлении. Для понимания насколько обоснована такая модель окружения пучка при рассмотрении разных мод когерентных дипольных колебаний пучка, полезно знать, как быстро спадают в зазорах шихтовки поля, обусловленные этими модами.

Используя выражение (I4), получаем, что, если линейный ток $J = J_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ проходит посередине между параллельными плитами шихтованного железа (рис.3, $z_0 = 0$), то векторный потенциал поля между листами шихтовки в квазистатическом приближении:

$$A_{g+} = e^{i(kx - \omega t)} \cdot \frac{4J_0}{c} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-(z/h - 1) \cdot \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2} - \xi} \cdot \cos\left(\frac{y}{h} \xi\right)}{\mu \xi + \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2} - (\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) \cdot e^{-2\xi}} \cdot d\xi.$$

Поместим на место этого тока тонкий круглый (радиуса $r_0 \ll h$) линейный пучок частиц, совершающий, как целое, длинноволновые когерентные дипольные z -колебания, так что ось пучка колеблется как $a_z \cdot e^{i(kx - \omega t)}$. Тогда при $a_z \ll r_0$ в квазистатическом пределе для потенциала поля в зазоре шихтовки получим:

$$A_{g+} = e^{i(kx - \omega t)} \cdot \frac{4J_0}{c} \cdot \frac{a_z}{h} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-(z/h - 1) \cdot \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2} - \xi} \cdot \xi \cdot \cos\left(\frac{y}{h} \xi\right)}{\mu \xi + \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2} + (\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) \cdot e^{-2\xi}} \cdot d\xi \quad (43)$$

Аналогично в случае y - колебаний:

$$A_{g+} = e^{i(kx - \omega t)} \cdot \frac{4J_0}{c} \cdot \frac{a_z}{h} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-(z/h - 1) \cdot \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2} - \xi} \cdot \xi \cdot \sin\left(\frac{y}{h} \xi\right)}{\mu \xi + \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2} - (\mu \xi - \sqrt{\xi^2 + (\alpha h)^2}) \cdot e^{-2\xi}} \cdot d\xi \quad (44)$$

Если ось пучка проходит через точку $y_0 \neq 0$, то в этих выражениях следует y заменить на $y - y_0$. Видно, что при $Re(\alpha h)^2 > 0$, поля убывают с расстоянием вглубь шихтовки не медленнее, чем $\exp[-Re(\alpha h) \cdot (z-h)/h]$. Здесь $z-h$ - расстояние вглубь шихтованной области от её края.

§ 5. Поля и силы, действующие на частицы модельного пучка в неквазистатическом приближении в системе с геометрией рис.4

Рассмотрим систему, геометрия которой представлена на рис.4. Между двумя бесконечными сверхпроводящими плоскостями АВ и СД вдвинуты брусы 1 и 2 из шихтованного железа. В выбранной системе координат ось X направлена на нас. Плоскости листов железа параллельны плоскости yz . Структура шихтованного железа: толщина листа железа d , магнитная проницаемость μ_0 , проводимость σ , зазор между листами железа δ . Зазор заполнен клеем с диэлектрической проницаемостью ϵ . На рис.4 пучок помечен буквой П.

Структуру пучка возьмем такой же, как в работе /7/. Центру пучка соответствует $z = 0$. Плотность частиц в области $-\tilde{z}/2 < z < \tilde{z}/2$ однородна по z . Положение и форма пучка в направлении y пока произвольны. Все частицы пучка движутся в направлении X со скоростью V .

Плотность заряда и тока пучка:

$$j_x = v \cdot \rho; \quad \rho = \begin{cases} eN g(y) / \tau & |z| < \tau/2, \\ 0 & |z| > \tau/2. \end{cases} \quad (45)$$

Нормировка: $\int_0^\tau g(y) dy = 1$

N - число частиц на единицу длины пучка. Разложим $g(y)$ в ряд Фурье

$$g(y) = \frac{2}{\tau} \sum_p g_p \cdot \sin(\eta_p y), \quad g_p = \int_0^\tau g(y) \cdot \sin(\eta_p y) dy. \quad (46)$$

где $\eta_p = \frac{\pi}{\tau} \cdot (2p+1)$.

Рассмотрим возмущения, представляющие собой смещения неизменных сечений пучка по оси z на $\Delta z = \alpha_z \cdot e^{i(ky - \omega t)}$. Считаем, что амплитуда колебания α_z много меньше толщины пучка τ . При этом возмущения плотности и тока равны

$$\rho_1 = \frac{eN}{\tau} \cdot \alpha_z g(y) \cdot \{ \delta(z - \tau/2) - \delta(z + \tau/2) \} \cdot e^{i(kx - \omega t)},$$

$$j_{1y} = \rho_1 \cdot v,$$

$$j_{1z} = \begin{cases} i \cdot (kv - \omega) \cdot (eN/\tau) \cdot g(x) \cdot \alpha_z \cdot e^{i(kx - \omega t)} & |z| < \tau/2, \\ 0 & |z| > \tau/2. \end{cases} \quad (47)$$

Мы будем рассматривать случай циклического ускорителя, так что: $k = n/R$, $\omega/c = (1 \mp v/n) \cdot k$, здесь верхний знак относится к случаю медленной волны, нижний - быстрой волны (§ 6). Записав общее решение уравнений поля внутри пучка, в области между пучком и шихтованной стенкой и решение уравнения (7) для поля в зазоре шихтовки, сошьём эти поля соответственно на границе пучка и на границе шихтованного железа, используя граничные условия (8) и (9). При рассмотрении компоненты электрического поля параллельной щелям шихтованную границу считаем сверхпроводящей плоскостью. В результате получаем следующие выражения для полей внутри пучка, вносящих вклад в силу, действующую по направлению z :

$$E_{nz} = 8\pi \frac{eN}{\omega \tau} \cdot \alpha_z e^{i(kx - \omega t)} \cdot \left\{ -\sum_p g_p \cdot \sin(\eta_p y) + \sum_p g_p \cdot \sin(\eta_p y) \cdot (1 - \beta_w (\beta - \beta_w) \cdot \frac{k^2}{e^2}) \cdot \text{sh}(\frac{\ell \tau}{2}) + \right.$$

$$+ \sum_p g_p \cdot \sin(\eta_p y) \cdot (\text{cth}(\ell h) - 1) \cdot (1 - \beta_w \cdot \frac{k^2}{e^2} \cdot (\beta - \beta_w)) \cdot \text{sh}(\frac{\ell \tau}{2}) +$$

$$\left. + \sum_p g_p \cdot \sin(\eta_p y) \cdot \beta_w \cdot (\beta - \frac{k^2}{e^2} \cdot (\beta - \beta_w)) \cdot \frac{k^2 \mu \cdot \text{sh}(\ell \tau/2)}{\ell \cdot \text{sh}(\ell h) \cdot (\frac{\ell^2 - k^2}{e} \mu \text{ch}(\ell h) + \sqrt{\alpha^2 + \eta^2} \cdot \text{sh}(\ell h))} \right\}. \quad (48.A)$$

$$H_{ny} = -8\pi \frac{eN}{\omega \tau} \cdot \alpha_z e^{i(kx - \omega t)} \cdot \left\{ -\beta \sum_p g_p \cdot \sin(\eta_p y) + \sum_p g_p \cdot \sin(\eta_p y) \cdot (\beta - \frac{k^2}{e^2} \cdot (\beta - \beta_w)) \cdot \text{sh}(\frac{\ell \tau}{2}) + \right.$$

$$+ \sum_p g_p \cdot \sin(\eta_p y) \cdot (\text{cth}(\ell h) - 1) \cdot (\beta - \frac{k^2}{e^2} \cdot (\beta - \beta_w)) \cdot \text{sh}(\frac{\ell \tau}{2}) -$$

$$\left. - \sum_p g_p \cdot \sin(\eta_p y) \cdot (\beta - \frac{k^2}{e^2} \cdot (\beta - \beta_w)) \cdot \frac{\mu (\ell^2 - k^2) \cdot \text{sh}(\ell \tau/2)}{\ell \cdot \text{sh}(\ell h) \cdot (\frac{\ell^2 - k^2}{e} \mu \text{ch}(\ell h) + \sqrt{\alpha^2 + \eta^2} \cdot \text{sh}(\ell h))} \right\}. \quad (49.A)$$

Здесь $\beta_w = \omega/k = 1 \mp v/n$; $\ell^2 = k^2 + \eta^2 - \omega^2/c^2$; $\eta_p = \frac{\pi}{\tau} \cdot (2p+1)$. (50)

Напомним, что $k = n/R$, $\omega/c = (1 \mp v/n) \cdot n/R$, α и μ определены согласно (6,10).

Следуя работе [7], проведем усреднение этих полей по ширине пучка путем умножения их на $g(y)$ и интегрирования по y . Операция сводится к замене в приведенных выше выражениях $g_p \cdot \sin(\eta_p y)$ на g_p^2 . Используя эти выражения, получим усредненную по ширине пучка силу, действующую в z направлении на частицы пучка. При этом считаем $\ell \tau \ll 1$, так что $\text{sh}(\ell \tau/2) \cong \ell \tau/2$.
Получаем:

$$\begin{aligned}
\langle F_{zn} \rangle &= e \cdot \langle E_{nz} + \beta H_{ny} \rangle = \\
&= 4\pi \frac{e^2 N}{w} \cdot a_z \cdot e^{i(kx - \omega t)} \left\{ -\frac{2}{\gamma^2 c} \sum_p g_p^2 + \sum_p g_p^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\kappa^2}{\ell^2} (\beta - \beta_w)^2 \right) \cdot \ell + \right. \\
&+ \sum_p g_p^2 \cdot (\text{cth}(\ell h) - 1) \cdot \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\kappa^2}{\ell^2} (\beta - \beta_w)^2 \right) \cdot \ell + \\
&\left. + \sum_p g_p^2 \cdot \left(\beta - \frac{\kappa^2}{\ell^2} (\beta - \beta_w) \right)^2 \cdot \frac{\ell^2}{\text{sh}(\ell h)} \cdot \frac{\mu}{e^{\ell^2 - \kappa^2} \mu \cdot \text{ch}(\ell h) + \sqrt{\alpha^2 + \eta^2} \cdot \text{sh}(\ell h)} \right\}; \quad (51A)
\end{aligned}$$

Отметим, что согласно /7/

$$\sum_{p=0}^{\infty} g_p^2 = \frac{w}{2} \int_0^w g(y) dy. \quad (52)$$

Приведенные выше выражения для $E_z, H_y, \langle F_z \rangle$ имеют одинаковую структуру. Они состоят из четырех слагаемых, каждое из которых есть ряд по поперечным гармоникам. Первое слагаемое обратно пропорционально толщине пучка ζ и значит оно пропорционально плотности частиц пучка. Остальные слагаемые не зависят от ζ и пропорциональны, скорее, линейному заряду и току пучка.

Если шихтованные брусы выдвигать, то в пределе $h \rightarrow \infty$ третье и четвертое слагаемые стремятся к нулю, а первое и второе слагаемые не изменяются. Следовательно, сумма первого и второго слагаемых описывает случай когерентных \hat{z} -колебаний пучка, находящегося между двумя бесконечными вертикальными сверхпроводящими плоскостями. Если бы брусы были сделаны из сплошного сверхпроводника, то третье слагаемое не изменилось бы, а четвертое бы исчезло.

Таким образом, сумма первых трех слагаемых описывает случай когерентных \hat{z} -колебаний пучка в прямоугольной сверхпроводящей трубе и совпадает, естественно, с результатами /7/. Наконец, четвертое слагаемое обусловлено собственно шихтовкой выдвинутых брусков, т.е. именно четвертое слагаемое содержит интересующий нас эффект. Первые три слагаемые вещественны, четвертое комплексно. В квазистатическом пределе с увеличением ширины камеры w , выражения (48A), (49A) и (51A) должны переходить в соответствующие выражения §4, где был рассмотрен случай неограниченной в поперечном направлении камеры.

Для удобства прослеживания этого перехода, сравнения и графического представления результатов, сгруппируем в (48A), (49A) и (51A) первое и второе, третье и четвертое слагаемые. Множитель $e^{i(kx - \omega t)}$ опускаем.

$$\begin{aligned}
\langle E_{zn} \rangle &= e N a_z \{ \mathcal{E}_{zsn} + \mathcal{E}_{zin} \}, \\
\mathcal{E}_{zsn} &= \frac{4\pi}{w} \left\{ -\frac{2}{c} \sum_{p=0}^{\infty} g_p^2 + \sum_{p=0}^{\infty} g_p^2 \left(1 - \beta_w \cdot (\beta - \beta_w) \cdot \frac{\kappa^2}{\ell^2} \right) \cdot \ell \right\}, \\
\mathcal{E}_{zin} &= \frac{4\pi}{w} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} g_p^2 \cdot (\text{cth}(\ell h) - 1) \cdot \left(1 - \beta_w \frac{\kappa^2}{\ell^2} (\beta - \beta_w) \right) \cdot \ell + \right. \\
&\left. + \sum_{p=0}^{\infty} g_p^2 \cdot \beta_w \cdot \left(\beta - \frac{\kappa^2}{\ell^2} (\beta - \beta_w) \right) \cdot \frac{\kappa^2 \mu}{\text{sh}(\ell h) \cdot \left(\frac{\ell^2 - \kappa^2}{e} \mu \cdot \text{ch}(\ell h) + \sqrt{\alpha^2 + \eta^2} \cdot \text{sh}(\ell h) \right)} \right\}; \quad (48B) \\
\langle H_{yn} \rangle &= -e N a_z \cdot \beta \cdot \{ \mathcal{H}_{ysn} + \mathcal{H}_{yin} \}, \\
\mathcal{H}_{ysn} &= \frac{4\pi}{w} \left\{ -\frac{2}{c} \sum_{p=0}^{\infty} g_p^2 + \frac{1}{\beta} \sum_{p=0}^{\infty} g_p^2 \left(\beta - \frac{\kappa^2}{\ell^2} (\beta - \beta_w) \right) \cdot \ell \right\}, \quad (49B) \\
\mathcal{H}_{yin} &= \frac{4\pi}{w} \left\{ \frac{1}{\beta} \sum_{p=0}^{\infty} g_p^2 \cdot (\text{cth}(\ell h) - 1) \cdot \left(\beta - \frac{\kappa^2}{\ell^2} (\beta - \beta_w) \right) \cdot \ell - \right. \\
&\left. - \sum_{p=0}^{\infty} g_p^2 \cdot \left(\beta - \frac{\kappa^2}{\ell^2} (\beta - \beta_w) \right) \cdot \frac{\mu \cdot (\ell^2 - \kappa^2)}{\text{sh}(\ell h) \cdot \left(\frac{\ell^2 - \kappa^2}{e} \mu \cdot \text{ch}(\ell h) + \sqrt{\alpha^2 + \eta^2} \cdot \text{sh}(\ell h) \right)} \right\};
\end{aligned}$$

$$\langle F_{zn} \rangle = e^2 N a_2 \cdot \{ F_{zson} + F_{zs1n} + F_{zin} \},$$

$$F_{zson} = \frac{4\pi}{w} \left\{ -\frac{2}{\gamma^2 \tau} \sum_{p=0}^{\infty} g_p^2 \right\},$$

$$F_{zs1n} = \frac{4\pi}{w} \sum_1 g_p^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{k^2}{e^2} \cdot (\beta - \beta_w)^2 \right) \cdot \ell, \quad (51B)$$

$$F_{zin} = \frac{4\pi}{w} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} g_p^2 \left(\text{cth}(\ell h) - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{k^2}{e^2} \cdot (\beta - \beta_w)^2 \right) \cdot \ell + \sum_{p=0}^{\infty} g_p^2 \left(\beta - \frac{k^2}{e^2} \cdot (\beta - \beta_w) \right)^2 \cdot \frac{\ell^2}{\text{sh}(\ell h)} \cdot \frac{\mu}{e} \cdot \frac{\mu \cdot \text{ch}(\ell h) + \sqrt{\alpha^2 + \eta^2} \cdot \text{sh}(\ell h)}{e} \right\}.$$

Здесь величины ℓ , β_w , k определены выражениями (50). При переходе к пределу очень широкой камеры $w/h \gg 1$ ряды, в приведенных выше выражениях могут быть заменены на интегралы. Выражения \mathcal{E}_{zsn} , $\mathcal{H}_{y sn}$ и F_{zsn} при $w/h \gg 1$ описывают поля пучка, не окруженного средой. В случае тонкого узкого пучка ($\tau, \Delta \ll h$), переходя сперва к квазистатическому пределу $wk \ll 1$, а затем к пределу широкой камеры $w/h \gg 1$, легко показать, что выражение $\langle E_{zin} \rangle = e N a_2 \cdot \mathcal{E}_{zin}$ переходит в выражение (30), $\langle H_{yin} \rangle = -e N \beta a_2 \cdot \mathcal{H}_{yin}$ переходит в (28).

Члены вторых сумм в выражениях \mathcal{E}_{zin} , \mathcal{H}_{yin} , F_{zin} характерны тем, что имеют знаменатели, модули которых могут быть малыми величинами при определенных совокупностях параметров шихтовки, геометрических размеров камеры, продольного и поперечного номеров моды (n, p) . Это соответствует возможности распространения по волноводу, образованному системой рис. 4, своеобразных волноводных волн с номером (n, p) . Вклад таких членов при изменении n имеет резонансный характер. В квазистатическом пределе подобного резонансного поведения нет.

Рассмотрим определенную модель пучка. Следуя работе [7], выберем поперечное распределение плотности заряда в пучке (45) в виде

$$g(y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\Delta} \cdot \cos[\pi(y-y_0)/\Delta], & |y-y_0| < \Delta/2 \\ 0 & |y-y_0| > \Delta/2 \end{cases} \quad (53)$$

Для такого распределения плотности коэффициенты Фурье по (46):

$$g_p = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cdot p \cdot \frac{\Delta}{w})}{1 - (p\Delta/w)^2},$$

и формула (52) дает:

$$\sum_{p=0}^{\infty} g_p^2 = \frac{\pi^2 w}{16 \Delta}. \quad (54)$$

При заданной геометрии камеры (w и h в данной модели) нас интересует поведение когерентных полей и силы, действующей на частицы пучка, при изменении параметров шихтовки ($\epsilon, \beta, \mu_0, \delta, d$). Согласно (51) когерентные поля и сила зависят от параметров шихтовки через величины α и μ , которые определяются формулами (6) и (10), или (38) и (39). Мы считаем, что в области интересующих нас частот величины ϵ и β постоянны и заданы. Величина же магнитной проницаемости железа μ_0 по видимому, может существенно зависеть от частоты в области интересующих нас высоких частот. К сожалению нам эта экспериментальная зависимость неизвестна. Поэтому за переменные параметры, характеризующие шихтовку мы выбрали δ/d и μ_0/d^2 . В приводимых ниже примерах интересующие нас величины представляются на рисунках как функции продольного номера моды n при разных значениях параметра μ_0/d^2 , при заданном δ/d .

Как пример рассмотрим гипотетический ускоритель с сечением рис. 4 со следующими параметрами:

радиус ускорителя	$R = 150$ см	
число бетатронных колебаний на оборот	$\nu_2 = 0.8$	
ширина камеры	$w = 20$ см	(55)
высота камеры	$2h = 2$ см	
диэлектрическая постоянная клея в зазорах шихтовки	$\epsilon = 5$ см	

проводимость железа листов шихтовки
ширина пучка по (53)

$$\sigma = 5 \cdot 10^{16} \text{ I/сек}$$

$$\Delta = 0.5 \text{ см.}$$

Для иллюстрации поведения индуцированных магнитного и электрического полей и силы, обусловленной ими при когерентном колебании пучка, рассмотрим случай $\delta/d = 0.05$, $v/c = 0.5$.

На рис. 6-8 для медленной волны представлено поведение $Re H_{zin}$ и $Im H_{zin}$, $Re E_{zin}$ и $Im E_{zin}$, $Re F_{zin}$ и $Im F_{zin}$ как функций продольного номера моды n ³⁾. Кривые на рисунках соответствуют следующим значениям параметра :

$$\mu_0/d^2 = 10^{t_p}, \quad \text{где } t_p = 3 + 0.5 \times (p-1) \quad (56)$$

$p = 1, \dots, 8$ - номер, указанный около кривой. На рис. 6А + 8А дана начальная часть этих графиков в увеличенном масштабе. На рис. 9 дана начальная часть графика $Re F_{zin}$ и $Im F_{zin}$ для случая $\delta/d = 0.05$, $v/c \rightarrow 1$. Виден резонансный характер некоторых кривых в области больших n . При этом значения $Im E_{zin}$ и $Im H_{zin}$ становятся большими и близкими по величине, но из-за того, что $v/c = 0.5$ происходит лишь частичная компенсация электрических и магнитных сил, действующих на частицу. В случае $v/c \rightarrow 1$, $Im E_{zin}$ и $Im H_{zin}$ существенно уменьшаются, оставаясь близкими по величине в области высоких n , при этом, в силу $v/c \rightarrow 1$, происходит и более полная компенсация электрических и магнитных сил. Так что при $v/c \rightarrow 1$ резонансы в области высоких n прощупываются, но они значительно слабее, чем при $v/c = 0.5$.

В §6 при определении инкрементов неустойчивости и стабилизирующего энергетического разброса частиц нам понадобятся величины $Re F_{zin}/(n-v)$ и $Im F_{zin}/(n-v)$. Верхний знак - для медленной волны, нижний - для быстрой. Однако в области малых n величины $Re F_{zin}$, $Im F_{zin}$ удобнее для графического представления. Эти величины представлены в виде графиков на рис. 10-23 для следующих случаев:

I. $\delta/d = 0.05$		
1. медленная волна,	$v/c = 0.5$	рис. 10
2. медленная волна	$v/c \rightarrow 1$	рис. 11
3. быстрая волна	$v/c = 0.5$	рис. 12
4. быстрая волна	$v/c \rightarrow 1$	рис. 13
II. $\delta/d = 0.01$		
1. медленная волна	$v/c = 0.5$	рис. 14 и рис. 22
2. медленная волна	$v/c \rightarrow 1$	рис. 15 и рис. 23
III. $\delta/d = 0.15$		
1. медленная волна	$v/c = 0.5$	рис. 16 и рис. 18
2. медленная волна	$v/c \rightarrow 1$	рис. 17 и рис. 19
3. быстрая волна	$v/c = 0.5$	рис. 20
4. быстрая волна	$v/c \rightarrow 1$	рис. 21

Сравнивая графики для быстрых волн с соответствующими графиками для медленных волн, видим, что максимум резонанса быстрой волны, оптимизированный по μ_0/d^2 , лежит при более низких n и он уже, чем у медленной волны (см. рис. 30).

Сравнивая рис. 10 для случая $\delta/d = 0.05$ с соответствующими рис. 18 для $\delta/d = 0.15$ и с рис. 22 для $\delta/d = 0.01$ видим, что увеличение δ/d ведет к смещению положения резонанса на более низкие n и к его сужению. Наоборот, уменьшение δ/d ведет к смещению резонанса в область более высоких n и к его уширению. Так при $\delta/d = 0.01$ и $v/c = 0.5$ на рис. 22 видно, что на интервале $n < 200$ резонанс начинает появляться лишь у кривой с номером $p = 8$, а при $v/c \rightarrow 1$ на рис. 23 резонанс вообще не просматривается.

Отметим следующее обстоятельство. Среди всех представленных на графике $Im F_{zin}/(n-v)$ рис. 10, точек самая нижняя (максимальный декремент) лежит на кривой 4, а самая верхняя (максимальный инкремент) лежит на кривой 5. Согласно (56), кривой 4 соответствует $\mu_0/d^2 = 10^{4.5}$, а кривой 5 соот-

2) Здесь и в дальнейшем, используя размерный параметр μ_0/d^2 , мы не выписываем его размерности.

3) На рис. 6-27, относящихся к индуцированным полям и силам, индексы опускаются. Например $Re H_{zin}$, $Im E_{zin}$, $Im F_{zin}$ записываются как $Re H$, $Im E$, $Im F$.

ветствует $\mu_0/d^2 = 10^5$. На рис.24 представлены графики $Re F_{zin}/(n-\nu)$ и $Im F_{zin}/(n-\nu)$ при более частом разбиении этого интервала μ_0/d^2 . При этом соответствие между номером кривой на рис.24 и величиной μ_0/d^2 следующее:

$$\mu_0/d^2 = 10^{t_p}$$

номер кривой p	1	2	3	4	5	6	7	8
t_p	$4 \frac{1}{3}$	$4 \frac{1}{2}$	$4 \frac{2}{3}$	$4 \frac{40}{50}$	$4 \frac{41}{50}$	$4 \frac{5}{6}$	5	$5 \frac{1}{6}$

Так что кривые 4 и 5 рис.10 совпадают соответственно с кривыми 2 и 7 рис.24. Видим, что внутри интервала $\mu_0/d^2 = 10^{4.5} \div 10^5$ лежат значения μ_0/d^2 , для которых осуществляются более оптимальные для резонанса условия, чем на его границах, т.е. при $\mu_0/d^2 = 10^{4.5}$ и $\mu_0/d^2 = 10^5$. При этом амплитуда значительно возрастает, а ширина резонанса уменьшается. Аналогичная картина наблюдается во всех других случаях. Так что на самом деле ширина и амплитуда резонансных кривых на приведенных рисунках зависят в значительной мере от того насколько близко соответствующие μ_0/d^2 лежат к оптимально-резонансному значению μ_0/d^2 .

Все рассмотренные выше примеры относились к системе с сечением рис.4 и параметрами (55), т.е. при вертикальной апертуре $2h = 2$ см. На рис.25 представлены $Im F_{zin}/(n-\nu)$ для медленной волны в системе с параметрами (55) при $\delta/d = 0.05$ и $\nu/c = 0.5$, но при $2h = 4$ см — сплошные кривые — и при $2h = 8$ см — пунктирные кривые с штрихованным номером.

На рис.26 представлены $Im F_{zin}/(n+\nu)$ для быстрой волны в системе с параметрами (55) при $\delta/d = 0.05$ и $\nu/c = 0.5$, но при $2h = 4$ см, а на рис.27 — при $2h = 8$ см. При этом на рис.25, 26 и 27 величина μ_0/d^2 определяется через номер кривой по-прежнему соотношением (56).

Вне было исследовано поведение индуцированных полей и сил, обусловленных ими. Рассмотрим теперь члены F_{z50n} и F_{z51n} в (51Б), обусловленные собственными электрическими и магнитными полями пучка. Отметим, что F_{z50n} и F_{z51n} имеют противоположные знаки. Это легко понять. F_{z50n} учитывает уменьшение заряда, эффективно действующего на внутреннюю частицу пучка, при сдвиге пучка в сторону частицы. F_{z51n} учитывает увеличение действующей на частицу пучка силы за счет приближения центра пучка к частице.

Используя (54), получаем:

$$F_{z50n} = -\frac{\pi^3}{2\gamma^2 \tau \Delta} \quad (57)$$

Для ускорителя с параметрами (55) сумма F_{z51n} была вычислена по (51Б). На рис.28 представлено F_{z51n} как функция номера моды n при ряде значений ν/c . Сплошные линии — для случая медленной волны, т.е. при $\omega = \omega_0 \cdot (n-\nu)$. Пунктирные — для случая быстрой волны, т.е. при $\omega = \omega_0 \cdot (n+\nu)$. Тем самым слагаемые F_{z50n} , F_{z51n} и F_{zin} в выражении $\langle F \rangle$ по (51Б) определены для рассматриваемых случаев.

Мы ограничились рассмотрением очень упрощенной модели геометрии поперечного сечения ускорителя рис.4. При этом магнитное поле "поджато" по бокам сверхпроводящими плоскостями. Следует ожидать, что в системе с реальной геометрией резонансы будут наблюдаться при несколько более низких модах n , чем в выбранной нами упрощенной модели с теми же размерами апертуры (w и h).

Как следует из (50), для мод с $n \gg \nu$ электрические и магнитные поля и силы, действующие на частицы при когерентном колебании пучка, определяются длиной волны колебания $\lambda = 2\pi R/n$ и не зависят непосредственно от радиуса ускорителя R . Отмеченные выше резонансные эффекты относятся именно к таким неквазистатическим модам с высоким n . Так что полученные в области $n \gg \nu$ результаты носят общий характер. И приведенные графики, рассчитанные для машины с параметрами (55) радиуса $R = 150$ см, могут быть использованы при рассмотрении машин произвольного радиуса в области $n \gg \nu$. При этом по оси абсцисс следует откладывать новое n' , пересчитанное через длину волны на рассматриваемый ускоритель.

В области же низких мод, можно использовать результаты § 4 для квазистатического приближения.

Все представленные на рисунках результаты численного счета были получены при гауссовской ширине пучка $\Delta = 0.5$ см, по (53) и (55). Уменьшение Δ не приводит к заметному изменению результатов

при постоянной линейной плотности частиц N , увеличение же Δ ведет к уменьшению индуцированных полей.

Для оценки скорости убывания поля вглубь шихтовки выпишем выражение для потенциала магнитного поля в зазоре шихтовки, которое легко получить попутно с выражениями (48) и (49) для полей в области пучка:

$$A_x = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{Ne\alpha_z}{w} \cdot \sum_p g_p \cdot e^{-\left(\frac{z}{h}-1\right)k\sqrt{x^2+\eta^2}} \frac{\ell(v-k(kv-\omega)/e^2) \cdot \sin(\eta y)}{\mu \cdot \frac{e^2-k^2}{e} ch(\ell h) + \sqrt{x^2+\eta^2} sh(\ell h)} \quad (58)$$

Легко видеть, что если взять квазистатический предел этого выражения для узкого пучка (все $g_p=1$) и в нем перейти к пределу $w \rightarrow \infty$, то получается выражение (43).

§ 6. Инкременты неустойчивости и стабилизирующий энергетический разброс

Следуя работе /7/, рассмотрим непрерывный кольцевой пучок частиц с функцией распределения

$$\psi(\alpha, w) = \frac{1}{2\pi} \cdot N \chi(\alpha) \cdot \beta(w),$$

здесь N — линейная плотность частиц пучка,

α — амплитуда бетатронных колебаний частиц пучка,

$w = 2\pi(p_0 - p_0) = (E - E_0)/\beta_0$ — умноженное на 2π отклонение канонического импульса по циклической угловой переменной θ от среднего значения частиц пучка.

Функции $\chi(\alpha)$ и $\beta(w)$ нормированы так, что

$$\int \chi(\alpha) \alpha d\alpha = 1, \quad \int \beta(w) dw = 1.$$

Рассмотрим когерентные дипольные колебания такого пучка со смещением оси $\alpha_z \cdot e^{i(kx - \omega t)}$. При этом на частицы пучка действует комплексная сила F , пропорциональная смещению оси пучка. В /7/ показано, что такие колебания характеризуются дисперсионным уравнением

$$1 = \nu \omega_0 \cdot [U + iV] \cdot \bar{I}, \quad (59)$$

где $U + iV = \langle F \rangle / (2m\nu\omega\alpha)$,

$$\bar{I} = \int \frac{\chi'(\alpha) \cdot \alpha^2 d\alpha \cdot \beta(w) dw}{(\omega - n\Omega)^2 - \nu^2 \Omega^2}, \quad (60)$$

здесь $\Omega = \dot{\theta}$ — циклическая частота обращения частиц в ускорителе.

В предыдущих разделах были получены выражения для силы F_z при наличии шихтованного железа. Выпишем здесь соответствующие выражения для U и V .

1. Пучок в ускорителе с геометрией рис.3, квазистатический режим ($kh \ll 1$), сечение пучка — круг радиуса $r_0 \ll h$.

А. z — колебания. Согласно (60) и (32).

$$U_z + iV_z = \frac{e^2 N}{2m\nu_z \omega_0} \cdot \left\{ -\frac{2}{\gamma^2 r_0^2} + \frac{1}{h^2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{6} + \beta^2 W_y(\mu, xh) \right) \right\} \quad (61)$$

Б. y — колебания. Согласно (60) и (37)

$$U_y + iV_y = \frac{e^2 N}{2m\nu_y \omega_0} \cdot \left\{ -\frac{2}{\gamma^2 r_0^2} + \frac{1}{h^2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{12} + \beta^2 W_z(\mu, xh) \right) \right\} \quad (62)$$

2. Пучок в ускорителе с геометрией рис.4.

z — колебания. Согласно (60) и (51Б).

$$U_z + iV_z = \frac{e^2 N}{2m\nu_z \omega_0} \left\{ \mathcal{F}_{zson} + \mathcal{F}_{zsin} + \mathcal{F}_{zin} \right\} \quad (63)$$

Выражения для \mathcal{F}_{zson} , \mathcal{F}_{zsin} и \mathcal{F}_{zin} определены (51Б).

В работе /7/ было проведено подробное обследование дисперсионного уравнения (59) для случая, когда материал стенок вакуумной камеры имеет малое конечную проводимость. Используя приведенные выше выражения для U и V можно провести совершенно аналогичное исследование для случая открытого шихтованного железа. Поэтому отметим здесь лишь некоторые особенности.

Для "холодного" пучка $f(w) = \delta(w)$ и дисперсионное уравнение (59) упрощается:

$$(\omega - n\omega_0)^2 = v_z^2 \omega_0^2 - 2v_z \omega_0 (U + iV).$$

Если $V \ll U$ и $U \ll v_z \omega_0$, то два корня этого уравнения приближенно равны /7/:

$$\omega = (n \pm v_z) \omega_0 \mp (U + iV), \quad (64)$$

где U и V взяты при $\omega = (n \pm v_z) \cdot \omega_0$.

Таким образом величина инкремента или декремента "холодного" пучка равна $|V|$.

В случае неустойчивости из-за конечной проводимости стенок /7/ V всегда положительно, поэтому раскачивается лишь волна с нижним знаком, т.е. медленная волна с инкрементом $\nu = V$. В рассматриваемой нами задаче с шихтованным железом V может быть и отрицательным. При этом будет раскачиваться волна с верхним знаком в (64), т.е. быстрая волна с инкрементом $\nu = |V|$. Величину инкремента неустойчивости "холодного" пучка для ряда интересных случаев легко определить по формулам (64), (61) и (62) или (63) и рис. 5+27.

В § 4 отмечалось, что в работе /5/ при записи выражений для сил F_y и F_z была допущена ошибка. В результате чего, было сделано ошибочное утверждение, что инкремент когерентных y -колебаний в системе с геометрией поперечного сечения рис.3 в квазистатическом пределе равен тождественно нулю.

На самом деле, как следует из (64), (61) и (62) и рис.5, в квазистатическом пределе y -колебания имеют инкременты, вообще говоря, того же порядка, что и z -колебания. Повидимому, это будет иметь место и в неквазистатическом пределе.

Просмотр численных результатов, включая и те, на основе которых были построены графики рис.6 + 27, показал, что при заданных δ/d и μ_0/d^2 мнимая часть частоты когерентных дипольных колебаний "холодного" пучка, определяемая по формулам (63) и (64), как функция номера моды n , меняет знак лишь в одной точке n_0 , как у быстрой, так и у медленной волн одновременно. Причем и при $n < n_0$, и при $n > n_0$ знаки мнимых частей частот быстрой и медленной волн противоположны. При $n < n_0$ неустойчива медленная волна, быстрая волна устойчива. При $n > n_0$, неустойчива быстрая волна, медленная волна устойчива. На рис.29 точка изменения знака мнимой части частоты n_0 представлена как функция величины $\nu_g(\mu_0/d^2)$ при ряде значений параметра δ/d . При заданном δ/d , в области ниже-справа кривой, неустойчива медленная волна, а быстрая волна устойчива; в области выше-слева кривой неустойчива быстрая волна, а медленная волна устойчива.

Интересно сравнить, с точки зрения развития когерентной дипольной неустойчивости "холодного" пучка, ускоритель с открытым на пучок шихтованным железом и тот же ускоритель, но с внутренней вакуумной камерой, выполненной из металла с конечной проводимостью. Проведем, например, сравнение для моды $n=3$ при $v/c \rightarrow 1$. В случае ускорителя с открытым на пучок шихтованным железом, с параметрами (55) и геометрией поперечного сечения рис.4, мнимая часть силы определяется формулой (51B) и при $v/c \rightarrow 1$ одним из графиков рис.15, 9A и 17 соответственно при $\delta/d = 0.01$, $\delta/d = 0.05$ и $\delta/d = 0.15$. Для моды $n=3$ во всех этих случаях

$$\text{Im} \langle F_{z3} \rangle \approx 0.2 \cdot e^2 N \alpha_2 \quad (65)$$

Предположим теперь, что в этот ускоритель вставлена прямоугольная вакуумная камера ширины w и высоты $2h$, выполненная из металла с конечной проводимостью σ . Считаем, что толщина стенок камеры много меньше, чем w и h , но много больше глубины скин-слоя в металле стенок камеры для частот, рассматриваемых когерентных колебаний. Так что шихтованное железо полностью экранировано камерой. Когерентные дипольные колебания пучка в такой системе рассмотрены в /7/. Показано, что мнимая часть силы, действующей на частицы пучка, определяется выражением

$$\text{Im} \langle F \rangle = e^2 N \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{24} \cdot \frac{\beta}{h^3} \sqrt{\frac{8\pi R c \beta}{\sigma \cdot (n-v)}} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{h}{w}, \frac{\Delta}{h}\right),$$

где $\beta = v/c$, α_2 - амплитуда когерентного z -колебания. $\mathcal{F}\left(\frac{h}{w}, \frac{\Delta}{h}\right)$ - определенная в /7/ функция.

Согласно /7/, если поперечные размеры камеры таковы, что $2h/w < 0.5$, а пучок достаточно узок, так что $\Delta/2h < 0.5$, то $\mathcal{F}(h/w, \Delta/h) \approx 1$. В рассматриваемом нами ускорителе с параметрами (55) $w = 20$, $2h = 2$, $\Delta = 0.5$, так что эти условия выполнены.

Поэтому, если камера выполнена из нержавеющей стали ($\sigma \approx 1.44 \cdot 10^{16}$ I/сек), то

$$\text{Im} \langle F_{2n} \rangle \cong e^2 N a_2 \cdot 0.95 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\beta}{h^3} \cdot \sqrt{\frac{R\beta}{n-\nu}},$$

если камера выполнена из меди ($\sigma \cong 5,2 \cdot 10^{17}$ I/сек), то

$$\text{Im} \langle F_{2n} \rangle \cong e^2 N a_2 \cdot 0.158 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\beta}{h^3} \cdot \sqrt{\frac{R\beta}{n-\nu}}.$$

Тогда для моды $n=3$ при $v/c \rightarrow 1$, получаем: в случае камеры из нержавеющей стали:

$$\text{Im} \langle F_{23} \rangle \cong 0.785 \cdot 10^{-2} \cdot e^2 N a_2 \cdot \frac{\beta}{h^3} \cdot \sqrt{\frac{R\beta}{n-\nu}}. \quad (66)$$

в случае камеры из меди:

$$\langle F_{23} \rangle \cong 0.13 \cdot 10^{-2} \cdot e^2 N a_2. \quad (67)$$

Для холодного пучка, согласно (64) и (60) инкремент пропорционален $\text{Im} \langle F \rangle$. Сравнивая выражение (65) с (66) и (67) видим, что инкремент неустойчивости когерентных дипольных колебаний холодного пучка в ускорителе с открытым на пучок шихтованным железом в десятки раз больше, чем в случае, когда вставлена внутренняя вакуумная камера из нержавеющей стали или меди.

Перейдем теперь к случаю пучка с энергетическим разбросом. Как и в /7/, рассмотрим поведение пучка с функцией распределения (58) при гауссовском энергетическом разбросе частиц пучка

$$f(W) = \frac{1}{\pi^{1/2} q} \cdot e^{-W^2/q^2}. \quad (68)$$

Дисперсионное уравнение (59) для когерентных дипольных колебаний принимает вид /7/:

$$q \cdot \left| \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial W} - \frac{\omega_0}{n \mp \nu_2} \cdot \frac{\partial \nu_2}{\partial W} \right| / (T \cdot e^{i\varphi}) = \mp \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int \frac{e^{-x^2}}{x - x_1} \cdot dx = \mp Z(x_1), \quad (69)$$

где $T \cdot e^{i\varphi} = (U + iV) / (n \mp \nu_2), \quad (70)$

$$x_1 = \delta / (q \cdot |S_w|), \quad \delta_p = \omega - (n \mp \nu_2) \cdot \omega_0, \quad S_w = \frac{\partial [(n \mp \nu) \cdot \dot{\theta}]}{\partial W}.$$

θ - азимутальный угол в ускорителе.

Используя соотношение $W = (E - E_0) / \beta_0$, где E_0 и f - энергия и частота обращения равновесной частицы, перепишем (69) в виде

$$\Delta E \cdot \left| \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial E} - \frac{\omega_0}{n \mp \nu_2} \cdot \frac{\partial \nu_2}{\partial E} \right| / (T \cdot e^{i\varphi}) = \mp Z(x_1), \quad (69A)$$

где $\Delta E = q \cdot \beta_0$ - соответствующий распределению (68) гауссовский энергетический разброс.

Напомним, что $\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial E} = \frac{\omega_0}{E} \cdot \frac{1 - \mathcal{L} \gamma^2}{\gamma^2 - 1},$

\mathcal{L} - коэффициент расширения орбит /13,14/.

Для ускорителей с мягкой фокусировкой $\mathcal{L} = 1/\gamma_x^2$, для ускорителей с жесткой фокусировкой обычно $\mathcal{L} \approx 1/\nu_x^2$. Верхний знак в (69) и (69A) относится к случаю неустойчивости медленной волны ($V > 0$), а нижний - к неустойчивости быстрой волны ($V < 0$). При этом U и V должны вычисляться соответственно в точках $\omega = (n \mp \nu) \omega_0$. Функция $Z(x_1)$ - широко используемая в теории плазмы дисперсионная функция. Она табулирована /12/. Нас интересуют инкременты неустойчивых мод, т.е. область $\text{Im} X_1 > 0$. В этой области возможно удобное графическое представление функции $Z(x_1)$.

На рис.3I представлен результат отображения области $\text{Re} X_1 > 0, \text{Im} X_1 > 0$ комплексной плоскости X_1 на комплексную плоскость Z , осуществляемый функцией $Z(x_1)$ по (69). Семейство линий $\text{Im} X_1 = \text{const}$ переходит в семейство линий, пересекающих вертикальную ось. Около концов этих линий на вертикальной оси указано соответствующее значение $\text{Im} X_1$. Это семейство напоминает семейство окружностей, касательных к горизонтальной оси в точке 0. Семейство линий $\text{Re} X_1 = \text{const}$ переходит в семейство линий, пересекающих горизонтальную ось. Около концов этих линий указано соответствующее значение $\text{Re} X_1$. Это семейство напоминает семейство окружностей касательных к вертикальной оси в точке 0.

Результат отражения области $\text{Re} X_1 < 0, \text{Im} X_1 > 0$ комплексной плоскости X_1 на комплексную плоскость Z , осуществляемый функцией $Z(x_1)$ по (69), легко теперь определить, используя известные свойства симметрии функции $Z(x_1)$ по /12/:

$$\text{Re} Z(-\text{Re} X_1, \text{Im} X_1) = -\text{Re} Z(\text{Re} X_1, \text{Im} X_1); \quad \text{Im} Z(-\text{Re} X_1, \text{Im} X_1) = \text{Im} Z(\text{Re} X_1, \text{Im} X_1).$$

При определении инкремента поступаем следующим образом. В квазистатическом случае, для геометрии рис.3, используя (61) или (62) и график рис.5, находим соответствующие U и V . Далее определяем $Te^{i\varphi}$ по (70). Для ускорителя с геометрией сечения рис.4 и параметрами (55) для мод с $n < 30$, используя (63), (57), график рис.28 и соответствующий параметрам график рис.8А, 9А, 14, 15, 16, 17 находим U и V и затем $Te^{i\varphi} = (U+iV)/(n-v)$. Для мод с $n > 30$, используя (63), (57), график рис.28 и соответствующий параметрам график рис.10, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 21, 22, 23 находим непосредственно $Te^{i\varphi}$.

Подставляя найденное $Te^{i\varphi}$ в уравнение (69) определяем $Z(x_1)$. По графику рис.31 определяем соответствующее комплексное значение x_1 . Согласно (70):

$$\delta_p = \omega - (n-v) \cdot \omega_0 = q \cdot |S_w| \cdot (\operatorname{Re} x_1 + i \operatorname{Im} x_1).$$

Таким образом определяется инкремент когерентного колебания $\operatorname{Im} \delta_p$ и когерентный сдвиг частоты $\operatorname{Re} \delta_p$ относительно частоты $(n-v) \omega_0$.

При изменении энергетического разброса частиц пучка q , соответствующая точка $Z(x_1)$ согласно (70) движется пропорционально q вдоль луча $e^{-i\varphi}$. При некотором, определённом для данной моды значении энергетического разброса q_0 , точка $Z(x_1)$ достигает на рис.31 линии $\operatorname{Im} x_1 = 0$. При $q > q_0$ мода устойчива, при $q < q_0$ мода неустойчива. Таким образом определяется энергетический разброс, необходимый для стабилизации когерентных дипольных колебаний.

Как видно из (69), (70) и графика рис.31, величина инкремента неустойчивости и необходимый для стабилизации энергетический разброс существенно зависят и от величины мнимой части V и от величины вещественной части U . При заданной вещественной части U увеличение мнимой части V всегда ведёт к увеличению инкремента. Существенно знать области параметров, где величина V максимальна. Для ускорителя с геометрией рис.4 и параметрами (55) на рис.30 представлен график зависимости номера моды n_{max} , при котором достигается максимальная величина мнимой части V , рассчитанная по формулам (63) и (51Б). Кривая с индексом М.В. относится к случаю медленной волны, а с индексом Б.В. к быстрой волне. Числа вдоль кривых указывают значение $eg(\mu_0/d^2)$, при которых достигается максимум V .

В § 5 и § 6 мы привели результаты вычислений для гипотетического ускорителя с открытым на пучок шихтованным железом с геометрией поперечного сечения рис.4, с параметрами (55) и модельным пучком (53). Аналогичные вычисления были проделаны для случая, когда шихтованные стенки выполнены из меди ($\mu_0 = 1$, $b = 5.2 \cdot 10^{17}$ I/сек). Для этого случая на рис.8А кружками представлены значения $10 \cdot \operatorname{Im} \mathcal{F}$ для медленной волны при $\delta/d = 0.05$, $v/c = 0.5$ и $\mu_0/d^2 = 10^{3.5}$, а крестиками - при $\mu_0/d^2 = 10^{2.5}$. На рис.12 кружками представлена величина $10 \times \operatorname{Im} \mathcal{F}/(n+v)$ для быстрой волны при $\delta/d = 0.05$, $v/c = 0.5$ и $\mu_0/d^2 = 10^{3.5}$, а крестиками - при $\mu_0/d^2 = 10^{2.5}$. В случае меди $\mu_0 = 1$ и значению $\mu_0/d^2 = 10^{3.5}$ соответствует толщина листа $d \cong 0.018$ см. При такой толщине листа железа с $\mu_0 = 1000$ имеем $\mu_0/d^2 = 10^{6.5}$ и, согласно (56), этому соответствует кривая с номером 8 на рис.8, 8А, и 12. Если у железа $\mu_0 = 100$, то кривые с номером 6. Аналогично, если в случае меди $\mu_0/d^2 = 10^{2.5}$, то толщина листа $d = 0.057$ см, и для железа с $\mu_0 = 1000$ имеем $\mu_0/d^2 = 10^{5.5}$, так что этому на рис.8, 8А и 12 опять соответствуют кривые с номером 6, если же у железа $\mu_0 = 100$, то кривые с номером 4. Интересно сравнить согласно этому, кривые с номерами 8, 6 и 4 на рис.8 8А и 12 для случая железа соответственно с кривыми, намеченными на рис.8А и 12 кружками и крестиками для случая меди. В случае меди число неустойчивых мод медленной волны n_0 невелико, так $n_0 \leq 10$ при $\delta/d \geq 0.05$, у этих мод мнимая часть силы меньше, чем в соответствующем случае железа, кроме случая моды $n = 1$. (смотри рис.8А). Моды с $n \geq 10$ неустойчивы лишь у быстрой волны. В случае рис.8А, видно, что кривая $\operatorname{Im} \mathcal{F}/(n-v)$ для медленной волны уходит вниз в области $n \cong 10$. Здесь величина $\operatorname{Im} \mathcal{F}/(n-v)$ имеет минимум. Аналогичный минимум в области $n \cong 10$ есть и у быстрой волны. Как видно из рис.12 в области больших n у кривой $\operatorname{Im} \mathcal{F}/(n+v)$ других минимумов нет. Соответствующий минимум в предельно допустимом, по устойчивости, токе виден в таблице 6. Отметим, что положение минимума смещается в область больших n с уменьшением δ/d и увеличением $1/d^2$.

В заключение рассмотрим примеры. Ограничиваясь случаем $\frac{\partial v_2}{\partial E} = 0$ и $\alpha \cong 1/v_2^2$ перепишем (69А) в виде

$$2\gamma \cdot \frac{m_0 c^2}{e^2} \cdot \frac{n/v_2 + 1}{R^2} \cdot \frac{|\gamma^2 - v_2^2|}{\gamma^2} \cdot \frac{\Delta E/E}{N} \cdot \frac{1}{\{\mathcal{F}_{2son} + \mathcal{F}_{2s1n} + \mathcal{F}_{2in}\}} = \mp Z(x_1) \quad (69Б)$$

В случае гипотетического ускорителя электронов с параметрами (55), $\delta/d = 0.05$, $\mu_0/d^2 = 10^5$ (согласно (56) кривые с номером 5 на рис.) и толщиной пучка $\tau = 0.1$ см, используя (69Б) и (57), рис.9А и рис.28, получаем при $\gamma = 14$ для медленной волны с $n = 4$ приближённое дисперсионное

уравнение: $24.5 \cdot (-1+i) = \frac{N/10^9}{\Delta E/E} \cdot Z(x_1)$.

Используя диаграмму дисперсионной функции $Z(x)$ рис.31 или таблицы /2/, получаем, что граница устойчивости пучка достигается при $\frac{N/10^9}{\Delta E/E} = 23.3$. При превышении этого порога, мнимая часть $Im x_1$ равна

$\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$	23.3	30	41	61
$Im x_1$	0	0.2	0.5	1

Соответствующие инкременты легко определить по (70).

В качестве примеров в таблицах I ÷ 6 (стр 42 ÷ 46) приводятся граничные значения $\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$ для ряда случаев. Расчёт велся на ЭВМ. Из таблицы 4 видно, что в области мод $n = 41 \div 45$ имеется минимум граничного $\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$. В минимуме значение этой величины, при некоторых $lg(\mu/d^2)$, примерно такое же, как для моды с $n = 2$. Этот минимум сохраняется и при больших энергиях частиц, например, при $\gamma = 500$, как видно из таблицы 5. В таблице 6 представлен случай, когда на листы шихтованного железа нанесён тонкий слой меди, экранирующий железо от высокочастотных полей когерентных колебаний пучка. Сравнение таблицы 6 и таблицы I и 4, показывает, что при $\gamma = 5$, медное покрытие увеличивает предельные токи для мод I ÷ 8 всего в 2 - 3 раза. В случае непокрытых листов железа, высокочастотный минимум граничного $\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$ лежит в области мод $n = 41 \div 45$ (смотри таблицу 2). При медном покрытии листов высокочастотный минимум граничного $\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$ лежит в области мод $n = 10 \div 17$. Повидимому следует считать, что медное покрытие неэффективно.

Рассмотрим случай гипотетического ускорителя протонов с параметрами: $R = 7500$ см, $\nu_2 = 6.8$, $\delta/d = 0.05$, $\mu/d^2 = 10^5$, толщиной пучка $\tilde{z} = 0.1$ см, $v/c = 0.5$, остальные параметры те же, что в (55). Рис.8 построен для ускорителя с $R = 150$ см. и $\nu_2 = 0.8$. Максимум на кривой 5 этого рисунка соответствует модам с $n = 95$, т.е. колебаниям пучка с длиной волны $\lambda \approx 10$ см. В ускорителе с $R = 7500$ см. примерно такую длину волны имеют моды с номерами в окрестности $n = 4700$. Используя рис.8 и рис.28, соотношения (69Б) и (57), получаем дисперсионное уравнение для этих мод:

$$0.345 \cdot (1 + i \cdot 0.115) \approx \frac{N/10^{11}}{\Delta E/E} \cdot Z(x_1)$$

Граница области устойчивости пучка достигается при $\frac{N/10^9}{\Delta E/E} = 48$.

§ 7. Заключение

В § 6 было показано, что даже для низких мод инкременты когерентных дипольных колебаний "холодного пучка" в модели ускорителя с открытым на пучок шихтованным железом в десятки раз больше, чем в том же ускорителе, но с вставленной внутренней вакуумной камерой из меди или нержавеющей стали. Для непрерывного пучка в ускорителе с внутренней вакуумной камерой, из материала с конечным сопротивлением, наиболее опасны самые первые низкочастотные моды медленной волны, так что приходится бороться с ограниченным числом неустойчивых когерентных мод. В ускорителе с открытым на пучок шихтованным железом, в рассмотренном случае непрерывного пучка, могут быть опасны не только низкие, но и ряд высоких мод. При этом в зависимости от параметров, могут быть неустойчивы как медленные так и быстрые волны. В этом случае для уменьшения инкрементов высоких мод следует стремиться к уменьшению отношения величины зазора между листами к толщине листа железа - δ/d . Величину же μ/d^2 (или охватываемую область значений μ_0/d^2 , если μ_0 меняется с частотой) следует выбирать так, чтобы в области высоких мод мнимая часть силы не имела бы резонанса и была минимальной.

Рассмотрение случая, когда листы шихтованного железа покрыты тонким слоем меди, показало, что при этом неприятные качества системы, вообще говоря, сохраняются и обусловлены самим фактом "шихтовки", а не тем, что шихтован материал с большим μ_0 , т.е. железом. Так что нанесение тонкого слоя меди на листы железа, повидимому, неэффективно.

Полученные результаты говорят о том, что в ускорителях с открытым на пучок шихтованным железом когерентная дипольная неустойчивость может быть серьезным препятствием при получении интенсивных непрерывных пучков, особенно нерелятивистских.

В этой работе были рассмотрены лишь крайне упрощенные модели геометрии поперечного сечения ускорителей (рис.3 и рис.4) и простейшие модели непрерывных пучков (тонкий цилиндрический и тонкий плоский (53)). При рассмотрении процесса инжекции, особенно сильноточной однооборотной, существенно знать динамику некогерентного сдвига бетатронной частоты частиц пучка по его сечению. При вычислении этого сдвига необходимо учитывать несимметрию магнитного поля, индуцированного током пучка, возникающую из-за возможности замыкания магнитного потока по боковому участку ярма магнита. Это особенно существенно для радиальных колебаний в ускорителях с С-образным магнитом. Таким образом необходимо рассмотрение более реальной геометрии поперечного сечения ускорителя, чем простейшие системы рис.3 и рис.4. Важно также провести рассмотрение случая бунчирующего пучка.

Я благодарен Г.И.Будкеру, Б.В.Чирикову, М.М.Карлинеру и Н.И.Зиневичу за полезное обсуждение полученных результатов; В.В.Петрову, Г.И.Яснову, В.Ф.Туркину и А.А.Михайличенко за возможность ознакомиться с их экспериментальными результатами до их опубликования и за содержательные беседы; В.Г.Шамовскому за прочтение рукописи этой работы и плзную критику.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

I. Поле линейного высокочастотного тока между двумя плитами шихтованного железа конечной толщины

В § 3 было получено выражение для векторного потенциала магнитного поля, возбуждаемого линейным током, помещенным между двумя бесконечно толстыми плитами шихтованного железа рис.3. Рассмотрим теперь случай, когда плиты имеют одинаковую конечную толщину D . Вектор-потенциал индуцированного в области тока поля выбираем по-прежнему в форме (II). Вектор-потенциал поля в зазоре шихтовки выбираем снова в форме (II), но с заменой $K_0 \rightarrow \alpha$, где α определено по (6). Вектор-потенциал поля во внешней области, например в верхней области, т.е. при $z > h + D$, ищем в форме спадающего решения в виде первого члена в (II). Записав соответствующие выражения для полей, сшиваем их на границах области шихтованного железа, используя граничные условия (8) и (9) для полей.

В результате для вектор-потенциала поля в области тока I рис.3 получаем:

$$A_{oi} = \frac{4J}{c} \int_0^{\infty} \frac{(\mu^2 - M^2 \eta^2) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{z+z_0}{h} \sqrt{\xi^2 + K_0^2 h^2} \right) + (\mu - M\eta)^2 \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{z-z_0}{h} \sqrt{\xi^2 + K_0^2 h^2} \right) \cdot e^{-2\sqrt{\xi^2 + K_0^2 h^2}}}{(\mu + M\eta)^2 - (\mu - M\eta)^2 \cdot e^{-4\sqrt{\xi^2 + K_0^2 h^2}}} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{\xi^2 + K_0^2 h^2}}}{\sqrt{\xi^2 + K_0^2 h^2}} \cos \left(\frac{y}{h} \xi \right) \cdot d\xi. \quad (\text{II.1})$$

Здесь

$$\eta = \frac{(\mu + M) + (\mu - M) \cdot e^{-2\frac{D}{h} \sqrt{\xi^2 + \alpha^2 h^2}}}{(\mu + M) - (\mu - M) \cdot e^{-2\frac{D}{h} \sqrt{\xi^2 + \alpha^2 h^2}}} \quad (\text{II.2})$$

$$M = \sqrt{\frac{\xi^2 + (\alpha h)^2}{\xi^2 + (K_0 h)^2}} \quad (\text{II.3})$$

При $D/h \rightarrow \infty$, т.е. в пределе бесконечно-толстых плит, $\eta \rightarrow 1$ и выражение (II.1) переходит в (I3).

2. Поле линейного высокочастотного тока вблизи шихтованной плиты конечной толщины

Пусть в системе рис.3 одна из плит, например, нижняя удалена, а верхняя плита имеет конечную толщину D . Линейный высокочастотный ток J находится от плиты на расстоянии h . Аналогично предыдущему легко получить, что вектор потенциал поля в области тока имеет вид:

$$A_{oi} = \frac{2J}{c} \int_0^{\infty} e^{(z/h-2)\sqrt{\xi^2 + K_0^2 h^2}} \cdot \frac{\mu \sqrt{\xi^2 + K_0^2 h^2} - \sqrt{\xi^2 + \alpha^2 h^2} \eta}{\mu \sqrt{\xi^2 + K_0^2 h^2} + \sqrt{\xi^2 + \alpha^2 h^2} \eta} \cdot \frac{\cos(\xi \frac{y}{h})}{\sqrt{\xi^2 + K_0^2 h^2}} d\xi \quad (\text{II.4})$$

Здесь η и M определены выражениями (II.2) и (II.3). При $D/h \rightarrow \infty$, т.е. в пределе бесконечно-толстой плиты, $\eta \rightarrow 1$. Если при $D/h \rightarrow \infty$ перейти к квазистационарному пределу $\alpha h \rightarrow 0$ и положить $\alpha h = 0$, то получаем:

$$A_{oi} = \frac{2J}{c} \int_0^{\infty} e^{(z/h-2)\xi} \frac{\mu-1}{\mu+1} \cdot \frac{\cos(\xi \frac{y}{h})}{\xi} d\xi = -\frac{J}{c} \cdot \frac{\mu-1}{\mu+1} \ln \{ (z-2h)^2 + y^2 \}$$

Соответственно

$$H_{oiy} = -\frac{2J}{c} \cdot \frac{\mu-1}{\mu+1} \cdot \frac{z-2h}{(z-2h)^2 + y^2}$$

$$H_{oiz} = \frac{2J}{c} \cdot \frac{\mu-1}{\mu+1} \cdot \frac{y}{(z-2h)^2 + y^2}$$

Эти результаты можно элементарно получить методом отражений.

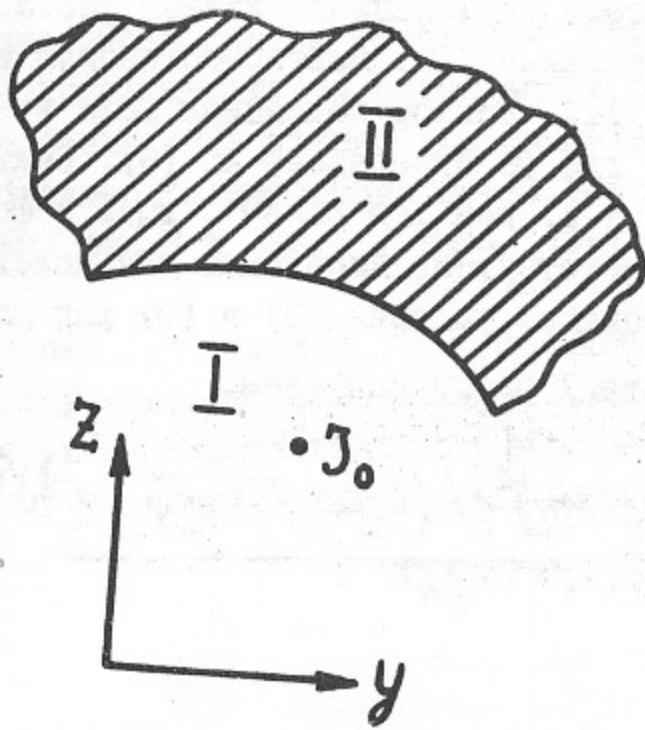


Рис.1.

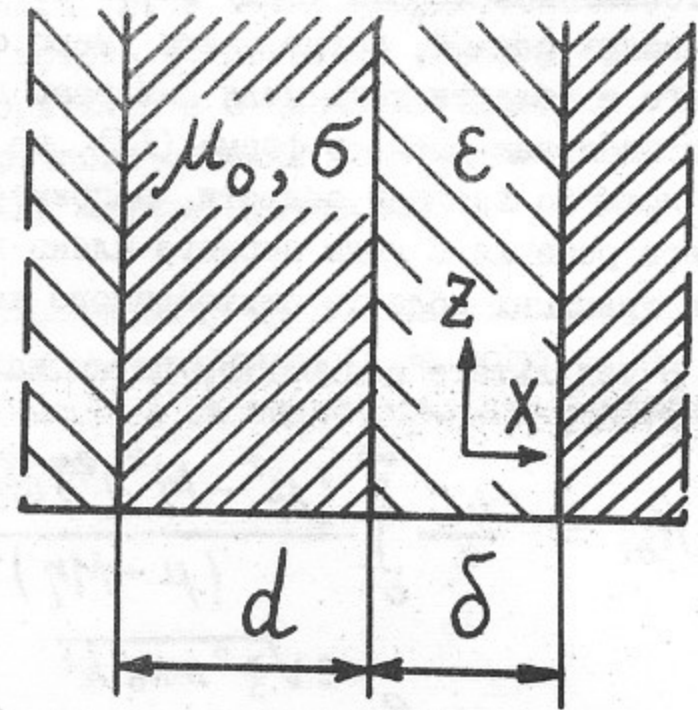


Рис.2.

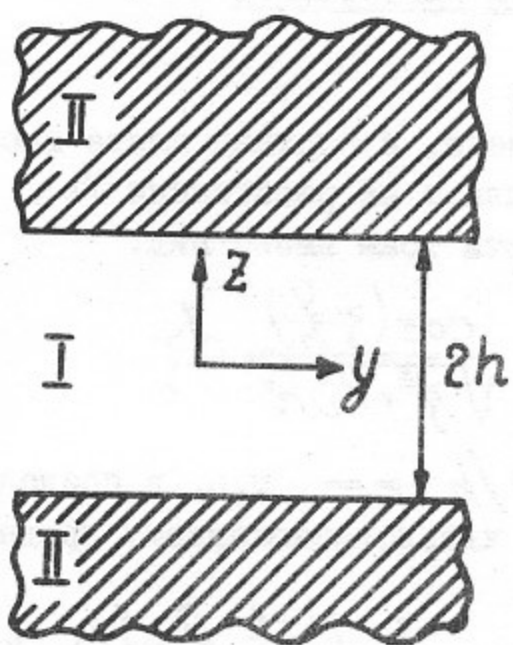


Рис.3.

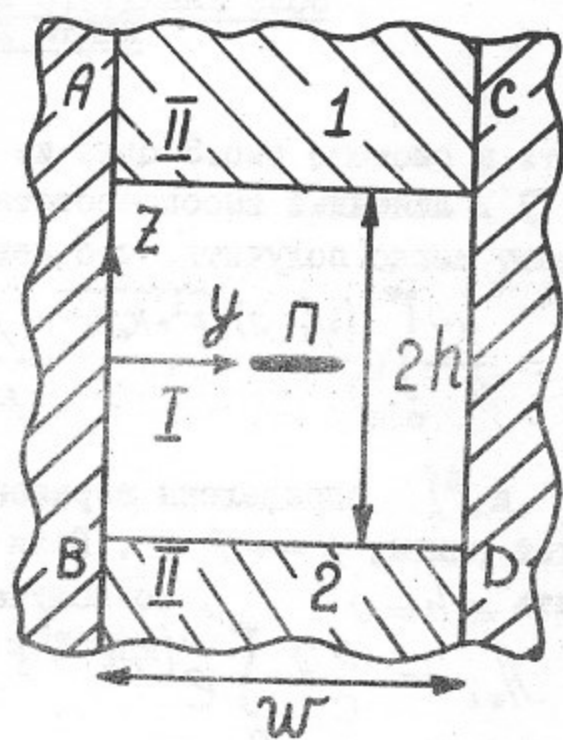


Рис.4.

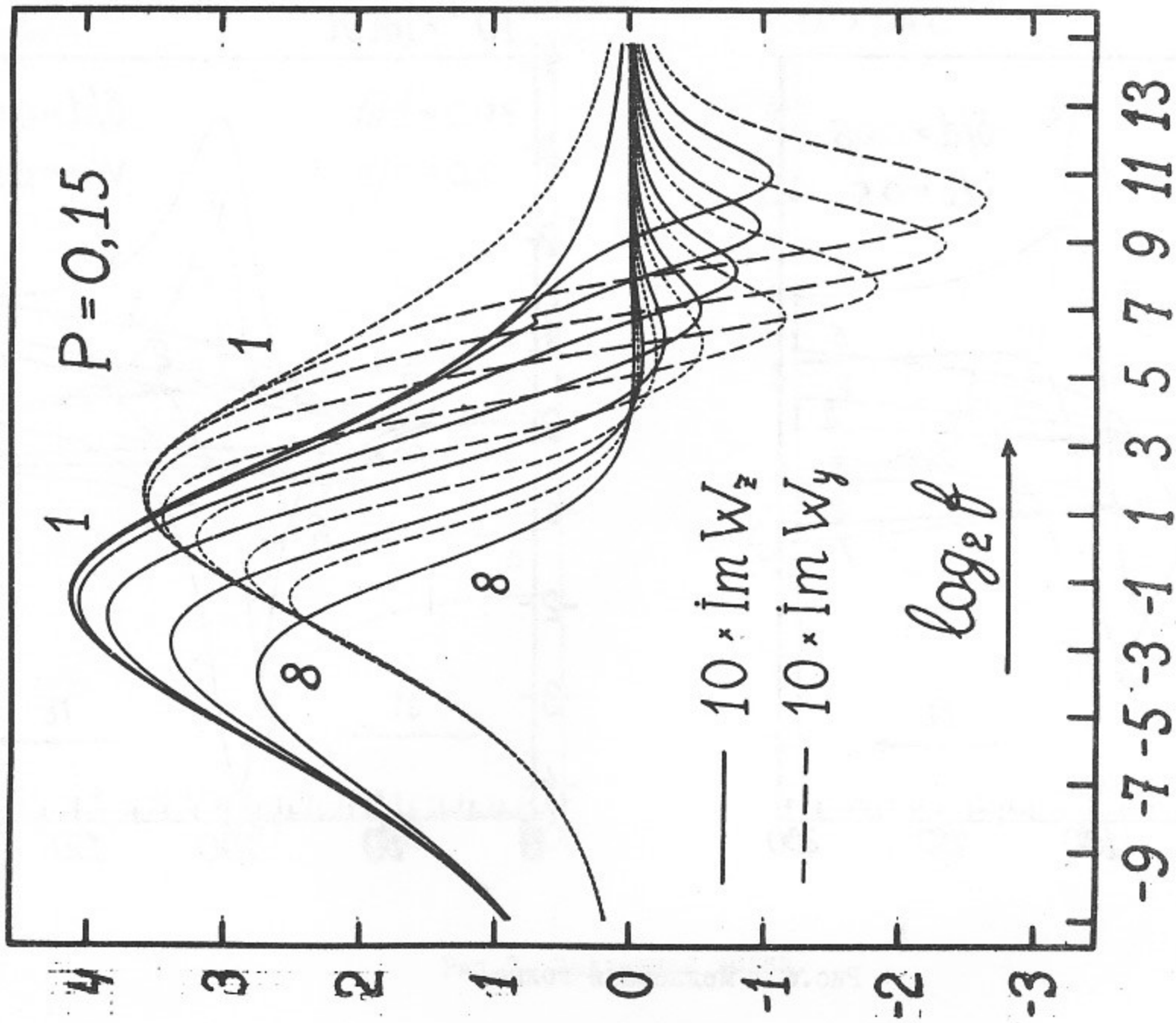
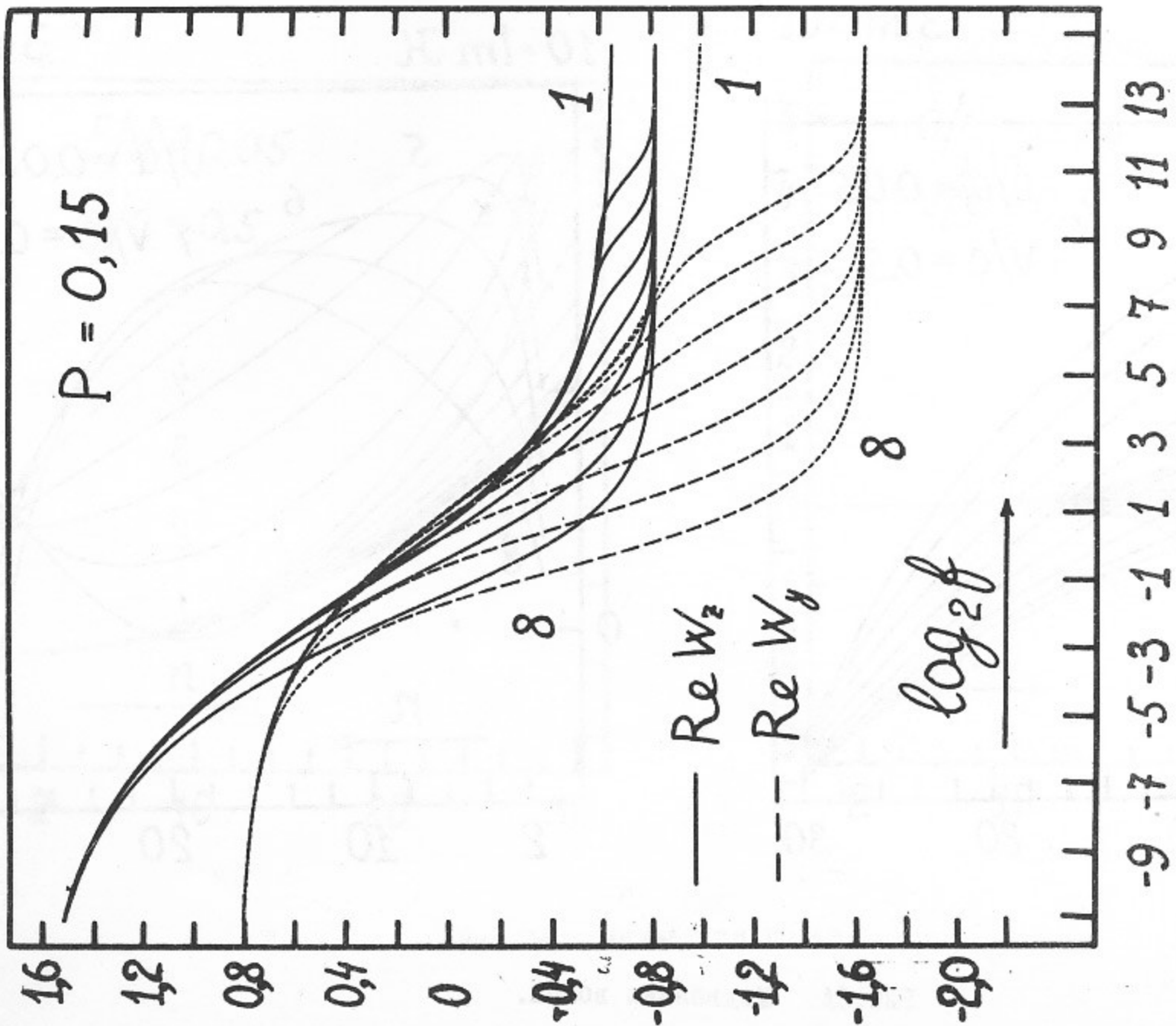


FIG. 5.

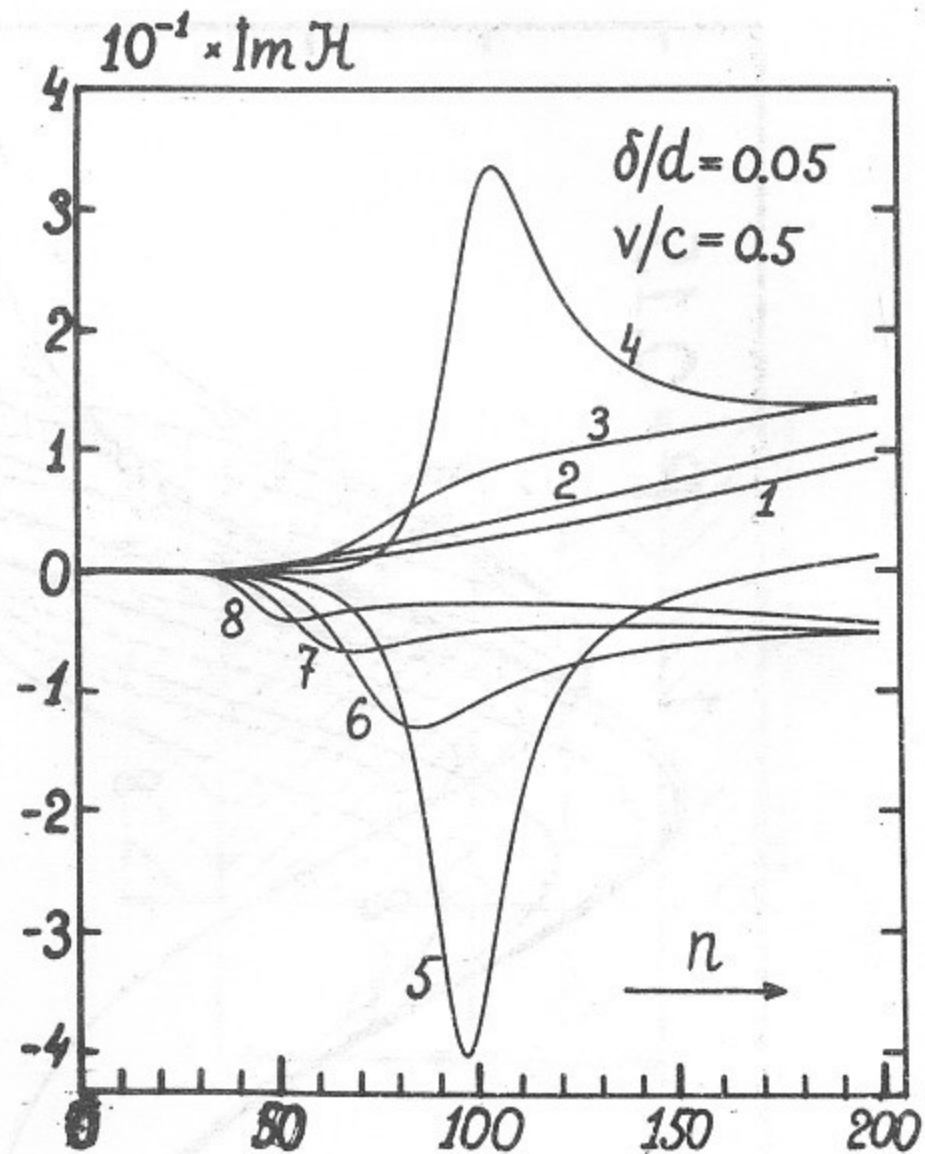
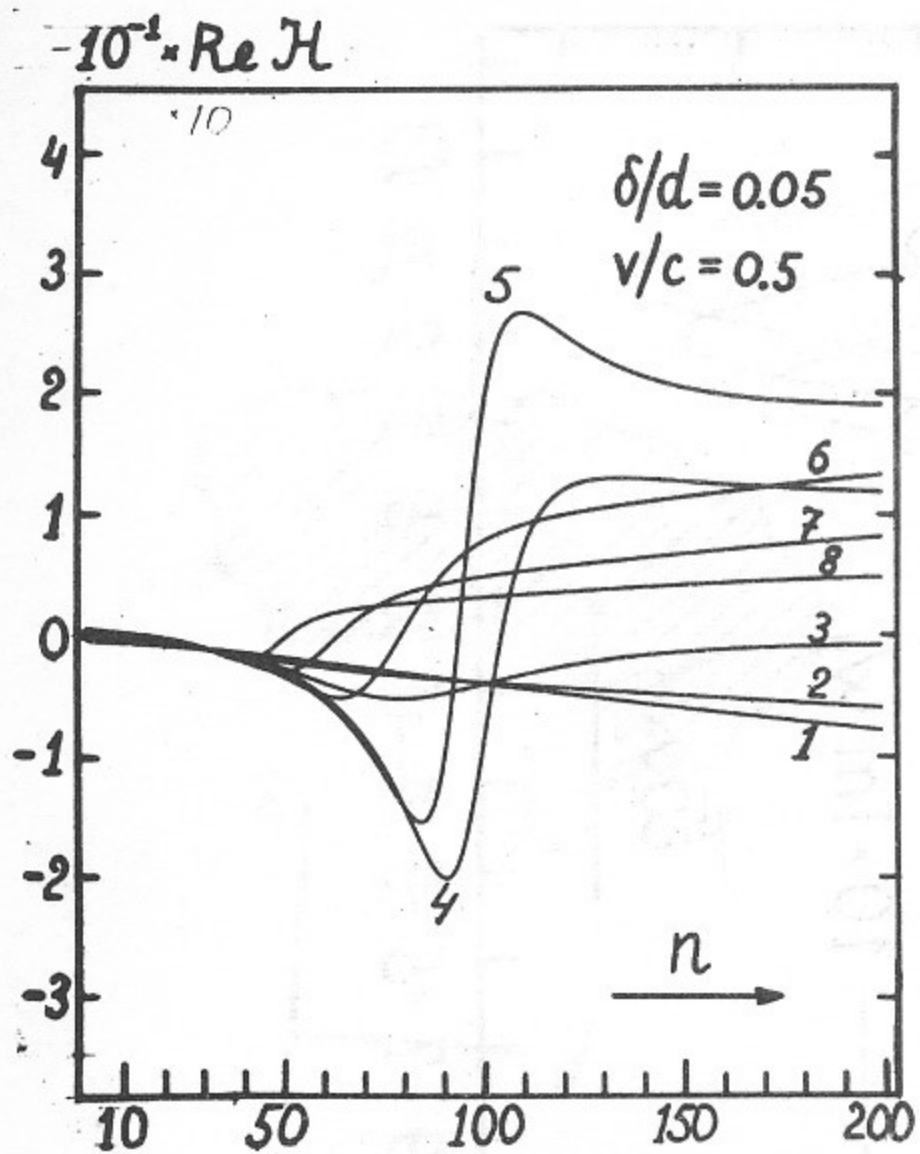


Рис.6. Медленная волна.

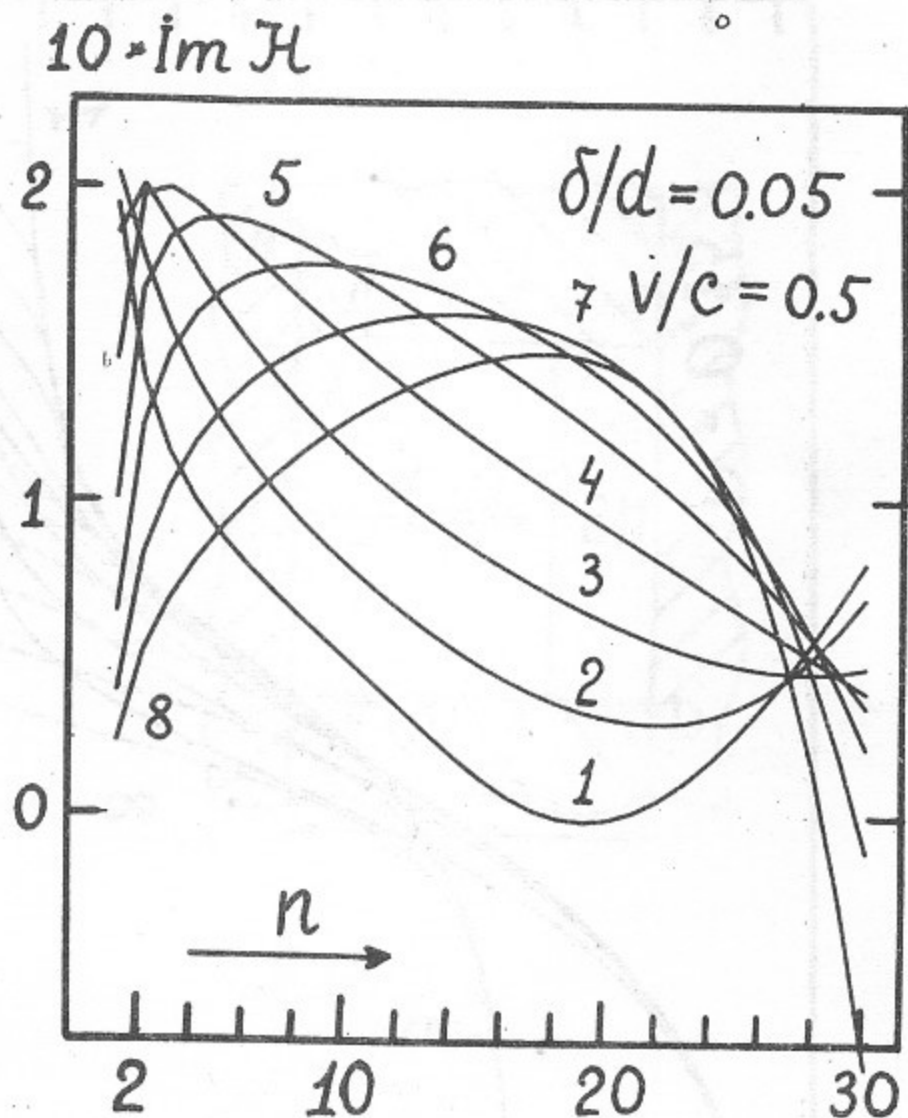
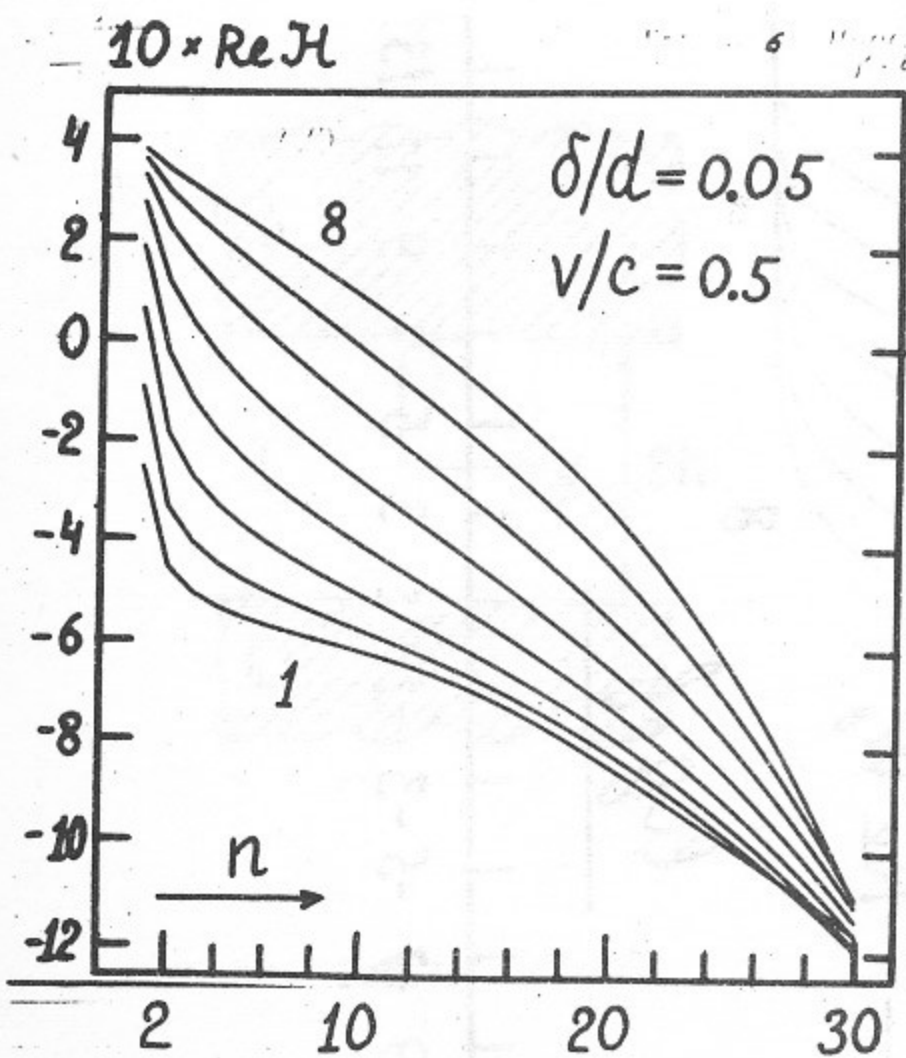


Рис.6А. Медленная волна.

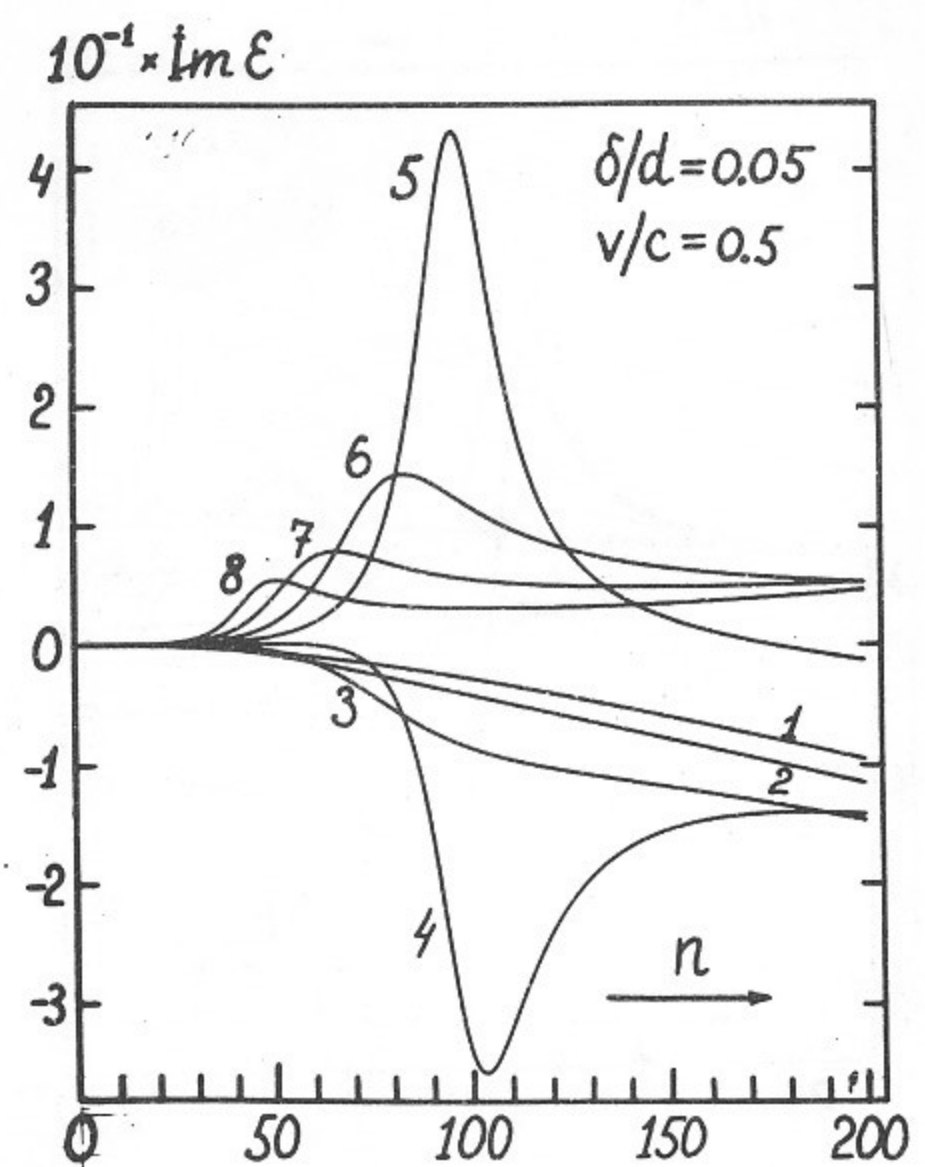
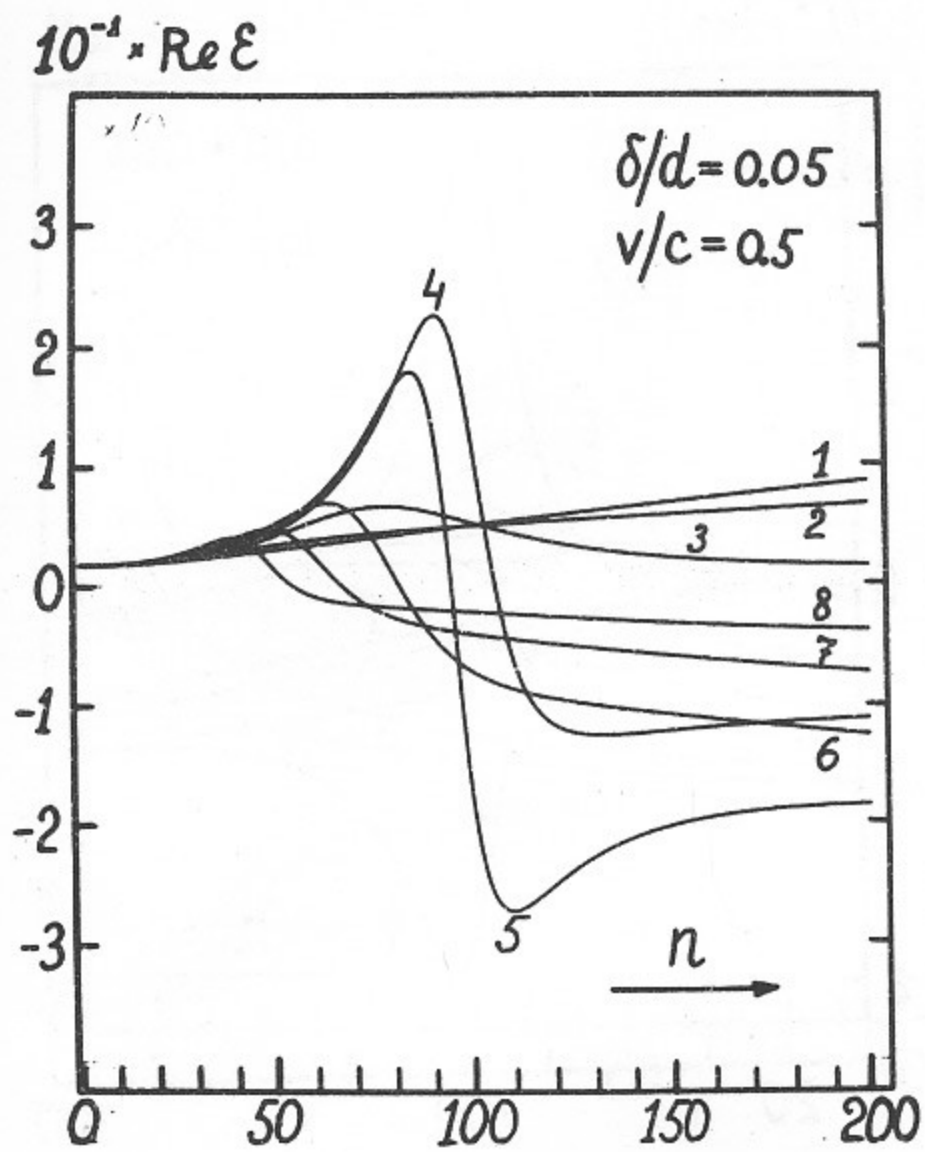


Рис.7 Медленная волна.

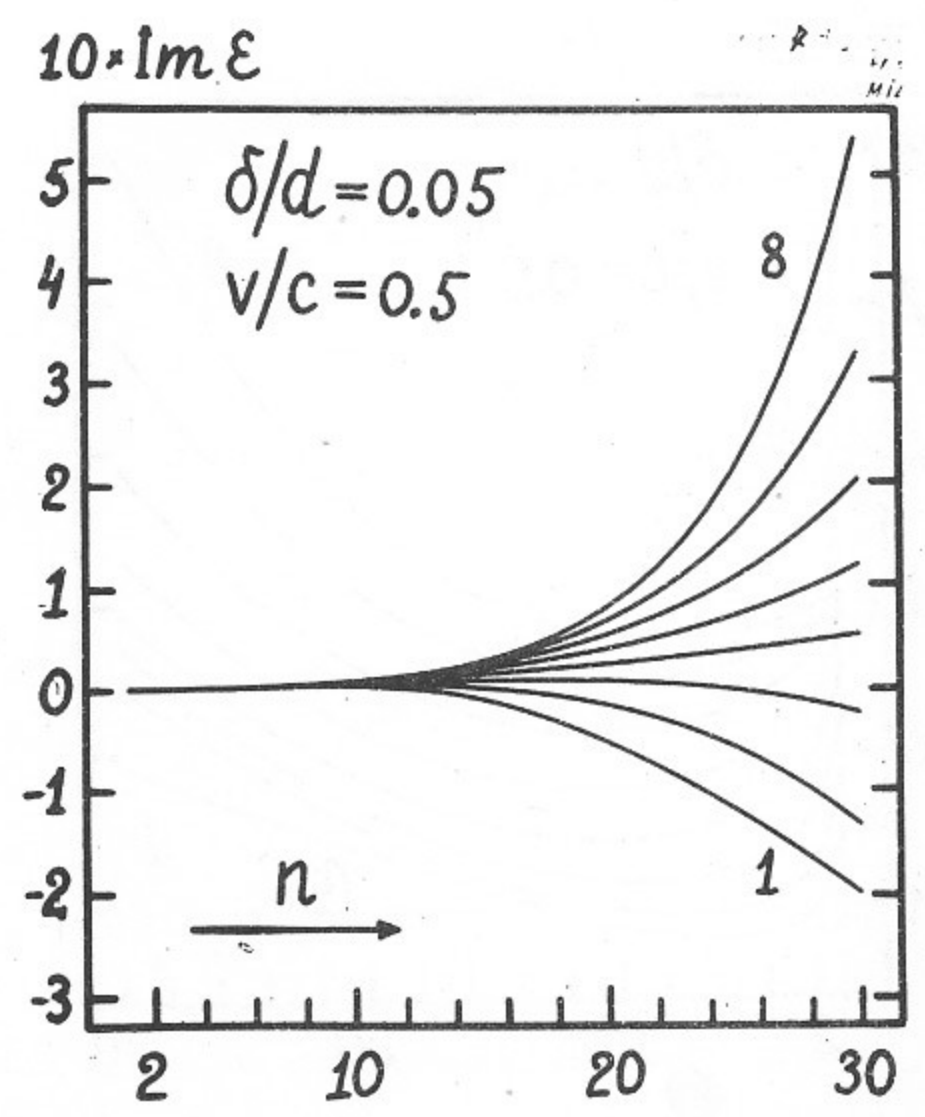
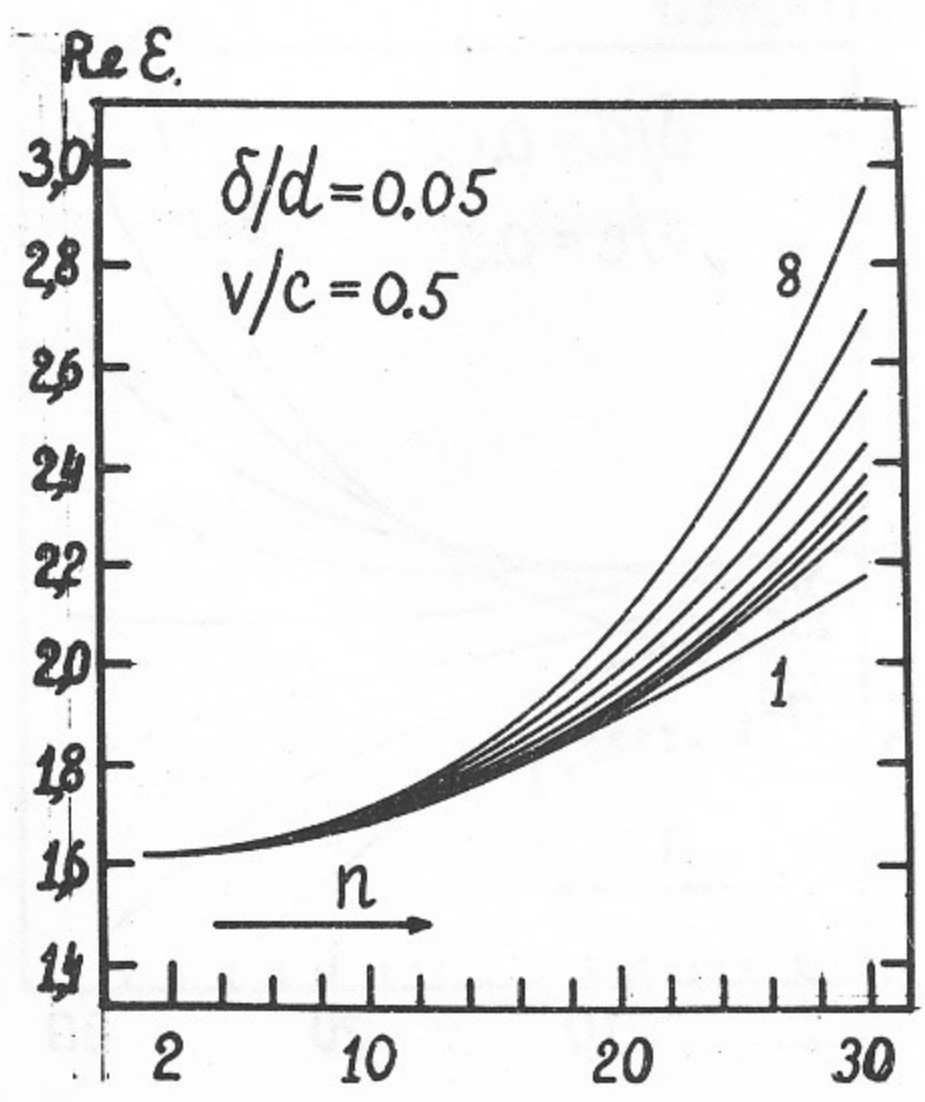


Рис.7А. Медленная волна.

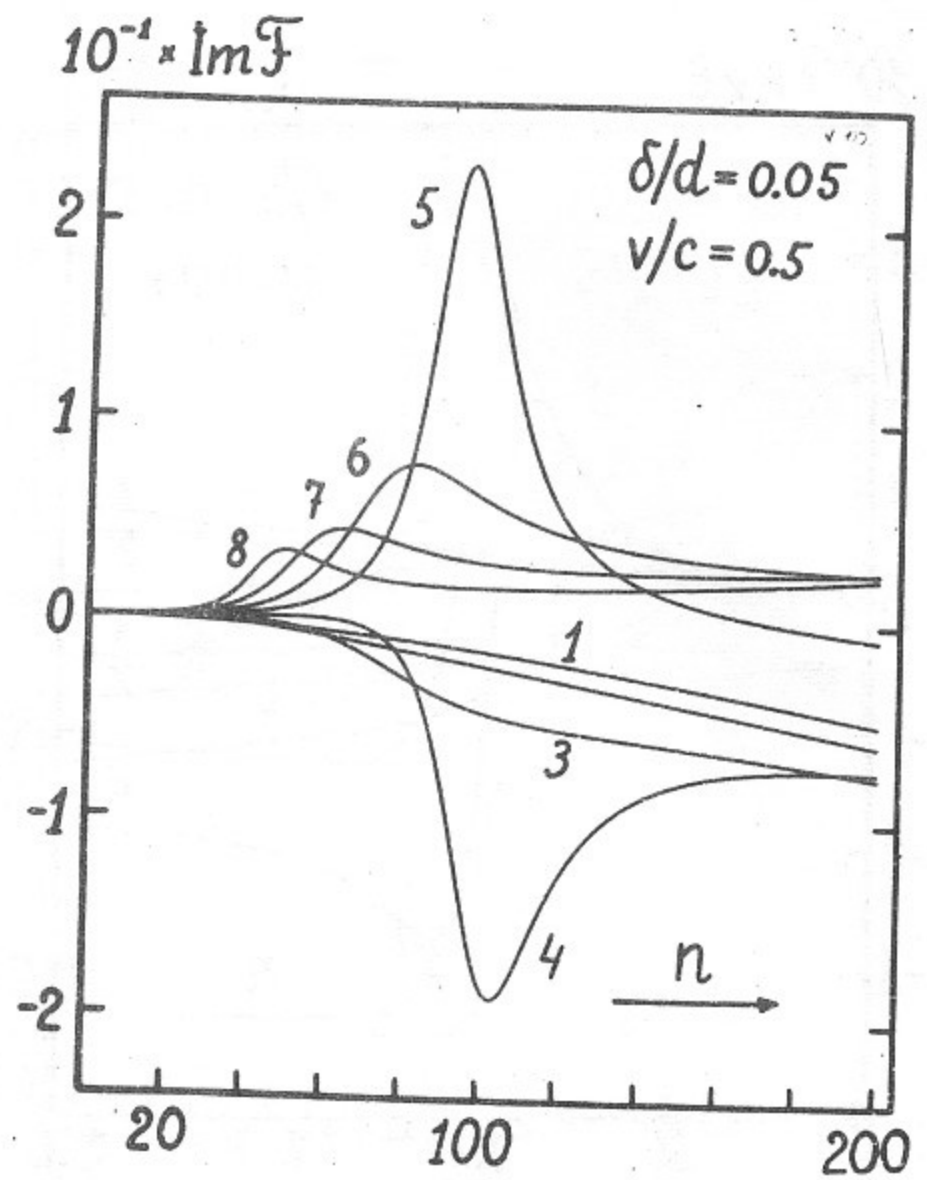
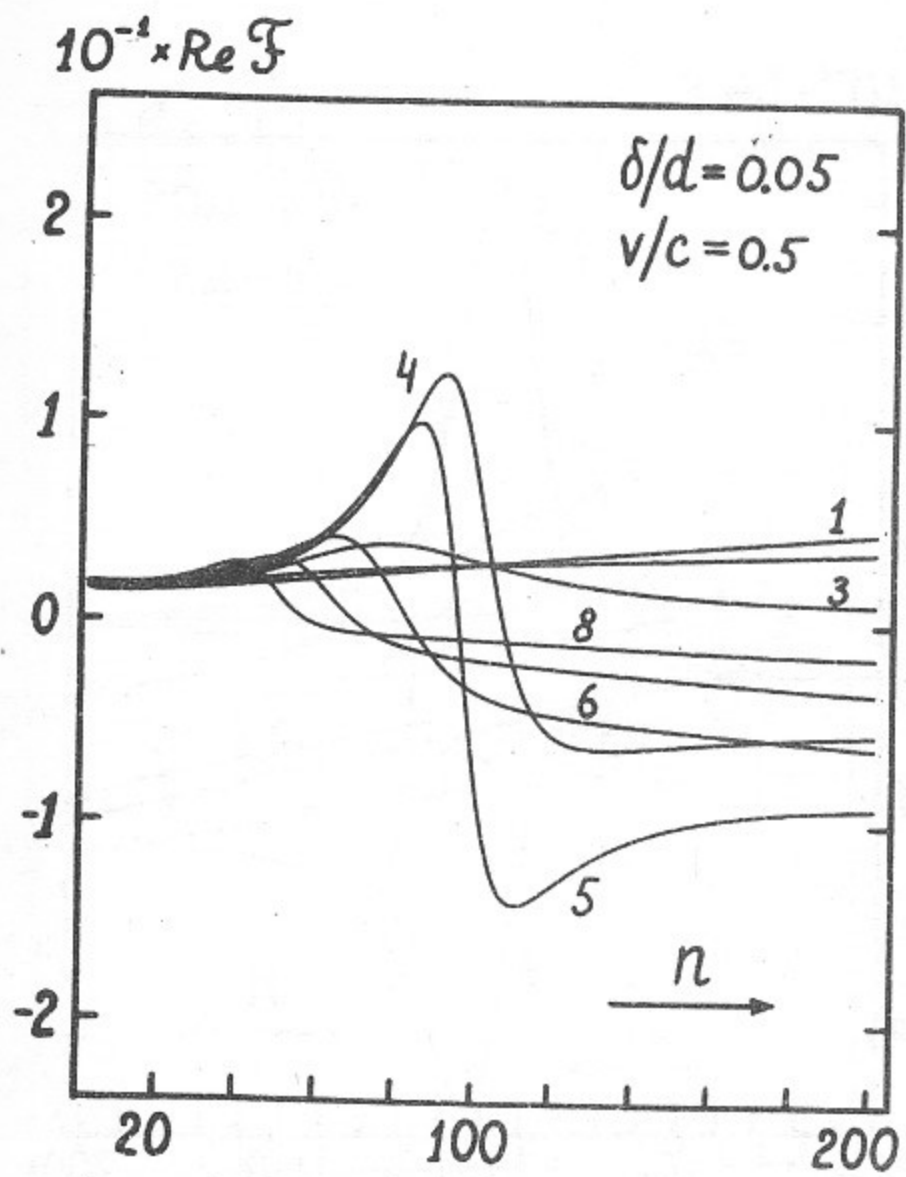


Рис.8. Медленная волна.

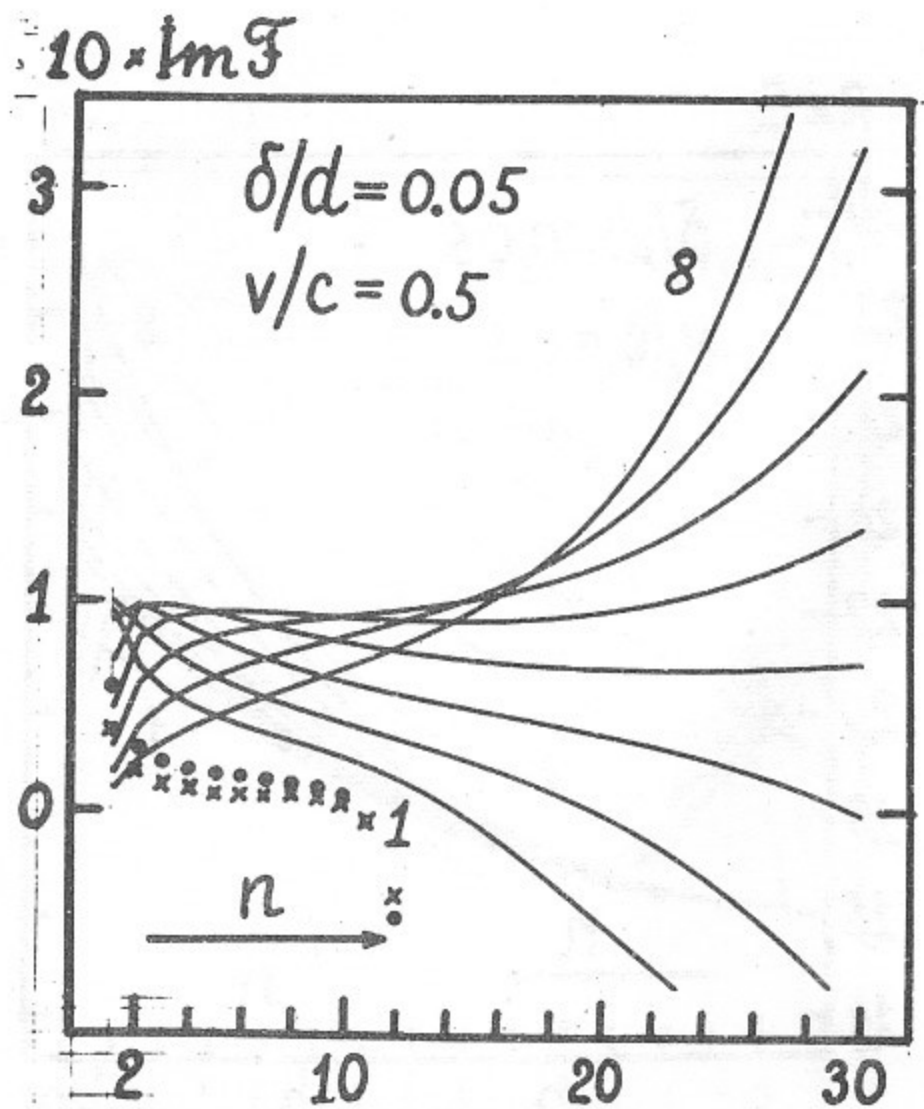
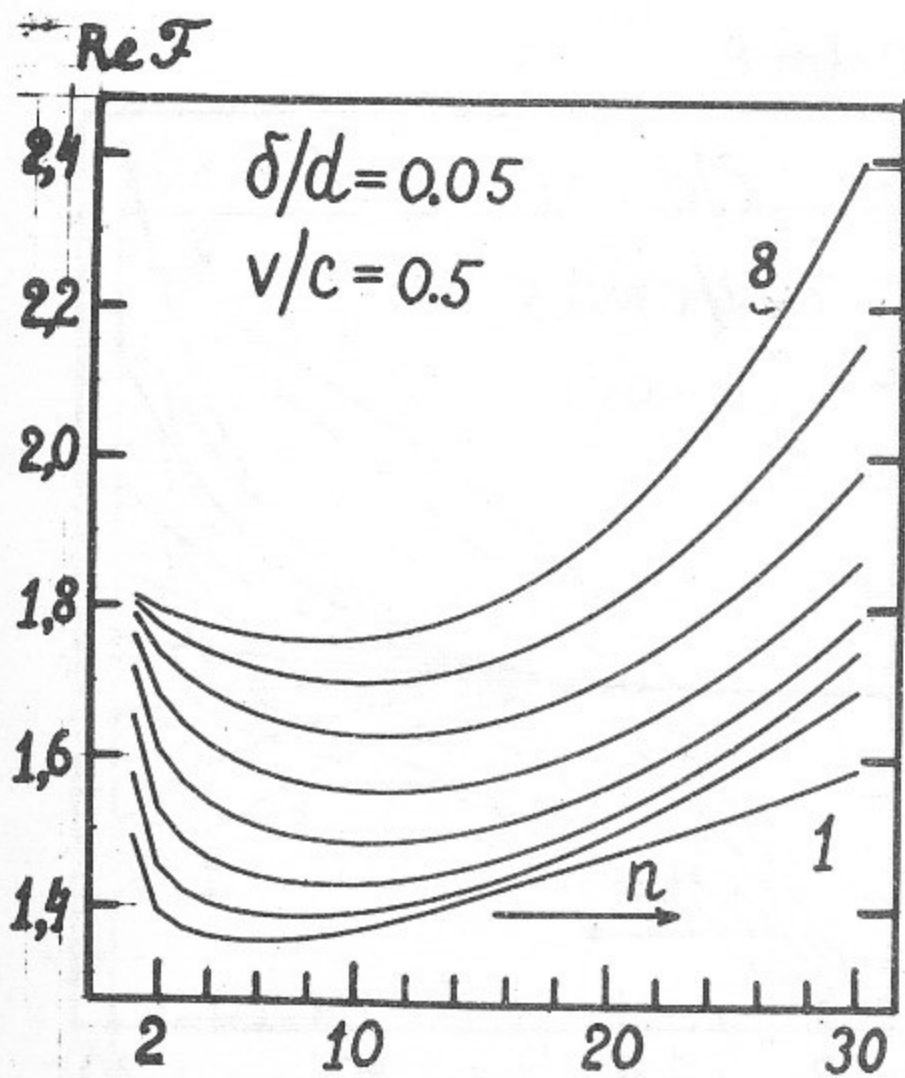
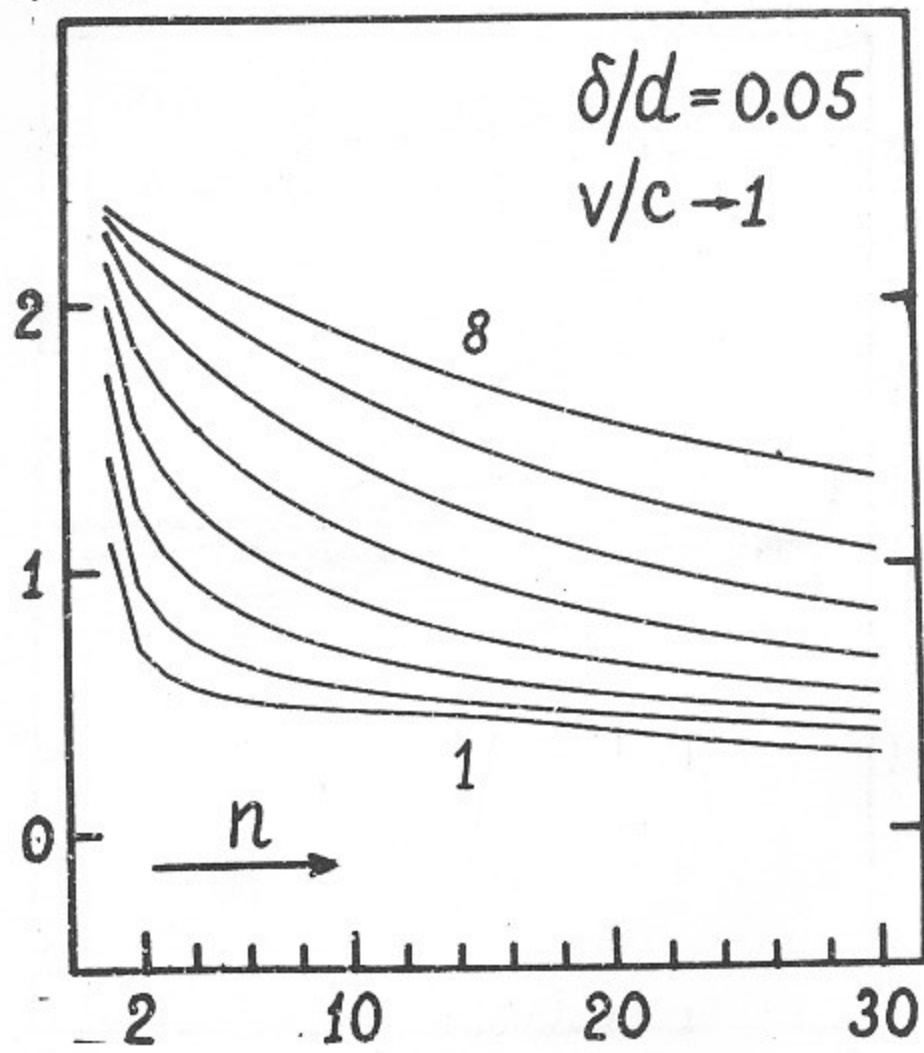


Рис.8А. Медленная волна.

Re \mathcal{F}



$10 \cdot \text{Im } \mathcal{F}$

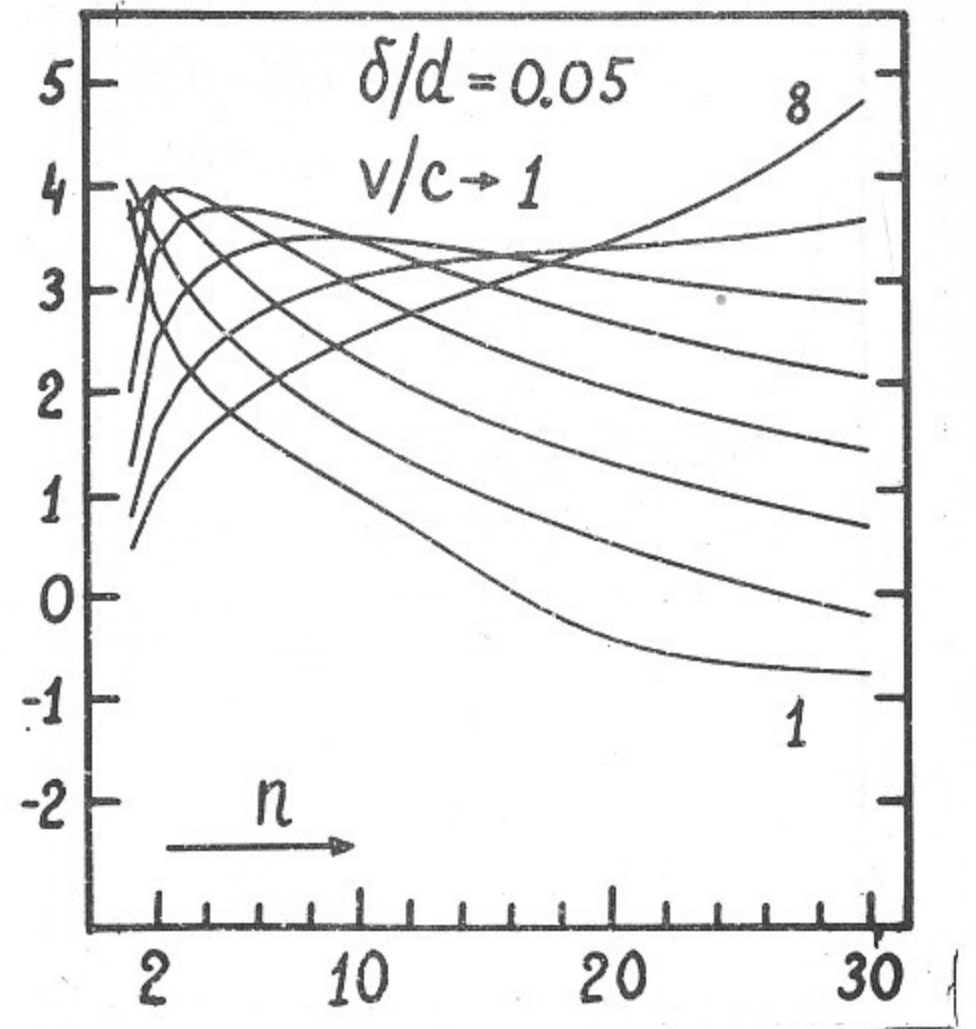
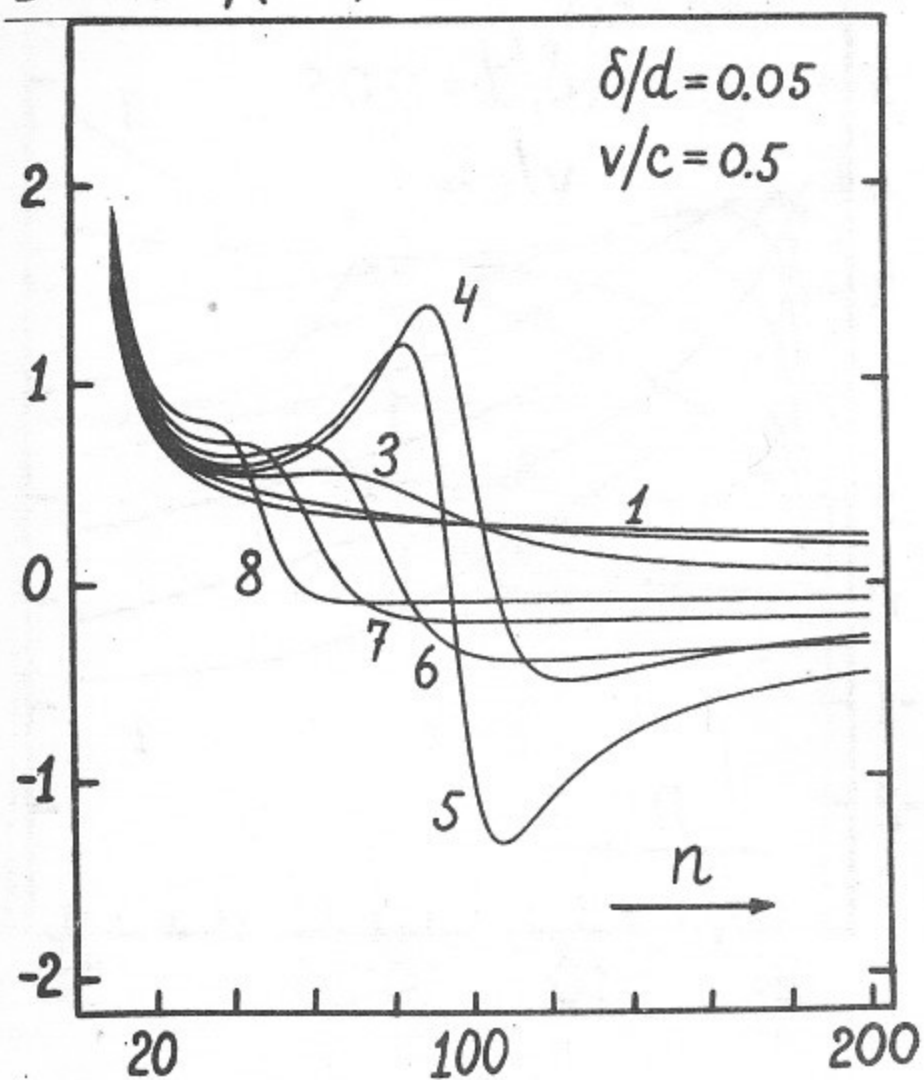


Рис.9. Медленная волна.

$$10 \cdot \operatorname{Re} \mathcal{F} / (n - \nu)$$



$$10 \cdot \operatorname{Im} \mathcal{F} / (n - \nu)$$

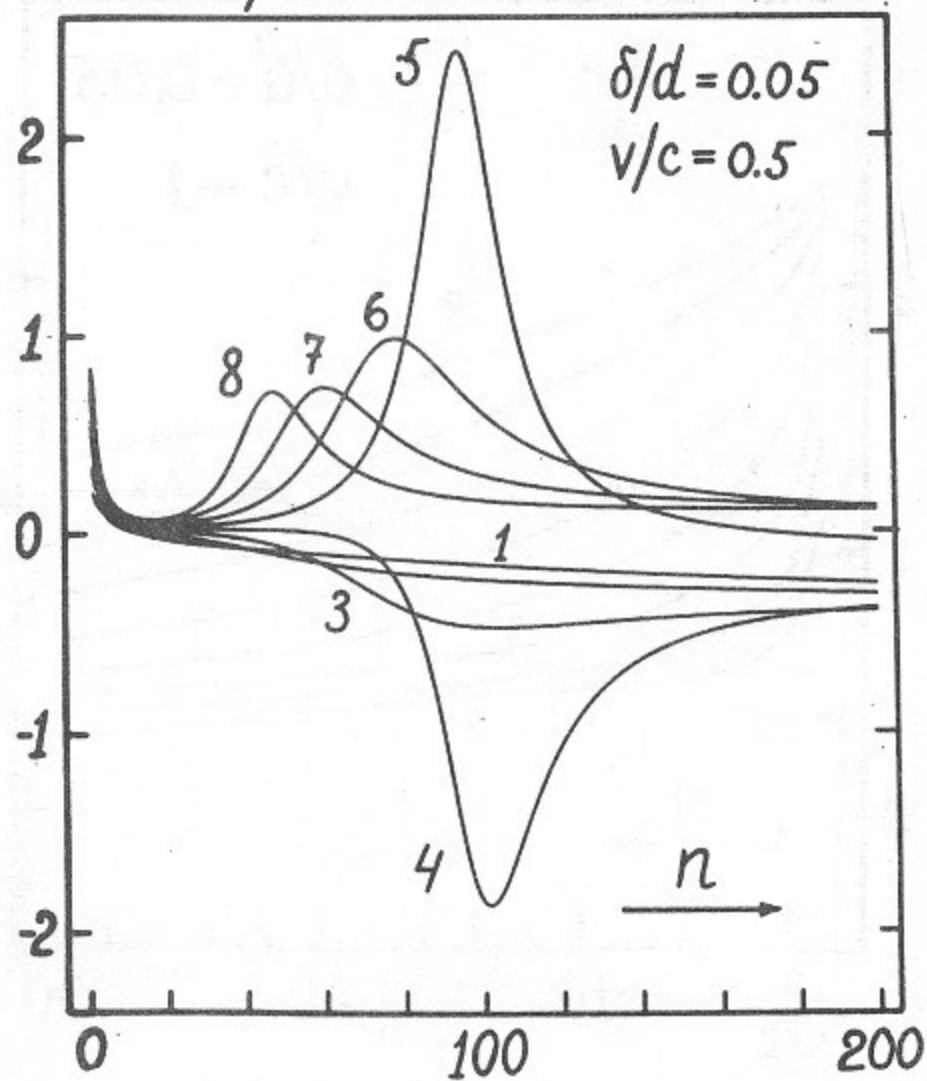
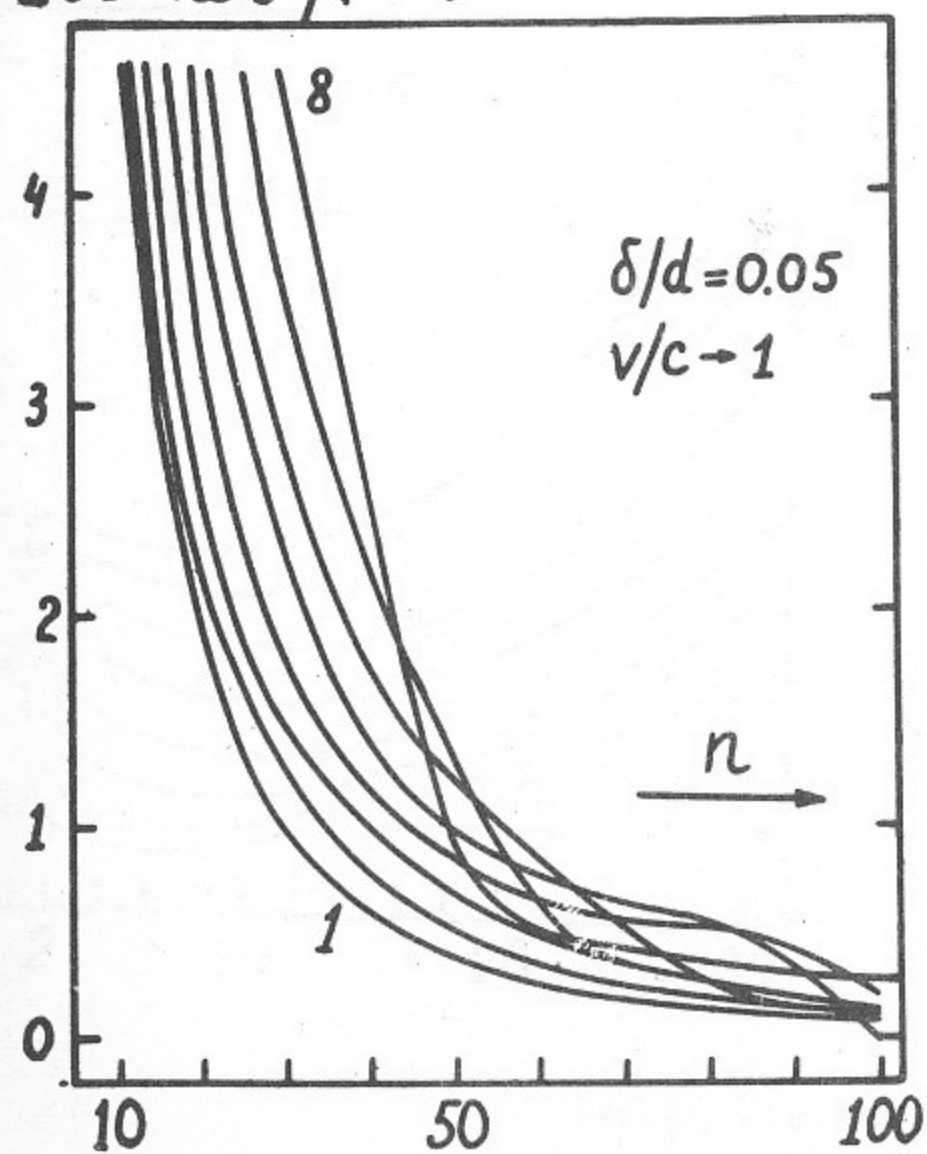


Рис. IО. Медленная волна.

$$100 \cdot \operatorname{Re} \mathcal{F} / (n - \nu)$$



$$100 \cdot \operatorname{Im} \mathcal{F} / (n - \nu)$$

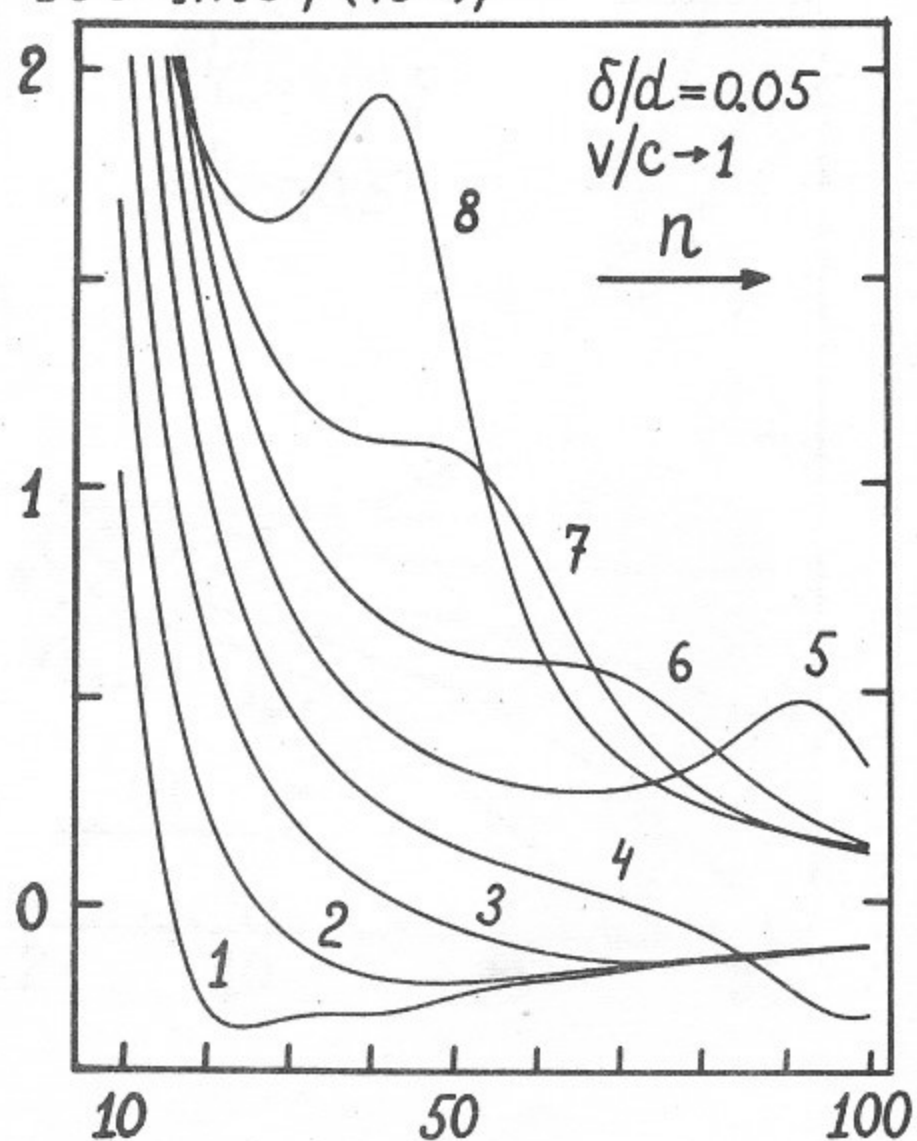


Рис. II. Медленная волна.

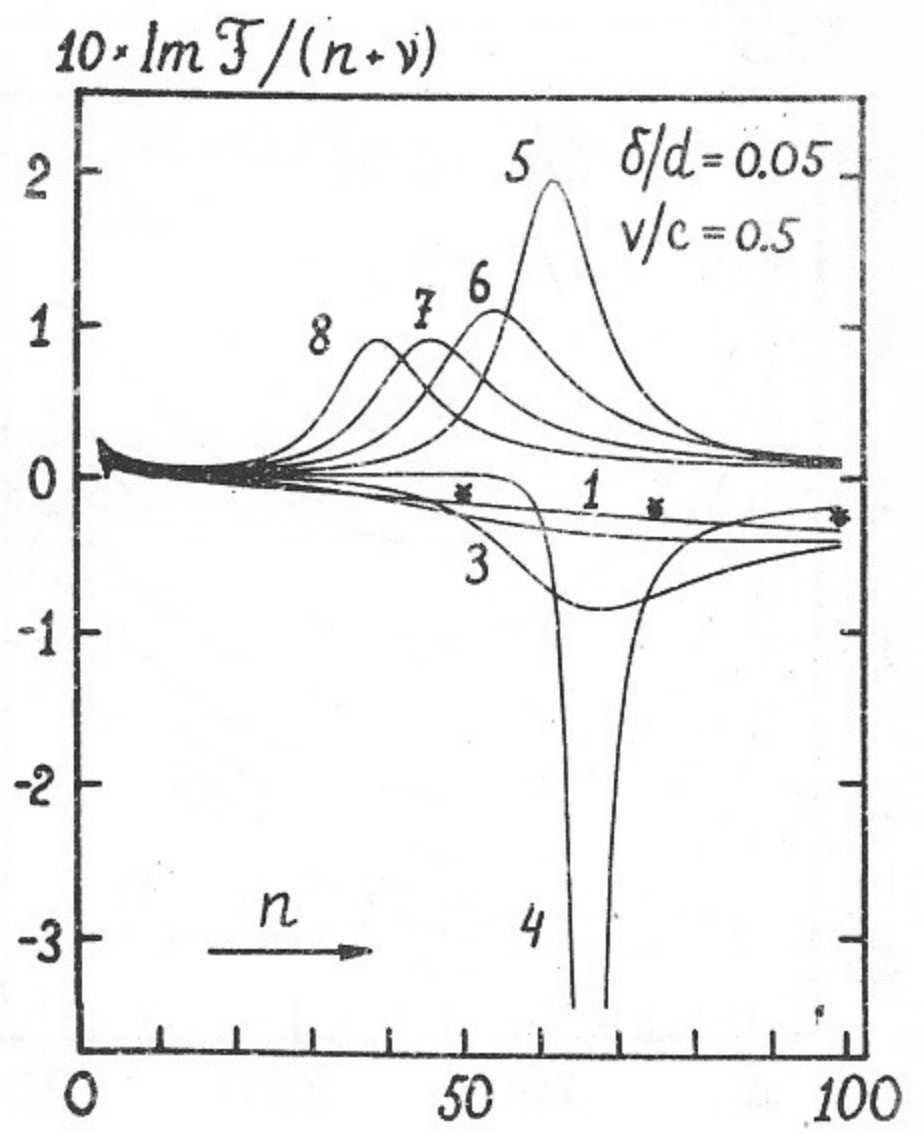
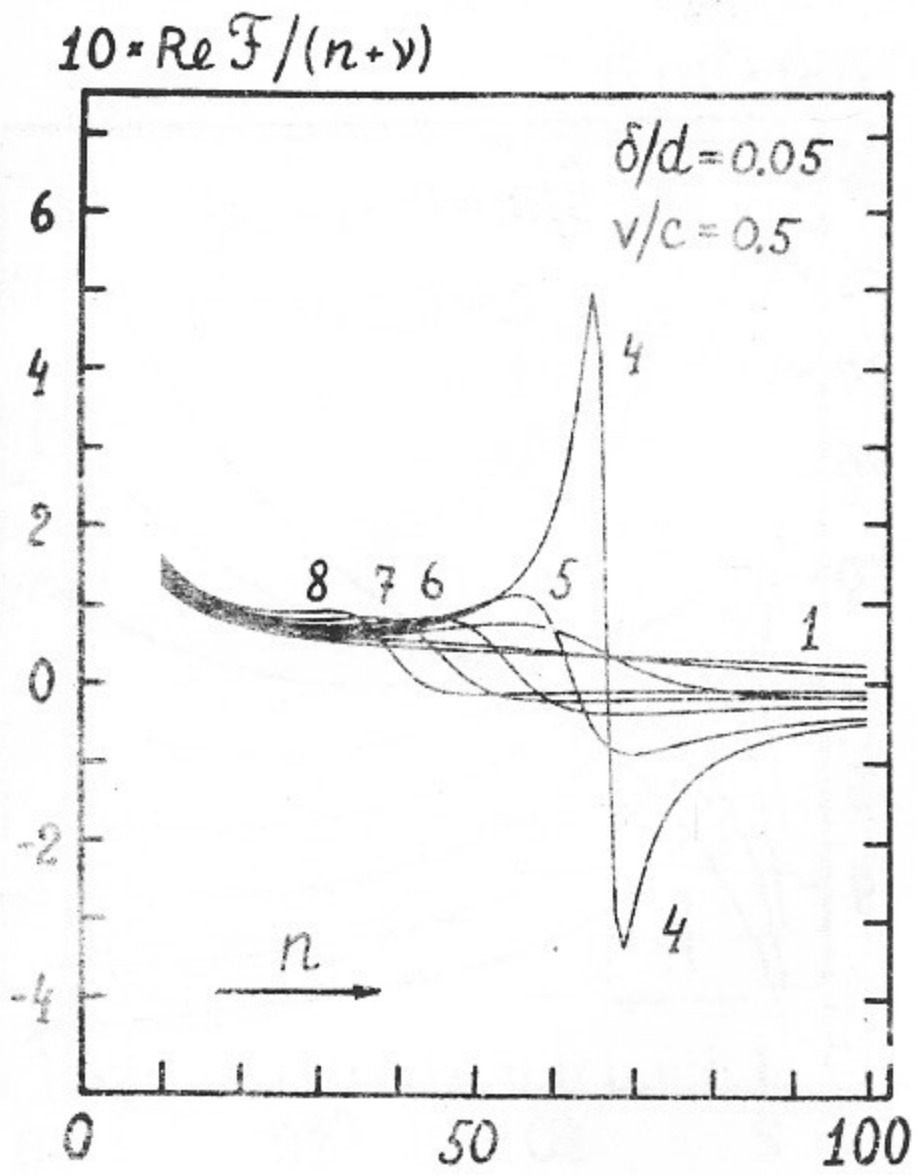


Рис.12. Быстрая волна.

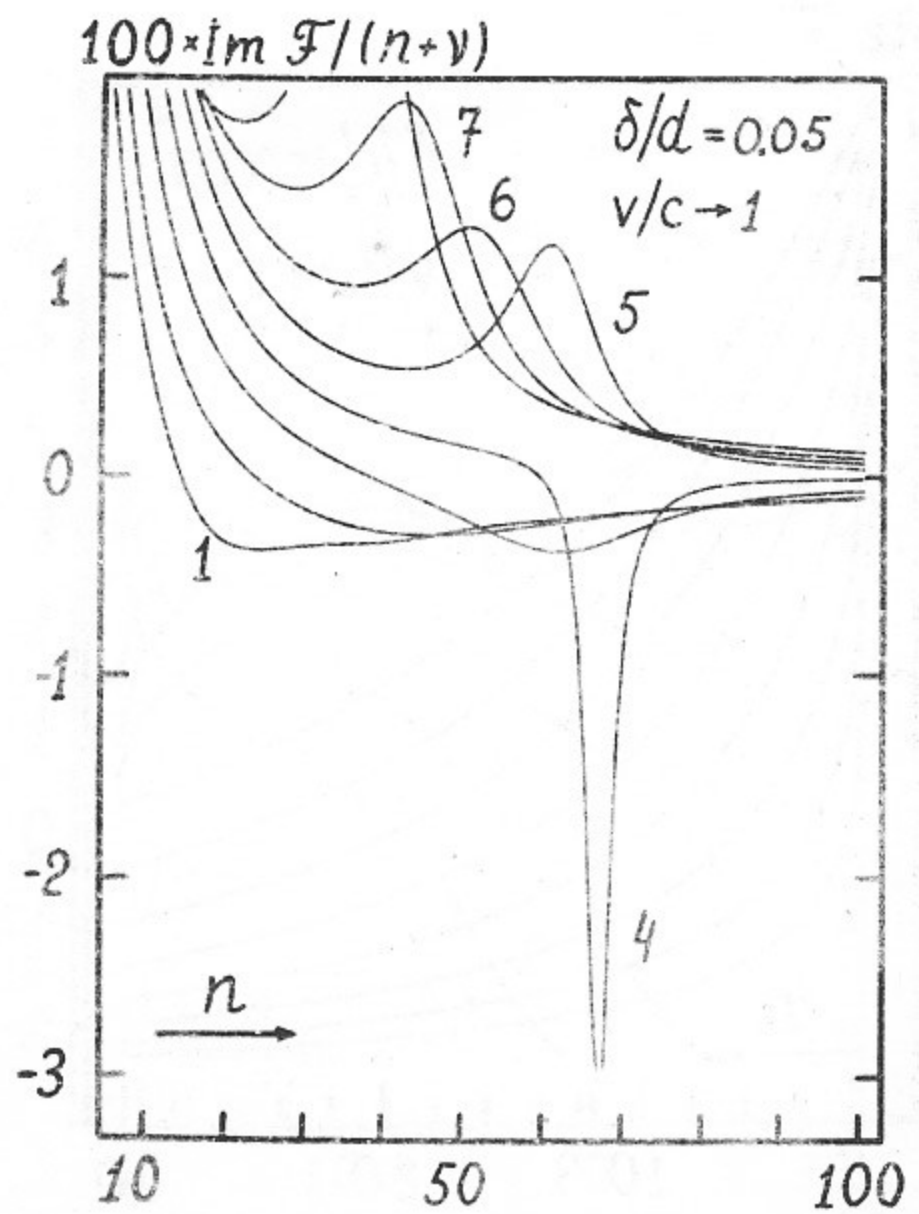
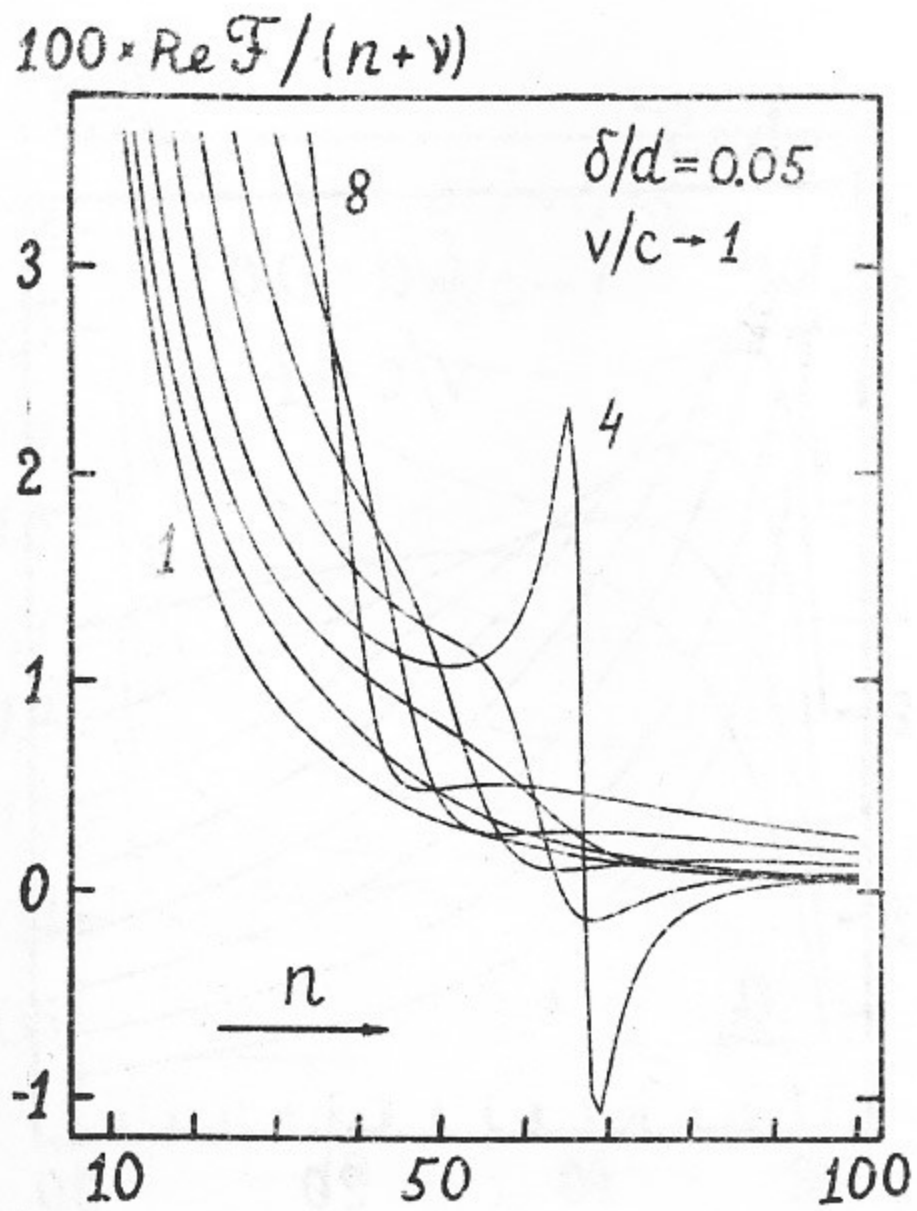


Рис.13. Быстрая волна.

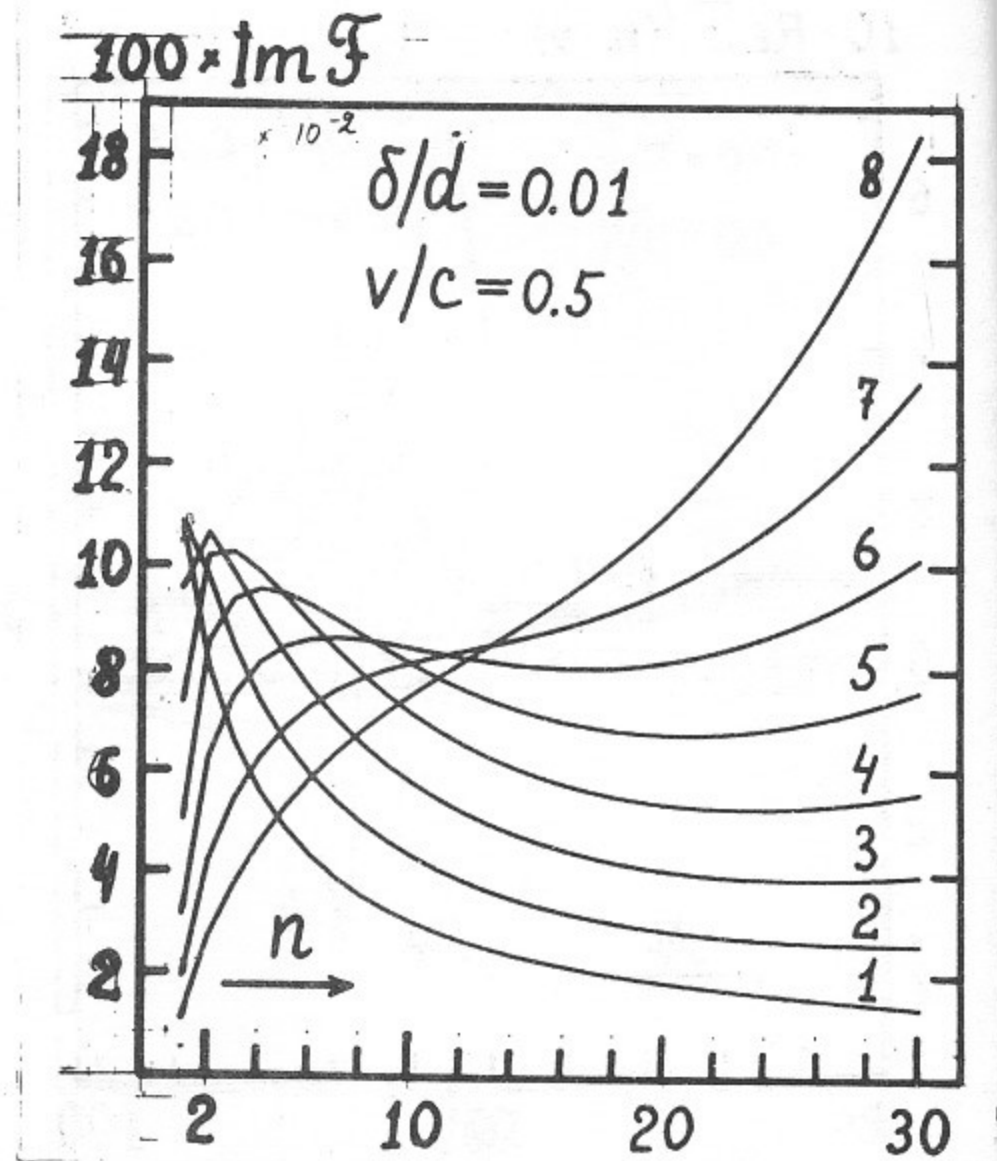
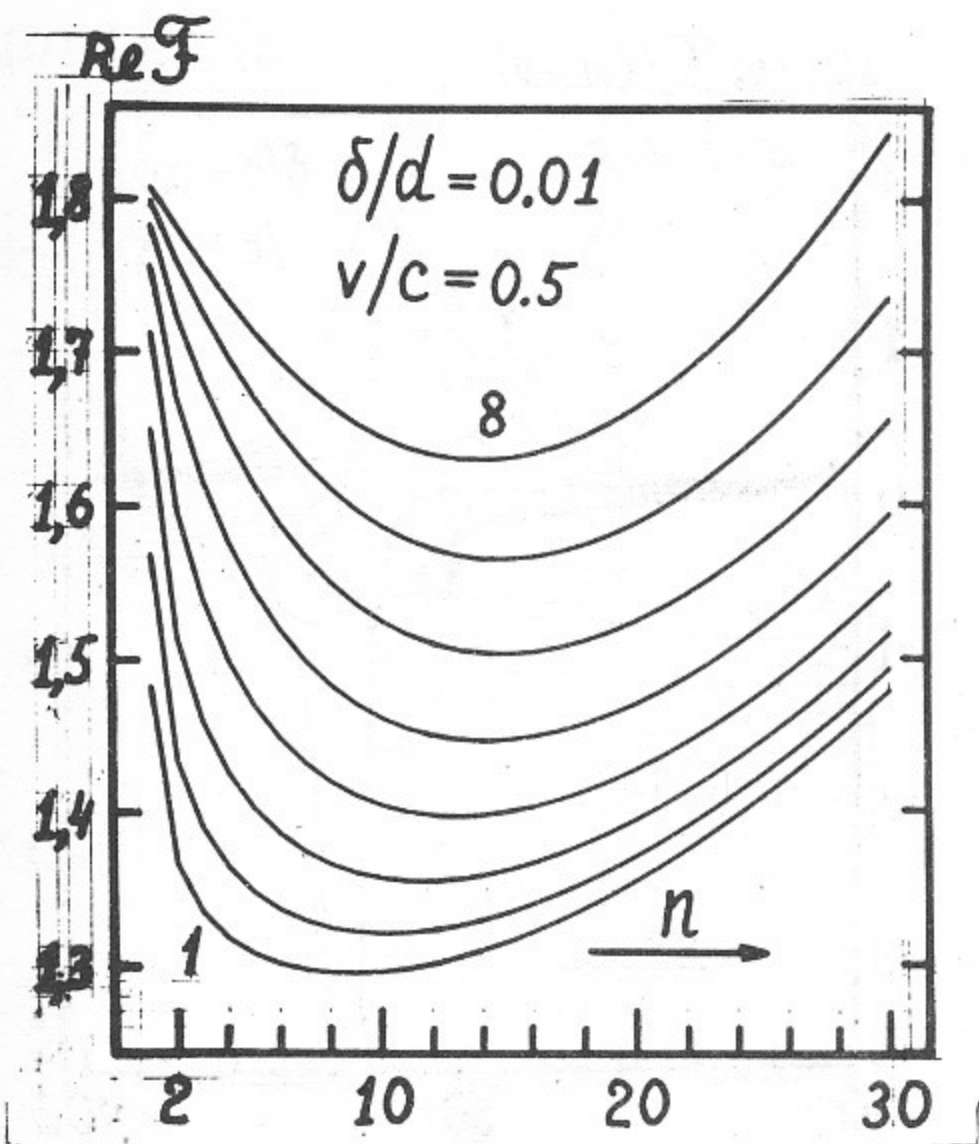


Рис.14. Медленная волна.

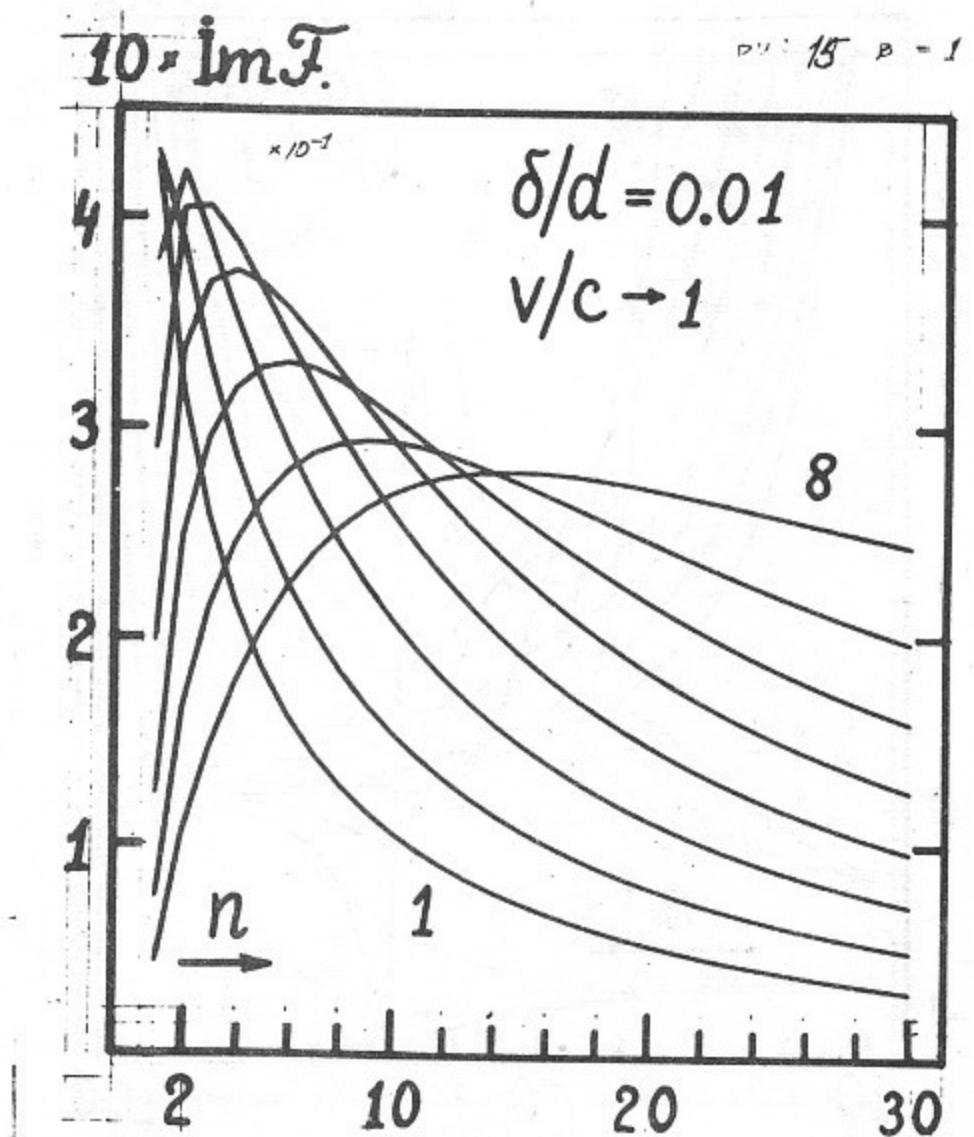
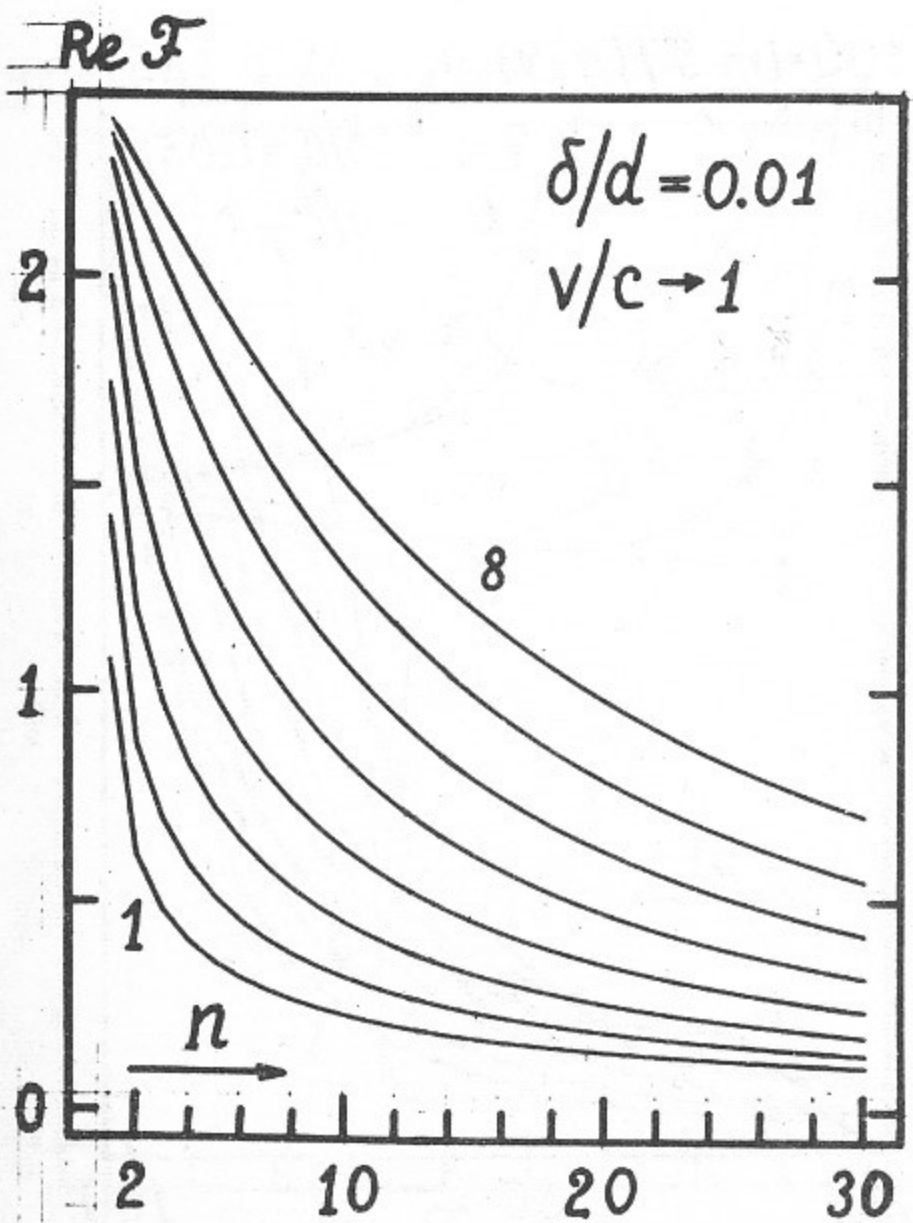


Рис.15. Медленная волна.

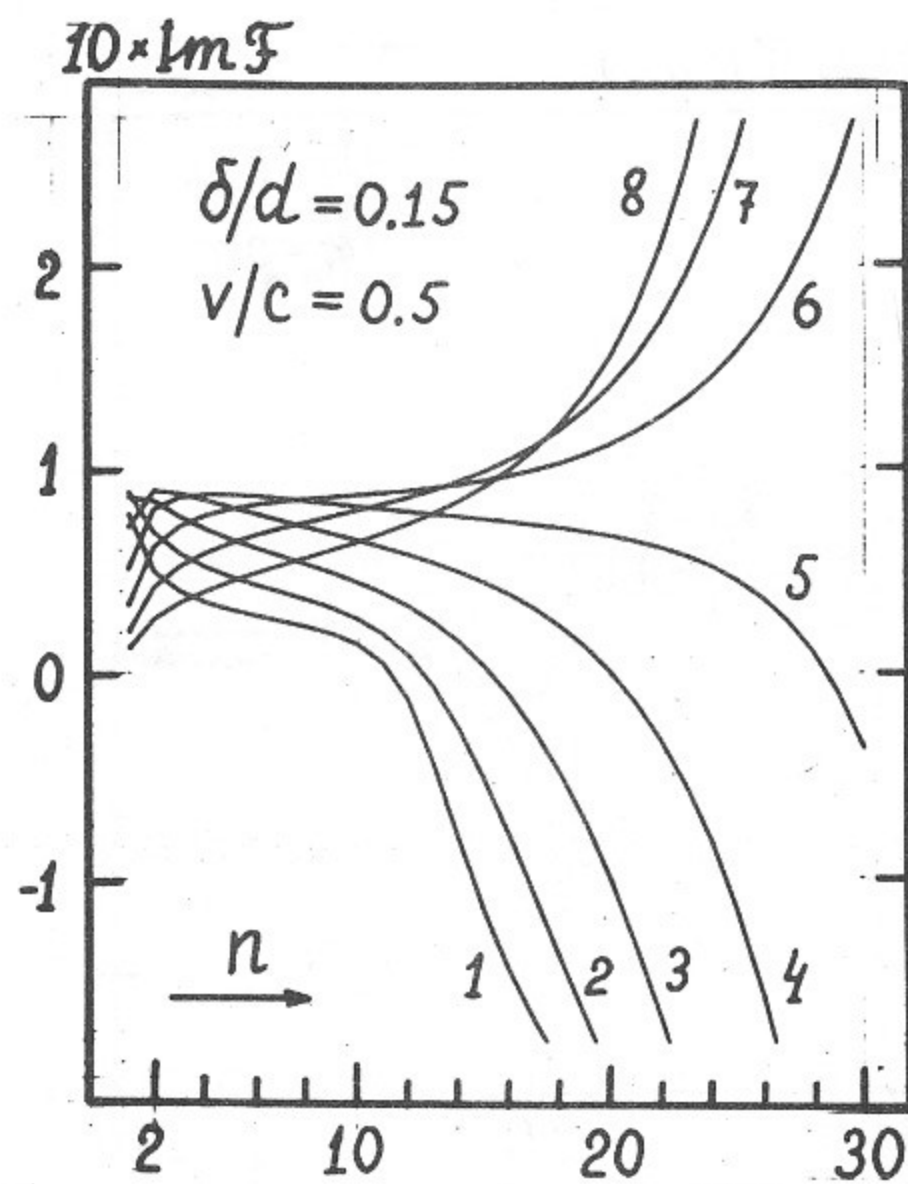
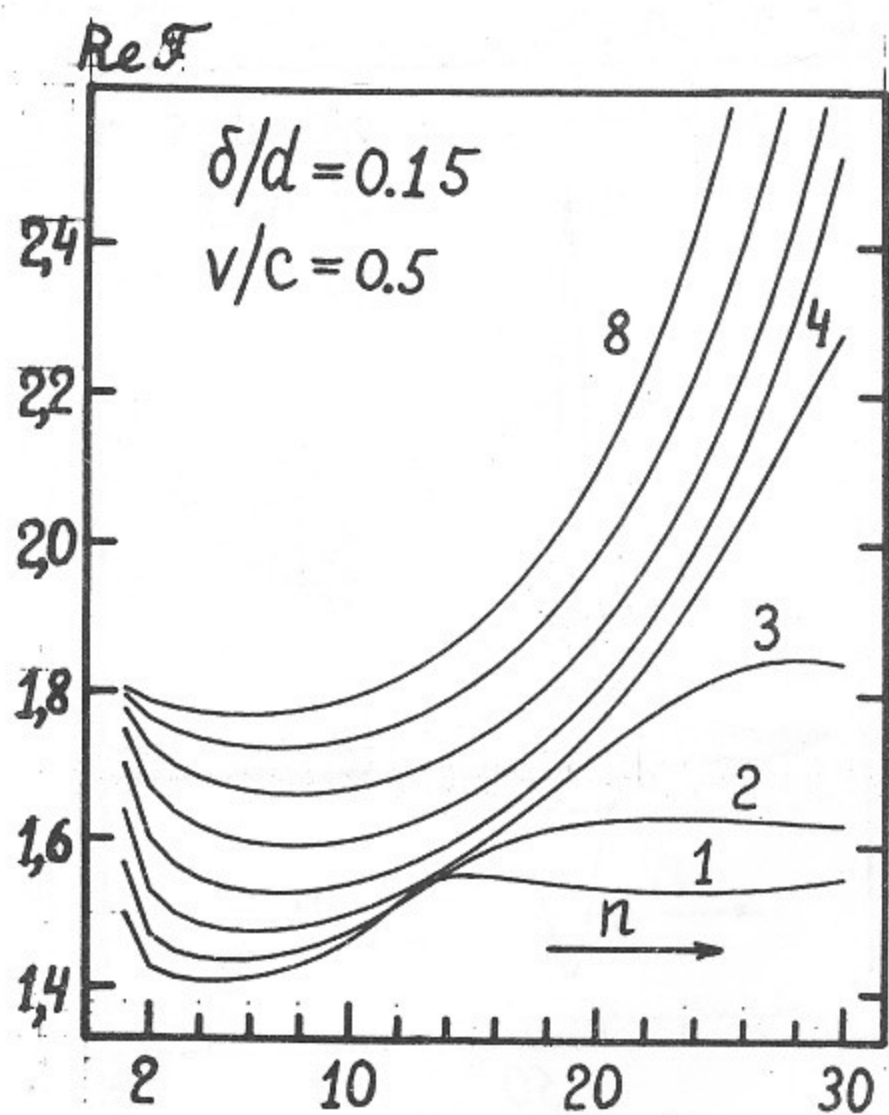


Рис.16. Медленная волна.

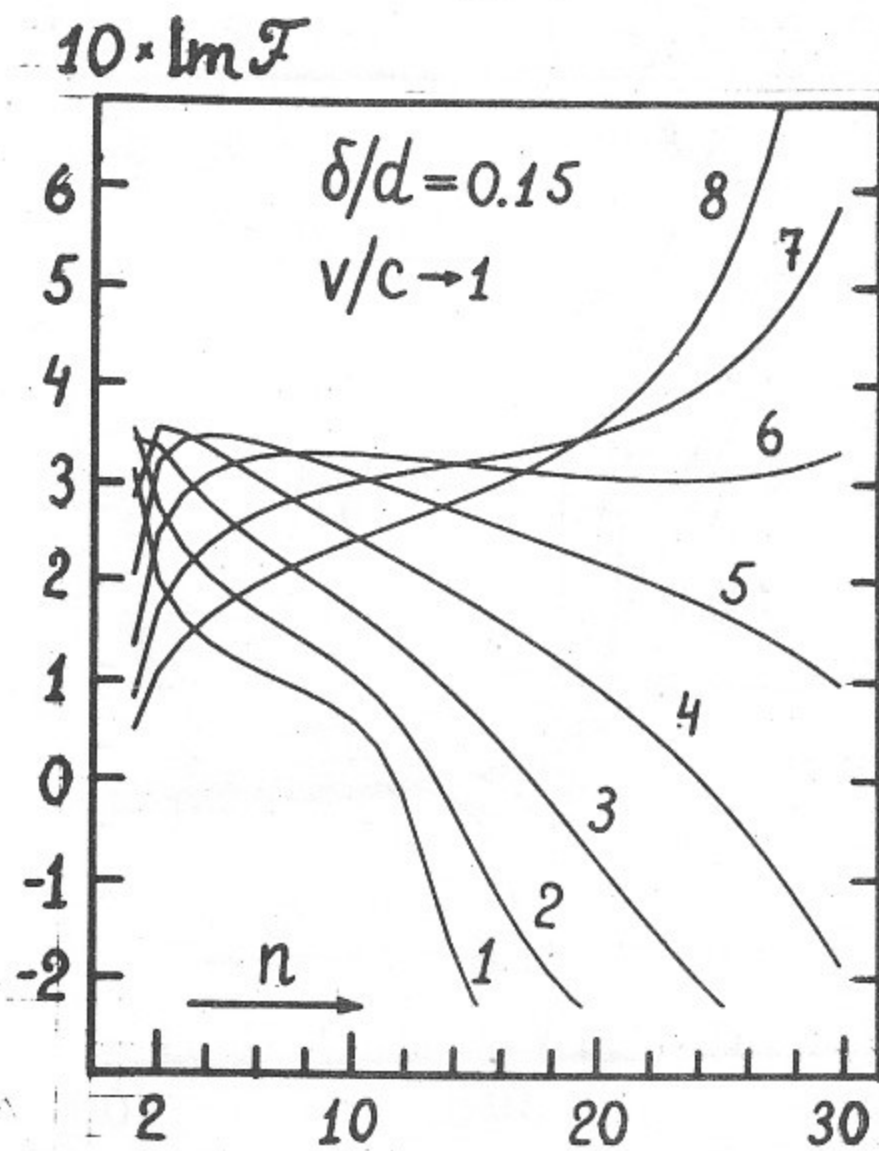
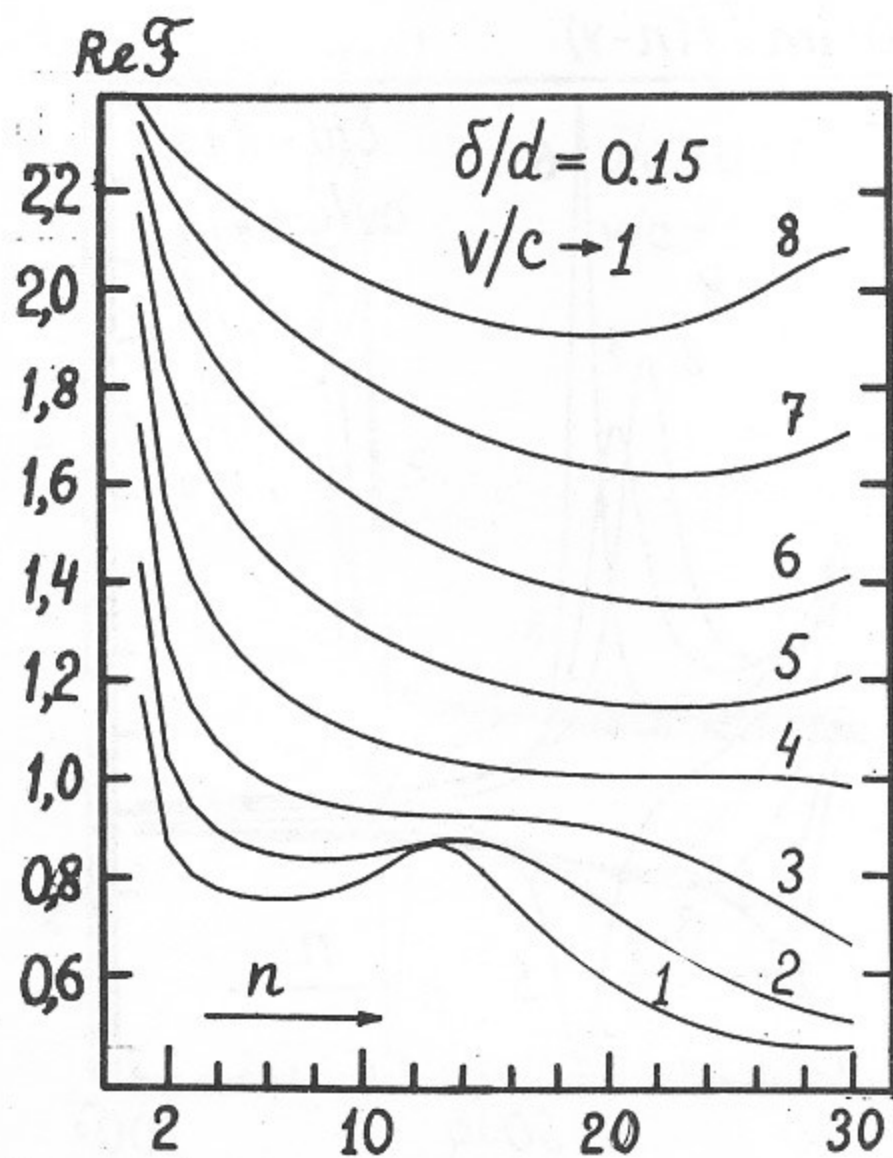


Рис.17. Медленная волна.

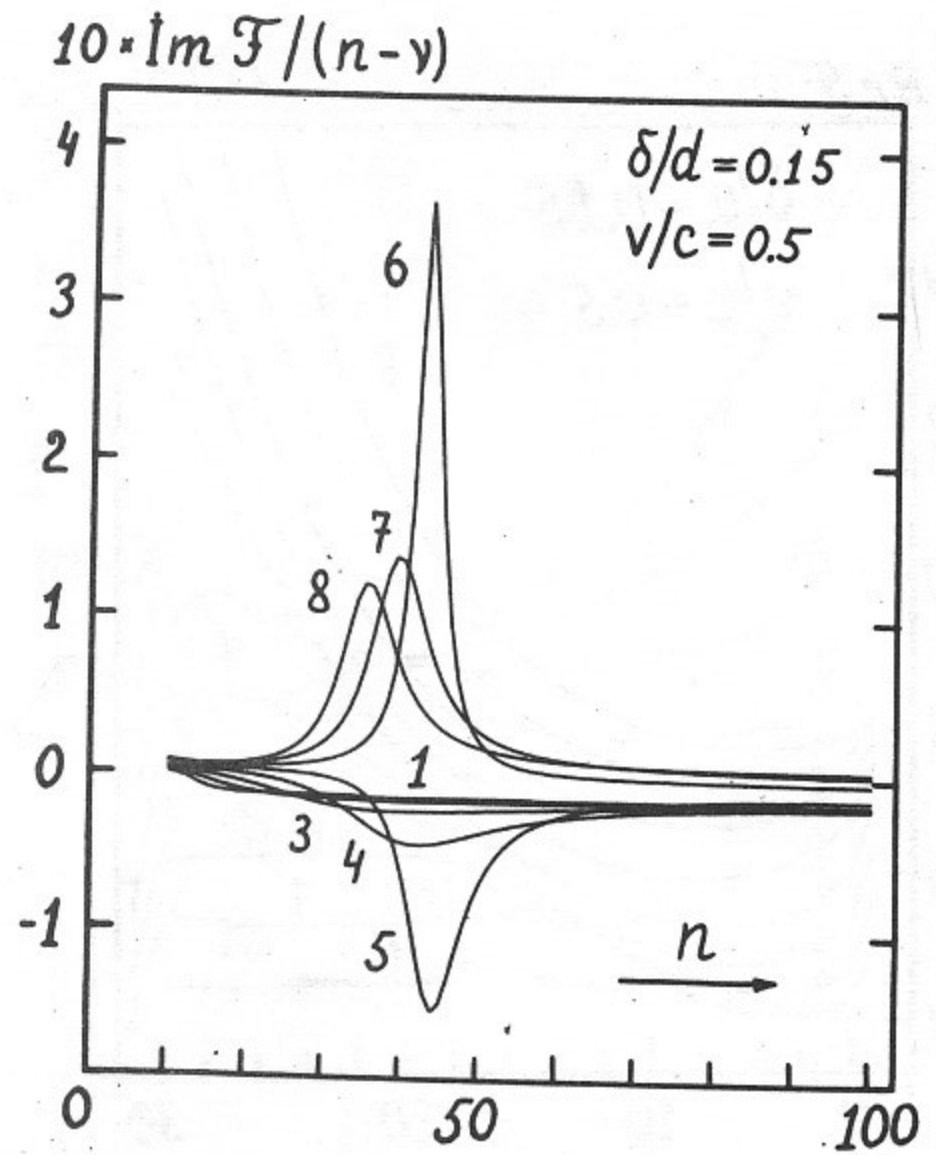
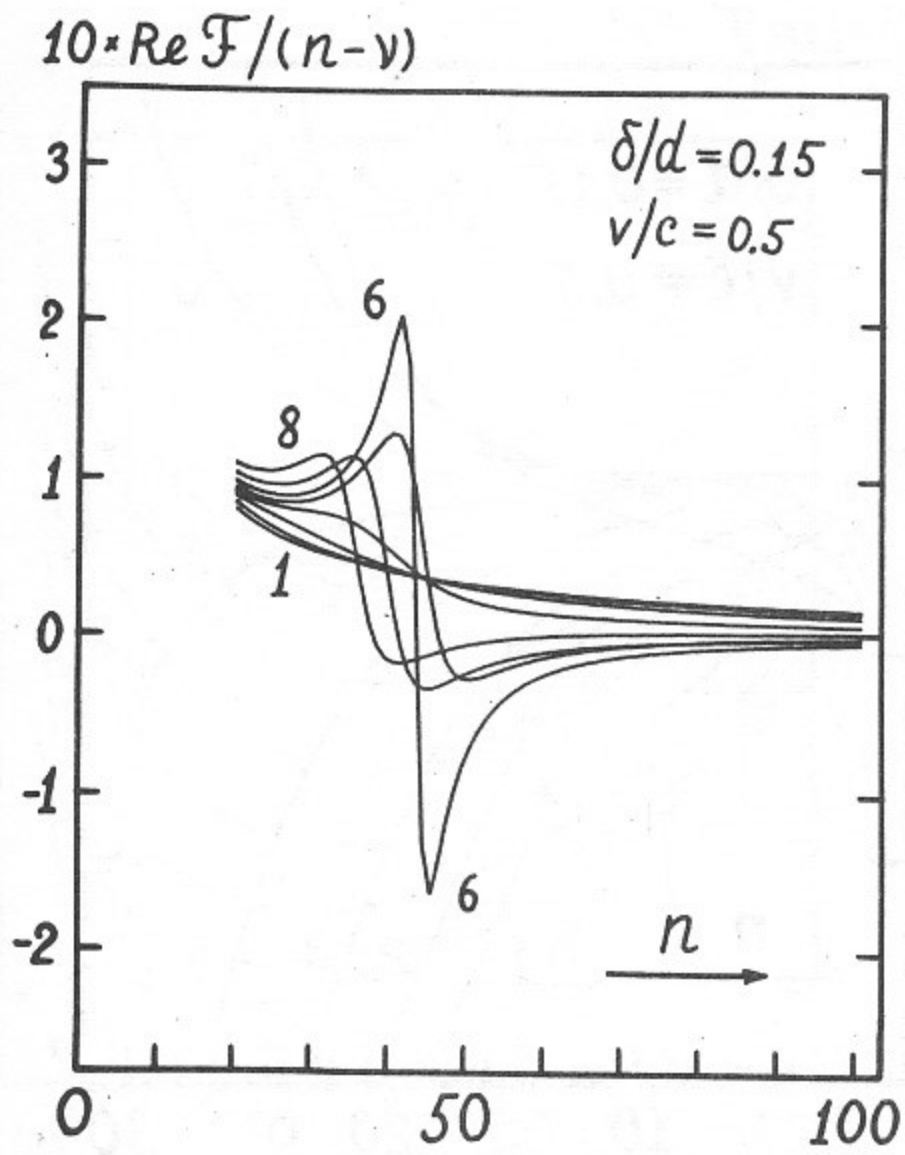


Рис.18. Медленная волна.

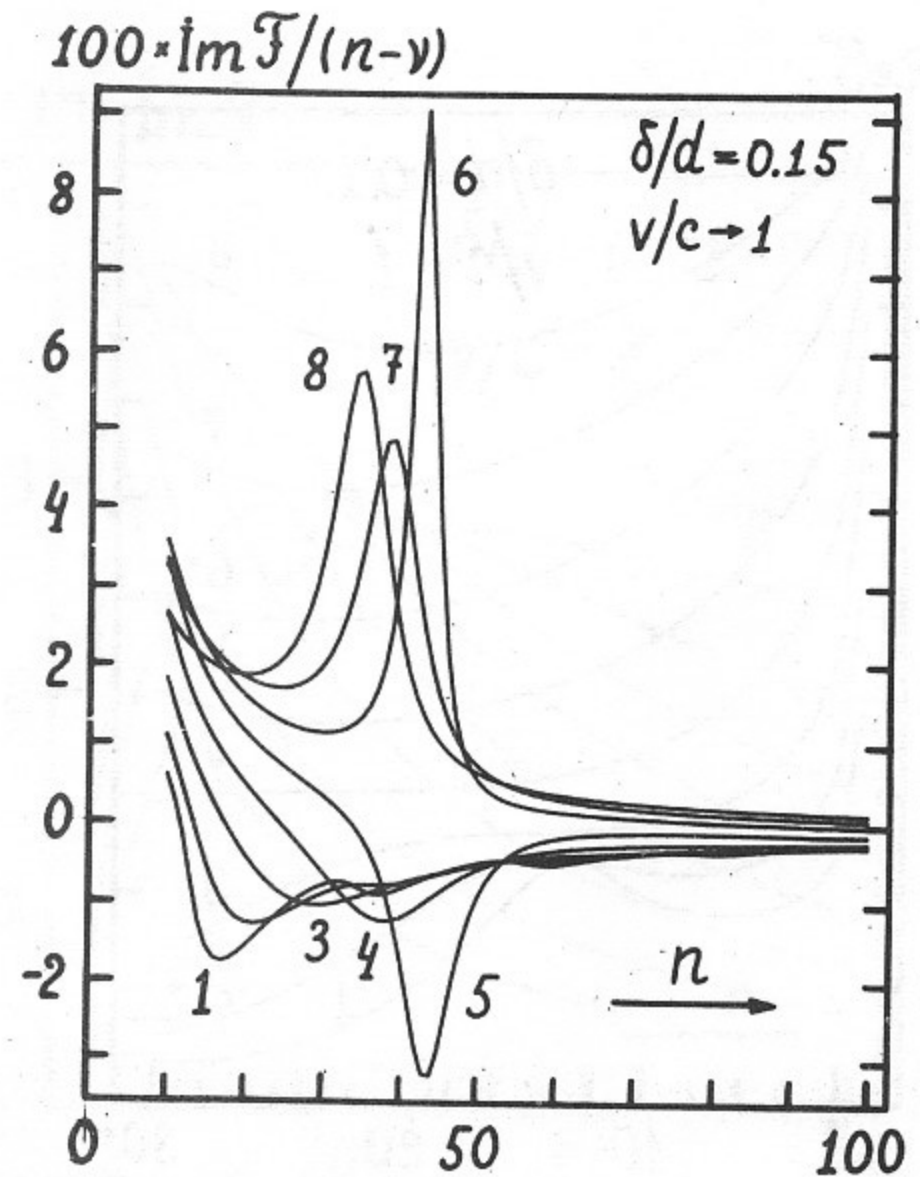
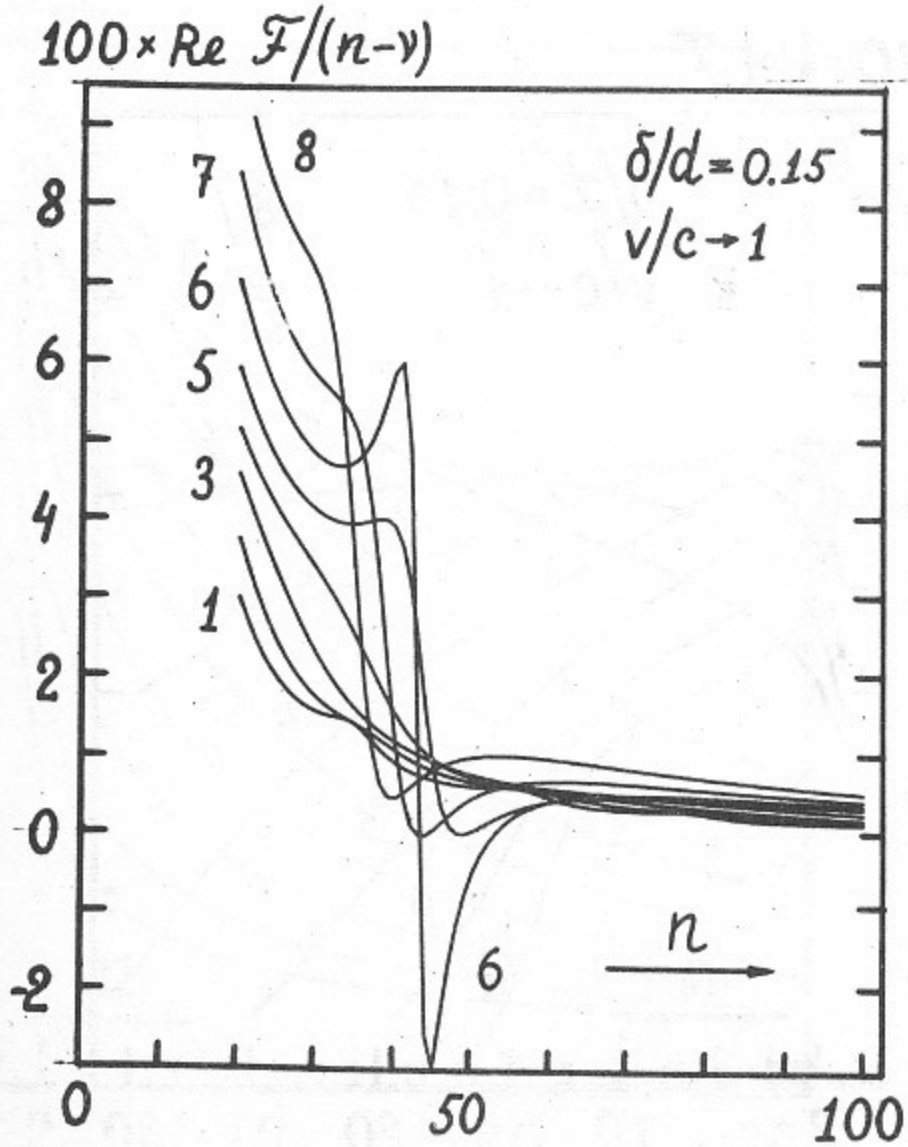


Рис.19. Медленная волна.

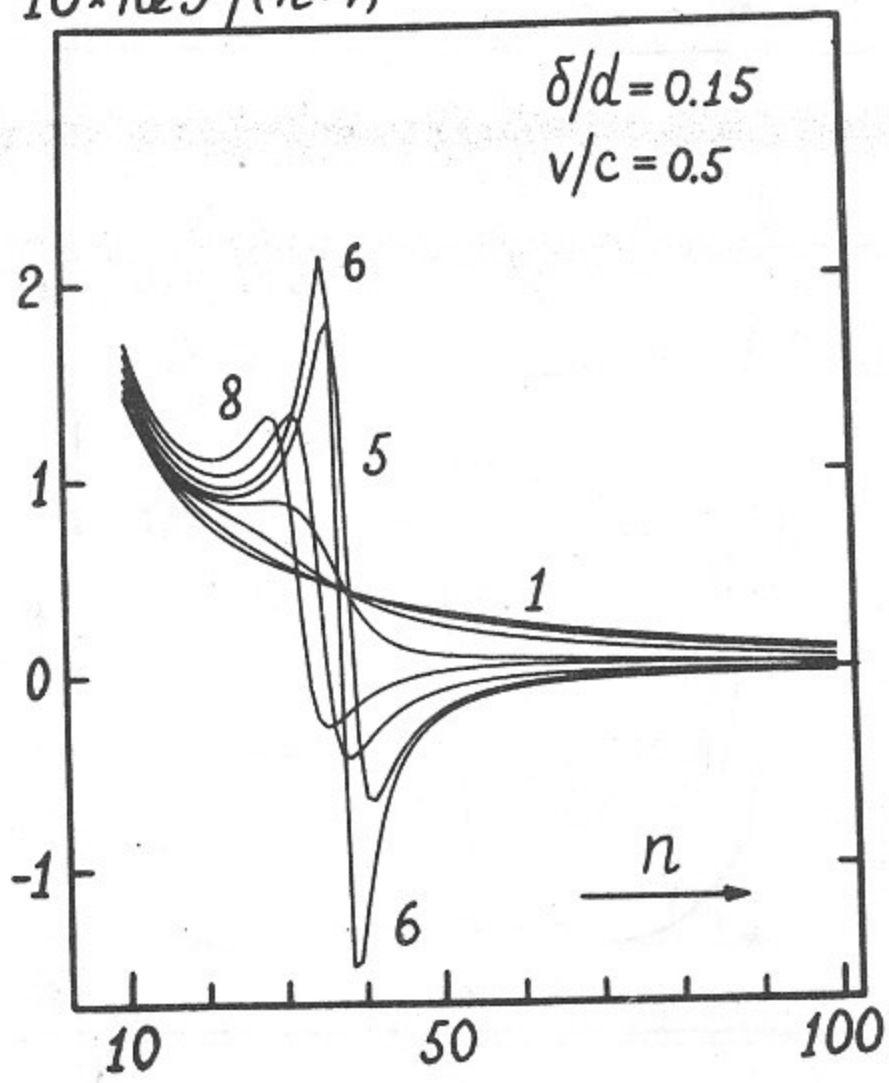
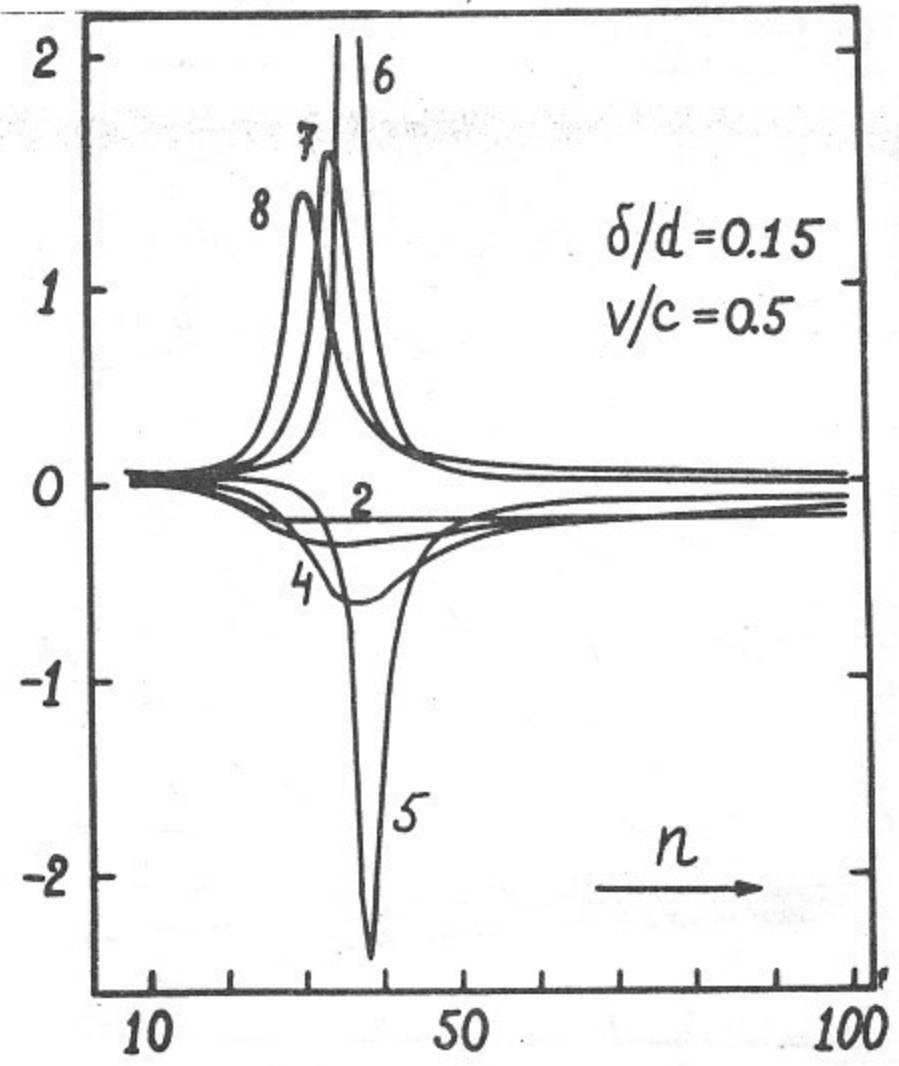
$10 \times \text{Re } \mathcal{F} / (n + \nu)$  $10 \times \text{Im } \mathcal{F} / (n + \nu)$ 

Рис.20. Быстрая волна.

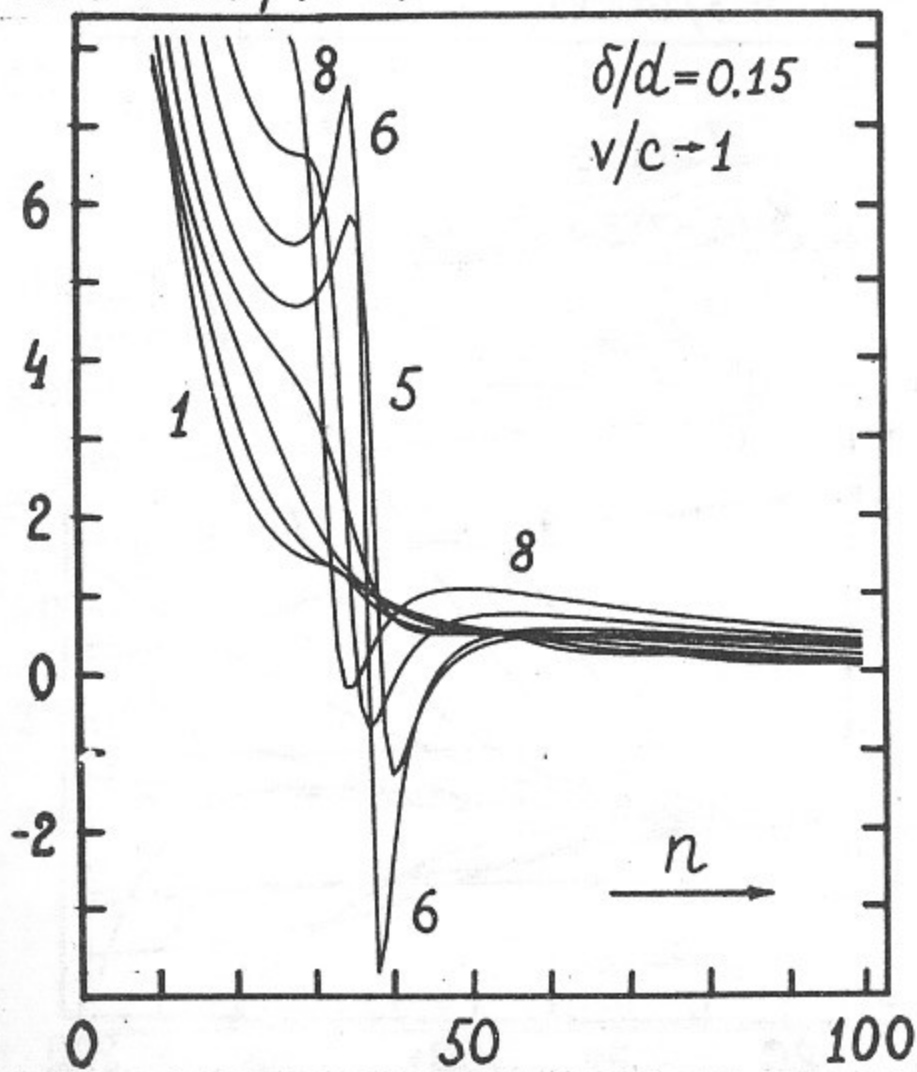
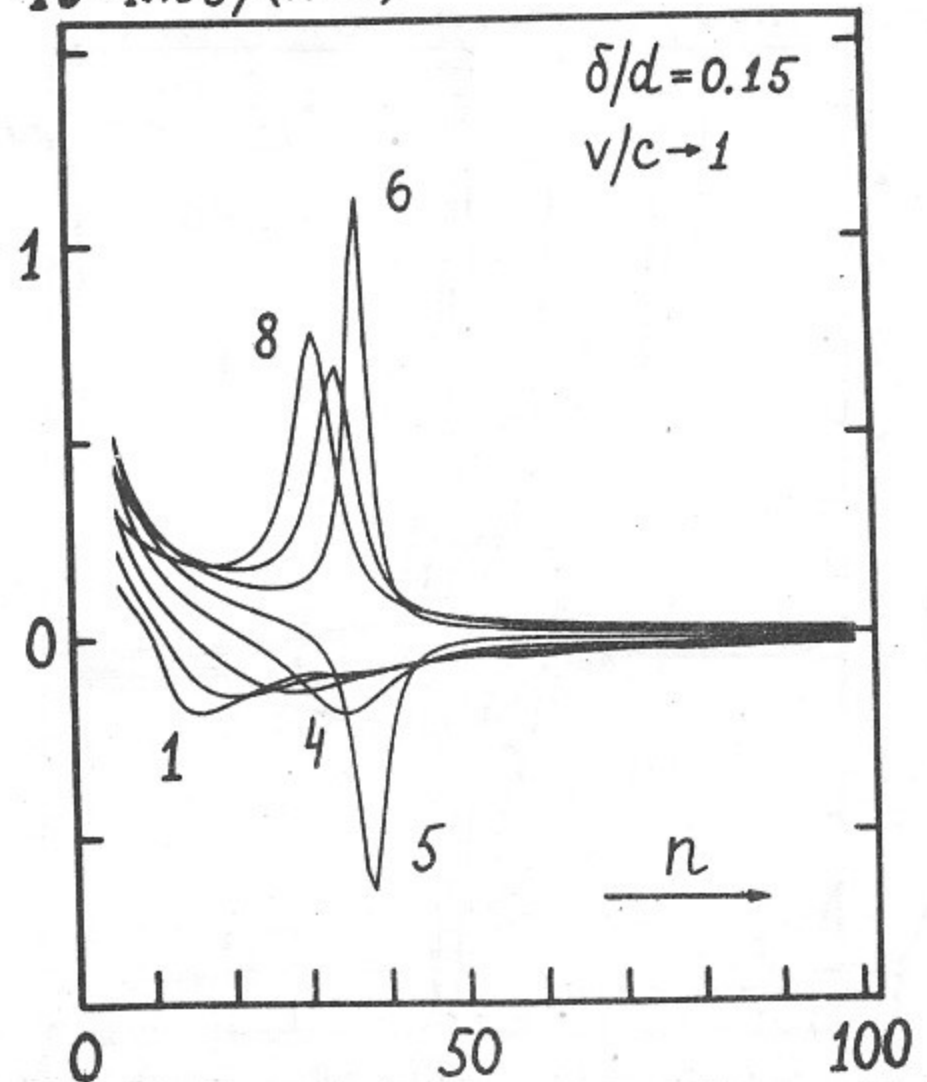
 $100 \times \text{Re } \mathcal{F} / (n + \nu)$  $10 \times \text{Im } \mathcal{F} / (n + \nu)$ 

Рис.21. Быстрая волна.

$100 \times \text{Im } \mathcal{F} / (n - \nu)$

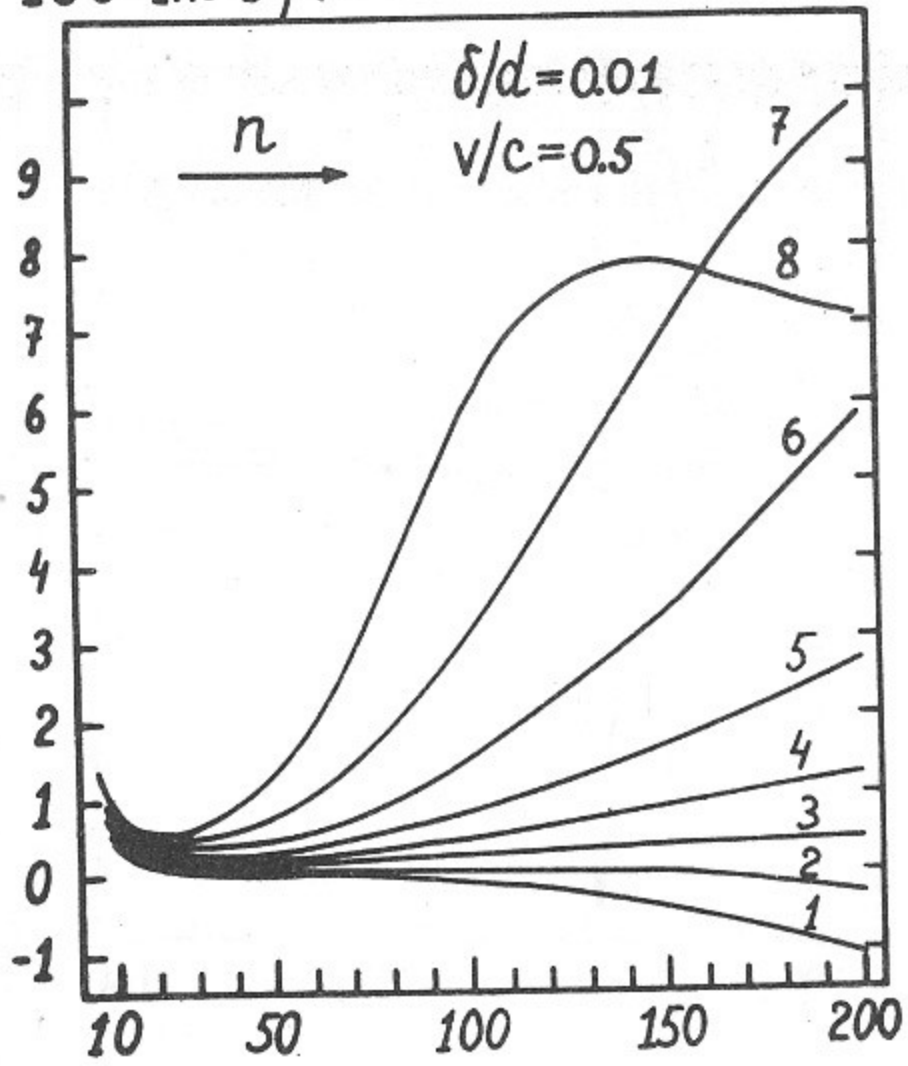


Рис.22. Медленная волна.

$100 \times \text{Im } \mathcal{F} / (n - \nu)$

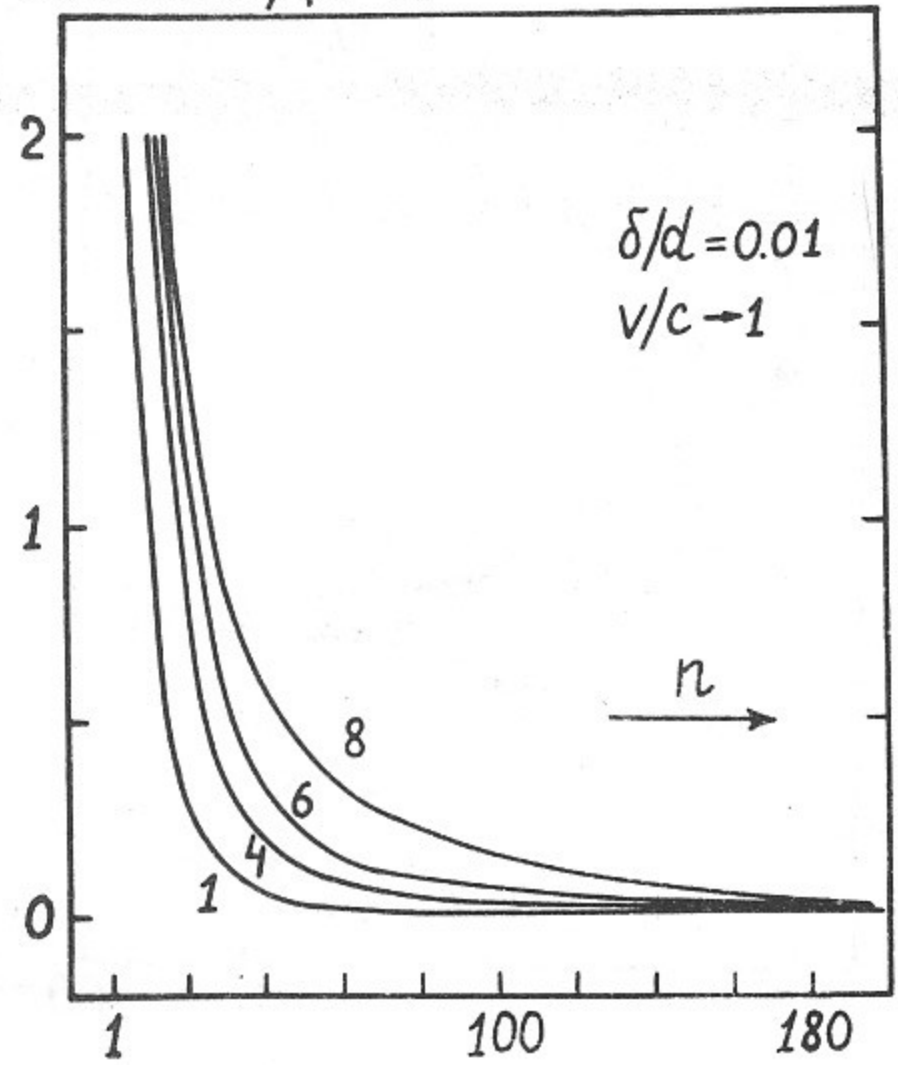


Рис.23. Медленная волна.

$10 \times \text{Im } \mathcal{F} / (n - \nu)$

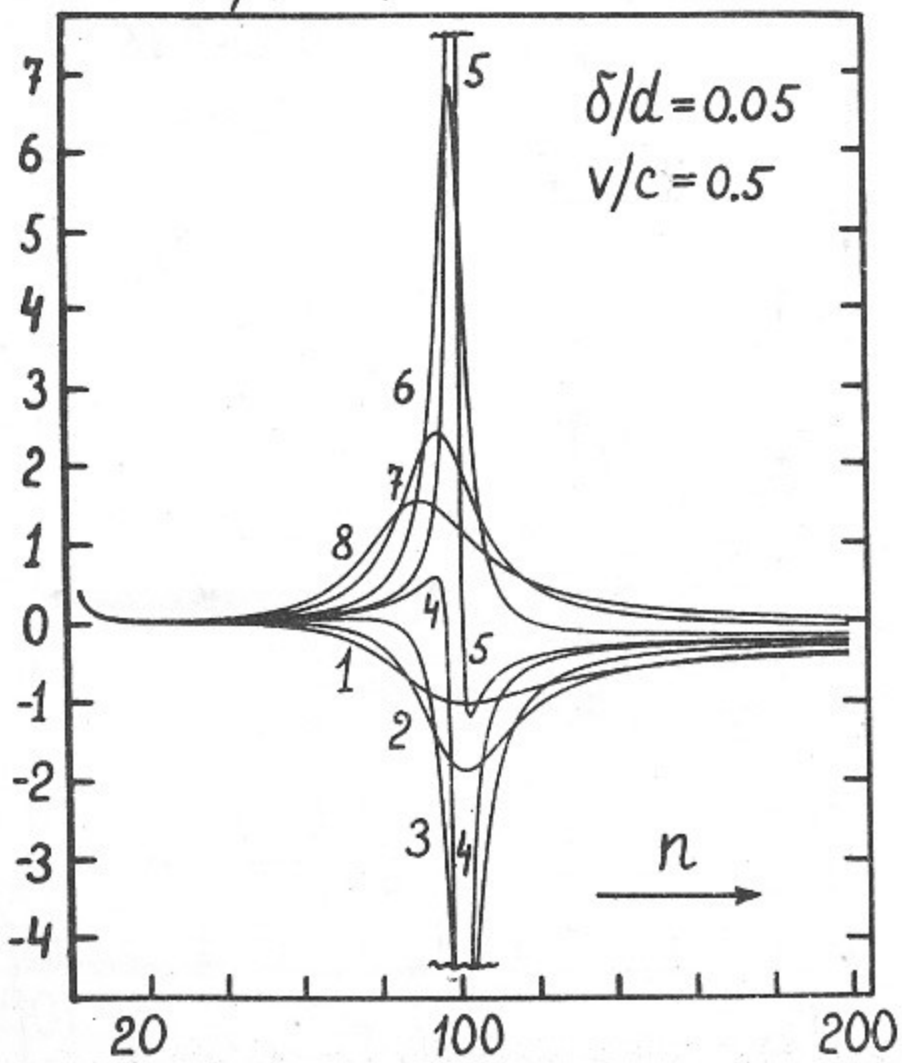


Рис.24. Медленная волна.

$10 \times \text{Im } \mathcal{F} / (n - \nu)$

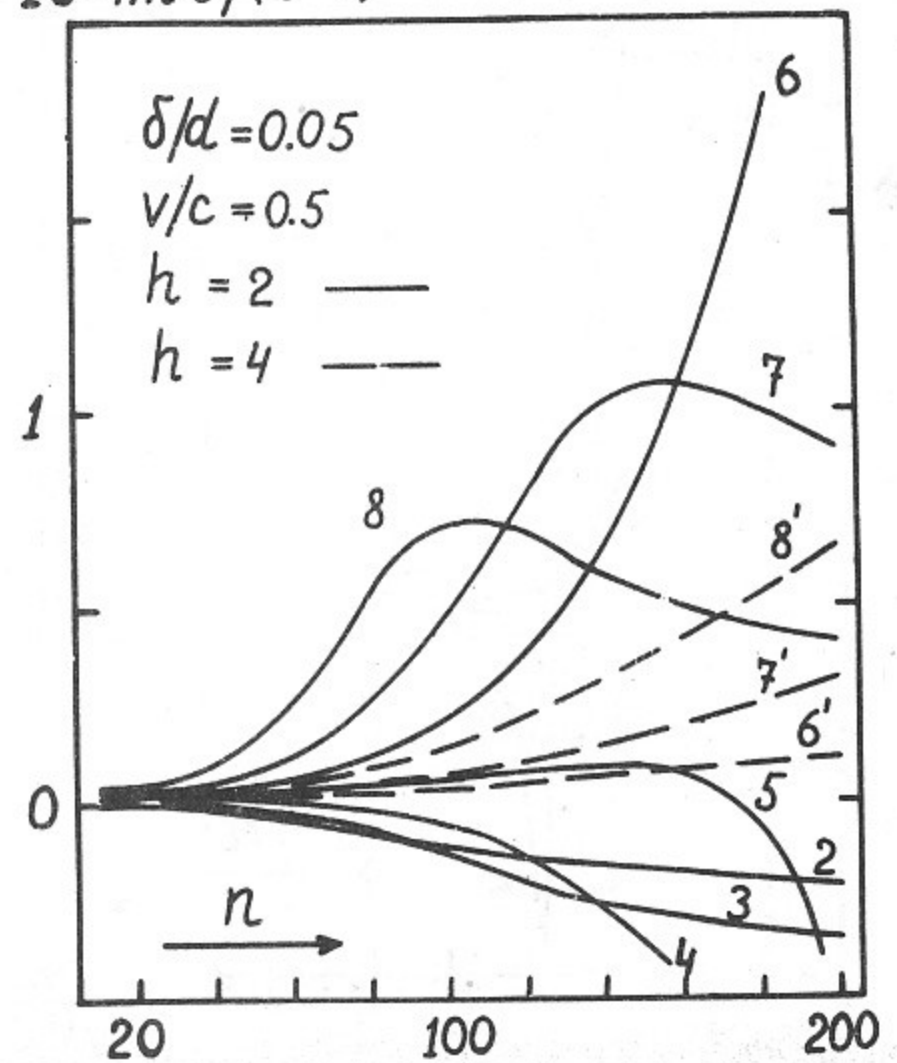


Рис.25. Медленная волна.

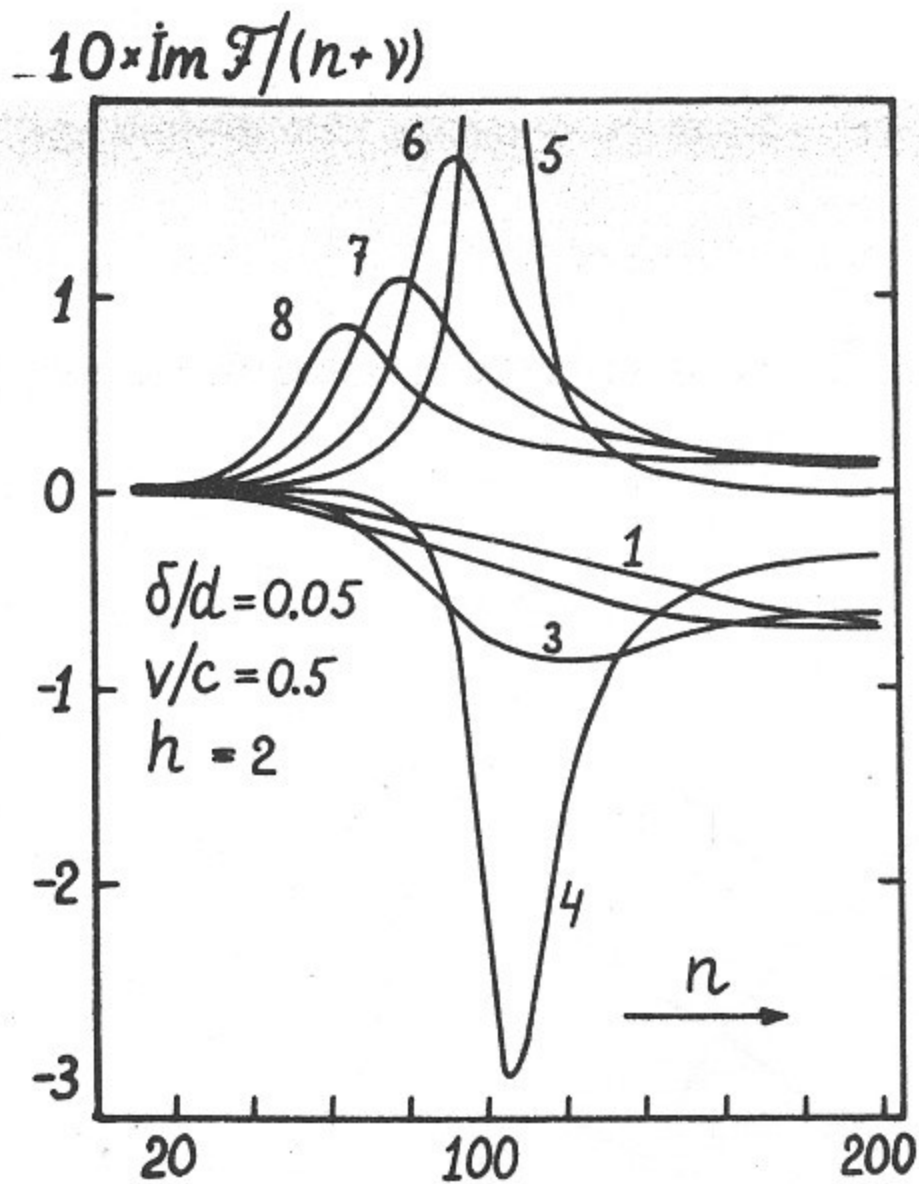


Рис.26. Быстрая волна.

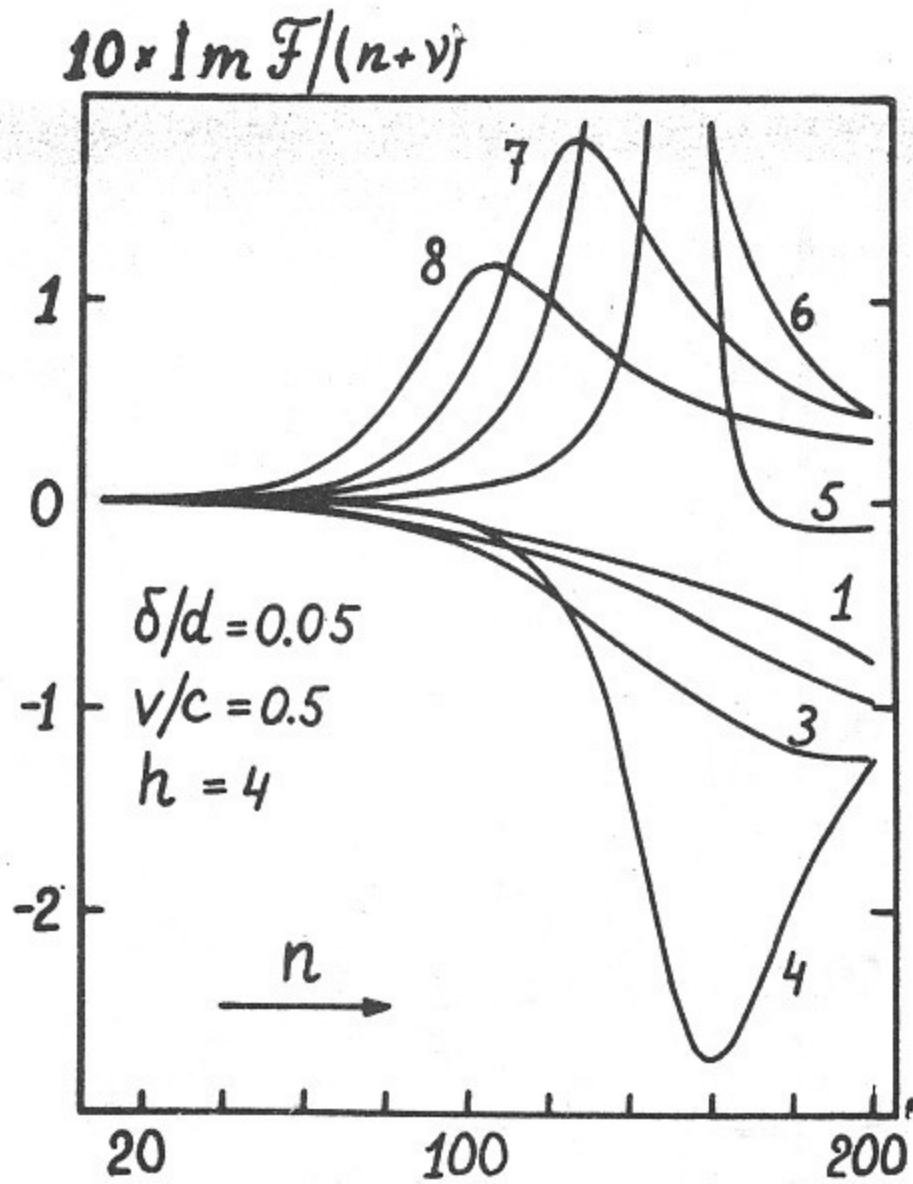


Рис.27. Быстрая волна.

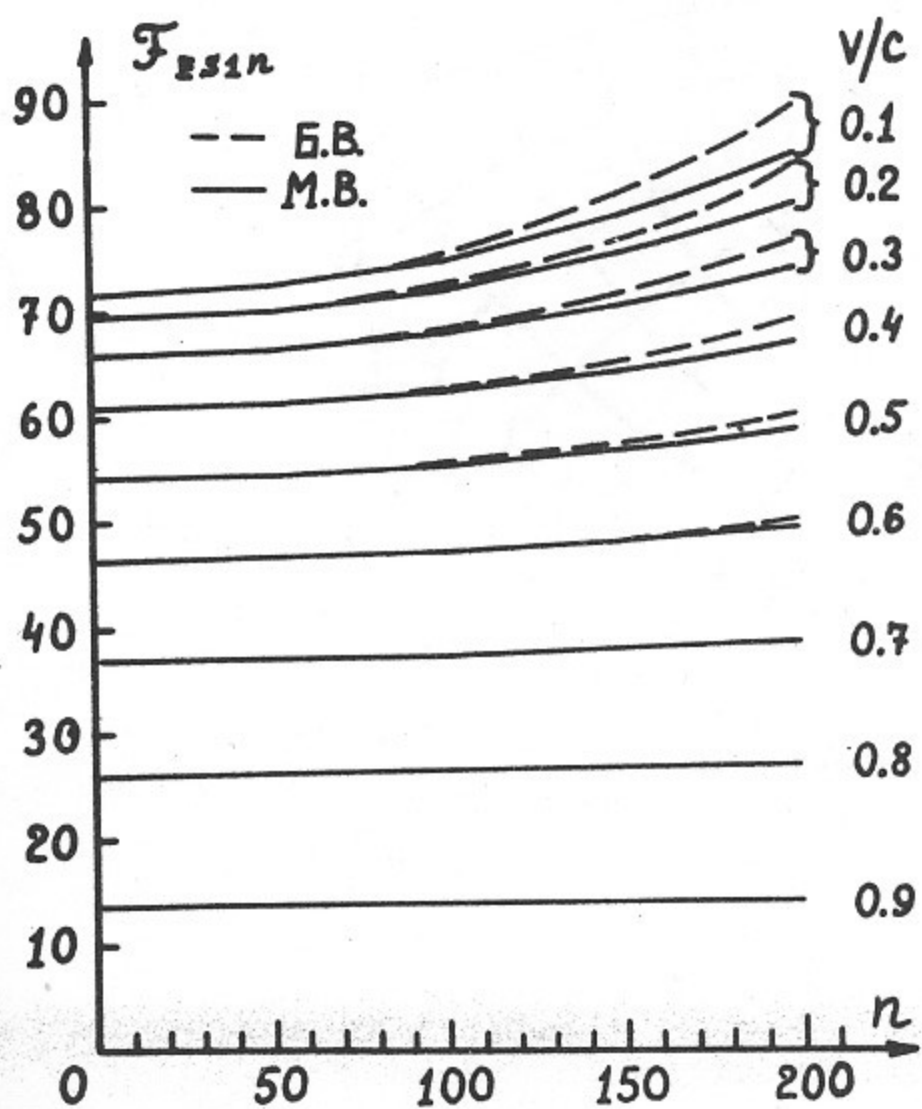


Рис.28.

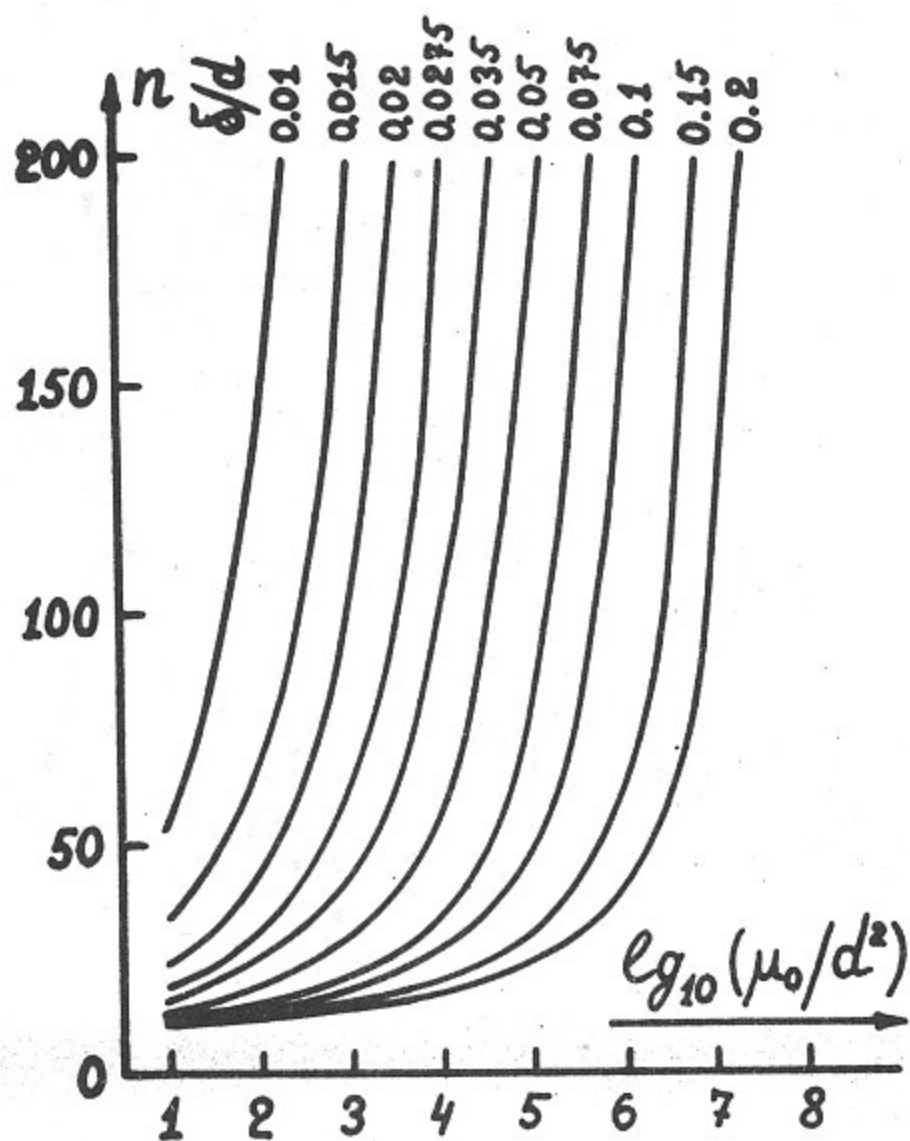


Рис.29.

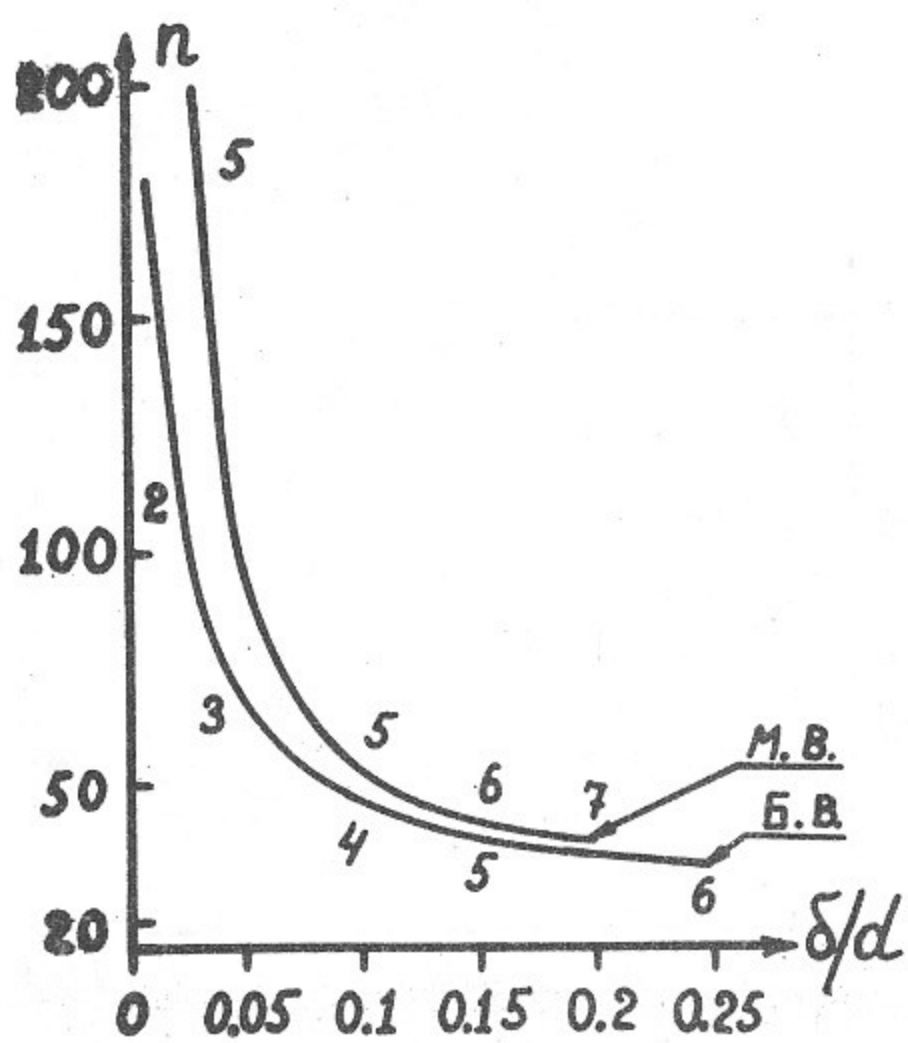


Рис. 30.

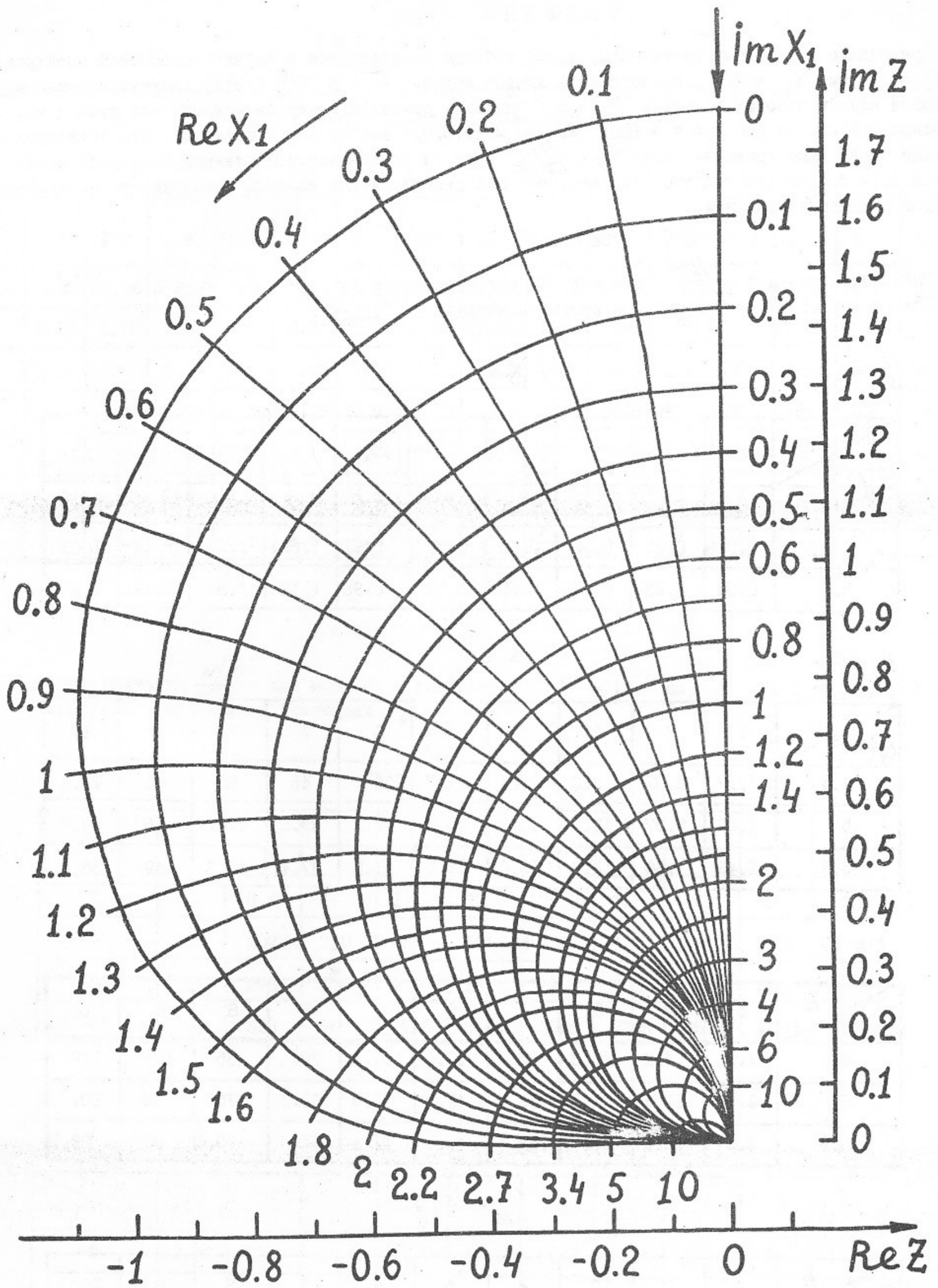


Рис.31. Дисперсионная функция.

ТАБЛИЦЫ

Приводимые в таблицах результаты, кроме таблицы 6, относятся к случаю ускорителя электронов с $R = 150$ см, $\gamma_2 = 0.8$, проводимость листов железа $\sigma = 5 \cdot 10^{16}$ I/сек, диэлектрическая постоянная клея в зазорах шихтовки $\epsilon = 5$. Значения других параметров указаны над таблицами, обозначения указаны на рис. 2, 4 и в (55). Индекс М.В. (Б.В.) над таблицей означает, что приведённые в таблице числа дают граничные значения $\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$ области устойчивости медленной (быстрой) волны. Индекс Б.В. (М.В.) внутри таблицы означает, что для данной клетки таблицы устойчивость определяется быстрой (медленной) волной.

Таблица I

Граничные значения $\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$ для мод n в ускорителе с $W = 20$ см, $h = 1$ см, $\delta/d = 0.15$, $\Delta = 10$ см, $\tau = 0.3$ см, при разных значениях $\lg(\mu/d^2)$.

1. $\gamma = 1.1547$ ($v/c = 0.5$). М.В.

$\lg(\mu/d^2) \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4.4	0.037	0.21	0.38	0.55	0.72	0.9	1.08	1.26	1.4	1.66
5	0.038	0.22	0.39	0.56	0.74	0.91	1.09	1.26	1.44	1.62
5.8	0.04	0.23	0.415	0.59	0.77	0.95	1.12	1.3	1.46	1.62

2. $\gamma = 5$. М.В.

$\lg(\mu/d^2) \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4.4	1.17	6.93	13.2	20.1	27.7	36	45	55	66	78.4
5	1.26	6.97	12.8	18.9	25.3	32.2	39.5	47.1	55	63.7
5.8	1.43	7.66	13.6	19.6	25.5	31.5	37.4	43.3	49	55

3. $\gamma = 10$. М.В.

$\lg(\mu/d^2) \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4.4	1.9	11.2	21.3	32	43.8	56.5	70	85	101	118
5	2.1	11.4	20.9	30.7	41.2	51.9	63.3	75	88	101
5.8	2.3	12.5	22.3	32	41.8	51.4	61	70.6	80	89.5

4. $\gamma = 50$. М.В.

$\lg(\mu/d^2) \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4.4	9.14	53.3	100.4	151	206	265	328	396	470	552
5	9.8	54.2	99	145	194	245	298	354	412	473
5.8	11	59.5	106	152	197	244	289	334	378	423

Таблица 2

Граничные значения $\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$ для мод n в ускорителе с $W = 20$ см, $h = 1$ см, $\delta/d = 0.15$,
 $\Delta = 10$ см, $\tau = 0.2$ см, $\epsilon_0(\mu/d^2) = 5$, при разных значениях γ .

М.В.

$n \backslash \gamma$	1.1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.4	3	3.2	3.3	3.5	3.7	4	5	10
1	0.02	0.03	0.055	0.09	0.14	0.22	0.47	1.74	3.44	5	3.2	2.3	1.84	1.5	2.14
2	0.11	0.165	0.31	0.5	0.78	1.15	2.35	7.04	11	14	16	13	10.2	8.3	12
3	0.2	0.3	0.55	0.9	1.38	2.03	4.1	11.3	16.7	20.4	24	23	19	15.4	21.6
4	0.3	0.43	0.79	1.3	2	2.9	5.72	15.4	22	26.5	35	35	29	23	32
5	0.38	0.56	1.03	1.7	2.6	3.74	7.4	19.2	27	32.5	44	48	39	31	42.5
7 T	0.57	0.83	1.52	2.5	3.8	5.5	10.6	27	37	44	61	71	64	49	66
10	0.84	1.23	2.27	3.7	5.6	8.2	15.7	39	53	63	87	115	112	80	104

Таблица 3

Граничные значения $\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$ для мод n в ускорителе с $W = 14.5$ см, $h = 4.5$ см, $\delta/d = 0.15$,
 $\epsilon_0(\mu/d^2) = 5$, при разных значениях γ .

1. $\tau = 0.1$

М.В.

$n \backslash \gamma$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1.2	6.45	11.7	17.1	22.7	28.3	34.2	40	46	52
15	60	202	330	460	595	735	880	1030	1187	1350
25	44	278	570	936	1395	1966	2680	3570	4670	6054
35	52	323	650	1046	1520	2088	2755	3550	4480	5580

2. $\tau = 0.2$

М.В.

$n \backslash \gamma$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	2.36	12.6	22.6	32.9	43.4	54.2	65.4	77	89	100
15	30.7	196	406	671	1000	1383	1747	2345	2845	3350
25	37	229	462	741	1076	1476	1950	2503	3160	3930
35	48	296	594	944	1359	1839	2400	3048	3800	4650

Граничные значения $\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$ для мод n в ускорителе с $W = 20$ см, $h = 1$ см, $\delta/d = 0.15$, $\Delta = 10$ см, $\delta = 5$, при разных значениях $\lg(\mu/d^2)$.

1. $\tau = 0.1$ см

М.В.

n $\lg(\mu/d^2)$	1	2	3	5	10	15	20	25	30	35	40	41	42	43	44	45	46	50	55
5.2	4.5	23.3	40.6	72	131	193	281	452	621	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.
5.4	4.7	24.4	43.4	78	139	191	249	300	256	140	45	30	16.6	7.6	7.7	18	34	130	Б.В.
5.6	4.9	25.3	45.5	85	150	191	222	210	158	82.3	26	20	17.4	18.4	23	30	40	91	165
5.8	5.1	26.4	47.3	89	151	189	187	170	111	55	23.5	23	25	30	36	44	53	97	157

2. $\tau = 0.2$ см

М.В.

n $\lg(\mu/d^2)$	1	2	3	5	10	15	20	25	30	35	40	41	42	43	44	45	46	50	55
5.2	1.6	8.5	15.5	30.5	75	127	173	205	214	243	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.
5.4	1.6	8.7	15.7	30.5	72	114	146	158	143	101	40	27	16	7.6	7.8	19	37	157	207
5.6	1.7	8.9	16	30.6	69	104	127	129	108	68	25.4	20	0.5	19	24	32.3	44	109.5	218
5.8	1.7	9.2	16.2	30.8	66	96	112	108	84	49	22.5	23.3	26	31.5	39	48	59.5	117	209

3. $\tau = 0.3$ см

М.В.

n $\lg(\mu/d^2)$	1	2	3	5	10	15	20	25	30	35	40	41	42	43	44	45	46	50	55
5.2	1.3	7.1	12.9	25.2	60.5	100	137	165	178	210	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.
5.4	1.34	7.27	13.1	25.1	58	91	119	132	125	93	39	27	16	7.6	7.8	19.2	38	170	Б.В.
5.6	1.38	7.44	13.4	25.3	56	85	105	111	97	64	25	19	16	18.8	24	33	45	117	246
5.8	1.43	7.66	13.7	25.5	54.9	80	95	95	77	47	23	23	26	32	40	50	62	127	236

Для этого случая приведем граничное значение $\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$ для мод n быстрой волны. Б.В.

n $\lg(\mu/d^2)$	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	45	50	51	52	53	54	55	60
5.2	М.В.	85	50	26	8.6	4.3	15	31	49	68.5	89	133	256	282	308	336	363	389	524
5.4	М.В.	М.В.	М.В.	М.В.	М.В.	М.В.	М.В.	М.В.	М.В.	М.В.	М.В.	М.В.	М.В.	М.В.	65I	58I	587	603	723

Т а б л и ц а 5

Граничные значения $\frac{N/10^{12}}{\Delta E/E}$ для мод n в ускорителе с $W = 20$ см, $h = 1$ см, $\delta/d = 0.15$, $\Delta = 10$ см, $\tau = 0.3$ см, $\gamma = 500$, при разных значениях $\lg(\mu/d^2)$. М.В.

n $\lg(\mu/d^2)$	I	2	3	5	10	15	20	25	30	35	40	41	42	43	44	45	46	47	48
5.2	0.1	0.55	0.997	1.93	4.53	7.39	10.26	12.7	14.56	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.	Б.В.
5.4	0.1	0.56	1.01	1.993	4.39	6.92	9.18	10.6	10.71	8.69	4.07	2.88	1.73	0.84	0.88	2.22	4.52	7.67	11.65
5.6	0.1	0.576	1.03	1.95	4.3	6.54	8.32	9.2	8.6	6.22	2.68	2.17	1.87	2.11	2.78	3.86	5.39	7.34	9.69
5.8	0.1	0.593	1.05	1.97	4.22	6.23	7.65	8.1	7.1	4.7	2.55	2.38	3	3.65	4.64	5.95	7.56	9.49	11.73

Б.В.

n $\lg(\mu/d^2)$	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	45	50
5.2	М.В.	8.37	5.12	2.72	0.93	0.48	1.73	3.61	5.87	8.46	11.35	18.1	41.24

Т а б л и ц а 6

Ускоритель, у которого на поверхности листов шихтованного железа нанесён тонкий слой меди ($\sigma = 5.3 \cdot 10^{17}$ I/сек, $\mu_0 = 1$).
 Граничные значения $\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$ для мод n в ускорителе с $W = 20$ см, $k = 1$ см, $\delta/d = 0.15$, $\Delta = 10$ см, $\tau = 0.3$ см,
 при $\log(\mu/d^2) = 2.6$ т.е. при $d \approx 0.05$ см.

1. $\gamma = 1.1547$ ($v/c = 0.5$).

М.В.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$	0.036	0.23	0.435	0.64	0.85	1.06	1.3	1.5	Б.В.

Б.В.

n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25	30	35	40	50
$\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$	М.В.	2.03	1.8	1.65	1.69	1.77	1.86	1.96	2.06	2.16	2.26	2.36	2.46	2.92	3.3	3.58	3.9	4.42

2. $\gamma = 5$.

М.В.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$	2.53	22.7	46.2	70.15	93.3	114.4	133.3	149	Б.В.

Б.В.

n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	20	25	30
$\frac{N/10^9}{\Delta E/E}$	М.В.	124	56	37.3	37.6	40.3	44	47	51.3	53	64	75	113	160

Л и т е р а т у р а

- I. Boyce D. McDaniel, "Status of Cornell 10 GeV accelerator facility", Труды УП международной конференции по ускорителям заряженных частиц высоких энергий, Ереван, 1969, Издательство Акад. наук Армянской ССР, Ереван, 1970, том. I, стр. 95.
2. R.R. Wilson, Proceedings of the 8-th international conference on high-energy accelerators, CERN 1971 (CERN, Geneva, 1971), p. 3.
3. Г.И. Будкер и др. Материалы международной конференции по ускорителям, Дубна, 1963, М., Атомиздат, 1964, стр. 1065.
4. И.И. Авербух и др. "Синхротрон Б-4 - инжектор для позитрон-электронного накопителя ВЭШ-3", Препринт ИЯФ 21-71, Новосибирск, 1971.
5. В.В. Мазепус и Б.В. Чириков, Препринт ИЯФ СО АН СССР, "Когерентная неустойчивость пучка в камере с непроводящими стенками", Новосибирск, 1965, см. также "Атомная энергия", т. 20, № 4, 340, (1966).
6. A.G. Ruggiero, "Longitudinal space charge forces within a bunched beam in the presence of magnetic lamination", FN-220 (0402) (1971).
A.G. Ruggiero, "Energy loss due to the resistive magnetic almination in the NAL booster", FN-230 (0402) (1971).
7. Laslett L.J., Neil V.K., Sessler A.M., "Transverse resistive instabilities of intense coasting beams in particle accelerators," Rev. Sci. Instr., 36, No 4, 436 (1965).
8. Н.И. Зиневич, М.М. Карлинер, " Поперечная неустойчивость пучка при взаимодействии с шихтованным железом камер циклических ускорителей ", Препринт ИЯФ, в печати.
9. В.Л. Гинзбург и И.Е. Тамм, "Теория электромагнитных процессов в слоистом сердечнике". Изв. АН СССР, серия физ., 7, 30 (1943).
или И.Е. Тамм, Собрание научных трудов, М., 1975, том. I, стр. 328.
10. В.Р. Бурсиан, Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке, Л., Издательство ЛГУ, 1936.
11. L.J. Laslett, On instability limitations imposed by transverse space-charge effects in circular particle accelerators, NCRL (1963).
12. B.D. Fried and S.D. Conte, The plasma dispersion function, Academic Press Inc. New York, 1961.
13. А.А. Коломенский, А.Н. Лебедев. Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.
14. Г. Брук. Циклические ускорители заряженных частиц, М., Атомиздат, 1970.

Работа поступила - 18 ноября 1976 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ

Подписано к печати 12.УШ-1977 г. МН 02916

Усл. 3,0 печ.л., 2,9 учетно-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно

Заказ № 72.

Отпечатано на ротапринтере ИЯФ СО АН СССР