31

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 44

В.В.Соколов

АДИАБАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ КВАЗИУРОВНЕЙ

Новосибирск
1977

В.В.СОКОЛОВ

АДИАБАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ КВАЗИУРОВНЕЙ

А Н Н О Т А Ц И Я

Для состояний с определенной квазиэнергией квантовой системы, находящейся в периодическом внешнем поле, развита адиабатическая по параметру "собственного времени" теория возмущений. Полученные формулы дают регулярный способ записи членов произвольного порядка по возмущению и позволяют использовать алгебраические и диаграммные методы, разработанные в квантовой теории поля. В качестве иллюстрации рассматривается поведение осциллятора как в отсутствие, так и при наличии внешнего и параметрического резонансов.

THE ADIABATIC PERTURBATION THEORY
FOR THE QUASIENERGY SPECTRUM

V.V.SOKOLOV
Institute of Nuclear Physics
Novosibirsk 90, USSR

The adiabatic perturbation theory is developed for the quasienergy spectrum and steady states of quantum system in the time - periodic external field. Such states are considered as a "stationary states" of "Schrödinger equation" (15), which describes the change of states in "proper time" . The perturbation theory solution of this equation is constructed by means of the adiabatic U-matrix (see (18),(19)). Quasienergy levels and steady states are expressed in the absence of degeneration through this matrix by formulas (27) and (29). In the general case the quasienergy spectrum is obtained with help of operator which is expressed through the adiabatic S-matrix by formula (34); in the absence of degeneration he is given by formula (35) which in this case is equivalent to (27); in the presence of it he is determined from equatios (38).

Obtained formulas give the regular way for record of higher - order perturbation terms and permit to use algebraic and diagram methods of the quantum field theory. The behaviour of the oscillator is considered in sections III and IV both in the absence and the presence of external and parametric resonances for illustration of the method.

I. Введение

Поведение квантовых систем, находящихся под периодическим по времени внешним воздействием, вызывает значительный интерес, который особенно возрос в последнее время в связи с появлением лазеров. В работе Я.Б.Зельдовича /1/ было указано, что адекватным оказывается в этом случае рассмотрение, основанное на введении состояний с определенной квазиэнергией /см.также /2/ /. Такие состояния являются точными решениями временного уравнения Шредингера специального вида:

$$|\Psi_\varepsilon(t)\rangle = |\varphi_\varepsilon(t)\rangle e^{-i\varepsilon t} \tag{I}$$

/здесь и в дальнейшем полагаем $\hbar$ =I/, где функция $|\varphi_\varepsilon(t)\rangle$ периодическая с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ внешнего поля, а квазиэнергия ε действительна. Удобство состояний типа (I) заключается в том, что они играют в рассматриваемых задачах роль, во многом аналогичную роли стационарных состояний в случае независящих от времени внешних полей. Практическое нахождение состояний (I) представляет собой обычно весьма сложную задачу, которая начиная с работы /2/ решалась различными авторами по теории возмущений.

В статье Сэмба /3/ теории возмущений для квазиуровней была придана форма, близкая к форме стационарной теории возмущений Рэлея-Шредингера. Такая теория возмущений достаточно удобна, если можно ограничиться лишь членами низших порядков, но становится совершенно непригодной, когда внешнее периодическое возмущение нельзя считать малым и возникает необходимость выписывать и анализировать члены высших порядков. Между тем, именно в случае сильных возмущений рассмотрение состояний с определенной квазиэнергией становится особенно целесообразным.

Возникающая ситуация аналогична положению, которое имеет место в стационарной теории возмущений Рэлея-Шредингера, где также нет регулярного способа записи члена произвольного порядка по возмущению. Выход, как известно, состоит в использовании временной адиабатической теории возмущений /4/, что позволяет выразить поправки к уровням энергии через матричные элементы "адиабатической S-матрицы".

Цель настоящей статьи состоит в построении адиабатической теории возмущений для квазиуровней. Мы покажем, что задачу определения состояний (I) и соответствующих квазиэнергий можно связать с задачей о развитии в "собственном времени" τ при адиабатически медленном включении периодического возмущения, подобно тому, как задача об определении стационарных состояний связана с задачей о развитии системы во времени t при адиабатическом включении постоянного возмущения. Это позволяет указать способ записи члена любого порядка по возмущению. Более того, появляется возможность использовать мощные алгебраические и диаграммные методы, развитые в квантовой теории поля.

2. Следуя работе /3/, мы используем гильбертово пространство $R+T$ периодических по времени с периодом T функций $\varphi(\bar{r}, t)$. Векторы этого пространства обозначаются символом $|\varphi\rangle\rangle$; скалярное произведение в $R+T$ определяется равенством

$$\langle\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt \int d\bar{r}\, \varphi_1^*(\bar{r},t)\,\varphi_2(\bar{r},t). \qquad (2)$$

Производная по времени $-i\frac{\partial}{\partial t} \equiv \hat{\omega}$ является в $R+T$ эрмитовским оператором. В "t-представлении" будем писать

$$\langle\langle t|\varphi\rangle\rangle \equiv |\varphi(t)\rangle,$$

а скалярное произведение в конфигурационном пространстве R обозначать символом

$$\langle\varphi_1(t)|\varphi_2(t)\rangle = \int d\bar{r}\, \varphi_1^*(\bar{r},t)\,\varphi_2(\bar{r},t) \qquad (3)$$

Рассмотрим систему, описываемую периодическим гамильтонианом $\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t)$. Состояния /3/ (I) с определённой квазиэнергией находятся из уравнения

$$\hat{\mathcal{H}}|\varphi_\varepsilon\rangle\rangle = \varepsilon|\varphi_\varepsilon\rangle\rangle, \qquad (4)$$

где $\hat{\mathcal{H}} = \hat{H} + \hat{\omega}$, и являются, таким образом, собственными векторами оператора $\hat{\mathcal{H}}$. Этот оператор эрмитов в $R+T$, откуда немедленно следует действительность квазиэнергий ε и условие ортонональности

$$\langle\langle\varphi_{\varepsilon_1}|\varphi_{\varepsilon_2}\rangle\rangle = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2. \qquad (5)$$

Совокупность всех собственных векторов оператора $\hat{\mathcal{H}}$ образует полный набор в $R+T$

$$\sum_\varepsilon |\varphi_\varepsilon\rangle\rangle\langle\langle\varphi_\varepsilon| = \hat{I} = \hat{I}_R\,\hat{I}_T \qquad (6)$$

/В "t-представлении" $\langle\langle t'|\hat{I}_T|t\rangle\rangle = \sum_s e^{is\omega(t-t')} = \delta(t-t')$; если $f(t)$ – периодическая с периодом T функция, то $\frac{1}{T}\int_0^T dt' f(t')\,\delta(t'-t) = f(t)$ /.

Из определения (I) следует, что два вектора $|\varphi_\varepsilon(t)\rangle$ и $|\varphi_{\varepsilon+s\omega}(t)\rangle = |\varphi_\varepsilon(t)\rangle e^{is\omega t}$ $(s = \pm1, \pm2, \dots)$, принадлежащие квазиэнергиям ε и $\varepsilon + s\omega$, приводят к одному и тому же состоянию $|\varphi_\varepsilon(t)\rangle$ и, следовательно, физически неразличимы. Тем не менее, это различные векторы гильбертова пространства $R+T$. Поэтому они удовлетворяют соотношению ортогональности (5) и входят в качестве независимых слагаемых в условие полноты (6). Следует в то же время отметить, что в силу эрмитовости оператора $\hat{H}(t)$ в конфигурационном пространстве R имеет место и более сильное соотношение ортогональности /I/

$$\langle\varphi_{\varepsilon_1}(t)|\varphi_{\varepsilon_2}(t)\rangle = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \qquad (7)$$

Это соотношение можно считать справедливым и в случаях, когда $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + s\omega$, если только векторы $|\varphi_{\varepsilon_1}(t)\rangle$ и $|\varphi_{\varepsilon_2}(t)\rangle$ линейно независимы, т.е. не удовлетворяют тождеству

$$C_1|\varphi_{\varepsilon_1}(t)\rangle e^{is\omega t} + C_2|\varphi_{\varepsilon_2}(t)\rangle \equiv 0$$

ни при каком целом s. Состояния $|\varphi_{\varepsilon_1}(t)\rangle$ и $|\varphi_{\varepsilon_2}(t)\rangle$ являются в таком случае различными. Далее, векторы $|\varphi_{\varepsilon_1}(t)\rangle$ и $|\varphi'_{\varepsilon_1}(t)\rangle = |\varphi_{\varepsilon_2}(t)\rangle e^{-is\omega t}$ линейно независимы и принадлежат одному и тому же собственному значению ε_1. Следовательно, в рассматриваемом случае имеет место вырождение уровня квазиэнергии ε_1. Вырождение квазиуровней играет важную роль при резонансных переходах в квантовой системе.

3. Пусть теперь

$$\hat{H}(t) = \hat{H}^{(0)} + g\hat{H}^{(1)}(t); \quad \hat{H}^{(1)}(t+T) = \hat{H}^{(1)}(t). \tag{8}$$

Невозмущенный гамильтониан $\hat{H}^{(0)}$ будем считать независящим от времени и обладающим дискретным и, для простоты, невырожденным энергетическим спектром. Обозначим

$$\hat{\mathcal{H}}^{(0)} = \hat{H}^{(0)} + \hat{\omega}, \quad \hat{\mathcal{H}}^{(1)}(t) = \hat{H}^{(1)}(t). \tag{9}$$

Если $|\psi_n^{(0)}\rangle$ и $E_n^{(0)}$ – собственные функции и собственные значения оператора $\hat{H}^{(0)}$ /которые считаются известными/, то собственные значения оператора $\hat{\mathcal{H}}^{(0)}$ таковы:

$$|\varphi_{ns}^{(0)}(t)\rangle = |\psi_n^{(0)}\rangle e^{is\omega t} \tag{10}$$

$$s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\varepsilon_{ns}^{(0)} = E_n^{(0)} + s\omega$$

Собственные векторы и квазиуровни оператора $\hat{\mathcal{H}}$ обозначены соответственно через $|\varphi_{ns}(t)\rangle$ и ε_{ns}. Следует различать два случая:

а/ Среди невозмущенных уровней энергии нет таких, которые были бы связаны соотношением $E_{n_1}^{(0)} - E_{n_2}^{(0)} = s\omega$. Невозмущенные квазиуровни в этом случае невырождены. Устраним неоднозначность квазиэнергий, положив

$$|\varphi_n^{(0)}(t)\rangle = |\psi_n^{(0)}\rangle, \quad \varepsilon_n^{(0)} = E_n^{(0)}; \tag{11}$$

тогда, в силу предполагаемой непрерывности по константе возмущения g, эта неоднозначность устраняется и в искомых $|\varphi_n(t)\rangle$ и ε_n;

б/ Существует совокупность q невозмущенных уровней $E_{n_i}^{(0)}$, связанных соотношениями

$$E_{n_i}^{(0)} = E_{n_1}^{(0)} + s_i\omega, \quad i = 2, 3, \ldots, q \tag{12}$$

/ s_i – фиксированные целые числа/. Это означает, что невозмущённые квазиуровни вырождены q – кратно. Удобно свести соответствующие квазиэнергии в одну зону, положив, например,

$$\varepsilon_{ni}^{(0)} = E_n^{(0)} = \varepsilon_n^{(0)}, \tag{13}$$

где $E_n^{(0)}$ – низший из уровней (12) /все s_i тогда положительны/. Квазиуровню (13) принадлежит q линейно независимых в указанном ранее смысле векторов

$$|\varphi_{ns_i}^{(0)}(t)\rangle = |\psi_{n_i}^{(0)}\rangle e^{is_i\omega t}. \tag{14}$$

Возмущение $\hat{\mathcal{H}}^{(1)}(t)$ расщепляет, вообще говоря, квазиуровень $\varepsilon_n^{(0)}$ на q компонент, которые мы будем обозначать через ε_{ns_i}.

В разделе II развивается адиабатическая теория возмущений для векторов $|\varphi_{ns}(t)\rangle$ и квазиуровней ε_{ns}. В последующих разделах в качестве иллюстрации рассмотрено поведение в периодическом внешнем поле линейного осциллятора как в отсутствие, так и при наличии резонанса.

II. Адиабатическая теория возмущений

I. Рассмотрим векторы $|\varphi(\tau)\rangle\rangle$, зависящие от действительного параметра τ /$-\infty < \tau < +\infty$ /, и пусть эта зависимость описывается уравнением

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}|\varphi(\tau)\rangle\rangle = \hat{\mathcal{H}}|\varphi(\tau)\rangle\rangle. \tag{15}$$

Уравнение (15) имеет вид уравнения Шредингера с эрмитовским "гамильтонианом" $\hat{\mathcal{H}}$, которое описывает изменение "состояния" $|\varphi(\tau)\rangle\rangle$ в течение "собственного времени" τ. Поскольку оператор $\hat{\mathcal{H}}$ не зависит от τ, существуют стационарные состояния

$$|\varphi_\varepsilon(\tau)\rangle\rangle = |\varphi_\varepsilon\rangle\rangle e^{-i\varepsilon\tau},$$

где $|\varphi_\varepsilon\rangle\rangle$ удовлетворяют уравнению (4) и определяют, следовательно, искомые состояния с определенной квазиэнергией.

Уравнение (I5) записано в представлении Шредингера по параметру τ. Перейдем теперь в представление взаимодействия, в котором

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}|\psi(\tau)\rangle\rangle = g\hat{\mathcal{H}}^{(1)}(t|\tau)|\psi(\tau)\rangle\rangle$$

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}\hat{F}(\tau) = \left[\hat{F}(\tau), \hat{\mathcal{H}}^{(0)}\right] \tag{I6}$$

/ $\hat{F}(\tau)$ – любой оператор в представлении взаимодействия. Поскольку в дальнейшем мы все время будем иметь дело только с представлением взаимодействия, мы пользуемся для обозначения "состояний" в этом представлении тем же символом, что и в представлении Шредингера; на принадлежность оператора к представлению взаимодействия указывает аргумент τ /. В частности

$$\hat{\mathcal{H}}^{(1)}(t|\tau) = \exp(i\hat{\mathcal{H}}^{(0)}\tau)\hat{\mathcal{H}}^{(1)}(t)\exp(-i\hat{\mathcal{H}}^{(0)}\tau) \tag{I7}$$

Введём адиабатическую U -матрицу, удовлетворяющую уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}U_\varkappa(t|\tau,\tau_0) = g\hat{\mathcal{H}}^{(1)}(t|\tau)e^{-\varkappa|\tau|}U_\varkappa(t|\tau,\tau_0) \tag{I8}$$

$$U_\varkappa(t|\tau_0,\tau_0) = I$$

Решение уравнения (I8) по теории возмущений хорошо известно /см., например, /5/ и имеет вид

$$U_\varkappa(t|\tau,\tau_0) = T\exp\left\{-ig\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau\, e^{-\varkappa|\tau|}\hat{\mathcal{H}}^{(1)}(t|\tau)\right\}, \tag{I9}$$

где хронологическое упорядочивание производится по собственному времени τ.

В силу эрмитовости "гамильтониана" $\hat{\mathcal{H}}$ оператор $U_\varkappa$ является унитарным, а в силу его периодичности

$$U_\varkappa(t+T|\tau,\tau_0) = U_\varkappa(t|\tau,\tau_0).$$

2. Пусть теперь $|\varphi_n^{(0)}(t)\rangle = |\psi_n^{(0)}\rangle$ принадлежит невырожденному уровню квазиэнергии $\varepsilon_n^{(0)} = E_n^{(0)}$. Рассмотрим векторы

$$|\tilde{\varphi}_n(t);\varkappa\rangle^{(\pm)} = U_\varkappa(t|0,\pm\infty)|\psi_n^{(0)}\rangle \tag{20}$$

$$U_\varkappa(t|0,+\infty) = U^{+}_\varkappa(t|+\infty,0).$$

Можно показать, что /4,5/,

$$\left[\hat{\mathcal{H}}^{(0)}, U_\varkappa(t|0,\pm\infty)\right] = -g\hat{\mathcal{H}}^{(1)}(t)U_\varkappa(t|0,\pm\infty) \mp i\varkappa g\frac{\partial}{\partial g}U_\varkappa(t|0,\pm\infty).$$

Подействовав правой и левой частями этого равенства на $|\psi_n^{(0)}\rangle$, получим

$$\hat{\mathcal{H}}|\tilde{\varphi}_n(t);\varkappa\rangle^{(\pm)} = \varepsilon_n^{(0)}|\tilde{\varphi}_n(t);\varkappa\rangle^{(\pm)} \mp i\varkappa g\frac{\partial}{\partial g}|\tilde{\varphi}_n(t);\varkappa\rangle^{(\pm)} \tag{21}$$

Т.к. оператор $U_\varkappa$ унитарен и не содержит операторов дифференцирования по времени $\hat{\omega}$ /так что его действие в подпространстве T сводится к умножению на функцию времени/, норма (3) векторов (20) совпадает с нормой невозмущенных векторов $|\psi_n^{(0)}\rangle$ и не зависит от $\varkappa$. В то же время, их фаза зависит от $\varkappa$ и сингулярна при $\varkappa \to 0$. Поэтому векторы

$$|\varphi_n(t);\varkappa\rangle^{(\pm)} = \exp\{-i\lambda_n^{(\pm)}(t;\varkappa)\}|\tilde{\varphi}_n(t);\varkappa\rangle^{(\pm)}, \tag{22}$$

где

$$\exp\{i\lambda_n^{(\pm)}(t,\varkappa)\} = \left[\frac{\langle\psi_n^{(0)}|\tilde{\varphi}_n(t);\varkappa\rangle^{(\pm)}}{{}^{(\pm)}\langle\tilde{\varphi}_n(t);\varkappa|\psi_n^{(0)}\rangle}\right]^{1/2} \tag{23}$$

$$\lambda_n^{(\pm)}(t;\varkappa) = \operatorname{Im}\ln\langle\psi_n^{(0)}|U_\varkappa(t|0,\pm\infty)|\psi_n^{(0)}\rangle,$$

остаются конечными при $\varkappa \to 0$. Учитывая это и переходя после подстановки (22) в (21) к пределу $\varkappa \to 0$, получим

$$\hat{\mathcal{H}}\lim_{\varkappa\to0}|\varphi_n(t);\varkappa\rangle^{(\pm)} = \left[\varepsilon_n^{(0)} + \lim_{\varkappa\to0}\left(-\frac{d}{dt} \pm \varkappa g\frac{\partial}{\partial g}\right)\lambda_n^{(\pm)}(t,\varkappa)\right]\lim_{\varkappa\to0}|\varphi_n(t);\varkappa\rangle^{(\pm)} \tag{24}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\varkappa\to 0} |\varphi_n(t);\varkappa\rangle^{(\pm)} = \exp\{-i\theta_n^{(\pm)}(t)\}|\varphi_n(t)\rangle, \qquad (25)$$

где $|\varphi_n(t)$ удовлетворяют уравнению (4), а $\theta_n^{(\pm)}(t+T)=\theta_n^{(\pm)}(t)$ и

$$\varepsilon_n - \frac{d\theta_n^{(\pm)}(t)}{dt} = \varepsilon_n^{(0)} + \lim_{\varkappa\to 0}\left(-\frac{d}{dt} \pm \varkappa g\frac{\partial}{\partial g}\right)\lambda_n^{(\pm)}(t,\varkappa). \qquad (26)$$

Усредняя это равенство по периоду T, находим

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(0)} \pm \frac{1}{T}\int_0^T dt \lim_{\varkappa\to 0} \varkappa g\frac{\partial}{\partial g}\lambda_n^{(\pm)}(t,\varkappa). \qquad (27)$$

Подстановка же (27) в (26) даёт уравнения для определения периодических функций $\theta_n^{(\pm)}(t)$.

$$\frac{d}{dt}\theta_n^{(\pm)}(t) = \varepsilon_n - \varepsilon_n^{(0)} - \lim_{\varkappa\to 0}\left(-\frac{d}{dt} \pm \varkappa g\frac{\partial}{\partial g}\right)\lambda_n^{(\pm)}(t;\varkappa). \qquad (28)$$

Таким образом,

$$|\varphi_n(t)\rangle = e^{i\theta_n^{(\pm)}(t)} \lim_{\varkappa\to 0} e^{-i\lambda_n^{(\pm)}(t;\varkappa)} U_\varkappa(t|0,\pm\infty)|\psi_n^{(0)}\rangle \qquad (29)$$

Формулы (27) и (29) совместно с (23) и (28) дают решение поставленной задачи. Отметим, что оба выражения в правой части (29) приводят к одинаковому ответу только в силу отсутствия вырождения квазиуровня $\varepsilon_n^{(0)}$.

Как и в случае адиабатической теории возмущений для энергетических уровней /5/, можно получить еще одну, и притом более удобную, чем (27), формулу для сдвига квазиуровней, выразив его через адиабатическую S -матрицу

$$S_\varkappa(t) = U_\varkappa(t|+\infty,0)U_\varkappa(t|0,-\infty) \qquad (30)$$

$$S_\varkappa(t+T) = S_\varkappa(t)$$

Умножим для этого второе из уравнений (2I) слева на $\langle\varphi_n(t)|$; тогда вследствие эрмитовости $\hat{H}$ в R

$$\langle\varphi_n(t)|\hat{\mathcal{H}}|\tilde{\varphi}_n(t);\varkappa\rangle^{(-)} = \varepsilon_n\langle\varphi_n(t)|\tilde{\varphi}_n(t);\varkappa\rangle^{(-)} - i\frac{\partial}{\partial t}\langle\varphi_n(t)|\tilde{\varphi}_n(t);\varkappa\rangle^{(-)} =$$

$$= \varepsilon_n^{(0)}\langle\varphi_n(t)|\tilde{\varphi}_n(t);\varkappa\rangle^{(-)} + i\varkappa g\langle\varphi_n(t)|\frac{\partial}{\partial g}|\tilde{\varphi}_n(t);\varkappa\rangle^{(-)},$$

откуда следует, что

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(0)} - \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \varkappa g\, \mathrm{Im}\, \frac{\langle\varphi_n(t)|\frac{\partial}{\partial g}U_\varkappa(t|0,-\infty)|\psi_n^{(0)}\rangle}{\langle\varphi_n(t)|U_\varkappa(t|0,-\infty)|\psi_n^{(0)}\rangle} \qquad (3I)$$

Умножив же справа на $|\varphi_n(t)\rangle$ уравнение, сопряженное к первому из уравнений (2I), найдём

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(0)} - \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \varkappa g\, \mathrm{Im}\, \frac{\langle\psi_n^{(0)}|\frac{\partial}{\partial g}U_\varkappa(t|+\infty,0)|\varphi_n(t)\rangle}{\langle\psi_n^{(0)}|U_\varkappa(t|+\infty,0)|\varphi_n(t)\rangle} \qquad (32)$$

Скомбинировав выражения, которые получаются подстановкой формулы (29) в (3I) и (32), получим после сокращения всех фазовых множителей и перехода к пределу $\varkappa\to 0$ выражение

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(0)} - \frac{1}{2T}\int_0^T dt \lim_{\varkappa\to 0}\varkappa g\frac{\partial}{\partial g}\lambda_n(t;\varkappa) \qquad (33)$$

$$\lambda_n(t;\varkappa) = \mathrm{Im}\,\ln\langle\psi_n^{(0)}|S_\varkappa(t)|\psi_n^{(0)}\rangle.$$

В пределе $\varkappa\to 0$ включение и последующее выключение возмущения происходит за бесконечно большие промежутки собственного времени. В этом случае возмущение не вызывает в отсутствие вырождения переходов между невозмущенными квазиуровнями и действие оператора $S_\varkappa(t)$ на любой вектор $|\psi_n^{(0)}\rangle$ сводится к умножению его на фазовый множитель

$$S_\varkappa(t)|\psi_n^{(0)}\rangle = \exp\{i\lambda_n(t;\varkappa)\}|\psi_n^{(0)}\rangle \quad (\varkappa\to 0).$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial g}\lambda_n(t;\varkappa) = -i\frac{\langle\psi_n^{(0)}|\frac{\partial}{\partial g}S_\varkappa(t)|\psi_n^{(0)}\rangle}{\langle\psi_n^{(0)}|S_\varkappa(t)|\psi_n^{(0)}\rangle} = -i\langle\psi_n^{(0)}|S_\varkappa^+(t)\frac{\partial}{\partial g}S_\varkappa(t)|\psi_n^{(0)}\rangle.$$

Введем оператор

$$\hat{\Omega} = \frac{i}{2}\lim_{\varkappa\to 0}\varkappa g\, S_\varkappa^+(t)\frac{\partial}{\partial g}S_\varkappa(t). \qquad (34)$$

Вследствие унитарности $S_\varkappa(t)$ этот оператор эрмитов, причем в силу (33)

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^{(0)} + \langle\langle \varphi_n^{(0)} | \hat{\Omega} | \varphi_n^{(0)} \rangle\rangle \qquad (35)$$

Оператор $\hat{\Omega}$ естественно назвать оператором сдвига квазиуровней.

3. Обратимся к случаю вырождения, когда имеется q невозмущенных уровней, описываемых q независимыми векторами (I4). Такие состояния, как известно, неустойчивы относительно действия возмущения; поэтому адиабатическая S -матрица недиагональна в подпространстве векторов (I4). Можно, однако, построить q суперпозиций этих векторов

$$|\varphi_{ni}^{(0)}(t)\rangle = \sum_{j=1}^{q} C_{ij} |\varphi_{ns_j}^{(0)}(t)\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, q, \qquad (36)$$

которые устойчивы относительно возмущения и удовлетворяют условиям

$$S_\varkappa(t) |\varphi_{ni}^{(0)}(t)\rangle = \exp\{i\lambda_{ni}(t;\varkappa)\} |\varphi_{ni}^{(0)}(t)\rangle, \qquad (37)$$

или, что эквивалентно, условиям

$$\hat{\Omega} |\varphi_{ni}^{(0)}(t)\rangle = \Delta\mathcal{E}_{ni} |\varphi_{ni}^{(0)}(t)\rangle. \qquad (38)$$

Эти соотношения являются уравнениями для коэффициентов C_{ij}, определяющих правильные волновые функции нулевого приближения, в то время как условие разрешимости (38) даёт уравнение для искомых расщеплений квазиуровней. После этого с помощью (29) получаем точные функции $|\varphi_{ni}(t)\rangle$.

Ш. Осциллятор в периодическом внешнем поле

I. Рассмотрим линейный осциллятор, находящийся под действием периодической внешней силы $g f(t) = g \sum_s f_s e^{is\omega t}$, $f_{-s} = f_s^*$. Тогда, в стандартных обозначениях,

$$\hat{\mathcal{H}}^{(1)}(t|\tau) = -g f(t+\tau)\hat{x}(\tau)$$
$$\hat{x}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}\left(\hat{a} e^{-i\omega_0\tau} + \hat{a}^+ e^{i\omega_0\tau}\right) \qquad (39)$$
$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$$

Хронологическое произведение в (I9) в этом случае может быть, как известно, [6] полностью "распутано". В результате

$$U_\varkappa(t|0,\mp\infty) = \exp\{i\lambda(t;\pm\varkappa)\}\hat{D}[\alpha(t;\pm\varkappa)] \qquad (40)$$
$$S_\varkappa(t) = \exp\{i\tilde{\lambda}(t;\varkappa)\}\hat{D}[\tilde{\alpha}(t;\varkappa)]$$

Здесь $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a})$ – известный унитарный оператор смещения когерентных состояний,

$$\alpha(t;\varkappa) = \frac{ig}{\sqrt{2\omega_0}} \int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{\varkappa\tau} f(t+\tau) e^{i\omega_0\tau}$$

$$\lambda(t;\varkappa) = \frac{1}{2} g \int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{2\varkappa\tau} f(t+\tau)\eta(t+\tau;\varkappa) \qquad (4I)$$

$$\eta(t;\varkappa) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} 2\,\mathrm{Re}\,\alpha(t;\varkappa) = -\frac{g}{\omega_0}\int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{\varkappa\tau} f(t+\tau)\sin\omega_0\tau$$

и

$$\tilde{\alpha}(t;\varkappa) = \alpha(t;\varkappa) - \alpha(t;-\varkappa)$$
$$\tilde{\lambda}(t;\varkappa) = \lambda(t;\varkappa) - \lambda(t;-\varkappa) + \mathrm{Im}[\alpha(t;\varkappa)\alpha(t;-\varkappa)]. \qquad (42)$$

Функция $\eta(t;\varkappa)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2}\eta + 2\varkappa\eta + (\omega_0^2 + \varkappa^2)\eta = g f(t)$$

и, следовательно, представляет собой смещение классического осциллятора под действием внешней силы $g f(t)$, а параметр включения $\varkappa$ играет в данном случае роль коэффициента трения.

Если внешняя сила не имеет гармоники с частотой ω_0, то вырождение квазиуровней отсутствует. Легко видеть, что при $\varkappa \to 0$

$$\tilde{\alpha}(t;\varkappa) \to 0$$
$$\tilde{\lambda}(t;\varkappa) = \frac{1}{\varkappa}\frac{1}{2} g \frac{1}{T}\int_0^T d\tau\, f(\tau)\eta(\tau;0) \qquad (43)$$

и по формуле (34)

$$\hat{\Omega} = -\frac{g}{2T}\int_0^T d\tau f(\tau)\eta(\tau)\hat{I} \quad ; \quad \eta(\tau) \equiv \eta(\tau, 0). \tag{44}$$

Для получения волновой функции необходимо найти $\theta^{(t)}(t)$, которые в силу (4I) удовлетворяют уравнению

$$\frac{d\theta^{(t)}(t)}{dt} = \Delta\varepsilon + \frac{1}{2} g f(t)\eta(t).$$

В результате

$$|\varphi_n(t)\rangle = e^{i\theta(t)}\hat{D}[\alpha(t)]|n\rangle$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}g\int_0^t d\tau f(\tau)\eta(\tau) - \frac{1}{2}g\frac{t}{T}\int_0^T d\tau f(\tau)\eta(\tau) \tag{45}$$

$$\alpha(t) \equiv \alpha(t;0).$$

Выражения (44) и (45) совпадают с полученными другим методом в работе /7/.

2. Остановимся несколько подробнее на случае резонанса, который не был разобран в /7/. Пусть $f(t) = 2\cos\omega_0 t$. Все квазиуровни теперь вырождены и могут быть сведены в одну зону $\varepsilon^{(0)} = \frac{1}{2}\omega_0$. Простые вычисления показывают, что

$$\hat{\Omega} = -\frac{g}{\sqrt{2\omega_0}}\left(\hat{a}e^{i\omega_0 t} + \hat{a}^+ e^{-i\omega_0 t}\right) - \frac{g^2}{4\omega_0^2}. \tag{46}$$

Оператор $\hat{\Omega}$ коммутирует, как легко убедиться, с $\hat{\mathcal{H}}^{(0)}$ [1], так что задача об определении правильных функций нулевого приближения сводится к выяснению вида общих собственных функций этих двух операторов. Вводя обозначение $\Delta\varepsilon = -gX_0 - \frac{g^2}{4\omega_0^2}$, приходим к уравнениям

$$\begin{cases} (\omega_0\hat{a}^+\hat{a} + \hat{\omega})|\varphi^{(0)}(t)\rangle = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}\left(\hat{a}e^{i\omega_0 t} + \hat{a}^+ e^{-i\omega_0 t}\right)|\varphi^{(0)}(t)\rangle = X_0|\varphi^{(0)}(t)\rangle \end{cases} \tag{47}$$

решение которых /в (x,t) -представлении/ имеет вид

$$\varphi^{(0)}(x,t) = \left(\frac{\omega_0 e^{i\omega_0 t}}{2\pi i\sin\omega_0 t}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{i\omega_0}{2\sin\omega_0 t}\left[(x^2+X_0^2)\cos\omega_0 t - 2xX_0\right]\right\} \tag{48}$$

и существует при всех $-\infty < X_0 < +\infty$. Спектр квазиэнергий оказывается, таким образом, в резонансе непрерывным.

Перейдем к вычислению по формуле (29) точных функций $\varphi(x,t)$. В рассматриваемом случае

$$\alpha(t;\varkappa) = \frac{i}{\varkappa}\frac{g}{\sqrt{2\omega_0}}e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2\omega_0 - i\varkappa}\frac{g}{\sqrt{2\omega_0}}e^{i\omega_0 t}$$

$$\lambda(t;\varkappa) = \frac{g^2}{2\varkappa}\left[\frac{1}{4\omega_0^2+\varkappa^2} - \mathrm{Re}\frac{e^{-2i\omega_0 t}}{(\omega_0+i\varkappa)(2\omega_0+i\varkappa)}\right] \tag{49}$$

Пользуясь известными свойствами оператора $\hat{D}(\alpha)$ и вторым из уравнений (47), легко показать, что, например,

$$U_\varkappa(t|0,-\infty)|\varphi^{(0)}(t)\rangle = \exp\{i\lambda^{(-)}(t;\varkappa)\}\hat{D}[\beta(t)]|\varphi^{(0)}(t)\rangle$$

$$\beta(t) \simeq \frac{g}{\sqrt{2\omega_0}}\frac{1}{2\omega_0}e^{i\omega_0 t} \tag{50}$$

$$\lambda^{(-)}(t;\varkappa) \simeq \frac{1}{\varkappa}\left(gX_0 + \frac{g^2}{8\omega_0^2}\right) + \frac{g^2}{4\omega_0^3}\sin 2\omega_0 t$$

С помощью уравнения (28) находим $\theta^{(-)}(t) = \frac{g^2}{4\omega_0^3}\sin 2\omega_0 t$. Таким образом,

$$|\varphi(t)\rangle = \exp\left\{i\frac{g^2}{4\omega_0^3}\sin 2\omega_0 t\right\}\hat{D}\left(\frac{g}{\sqrt{2\omega_0}}\frac{1}{2\omega_0}e^{i\omega_0 t}\right)|\varphi^{(0)}(t)\rangle \tag{51}$$

В том, что вектор $|\varphi(t)\rangle$, действительно, является собственным вектором оператора $\hat{\mathcal{H}}$, принадлежащим собственному значению $\varepsilon = \frac{\omega_0}{2} - gX_0 - \frac{g^2}{4\omega_0^2}$, можно убедиться с помощью соотно-

---

I) Этот факт обусловлен бесконечной кратностью вырождения квазиуровней при линейном резонансе, что приводит также к непрерывности спектра квазиэнергий /см.ниже/.

шения
$$\hat{D}^{+}[\beta(t)]\,\hat{\mathcal{H}}\,D[\beta(t)] = \hat{\mathcal{H}}^{(0)} + \hat{\Omega} - \frac{g^2}{2\omega_0^3}\cos 2\omega_0 t$$

3. Перейдем к нетривиальному, но все еще достаточно простому случаю линейного осциллятора с переменной частотой, когда $\hat{H}^{(1)} = \frac{1}{2} g f(t)\, x^2$ и, следовательно,

$$\hat{\mathcal{H}}(t|\tau) = \frac{1}{2} g f(t+\tau)\, \hat{x}^2(\tau) \tag{52}$$

Сравнительная простота рассматриваемой задачи обусловлена тем, что с помощью известных методов /8/ хронологическое произведение в (19) опять может быть "распутано". При этом оказывается, что

$$S_\varkappa(t) = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-\varkappa|\tau|} f(t+\tau) \int_0^g dg'\, G'_\varkappa(t|\tau,\tau)\right\}\cdot$$
$$\mathcal{N}\exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau'\, \hat{x}(\tau)\, \Pi_\varkappa(t|\tau,\tau')\, \hat{x}(\tau')\right\} \tag{53}$$

/символ $\mathcal{N}$ означает нормальное упорядочение операторов рождения и уничтожения $\hat{a}^{+}$ и $\hat{a}$ /. Функция $G_\varkappa$ удовлетворяет уравнению

$$G_\varkappa(t|\tau,\tau') = \Delta(\tau-\tau') - ig\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma\, \Delta(\tau-\sigma)\, e^{-\varkappa|\sigma|} f(t+\sigma)\, G_\varkappa(t|\sigma,\tau') =$$
$$= \Delta(\tau-\tau') - i\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma'\, \Delta(\tau-\sigma)\, \Pi_\varkappa(t|\sigma,\sigma')\, \Delta(\sigma'-\tau'), \tag{54}$$

причём

$$\Delta(\tau-\tau') = \frac{1}{2\omega_0} e^{-i\omega_0|\tau-\tau'|}$$

$$\Pi_\varkappa(t|\tau,\tau') = g e^{-\varkappa|\tau|} f(t+\tau)\,\delta(\tau-\tau') - ig^2 e^{-\varkappa|\tau|} f(t+\tau)\, G_\varkappa(t|\tau,\tau')\, e^{-\varkappa|\tau'|} f(t+\tau'). \tag{55}$$

Теперь можно показать, что при $\omega \neq \frac{2\omega_0}{s}$ / s -целое/, т.е. вне областей параметрического резонанса, оператор сдвига квазиуровней равен

$$\hat{\Omega} = \left(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \lim_{\varkappa\to 0} \frac{1}{2}\varkappa g \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-\varkappa|\tau|} f(t+\tau)\, G_\varkappa(t|\tau,\tau) \tag{56}$$

Спектр квазиэнергий эквидистантный /7/, а их положение определяется функцией $G_\varkappa$. Уравнение (54) для этой функции можно решать итерациями. Довольно простые вычисления показывают, что с точностью до членов второго порядка включительно

$$\Delta\mathcal{E}_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0\left[\frac{1}{2}\frac{gf_0}{\omega_0^2} - \frac{1}{8}\frac{(gf_0)^2}{\omega_0^4} + \frac{1}{2}g^2\sum_{s\neq 0}|f_s|^2\, \mathrm{Im}\,\Delta(\omega_0+s\omega)\right], \tag{57}$$

где $\Delta(\omega) = \frac{i}{\omega^2-\omega_0^2+i\delta}$ – Фурье-образ функции $\Delta(\tau)$. Первые два слагаемых в правой части (57) дают сдвиг частоты за счёт постоянной части возмущения, третье обусловлено его переменной частью.

4. Предположим, что $f(t) = 2\cos\omega t$ и выполняется условие параметрического резонанса $\omega = 2\omega_0$. В низшем порядке по g получаем тогда

$$\hat{\Omega} = \frac{g}{4\omega_0}\left(\hat{a}^2 e^{2i\omega_0 t} + \hat{a}^{+2} e^{-2i\omega_0 t}\right), \tag{58}$$

причём снова $[\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{H}}^{(0)}] = 0$ /см. примечание к стр.12/. И в этом случае задача об определении общих собственных функций операторов $\hat{\mathcal{H}}^{(0)}$ и $\hat{\Omega}$ может быть решена до конца. Оказывается, что $\Delta\mathcal{E} = \frac{g}{4\omega_0}\nu$, $-\infty < \nu < +\infty$ и

$$\varphi^{(0)}_{(\pm)}(t) = \exp\left\{\frac{1}{4}\ln(1+i\,\mathrm{tg}\,2\omega_0 t) - \frac{i}{4}\nu\ln\frac{1-\sin 2\omega_0 t}{1+\sin 2\omega_0 t}\right\}\times \tag{59}$$
$$\times\exp\left(-i\frac{\omega_0}{2}\mathrm{tg}\,2\omega_0 t\cdot x^2\right) D_{-\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}\nu}\left(\pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2\omega_0}{\cos 2\omega_0 t}}\,x\right),$$

$D_p(z)$ – функция параболического цилиндра /ср. 11/. Спектр квазиэнергий непрерывен и каждый уровень двукратно вырожден.

В следующих порядках по g проявляются резонансы на частотах $\omega = \omega_0, \frac{2\omega_0}{3}, \ldots$. Например, если $\omega = \omega_0$, то, удерживая члены вплоть до второго порядка включительно, получим

$$\hat{\Omega} = \frac{g^2}{4\omega_0^3}\left(\hat{a}^2 e^{2i\omega_0 t} + \hat{a}^{+2} e^{-2i\omega_0 t}\right) - \frac{g^2}{3\omega_0^3}\left(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

IУ. Функция Грина и диаграммы

Введем, предполагая, что параметрический резонанс отсутствует, функцию Грина

$$G(\tau-\tau') = \frac{1}{T}\int_0^T dt \frac{\langle 0|\mathcal{T}\hat{x}(\tau)\hat{x}(\tau')S(t)|0\rangle}{\langle 0|S(t)|0\rangle} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, G(t|\tau,\tau'); \tag{60}$$

$|0\rangle$ - основное состояние невозмущенного осциллятора; $S(t) = \lim\limits_{x\to\infty} S_x(t)$. Непосредственно из этого определения следует уравнение Дайсона

$$G(t|\tau,\tau') = \Delta(\tau-\tau') - ig\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma\, \Delta(\tau-\sigma) f(t+\sigma) G(t|\sigma,\tau'), \tag{61}$$

где

$$\Delta(\tau-\tau') = \langle 0|\mathcal{T}\hat{x}(\tau)\hat{x}(\tau')|0\rangle$$

определено в (55). Сравнение с (54) показывает, что

$$G(t|\tau,\tau') = \lim_{x\to\infty} G_x(t|\tau,\tau')$$

С помощью (6I) можно убедиться, что $G(t|\tau,\tau')$ является, на самом деле, функцией лишь двух аргументов, например $\tau-\tau'$ и $t+\tau'$; поэтому в дальнейшем будем полагать $\tau'=0$ и писать $G(t|\tau)$.

Перейдем в (6I) к Фурье-представлению по τ . Для амплитуды Фурье $G(t|\varepsilon)$ получим уравнение

$$G(t|\varepsilon) = \Delta(\varepsilon) - ig\Delta(\varepsilon) f\left(t - i\frac{d}{d\varepsilon}\right) G(t|\varepsilon),$$

решение которого можно представить в символической форме

$$G(t|\varepsilon) = \frac{1}{\Delta^{-1}(\varepsilon) + igf\left(t-i\frac{d}{d\varepsilon}\right)} = \Delta(\varepsilon)\sum_{n=0}^{\infty}(-ig)^n\left[f\left(t-i\frac{d}{d\varepsilon}\right)\Delta(\varepsilon)\right]^n. \tag{62}$$

После усреднения по времени это даёт Фурье-образ $G(\varepsilon)$ функции Грина (60)

$$G(\varepsilon) = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{1}{\Delta^{-1}(\varepsilon) + igf\left(t-i\frac{d}{d\varepsilon}\right)} \tag{63}$$

Член n -ного порядка в разложении этого выражения по константе g имеет следующую структуру

$$\sum_{s_1,\dots,s_n} f_{s_1}\cdots f_{s_n}\delta(s_1+\dots+s_n)\Delta(\varepsilon+s_1\omega)\Delta(\varepsilon+s_1\omega+s_2\omega)\cdots\Delta(\varepsilon+s_1\omega+\dots+s_n\omega);$$

поэтому разложение функции Грина можно изобразить графически (Рис.I).

Волнистой линии отвечает множитель $\Delta(\varepsilon+s\omega+s'\omega+\cdots)$, вершине - множитель $-igf_s$, по "шурионной" пунктирной линии втекает квазиэнергия $s\omega$, причём в вершине выполняется закон сохранения квазиэнергии; по всем s следует просуммировать, учтя для каждой диаграммы условие $\sum_{i=1}^{n} s_i = 0$

Если написать

$$G(\varepsilon) = \Delta(\varepsilon) - i\Delta(\varepsilon)\Pi(\varepsilon)\Delta(\varepsilon); \quad \Pi(\varepsilon) = i\sum_{n=1}^{\infty}(-ig)^n \pi^{(n)}(\varepsilon),$$

то для $\Pi(\varepsilon)$ также будет существовать очевидное диаграммное представление. Введем, далее

$$\Pi_c(\varepsilon) = \frac{\Pi(\varepsilon)}{1 - i\Delta(\varepsilon)\Pi(\varepsilon)} = g\sum_{n=0}^{\infty}(-ig)^n \pi_c^{(n)}(\varepsilon), \tag{64}$$

где

$$\pi_c^{(n)}(\varepsilon) + \Delta(\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\pi^{(k)}(\varepsilon)\pi_c^{(n-k)}(\varepsilon) - \pi^{(n+1)}(\varepsilon) = 0 \tag{65}$$

Анализ этих выражений показывает, что $-i\,\Pi_c(\varepsilon)$ даётся суммой неприводимых диаграмм, т.е. диаграмм вида Рис.2, в которых $\sum_{i=1}^{n} s_i = 0$, но $\sum_{i=1}^{m} s_i \neq 0$ при всех $m < n$. Такие диаграммы не распадаются на части, соединенные волнистой линией с несдвинутой квазиэнергией ε .

Функция Грина (63) принимает вид

$$G(\varepsilon) = \frac{i}{\varepsilon^2 - \omega_0^2 - \Pi_c(\varepsilon) + i\delta} \tag{66}$$

и ее полюса лежат в точках, где

$$\varepsilon^2 - \omega_0^2 - \Pi_c(\varepsilon) = 0 \tag{67}$$

С точностью до членов второго порядка

$$\Pi_c(\varepsilon) = gf_0 - ig^2\sum_{s\neq 0}|f_s|^2\Delta(\varepsilon+s\omega), \tag{69}$$

что, как и следовало ожидать, вновь приводит к результату (57) для квазиуровня с n =I.

Литература

I. Я.Б.Зельдович, ЖЭТФ, 51, I492, I966.
2. В.И.Ритус, ЖЭТФ, 51, I544, I966.
3. H,Samb, Phys.Rev. A7, 2293, 1966.
4. M.Gell-Mann, F.Low. Phys.Rev. 84, 350, 1951.
5. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, I963.
6. R.P.Feynman. Phys.Rev. 84, 108, 1951.
7. А.М.Переломов, В.С.Попов, ТМФ, I, 360, I969.
8. S.Nami. Progr.Theor.Phys. 7, 578, 1952.

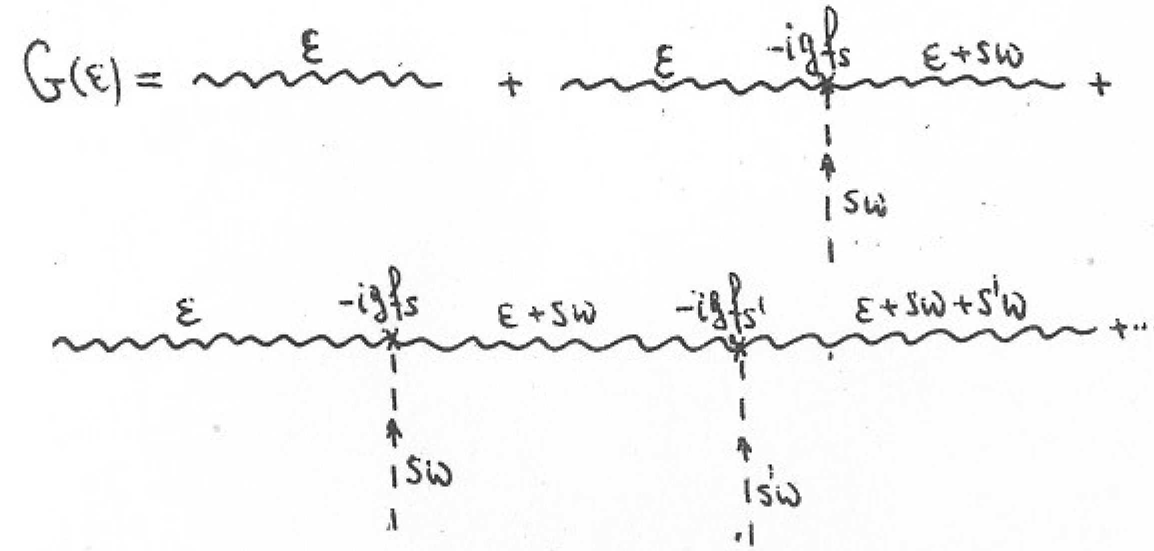

Рис.I

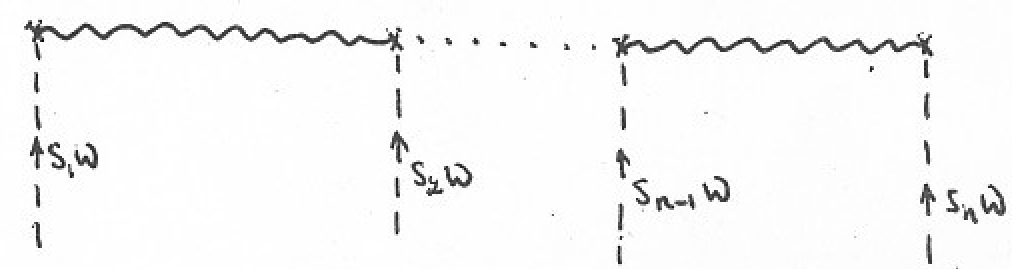

Рис.2

Работа поступила - 5 апреля 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 9.VI-1977г. МН 02814
Усл. 1,3 печ.л., 1,0 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 44.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР