

ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ ИЯФ 77-15

И.С.Бучельникова, Е.П.Маточкин

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЛЕНГМИРОВСКОЙ ВОЛНЫ  
БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ

Новосибирск

1977

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЛЕНГМИРОВСКОЙ ВОЛНЫ БОЛЬШОЙ  
АМПЛИТУДЫ

Н. С. Бучельникова, Е. П. Маточкин

АННОТАЦИЯ

Методом численного эксперимента исследована неустойчивость одномерной монохроматической ленгмировской волны большой амплитуды ( $E_0^2/8\pi n T \sim 0,3$ ;  $V_T^2/V_i \sim 16$ ). Показано, что неустойчивость является модуляционной с длиной возмущения, меньшей длины волны. На нелинейной стадии неустойчивости существенную роль играют два процесса — выталкивание плазмы из области концентрации высокочастотного электрического поля действием пондеромоторной силы и дополнительная модуляция волны, связанная с ростом ионного возмущения, эти процессы приводят к захвату волны во впадину плотности, развитию коллапса и практически полному поглощению энергии поля электронами плазмы.

## THE INSTABILITY OF THE HIGH AMPLITUDE LANGMUIR WAVE

N.S. Buchelnikova, E.P. Matechkin

The numerical experiment was made to investigate the instability of one-dimensional monochromatic high amplitude Langmuir wave ( $E_0^2/8\pi n T \approx 0.3$ ;  $V_{ci}/V_f \approx 16$ ). It was shown that the instability is the modulation instability with the length of perturbation less than the wave length. On the nonlinear stage of the instability two processes are important - plasma density depression in the region of the high frequency electric field concentration due to the ponderomotive force and additional modulation of the wave due to the increase of the ion density perturbation. These processes lead to the localisation of the wave energy in the density cavity, to the development of the collapse process and to the practically full absorption of the electric field energy by the plasma electrons.

В последние годы ведутся интенсивные исследования нелинейного взаимодействия волн большой амплитуды с плазмой (ссылаясь на книги /1,2/, обзоры /3-10/ и некоторые работы - теоретические /11-22/, численные/23-30/ и экспериментальные /31-34/).

В настоящей работе методом численного эксперимента исследовалась неустойчивость одномерной ленгмировской волны в бесстолкновительной плазме, приводящая к затуханию волны и поглощению её энергией электронами плазмы. Изучалась волна с фазовой скоростью  $v_0/v_r \sim 16$  и энергией  $W_0 = \frac{E_0^2}{8\pi n_0} \sim 0,3$ , при которой электронная нелинейность несущественна, но выполнены условия  $1 > W_0 > \frac{m}{M} > (k_d r_d)^2$ ;  $(m/M = 10^{-2}; (k_d r_d)^2 = 3,9 \cdot 10^{-3})$

Отметим, что волны такой амплитуды возбуждаются в плазме монохроматическим электронным пучком со скоростью  $v_0/v_r \sim 16$  и плотностью  $n_e/n_i \sim 2 \cdot 10^{-2}$ .

Надеюсь, что в дальнейшем это изображение будет улучшено, так как от него зависит способность читать текст.

Для численного моделирования используется метод "частиц в ячейках". Рассматривается одномерная система с периодическими граничными условиями. Для понижения начального уровня шумов применяется метод "спокойного старта". Для электронов и ионов плазмы задается максвелловское распределение по скоростям. Более подробно метод расчета описан ранее /35/.

Контроль правильности расчета проводится по сохранению полной энергии и импульса системы, по независимости результатов от счетных параметров и от точности расчета (для понижения точности в ячейку памяти ЭВМ записывается два "слова" вместо одного).

Можно полагать, что одномерная модель описывает продольную волну в замагниченной плазме. Во всяком случае это так для взаимодействия электронного пучка малой плотности с плазмой. Действительно, здесь хорошо согласуются лабораторный эксперимент в замагниченной плазме, в которой пучок возбуждает продольные волны /36/, одномерная теория /37,38/ и одномерный численный эксперимент /35,39/ (с одной и той же теорией независимо сопоставлялся лабораторный и численный эксперимент).

Для более полного понимания исследуемого явления мы будем пользоваться параллельно двумя его описаниями - динамическим и спектральным. В динамическом описании изучается изменение во времени пространственного распределения поля волны  $E(x)$ , плотности электронов и ионов  $n_e(x)$ ,  $n_i(x)$ , составляющих поле, связанных с электронами и ионами  $E_e(x)$ ,  $E_i(x)$  ( $E_e(x) + E_i(x) = E(x)$ ) фазовых плоскостей электронов и ионов  $f_e(x, v)$ ,  $f_i(x, v)$  функции распределения электронов по скоростям  $f(v)$ .

В спектральном описании изучается изменение во времени спектров и отдельных гармоник поля  $E_N$ , плотности электронов и ионов  $(n_e/n_0)_N$ ,  $(n_i/n_0)_N$ , составляющих поля  $(E_e)_N$ ,  $(E_i)_N$  ( $N$  - номер гармоники;  $E_M$ ,  $(n_{ei}/n_0)_M$ ,  $(E_{ei})_M$  - амплитуды  $M$ -й гармоники). Используемые в работе величины нормируются следующим образом:

$$x^* = x/r_d \quad r_d = \sqrt{T/4\pi n e^2}$$

$$t^* = t/T_{oe} \quad T_{oe} = 2\pi/\omega_{oe} \quad \omega_{oe} = (4\pi n e^2/m)^{1/2}$$

$$v^* = v/v_r \quad v_r = \sqrt{T/m}$$

$$E^* = \frac{E}{m r_d / e T_{oe}^{1/2}}$$

Здесь  $T$  - температура электронов,  $r_d$  - дебаевский радиус,  $\omega_{oe}$  - плазменная частота,  $T_{oe}$  - период плазменных колебаний,  $v_r$  - тепловая скорость электронов.

Ниже мы используем обозначение  $E$  вместо  $E^*$  и в тексте  $x, t$  вместо  $x^*, t^*$ .

Описанный ниже численный эксперимент проводится при следующих параметрах: длина системы  $L = 100$ ; отношение масс электронов и ионов  $m/M = 10^{-2}$ ; отношение температур  $T_e/T_i = 30$ ; ионный плазменный период  $T_{oi} = 2\pi/\omega_{oi} = 10T_{oe}$ ;  $\omega_{oi} = (\frac{4\pi n e^2}{m})^{1/2}$

Численные параметры: временной шаг  $\Sigma = 0,05 T_{oe}$ ; число "частиц" электронов и ионов  $N_e = N_i = 10^4$ . Отметим,

что при таком числе частиц функция распределения по скоростям обрезана на  $v \sim 2v_T$ .

В начальный момент времени  $t = 0$  ионы равномерно распределены по длине системы. Синусоидальным возмущением плотности и скоростей электронов задана бегущая монохроматическая волна  $E = -E_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x)$  с частотой  $\omega_0 = \omega_{oe}$ ; длиной волны  $\lambda_0 = 2\pi/k_0 = \lambda = 100 \lambda_d$ ; фазовой скоростью  $v_F^0/v_T = 15,9$ ; амплитудой  $E_0 = 31$ ; плотностью энергии  $E_0^2/8\pi n T = 0,3$ . Отметим, что частота  $\omega_0$  близка к  $\omega_\lambda$ -собственной частоте  $\omega_\lambda^2 = \omega_{oe}^2 + \omega_{oe}^2 + 3k^2 v_T^2$  (в формуле не учтена малая поправка, связанная с конечностью размера счетной "частицы" /40/). Для наших параметров  $\omega_\lambda = 1,011 \omega_{oe}$ , так что  $\omega_0 = 0,99 \omega_\lambda$ .

В волне с такой амплитудой и фазовой скоростью нелинейность движения электронов практически не играет роли. Действительно, в течение первых периодов колебаний сохраняется синусоидальность возмущений плотности и скоростей электронов.

С течением времени волна начинает модулироваться, появляется и нарастает возмущение плотности ионов, энергия волны концентрируется в области впадины плотности. При этом минимальная по  $x$  плотность  $n_{min}$  падает, а максимальная по  $x$  плотность энергии  $E_{max}^2/8\pi n_{min} T$  растет (Рис.1, 2), до тех пор пока процесс не приобретает взрывообразный характер. В результате энергия волны практически полностью поглощается электронами плазмы (Рис.1, 3а).

Рассмотрим этот процесс более подробно. Для удобства рассмотрения разобьем его на четыре временных интервала  $t \sim 0-15$ ,  $15-33$ ,  $33-42$ ,  $> 42$ .

I.  $t \sim 0-15$ . Начнем с динамического описания. На рис.4 показано распределение поля  $E(x)$  и плотности  $n_i(x)$  в различные моменты времени, на рис.5 – изменение  $E(x)$  в течение периода плазменных колебаний. Видно, что до  $t \sim 4$

$E(x)$  сохраняет вид синусоиды. В плотности ионов появляется и нарастает синусоидальное возмущение плотности с длиной волны  $\lambda \sim \lambda$ . С течением времени  $E(x)$  меняет свою форму, становится несимметричным и в течение плазменного периода меняется таким образом, что энергия волны оказывается сосредоточенной, в основном, в области впадины плотности (Рис.5), т.е. наблюдается модуляция волны с длиной возмущения  $\lambda \leq \lambda_0$ .

В спектральном описании из Рис.6 видно, что в этом интервале времени нарастают вторая и третья гармоники поля с  $\lambda = \lambda_0/2$  и  $\lambda_0/3$ . Инкремент нарастания этих гармоник  $\gamma_2 \sim 4 \cdot 10^{-2}$   $\gamma_3 \sim 6 \cdot 10^{-2}$ . Амплитуда первой гармоники вначале постоянна, затем начинает падать. Было найдено, что фазовые скорости гармоник находятся в отношении 1:1/2:1/3 ( $v_F/\lambda \sim 16$ ,  $\sim 8$ ,  $\sim 5,3$ ), так что их частоты одинаковы  $\omega_n \sim \omega_{oe}$ , т.е. волны являются ленгмировскими.

Из рис.7 видно, что амплитуда первой гармоники плотности ионов резко возрастает за первый период и далее продолжает расти более медленно. Дополнительными численными экспериментами было показано, что изменение  $(\tilde{n}_i/n_0)$ , за первый период пропорционально амплитуде поля  $E_0$  и обратно пропорционально массе ионов и длине волны. Таким образом, можно утверждать, что оно связано с возмущением скорости ионов полем волны. Фазовая скорость первой гармоники близка к нулю (во всяком случае, меньше тепловой скорости ионов  $v_T = 0,02 v_T$ ). Вторая, третья гармоники  $\tilde{n}_i/n_0$  также резко возрастают до уровня, определяемого уровнем электронных шумов. При  $t > 10$  они начинают расти, но остаются малыми по сравнению с первой гармоникой.

Таким образом, в интервале времени  $t \sim 0-15$  наблюдается неустойчивость ленгмировской волны, проявляющаяся в модуляции волны с длиной возмущения, меньшей длины волны, в результате чего энергия волны концентрируется в области нарастающей впадины плотности.

В спектральном описании этому соответствует возбуждение более коротких ленгмировских волн с  $k_e = 2k_0$ ,  $3k_0$  и новой гармоники с  $k_i = k_0$  с фазовой скоростью, близкой к нулю.

Таким образом, наблюдается разновидность модуляционной неустойчивости /12/ с  $\lambda \leq \lambda_*$ , т.е. неустойчивость, близкая к апериодической /13/. В рамках спектрального описания её можно отождествить с модифицированным распадом /16/.

Был проведен ряд дополнительных численных экспериментов, чтобы выяснить зависимость наблюдаемой неустойчивости от различных параметров. Можно было опасаться, что модуляция волны с

$\lambda < \lambda_*$  связана с тем, что задаваемая длина волны равна длине системы. Проверочный численный эксперимент с той же  $\lambda_*$  и более длинной системой ( $\lambda_* = 100 \gamma_d$ ,  $\lambda = 300 \gamma_d$ ) показал, что и в этом случае развивается та же неустойчивость – все кривые совпадают, гармоник с длинами волн, большими  $\lambda_*$ , не появляется.

Для проверки, не является ли существенным отличие  $\omega_0$  от собственной частоты  $\omega_*$ , был проведен численный эксперимент с  $\omega_0 = \omega_* = 1,01\omega_*$ . Оказалось, что результаты полностью совпадают. Более того, оказалось, что даже заметные отличия  $\omega_0$  от  $\omega_*$  не меняют характера неустойчивости. Так, случай  $\omega_0 = 0,89 \omega_*$  и  $\omega_0 = 0,88 \omega_*$  почти не отличается от случаев  $\omega_0 = \omega_*$  и  $\omega_0 = \omega_*$ . Небольшое отличие связано с тем, что несобственная волна распадается на прямую и обратную ленгмюровские волны (амплитуда обратной волны пропорциональна  $\Delta\omega = \omega_* - \omega_0$ ), что дает компоненту стоячей волны и приводит к небольшому дополнительному возмущению ионной плотности, но не меняет самой неустойчивости.

Поскольку отношение температур  $T/T_i = 30$  было выбрано произвольно, проверялось, не является ли оно существенным. Оказалось, что случай  $T/T_i = 30$  совпадает со случаем  $T/T_i = 1$ .

2.  $t \sim 15-33$ . Рассмотрение этого интервала времени удобнее начать со спектрального описания. Из Рис.6 видно, что в интервале  $t \sim 15-25$  последовательно появляются и нарастают колебания амплитуды 1-й – 3-й гармоник поля с периодом, равным половине плазменного. Амплитуда этих колебаний нарастает со временем. Одновременно начинает нарастать 4 – 5-я плазменные гармоники. Можно предположить, что колебаний амплитуды гармоник с периодом  $T_{ee}/2$  связаны с возбуждением обратных волн и, следовательно, с появлением компоненты стоячей волны. Подтверждение

этому мы находим в Рис.3а, б. Действительно, в этом интервале времени появляются и нарастают колебания полной энергии волны  $W_s$  и энергии электронов  $\Delta W_e$  ( $\Delta W_e = W_e - W_e^*$ , где  $W_e$ ,  $W_e^*$  – полная и начальная (тепловая) энергия электронов). Как и должно быть в случае стоячей волны,  $W_s$  и  $\Delta W_e$  равны по амплитуде и колеблются в противофазе (Рис.3б). Таким образом, волна содержит компоненты стоячей и бегущей волн. Их амплитуды в зависимости от времени представлены на Рис.8, 9 (амплитуда стоячей волны равна амплитуде колебаний  $E_n$  с периодом  $T_{ee}/2$ , амплитуда бегущей – минимальному значению  $E_n$  за период  $T_{ee}/2$ ). Инкремент нарастания обратных волн для первой и второй гармоник  $\gamma_1 \sim 3,7 \cdot 10^{-2}$ ,  $\gamma_2 \sim 4,5 \cdot 10^{-2}$ .

Гармоники ионной плотности в этом интервале времени продолжают нарастать, достигая величины  $(\tilde{n}_i/n_0) \sim 10^{-2}$  (Рис.7).

В динамическом описании из Рис.4, 5 видно, что заметная доля энергии волны сосредоточена в области  $\Delta X$ : впадины плотности. Изменение  $E(x)$  в течение плазменного периода (Рис.5в) указывает на наличие компоненты стоячей волны с  $\lambda/2 \sim (40-45)\gamma_d$  с  $\lambda \sim 60\gamma_d$  меньшей амплитуды (видна в  $t$  пропорциональные  $T_{ee}/4$ ). С течением времени компонента с  $\lambda \sim 60\gamma_d$  исчезает, к  $t \sim 28$  остается только компонента с  $\lambda/2 \sim (35-40)\gamma_d$  большей амплитуды. К  $t \sim 33$  помимо неё появляется компонента с  $\lambda \sim 40\gamma_d$  малой амплитуды. Таким образом, компонента стоячей волны постепенно перестраивается так, что её длина волны уменьшается, а энергия растет.

По фазовой плоскости ионов видно, что в области концентрации поля в  $t > 15$  возникает и нарастает с течением времени возмущение скоростей ионов (Рис.10а). Справа от области максимальной плотности поля ( $8t \sim 24$  –  $X \sim 40$ ) возмущение положительно, слева – отрицательно. Такой характер возмущения соответствует выталкиванию плазмы из области впадины плотности действием пандеромоторной силы  $F = \frac{e^2}{4\pi m \omega} \nabla E^2/2$ , возникающей в результате появления градиента поля из-за его концентрации. Действительно, впадина плотности продолжает углубляться (Рис.2, 4) и немножко смещаться в соответствии с

изменением области максимальной концентрации поля.

Для того, чтобы понять, с чем связано появление стоячих волн (возбуждение обратных волн и более коротких гармоник) обратимся к кривым  $n_i(x)$  и  $E_e(x), E_i(x)$  (Рис.2, A, II). Видим, что в рассматриваемом интервале времени

$(\tilde{n}_i/n_0)_{min}$  достигает величины  $\sim$  нескольких процентов ( $\sim 3-15\%$ ), при этом ионная компонента поля  $E_i$  становится сравнимой с электронной ( $E_i/E_e \sim 0,4$ ) и заметно влияет на вид поля ( $E(x)$  заметно отличается от  $E_e(x)$  — Рис.4 — Рис. II).

В численных экспериментах с волнами разных амплитуд ( $E_0 = 11-31-70$ , что соответствует  $W_0 = 0,04 - 0,3 - 1,5$ ) и разными массами ионов ( $m/M = 10^{-2}$  и  $10^{-3}$  при  $E_0 = 70$ ) также наблюдается появление стоячих волн. Они появляются в разные моменты времени (тем раньше, чем больше  $E_0$  и  $m/M$ ), при разных значениях  $E^2/8\pi n T$  (тем больше, чем больше  $E_0$ ), но всегда при близких значениях  $(\tilde{n}_i/n_0)_{min}$  порядка нескольких процентов и отношениях  $E_i/E_e \sim 0,3 - 0,6$ , когда ионное возмущение дает заметный вклад в поле  $E(x)$ .

Механизм этого явления легче понять в спектральном описании. Его можно объяснить взаимодействием высокочастотной электронной волны с ионным возмущением (низкочастотной ионной волной) [2, 41, 42]. Электронная волна с волновым вектором  $k_e$ , взаимодействуя с ионным возмущением с волновым вектором  $k_i$ , дает новые электронные волны с  $k = k_e \pm k_i$  ( $N = N_e \pm N_i$ ). Так первая электронная гармоника, взаимодействуя со 2-3-й ионными гармониками, дает 3-4-ю гармоники и 1-2-ю гармоники обратных волн. Поскольку новые волны также взаимодействуют с ионным возмущением, процесс может иметь каскадный характер, так что  $k = k_e \pm \alpha k_i$ ,  $\alpha = 1/2, 3 \dots$ . Таким образом, этот процесс приводит к появлению более коротковолновых гармоник и обратных волн.

Был проведен ряд численных экспериментов с электронными волнами разной амплитуды и длины ( $E_0 \sim 5-30$ ,  $N_e$  1-2) и разными ионными возмущениями ( $\tilde{n}_i/n_0 \sim 0,1-10\%$ ,  $N_i$  1-5). Оказалось, что в этом диапазоне параметров процесс  $k = k_e \pm k_i$  не имеет порога по  $\tilde{n}_i/n_0$ , но амплитуды новых волн

становятся заметными ( $E_k/E_0 \gtrsim 10^{-2}$ ) за 1-2 плазменных периода, когда ионное возмущение имеет величину порядка нескольких процентов (при этом  $E_i/E_e \gtrsim 10^{-1}$ ).

Таким образом, этот процесс играет роль нелинейного взаимодействия при развитии неустойчивости ленгмировской волны и проявляется, когда ионное возмущение становится достаточно большим, приводя к перекачке энергии волны в более короткие гармоники и обратные волны.

В динамическом описании этому соответствует дополнительная модуляция и отражение волны достаточно большим возмущением плотности, что приводит к захвату волны в область впадины плотности и образованию стоячей волны. Отсюда более быстрый рост концентрации энергии и ускорение роста впадины плотности за счет действия пондеромоторной силы, что в свою очередь ведет к перестройке стоячей волны в более короткую.

Следует обсудить, нельзя ли объяснить эти явления электронной нелинейностью. Вначале, как мы показали, электронная нелинейность не играет роли, однако, она может стать существенной с ростом концентрации поля. Как уже говорилось, появление компоненты стоячей волны наблюдалось во всех экспериментах с волнами разной амплитуды. Компонента стоячей волны появлялась в этих экспериментах при различных  $W_k = E_{max}^2/8\pi n_{min} T$ : эксперимент 1 —  $W_0 = 0,04$ ,  $W_k \sim 0,07$ ; эксперимент 2 —

$W_0 = 0,03$ ,  $W_k \sim 0,5$ ; эксперимент 3 —  $W_0 = 1,5$ ,  $W_k \sim 2$ . Как мы показали, при  $W \leq 0,3$  электронная нелинейность практически не играет роли. Таким образом, в эксперименте 1 ( $W_k \sim 0,07$ ) компонента стоячей волны появляется, когда нелинейности нет. В эксперименте 3 наоборот, нелинейность существует с самого начала, а компонента стоячей волны появляется значительно позже.

Таким образом, появление компоненты стоячей волны (появление обратных волн и более коротких гармоник) не связано с электронной нелинейностью.

3.  $t \sim 33-42$ . В этом интервале времени происходит взрывообразный процесс — максимальная плотность энергии быстро нарастает, достигает максимума и падает за несколько плазменных

периодов (Рис.1), причем энергия поля практически полностью переходит в энергию электронов плазмы (Рис.3а).

В динамическом описании из Рис.4,5 видно, что в начале этого интервала происходит перестройка  $E(x)$  - появляется компонента более короткой стоячей волны с  $\lambda \sim 40\sqrt{4}$ . К моменту  $t \sim 36-37$  практически вся энергия сосредоточена в этой стоячей волне в области впадины плотности (Рис.5г). К моменту  $t \sim 37-38$  появляется компонента еще более короткой стоячей волны (видна в  $t$ , пропорциональные  $T_{ce}/4$ ).

Скорости ионов сильно возмущаются в области двух максимумов энергии стоячей волны (Рис.10б). Появляется вторая впадина плотности в области второго максимума энергии. Ширина впадины плотности уменьшается, а глубина её быстро растет - скорость роста (инкремент)  $(\tilde{n}_i/n_0)_{min}$  увеличивается ~ в 2 раза по сравнению с предыдущим периодом (Рис.2).

Плотность энергии также быстро растет - скорость роста (инкремент) величины  $E_{max}^2/8\pi n_{min} T$  увеличивается ~ в 3 раза по сравнению с предыдущим периодом (Рис.1).

К моменту  $t \sim 37$  плотность энергии достигает максимального значения и далее быстро падает. За 4-5 плазменных периодов значительная часть энергии поля поглощается электронами плазмы (Рис.1,3,4).

Электронные и ионные составляющие поля возрастают, оставаясь сравнимыми по величине (Рис.11), так что  $E_e$  и  $E_i$  дают сравнимый вклад в поле  $E(x)$ .

В спектральном описании в начале интервала наблюдается рост амплитуды гармоник стоячей волны и уменьшение амплитуды гармоник бегущей (Рис.6,8,9). Быстро растет число более высоких гармоник поля - если в начале интервала над уровнем шумов выделено 5-6 гармоник, то к моменту  $t \sim 37$  уже ~ 11 (Рис.12).

Первые гармоники  $\tilde{n}_i/n_0$  возрастают до уровня, близкого к  $10^{-1}$ . Появляются также более высокие гармоники до  $N \sim 7$ , к моменту  $t \sim 37-38$  их уровень достигает величины  $(\tilde{n}_i/n_0)_N \geq 10^{-2}$  (Рис.13).

Таким образом, за несколько плазменных периодов ( $\sim 5T_{ce}$ ) возбуждается большое число коротких волн с фазовыми скоростями  $\sim \omega_{ce}/k_n$  вплоть до  $1,5-2 V_T$  (напомним, что начальное распределение по скоростям было обрезано на  $V \sim 2 V_T$ ).

С момента  $t \sim 34$  на фазовой плоскости электронов появляются отдельные хвосты, с течением времени число их растет и в положительных и в отрицательных скоростях. Быстро возрастает и предельная энергия электронов в хвостах - к моменту  $t \sim 38$  некоторые электроны достигают скоростей  $\sim 9 V_T$  (Рис.14а).

С момента  $t \sim 38$  начинается быстрое затухание гармоник стоячей волны (Рис.6,8). Амплитуда гармоник бегущей волны возрастает на короткое время, а затем также падает (Рис.9). К  $t \sim 50$  практически вся энергия поля поглощается электронами.

На фазовой плоскости электронов быстро растет количество хвостов и количество электронов с большими энергиями (Рис.14б). По функции распределения  $f(v)$  видно, что температура плазмы практически не меняется, а хвосты  $f(v)$  вырастают до предельных скоростей  $\sim 9 V_T$  (Рис.15а).

Итак, в рассматриваемом интервале времени происходит взрывоподобный процесс - в течение нескольких плазменных периодов быстро возрастает плотность энергии поля, уменьшается ширина и растет глубина впадины плотности. Затем происходит срыв и энергия поля поглощается электронами плазмы. Таким образом, развитие модуляционной неустойчивости ленгмировской волны приводит к коллапсу, который был обнаружен теоретически В.Е.Захаровым для неодномерной системы /15/ и наблюдался в численных экспериментах для случая двумерной плазмы /25-27,29/ и для случая одномерной плазмы с волной накачки /30/.

Рассмотрим подробнее механизм поглощения энергии поля электронами плазмы. Это удобнее сделать с помощью спектрального описания. Как было показано, в рассматриваемом интервале времени в спектре  $(\tilde{n}_i/n_0)_N$  появляются и растут все более короткие гармоники. Это должно приводить к перекачке энергии электронных волн в более и более короткие -  $k = k_e \pm \alpha k_i$ , что действительно, наблюдается в спектре  $E_N$ . Появле-

ние коротких волн ( $N \sim 7-8$ ) с фазовыми скоростями, близкими к  $v \sim 2v_T$ , приводит к захвату ими электронов, что проявляется в виде хвостов на фазовой плоскости.

Были проведены модельные численные эксперименты для проверки того, что гармоники с  $v_p \geq 2v_T$  и амплитудами, близкими к наблюдаемым, могут захватывать электроны плазмы. В одном эксперименте задавались 1-я и 7-я электронные гармоники - на фазовой плоскости через несколько плазменных периодов появлялись хвосты, соответствующие захвату электронов 7-й гармоникой. В другом эксперименте проверялось, что неоднородность плотности может привести к возбуждению коротких гармоник, захватывающих электроны. Задавались 1,2-я электронные и 4,5-я ионные гармоники, так что в результате взаимодействия  $k_e + k_i$  появлялись 5-7-я гармоники. На фазовой плоскости наблюдалась хвосты и она имела вид, подобный Рис. I4.

Вернемся к основному эксперименту. Когда амплитуды гармоник возрастают так, что их области захвата перекрываются, некоторые электроны, захваченные волной в  $v_p \sim 2v_T$ , могут переходить в области захвата воли с большими фазовыми скоростями и таким образом ускоряться до больших скоростей (это наблюдается в  $t \sim 35-37$ ). Рост энергии 4,5-й гармоник приводит к тому, что нижняя граница их областей захвата приближается к  $v \sim 2v_T$ , так что они могут захватывать заметное число электронов и ускорять их до больших скоростей в пределах своей области захвата. По-видимому, это и происходит в  $t \sim 37-39$ .

Отметим, что довольно большое различие фазовых скоростей соседних гармоник связано с малой длиной системы, т.е. с вынужденной моделью. Однако можно полагать, что характер явления сохранится и в случае спектра системы, близкого к сплошному. Действительно из динамического описания видно, что нагрев происходит, когда поле сосредоточено в области малой по сравнению с длиной системы. Так что  $E(x)$  следовало бы раскладывать не по гармоникам системы, а по гармоникам стоячей волны.

В результате перекачки энергии из длинноволновых гармоник в коротковолновые электроны выходят из захвата с большими скоростями, поглотив таким образом энергию, потребованную

на их ускорение. Коротковолновые гармоники затухают в плазме. Отметим, что нагрев, если он и есть, обнаружить не удается, поскольку полная начальная энергия волны невелика по сравнению с начальной тепловой энергией плазмы.

4.  $t > 42$ . Энергия ленгмировских волн к  $t \sim 42$  уменьшается в несколько раз, а к  $t \sim 50$  они затухают практически полностью ( $W_e/W_{e0} \leq 0,05$ ), так что фазовая плоскость электронов и функция распределения по скоростям больше не меняется (Рис. I4в, I5б). В этом интервале нас будет интересовать возмущение плотности ионов. Как видно из Рис. 2, 4, глубина впадины плотности продолжает возрастать и после затухания поля до  $t \sim 45$ . Это является следствием возмущения скоростей ионов в предыдущем интервале времени. Ионное возмущение компенсируется электронами, что видно из Рис. II. Действительно,  $E_e(x)$  и  $E_i(x)$  практически равны и находятся в противофазе, так что суммарное поле близко к нулю. Это хорошо видно также в спектральном описании из Рис. I6, где показана зависимость от времени первой гармоники  $E_e$  и  $E_i$  - составляющих поля. Видно, что колебания  $(E_e)_1$ , связанные с наличием стоячей волны, затухают. При  $t > 50$   $(E_e)_1$  практически равно  $(E_i)_1$  и меняется (возрастает и падает) вместе с ним.

К  $t \sim 45-50$  справа и слева от впадин плотности возникают потоки ионов, направленные в сторону впадины. На фазовой плоскости ионов (Рис. I0в) видно образование фронтов в положительных и отрицательных скоростях, что говорит о возникновении ударной волны склонивания. Фронты встречаются в момент

$t \sim 60$  в центре впадины плотности ( $x \sim 50$ ) - на  $n_i(x)$  в этот момент времени виден пик на  $X \sim 50$  (Рис. 4), глубина впадины уменьшается.

С течением времени фронты расходятся, ударная волна начинает опрокидываться (Рис. I0г). Продолжают расходиться ионы, получившие возмущение скоростей в  $t \sim 33-38$ , что приводит к расширению впадины. Одновременно возникают новые фронты, движущиеся в сторону впадины, так что глубина её постепенно уменьшается (Рис. 4).

Таким образом, заполнение впадины плотности после затухания поля в результате коллапса происходит в течение нескольки-

ких ионных периодов в результате образования серии ударных волн. Более подробно мы рассмотрим эти явления в следующей работе.

Отметим, что динамика заполнения впадины плотности после коллапса в одномерной системе с волной накачки описана в работе /30/.

#### Обсуждение результатов.

Итак, мы исследовали одномерную монохроматическую ленгмюровскую волну большой амплитуды с  $W_0 \sim 93$ , так что  $1 > W_0 >> m/\omega_e >> (k_0 r_d)^2$ . Было показано, что при распространении такой волны в плазме развивается модуляционная неустойчивость с длиной возмущения  $\lambda \leq \lambda_0$ . На нелинейной стадии неустойчивости существенную роль играют два процесса - выталкивание плазмы из области концентрации электрического поля действием поддеромоторной силы и дополнительная модуляция волны, связанная с ростом ионного возмущения. Совместное действие этих процессов приводит к коллапсу - захвату волны во впадину плотности с образованием стоячей волны и взрыво-подобному нарастанию глубины впадины и плотности энергии поля, заключенного в ней. Ускорение электронов с хвоста функции распределения приводит к срыву неустойчивости и практическому полному поглощению энергии поля электронами плазмы.

Следует остановиться на некоторых вопросах терминологии. Мы называем наблюдаемую неустойчивость модуляционной. Обычно понятие модуляционная неустойчивость употребляется для случая, когда длина возмущения много больше длины волны  $\lambda >> \lambda_0$ , понятие апериодическая неустойчивость (называемая в иностранной литературе *oscillating two-stream instability*) -, когда  $\lambda << \lambda_0$ . Однако физический механизм этих неустойчивостей одинаков. Это четко показано, например, в работе /16/ для одномерной системы. Полученное в этой работе дисперсионное уравнение содержит как предельные случаи для  $k \ll k_0$  и  $k \gg k_0$  дисперсионные уравнения модуляционной /12/ и апериодической /13/ неустойчивости. Для процесса, описываемого полным дисперсионным уравнением для любых соотношений  $k$  и  $k_0$ , автор /16/ употребляет понятие модифицированный распад, вполне правомерное в рамках спектрального описания. В рамках динамического описа-

ния нам кажется правильным для того же процесса при любом соотношении  $k$  и  $k_0$  употреблять понятие модуляционная неустойчивость, поскольку оно наиболее точно отражает механизм неустойчивости. Отметим, что для того же процесса иногда употребляется понятие "самофокусировка волны".

Нелинейная стадия модуляционной неустойчивости вызывает в последние годы наибольший интерес. Как было показано В.Е.Захаровым /15/, для неодномерных систем нелинейной стадией модуляционной неустойчивости является коллапс. Этот вывод был подтвержден в ряде численных исследований двумерных систем /25-27, 29/. В одномерной системе коллапс наблюдался при работе с волной накачки /30/ (авторы назвали наблюдаемое явление "квазиколлапсом"). Рост концентрации энергии и впадины плотности неоднократно наблюдался в численных /24/ и лабораторных экспериментах при работе с волной накачки /31, 32/ и электронным пучком /33/.

Неустойчивость ленгмюровской волны без волны накачки исследовалась в работе /28 - Prague/. Однако изучались волны с малой фазовой скоростью  $V_F^0/v_F \leq 3$ , так что основную роль в затухании волны, по-видимому, играл захват электронов плазмы самой волной.

Принято считать, что в одномерной системе без волны накачки развитие модуляционной неустойчивости не может привести к коллапсу, а должно приводить к образованию квазистационарных солитонов. Это мнение основано на теоретических работах, в которых используются уравнения типа, полученных В.Е.Захаровым /15/, и справедливо только в рамках сделанных при их выводе предположений. Численные эксперименты, выполненные методом "частиц в ячейках" свободны от многих ограничений теории, поэтому в них могут проявляться явления, не учитываемые теорией. Проанализируем основные допущения, сделанные при выводе уравнений в работе /15/: 1. гидродинамическое описание электронов; 2. усреднение по "быструму времени"  $\sim 1/w_{de}$ ; 3. малость энергии волны  $W_0 \ll 1$ ; 4. малость возмущения плотности  $\delta n_0 \ll 1$ .

1. При гидродинамическом описании не учитывается эффекты взаимодействия частиц с волнами. В нашем случае эти эффекты становятся существенными на стадии коллапса. Проявляются

ции в ускорении электронов с хвоста функции распределения, что приводит к замедлению развития коллапса, а затем к срыву неустойчивости и поглощению энергии поля электронами плазмы.

2. При усреднении по времени  $\sim 1/\omega_{ce}$  теряются эффекты, проявляющиеся за времена, сравнимые с плазменным периодом. В нашем случае можно обратить внимание на возмущение ионов полем ленгмировской волны в первый период плазменных колебаний. Это возмущение, значительно превышающее уровень шумов, может играть роль начальной флуктуации при развитии неустойчивости.

3. Условие  $W_0 \ll 1$  равноценно пренебрежению эффектами, связанными с электронной нелинейностью. У нас это условие выполнено для начальной волны, но нарушается, когда растет концентрация поля. В работе, посвященной исследованию волн с  $W_0 > 1$ , мы покажем, что электронная нелинейность не влияет заметно на развитие модуляционной неустойчивости, до тех пор, пока не становится существенным захват волной заметной доли электронов плазмы.

4. Предположение о малости возмущения плотности в нашем случае нарушается. Как мы показали выше, при достаточной величине этого возмущения появляется нелинейный эффект, проявляющийся в дополнительной модуляции волны и захвате её во влади-  
му плотности, то есть появляется механизм более быстрой кон-  
центрации энергии, в результате чего становится возможным кол-  
лапс. Таким образом, нарушение этого предположения ведет к качественному отличию в нелинейной стадии модуляционной неустой-  
чивости.

Большая величина ионного возмущения в нашем случае связана с большой амплитудой волны и малой массой ионов ( $m_u = 10^{-2}$ ), так что можно высказать сомнение, не сводится ли весь вопрос к случайному выбору параметров. Как мы покажем в следующей работе, при увеличении массы ионов ионное возмущение достигает  $\sim$  такой же величины за большее время и все эффекты сохраняются. Параметры волны выбирались нами на основе численных экспериментов по взаимодействию электронного пучка с плазмой /43/. Напомним, что по имеющимся данным одномерный численный эксперимент согласуется с лабораторным, так что выбранные та-

ким способом параметры имеют прямое отношение к реальности. Выбранные нами параметры соответствуют случаю взаимодействия с плазмой пучка не очень большой плотности и скорости -  $n_e/n_0 \sim 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $v_0/v_f \sim 16$ , т.е. относятся к довольно обычной ситуации. Отметим, что уже для пучка с плотностью  $n_e/n_0 \geq 5 \cdot 10^{-2}$  амплитуда возбуждаемых волн, такова, что  $W_0 > 1$ . Таким образом, можно ожидать, что нелинейные эффекты, связанные с неоднородностью плотности, будут проявляться в широком классе явлений, препятствуя образованию квазистационарных солитонов.

Отметим, что на стадии коллапса эти эффекты (в спектральном описании процесс  $k = k_p \pm \alpha k_\perp$ ) приводят к быстрой перекачке энергии в коротковолновые гармоники, следствием чего является поглощение энергии поля электронами плазмы. Влияние такого процесса на коллапс было исследовано теоретически в работе /44/.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.П.Силин "Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму". Москва, Наука, 1973 г.
2. Б.Б.Кадомцев "Коллективные явления в плазме". Москва, Наука, 1976 г.
3. A.N.Kaufman, P.K.Kaw, W.L.Kruer "Anomalous absorption of intense electromagnetic waves in plasma". Comments on plasma phys. and thermonuclear research. 1, 39, 1972.
4. T.K.Chu, H.W.Hendel, J.M.Dawson "Laboratory parametric instability experiments at the plasma frequency". Comments on plasma phys. and thermonuclear research. 1, 111, 1972.
5. M.N.Rosenbluth, R.Z.Sagdeev "Laser fusion and parametric instabilities". Comments on plasma phys. and thermonuclear research. 1, 129, 1973.
6. A.A.Galeev, R.Z. Sagdeev "Parametric phenomena in a plasma" Nuclear Fusion 13, 603, 1973.
7. K. Nishikawa, Y. Lee, C. Liu "Langmuir wave turbulence - condensation and collapse". Comments on plasma phys. and thermonuclear research II, 63, 1975.
8. M. Perkolab "High frequency parametric wave phenomena and plasma heating". Proc. 12-th International Conference Phenomena in Ionized Gases, v. 2, p. 86, 1975. Eindhoven.
9. V.N.Tsytovich "Strong interaction of relativistic electron beams with gas and plasma".

- Proc. 12-th Int. Conf. Phenomena in Ionized Gases, v. 2, p. 141, 1975. Eindhoven.
- V.N.Tsytovich "Solitons-cavitons and strong Langmuir plasma turbulence". Comments on plasma phys. and thermonucl. research II, 126, 1976.
10. В.В.Горев, А.А.Кингсеп, Л.И.Рудаков "Сильная ленгмировская турбулентность плазмы". Изв. ВУЗов, Радиофизика, 19, 691, 1976 г.
  11. А.В.Гуревич, Л.П.Питаевский, ЖЭТФ 45, I243, 1963.
  12. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков, ДАН СССР 159, 767, 1964.  
A.A.Vedenov, A.V.Gordeev, L.I.Rudakov Plasma Phys. 9, 719, 1967.
  13. В.П.Силин. ЖЭТФ 48, I679, 1965.  
K.Nishikawa J.Phys. Soc. Jap. 24, 916, 1152, 1968.
  14. Л.И.Рудаков. ДАН СССР 207, 821, 1972.
  15. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 62, I745, 1972 г.
  16. Б.А.Альтеркоп, А.С.Волокитин, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. Письма ЖЭТФ 18, 46, 1973.  
В.Д.Шапиро. ЖЭТФ 66, 945, 1974.
  17. А.Г.Литвак, Г.М.Фрайман, А.Д.Юнаковский. Письма ЖЭТФ 19, 23, 1974.
  18. C.J.Morales, Y.C.Lee, R.B.White. Phys. Rev. Letters 32, 457, 1974.  
C.J.Morales, Y.C.Lee. Phys. Rev. Letters 33, 1016, 1534, 1974.
  19. C.N.Lashmore-Davies. Phys. Letters 49A, 375, 1974;  
Nucl. Fusion 15, 213, 1975.
  20. А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев, Ю.С.Сигов, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. Физика плазмы I, 10, 1975.
  21. V.I.Karpman. Physica Scripta 11, 263, 1975.
  22. B.Bezzerides, D.F.DuBois. Phys. Rev. Letters 34, 1381, 1975.

23. J.J.Thompson, R.J.Faehl, W.L.Kruer Phys.Rev. Letters 31, 918, 1973;  
*Phys. Fluids* 17, 973, 1974.
24. E.I.Valeo, W.L.Kruer Phys.Rev.Letters 33, 750, 1974.
25. В.Е.Захаров, А.Ф.Мастриков, В.С.Сынаж. Письма ЖЭТФ 20, 7, 1974; Физика плазмы 1, 614, 1975.  
 О.Б.Буднева, В.Е.Захаров, В.С.Сынаж. Физика плазмы 1, 606, 1975.
26. Л.М.Дегтирев, В.Е.Захаров. Письма ЖЭТФ 20, 365, 1974;  
21, 9, 1975.
27. Л.М.Дегтирев, В.Е.Захаров, Л.И.Рудаков. ЖЭТФ 68, II5, 1975; Физика плазмы 2, 438, 1976.
28. Yu.S.Sigov, Yu.V.Khodirev. "Numerical Study of the high amplitude Langmuir oscillations".  
*Proc. 11th Int. Conf. Phenomena in Ionized Gases*, v. 1, p. 333, 1973. Prague.  
 Yu.S.Sigov, Yu.V.Khodirev "Numerical Simulation of high-frequency heating of plasma"  
*Proc. 6th Europ. Conf. Plasma Phys. and thermonucl. Fusion* v. 1, p. 578, 1973, Moscow.
- Ю.С.Сигов, Ю.В.Ходирев "Одномерный численный эксперимент по параметрическому нагреву плазмы". Препринт ИПМ АН СССР № I29, 1974.
- А.А.Иванов, Ю.С.Сигов, Ю.В.Ходирев. "К нелинейной теории высокочастотного нагрева плазмы". ДАН СССР 214, I29I, 1974.
29. А.Н.Полидов, Р.З.Сагдеев, Ю.С.Сигов "Численное моделирование двумерной ленгмировской турбулентности". Препринт ИПМ АН СССР № I28, 1974.  
 A.N.Peludev, Yu.S.Sigov."Computer Simulation of two-dimensional Langmuir turbulence"  
*Proc. 12-th Intern. Conference Phenomena in Ionized Gases* v. 1, p. 332, 1975. Eindhoven.
30. А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев, Ю.С.Сигов, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. Физика плазмы 1, IO, 1975.
31. Ю.С.Сигов, Ю.В.Ходирев "Одномерный квазиколлапс ленгмировских волн при параметрическом воздействии на плазму". Препринт ИПМ АН СССР № II, 1976.
- Ю.С.Сигов, Ю.В.Ходирев. ДАН СССР, 229, 833, 1976.
32. H.C.Kim, R.L.Stenzel, A.Y.Wong Phys.Rev.Letters 32, 654, 1974.  
 A.Y.Wong, R.L.Stenzel Phys.Rev.Letters 33, 886, 1974.
33. A.Y.Wong, B.H.Quon Phys.Rev.Letters 34, 1499, 1975.
34. С.В.Антипов, М.В.Незлин, Е.Н.Снежкин, А.С.Трубников. Письма ЖЭТФ 23, 613, 1976.
35. В.Т.Астрелин, Н.С.Бучельникова, Ю.П.Захаров. ЖТФ 45, II84, 1975.
36. K.W.Gentle, C.W.Reberson Phys.Fluids 14, 2780, 1971.  
 K.W.Gentle, I.Lohr Phys.Fluids 16, 1464, 1973.
37. T.M.O'Neil, I.H.Winfrey, I.H.Malmberg Phys.Fluids 14, 1204, 1971.  
 T.M.O'Neil, I.H.Winfrey Phys. Fluids 15, 1514, 1972.
38. И.Н.Онищенко, А.Р.Линецкий, Н.Г.Мациборко, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. Письма ЖЭТФ, 12, 407, 1970.  
 N.G.Matsiborko, I.N.Onishchenko, V.D.Shapiro, V.I.Shevchenko. Plasma Phys. 14, 591, 1972.
39. J.R.Thompson Phys.Fluids 14, 1532, 1971.
40. Ю.С.Сигов, Ю.В.Ходирев "К теории дискретных моделей плазмы" Препринт ИПМ АН СССР № 83, 1975.
41. A.S.Bakai Nucl. Fusion 10, 53, 1970.
42. P.K.Kaw, A.T.Lin, J.M.Dawson Phys.Fluids 16, 1967, 1973.
43. В.Т.Астрелин, Н.С.Бучельникова. ЖТФ 46, I644, 1976.
44. А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. Письма ЖЭТФ 24, 25, 1976.

Подпись к рисункам

Рис.1. Зависимость от времени максимальной плотности энергии ( $E_{max}$  - максимальное значение  $E(x)$  в данный момент времени;  $n_{min}$  - минимальное значение  $n_i(x)$ ).

Рис.2. Зависимость от времени минимальной плотности плазмы.  $(\tilde{n}_i/n_0)_{min}$  - минимальное значение  $\frac{\tilde{n}_i}{n_0}(x)$ .  $\tilde{n}_i = n_i - n_0$ .

Рис.3. Зависимость от времени энергии поля и плазмы. ( $W_e$  - полная энергия поля;  $\Delta W_e = W_e - W_e^*$ ;  $W_e, W_e^*$  - энергия электронов плазмы в данный момент времени и начальная).

а) Усредненная кривая. Вертикальными прямыми показаны пределы изменения  $W_e$  и  $\Delta W_e$ .

б) Полная кривая - участок  $t = 29-30$ .

Рис.4. Распределение поля  $E(x)$  и плотности  $\frac{\tilde{n}_i}{n_0}(x)$  в разные моменты времени ( $\tilde{n}_i = n_i - n_0$ ).

Рис.5. Распределение поля в разные моменты времени через четверть плазменного периода.

а)  $t = 3-4$ ; б)  $t = 10-11$ ; в)  $t = 25-26$ ;  
г)  $t = 37-38$ .

Рис.6. Зависимость от времени амплитуды гармоник поля  $E_N$  ( $N = 1, 2, 3$  - номер гармоники).

Рис.7. Зависимость от времени амплитуды гармоник плотности ионов  $(\tilde{n}_i/n_0)_N$   
—  $N = 1$ ; ---  $N = 2$ ; -.-  $N = 3$

Рис.8. Зависимость от времени амплитуды гармоник стоячей волны.  
—  $N = 1$ ; ---  $N = 2$ ; -.-  $N = 3$

Рис.9. Зависимость от времени амплитуды гармоник бегущей волны.  
—  $N = 1$ ; ---  $N = 2$ ; -.-  $N = 3$

Рис.10. Фазовая плоскость ионов ( $V_{Ti} = \sqrt{T_i/m}$  - тепловая скорость ионов).

а)  $t = 24$ ; б)  $t = 37$ ; в)  $t = 55$ ;  
г)  $t = 70$ .

Рис.11.  $E_e$  и  $E_i$  - составляющие поля  
—  $E_i$  ---  $E_e$

Рис.12. Спектр колебаний поля  $E_N(N)$

1  $t = 10$ ; 2  $t = 24$ ; 3  $t = 37$

Рис.13. Спектр колебаний ионной плотности  $(\tilde{n}_i/n_0)_N$

1  $t = 10$ ; 2  $t = 24$ ; 3  $t = 37$

Рис.14. Фазовая плоскость электронов.

а)  $t = 37$ ; б)  $t = 44$ ; в)  $t = 70$

Рис.15. Функция распределения по скорости электронов

а)  $t = 44$ ; б)  $t = 70$

Рис.16. Зависимость от времени амплитуды первой гармоники  $E_e$  и  $E_i$  - составляющих поля  
—  $E_e$  ---  $E_i$

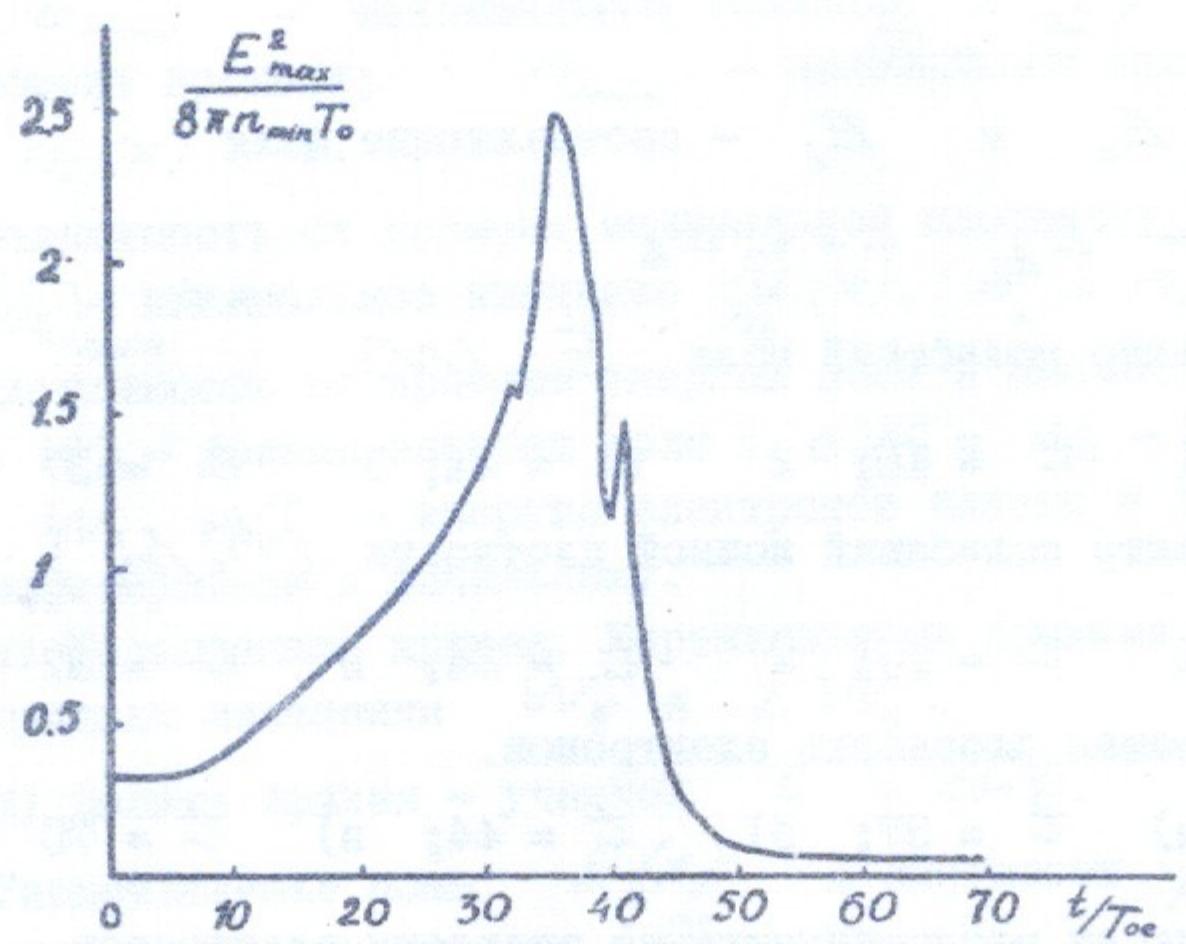


Рис.1.

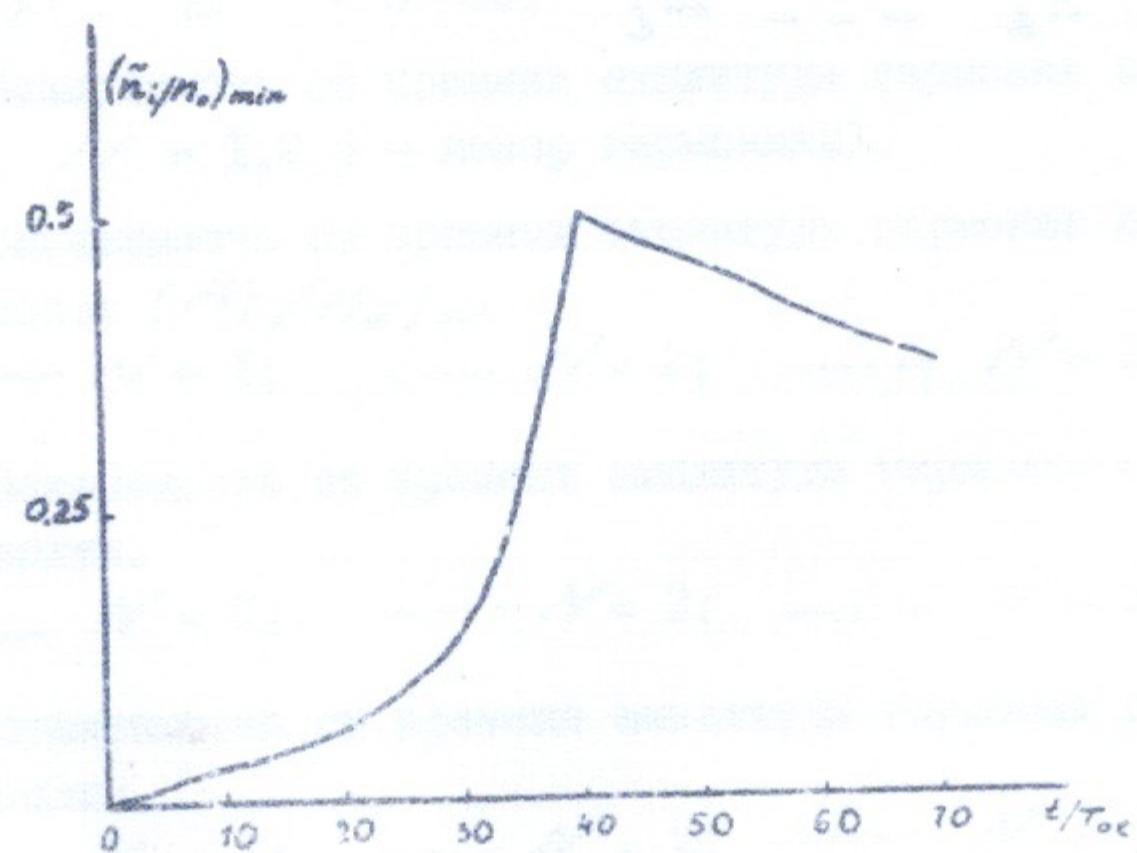


Рис.2.

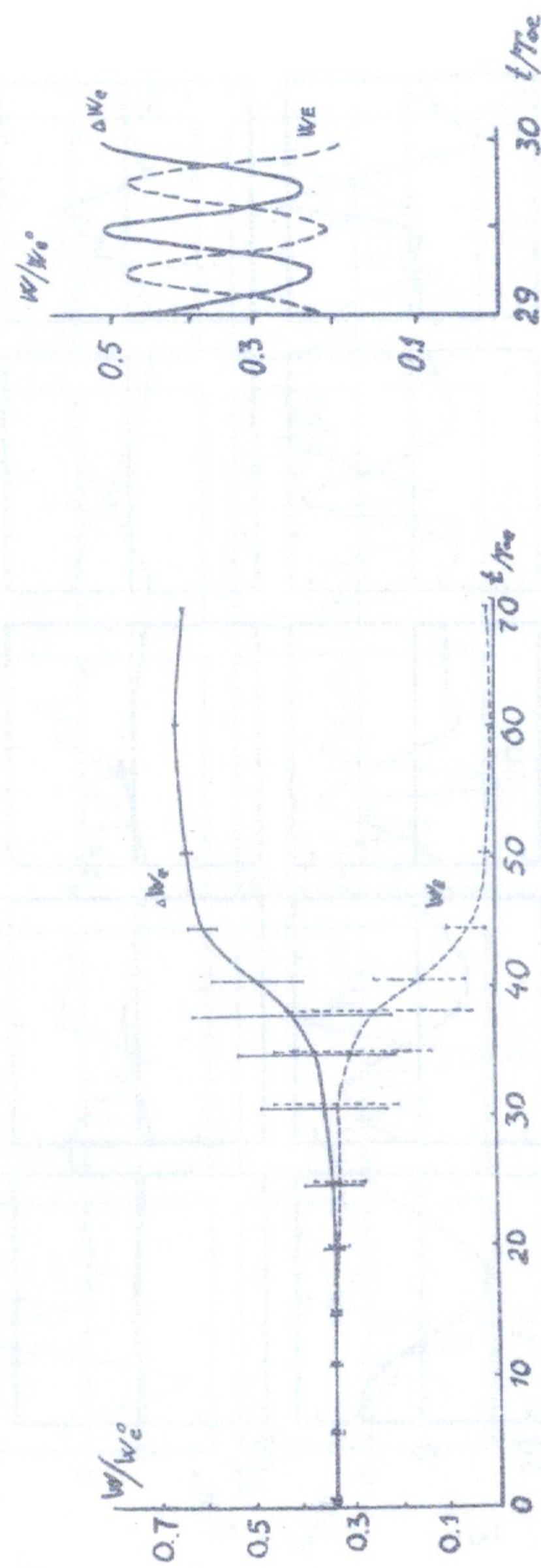


Рис.3а.

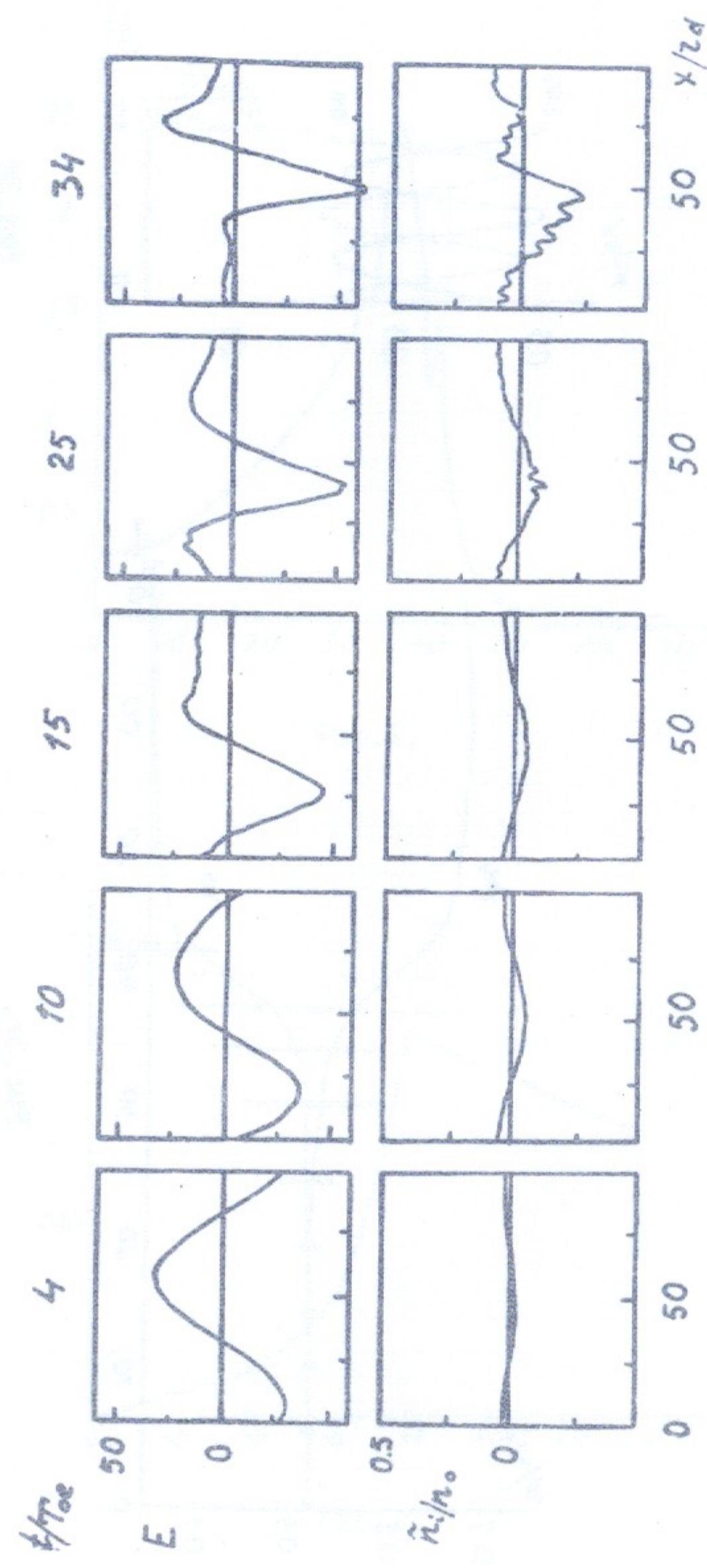


FIG. 4a.

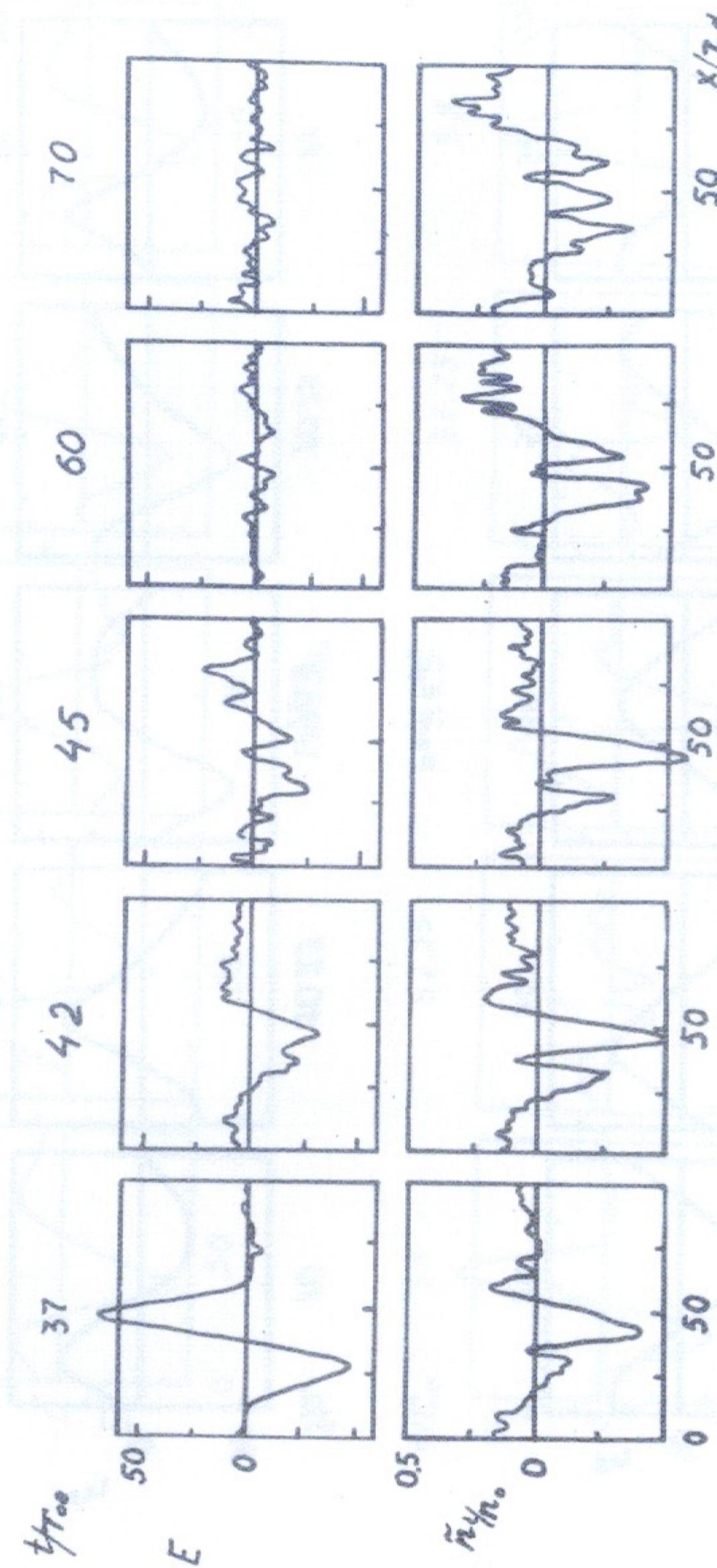


FIG. 4b.

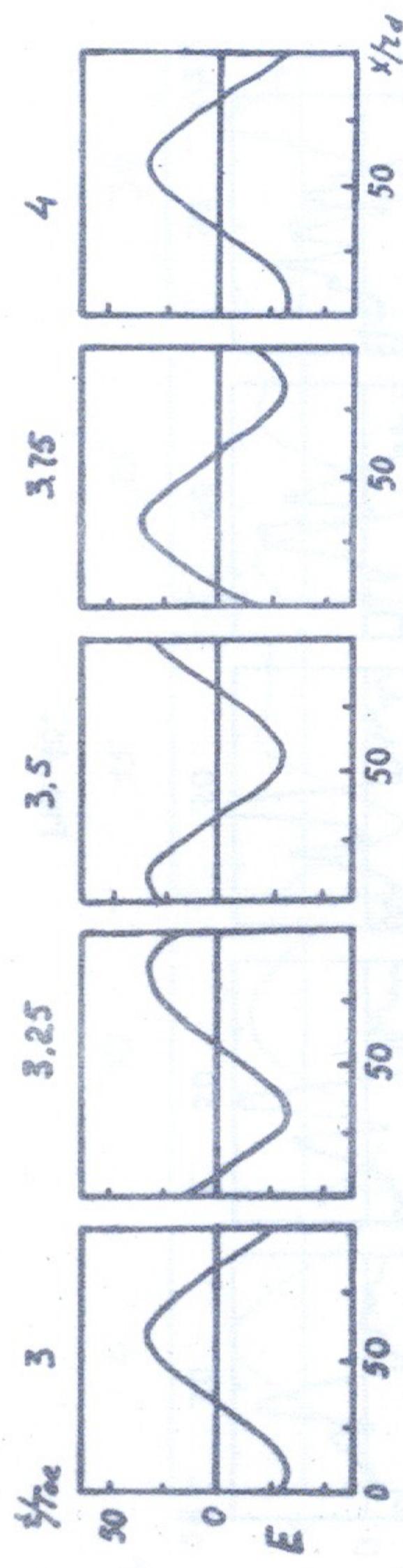


FIG. 5a.

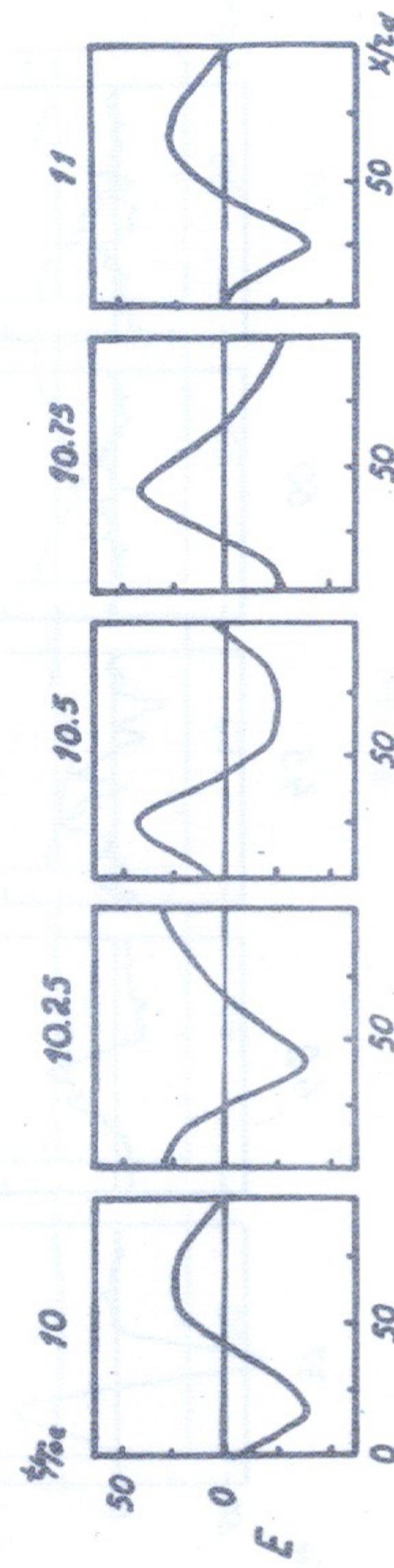


FIG. 5b.

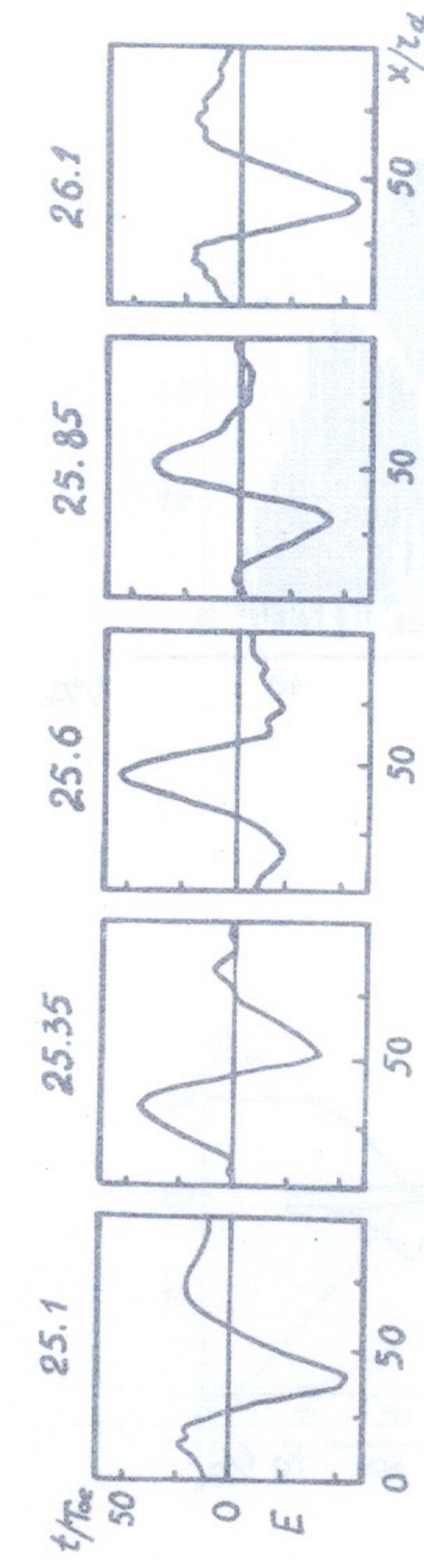


FIG. 5B.

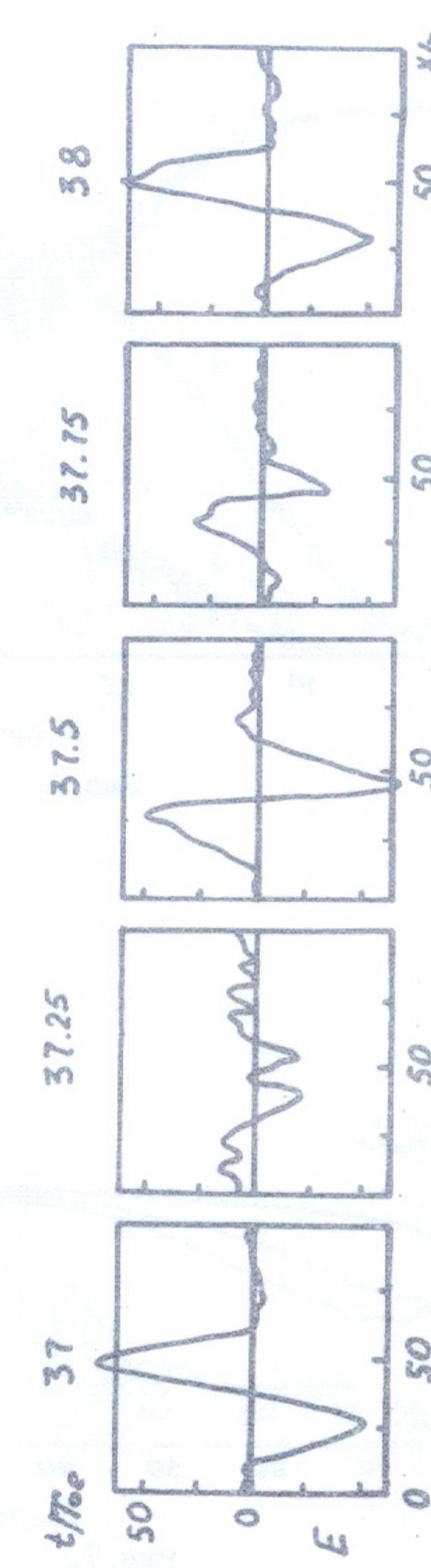


FIG. 5r.

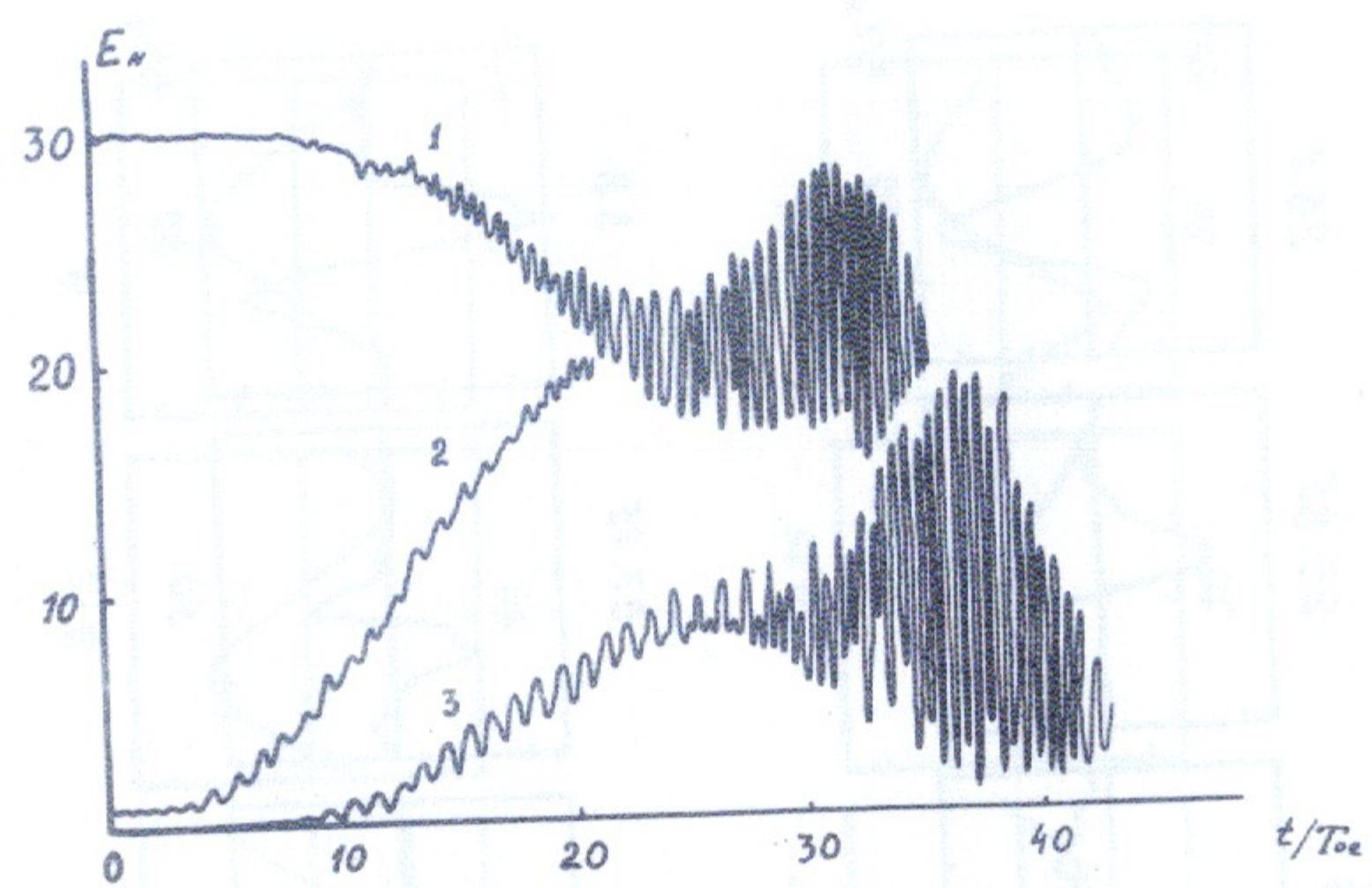


FIG. 6.

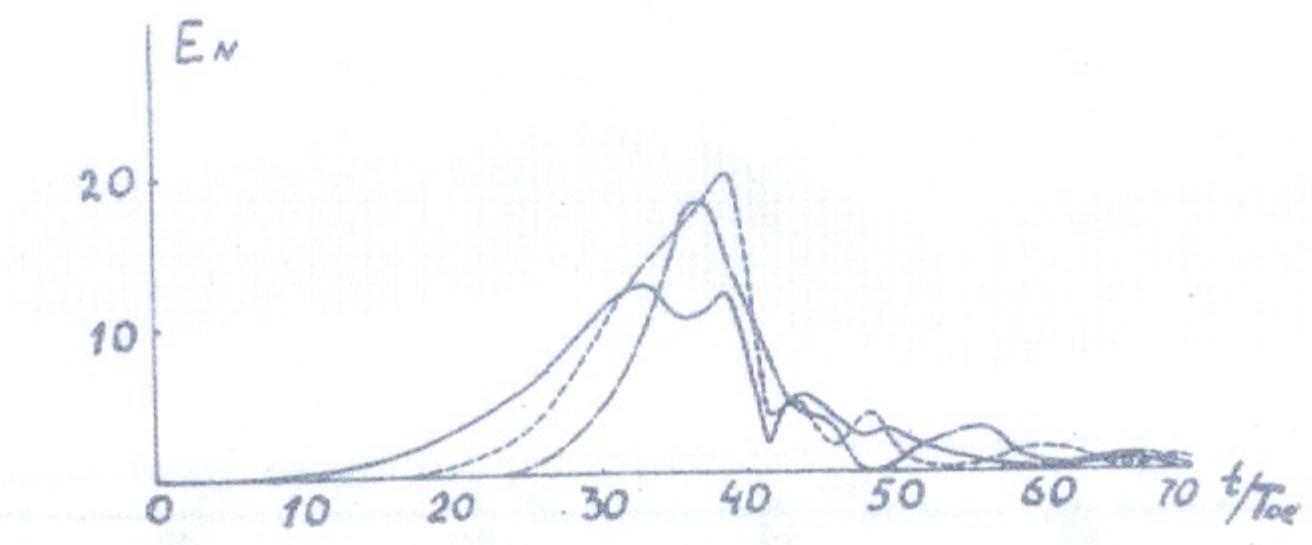


FIG. 8.

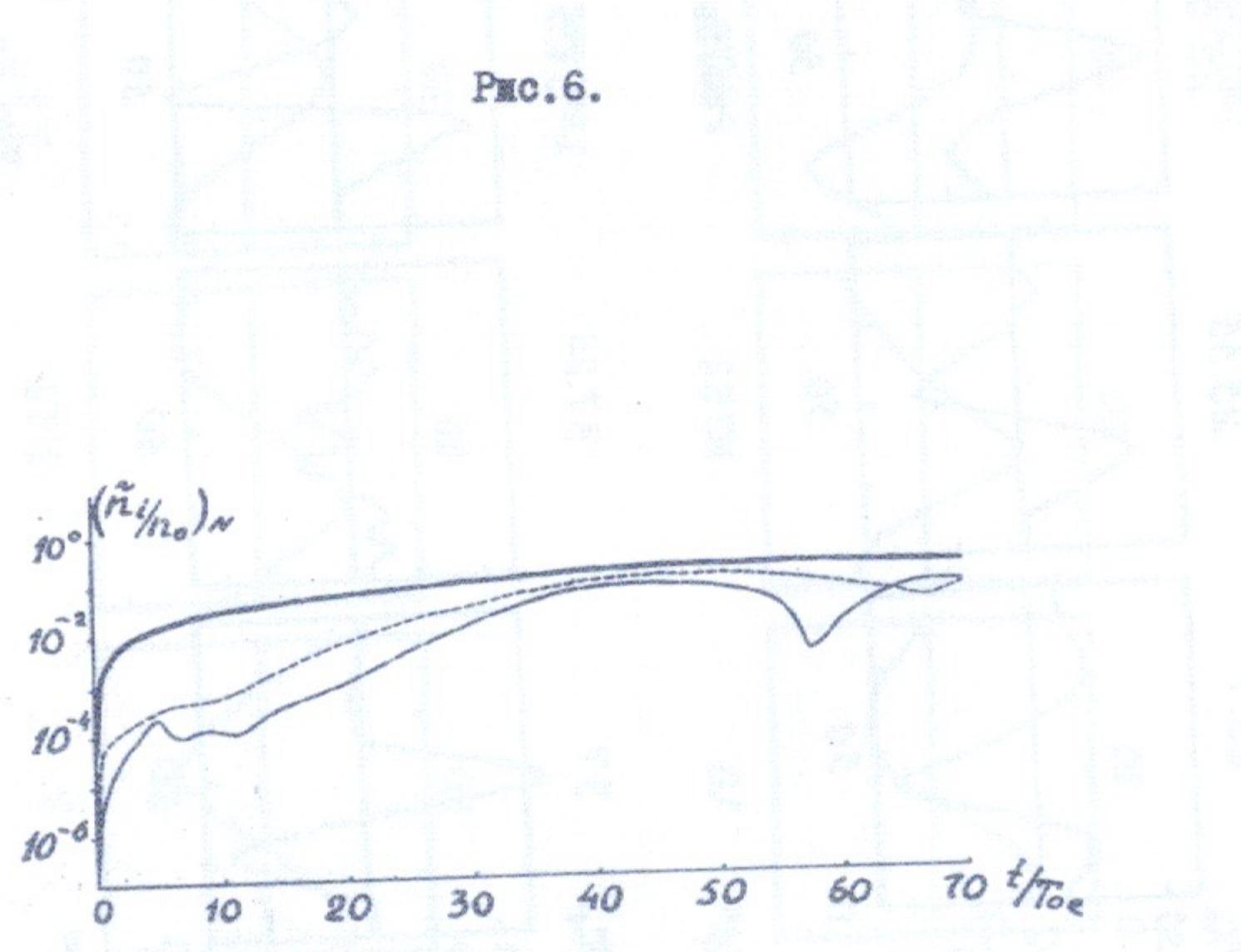


FIG. 7.

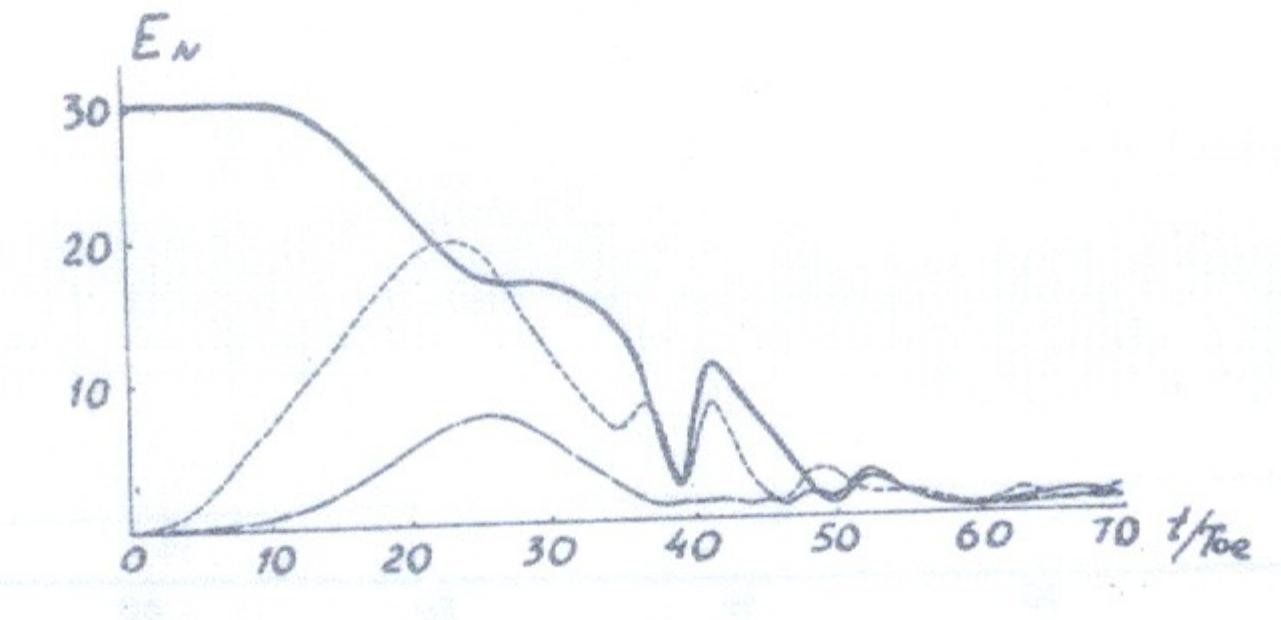


FIG. 9.

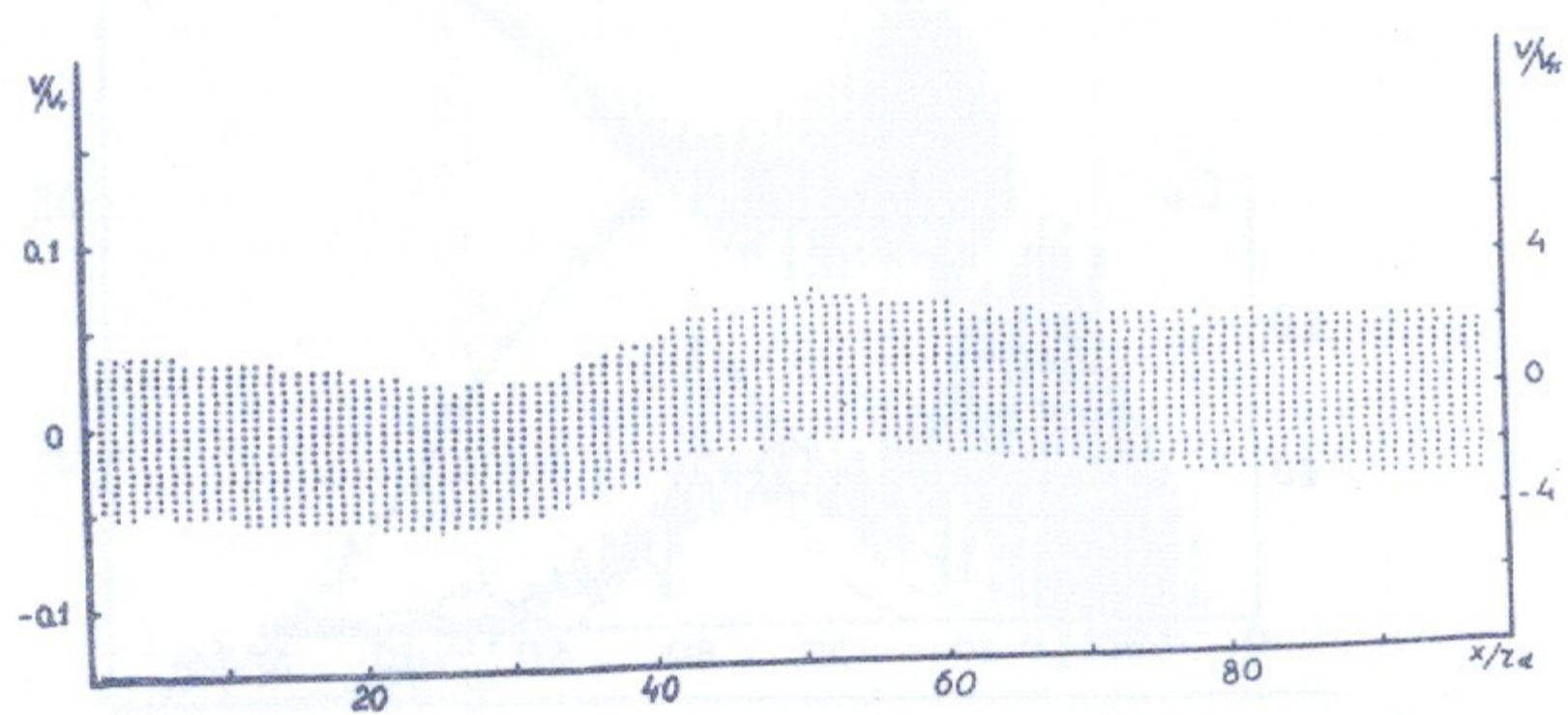


Рис.10а.

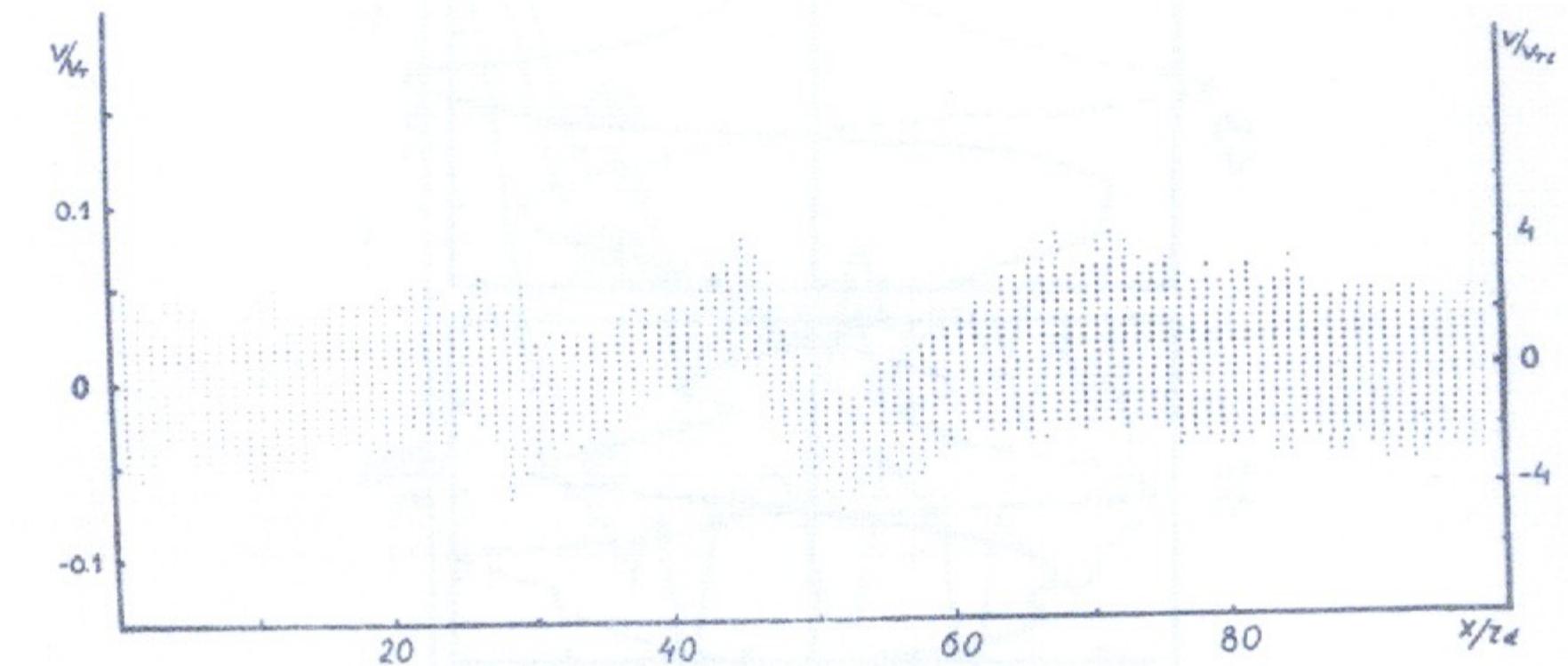


Рис.10б.

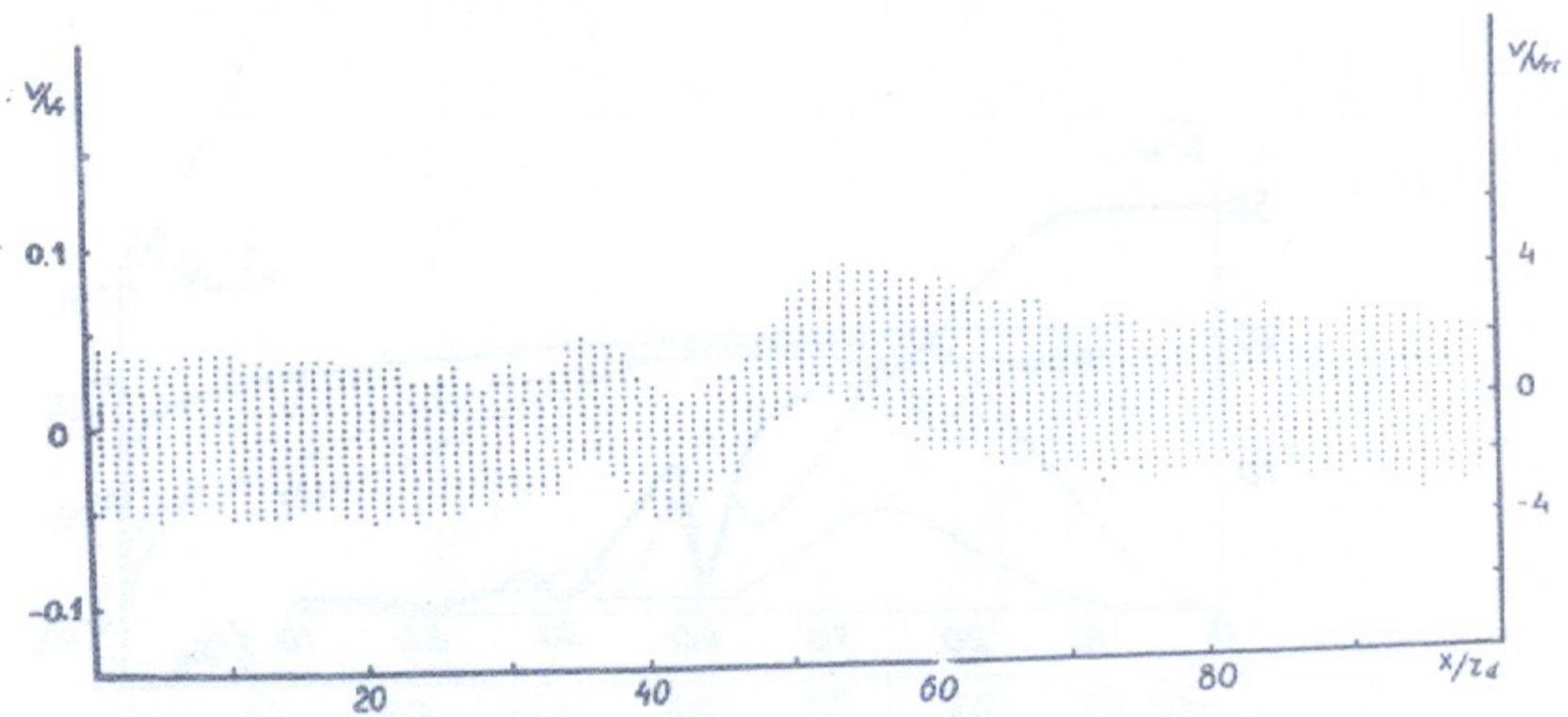


Рис.10с.

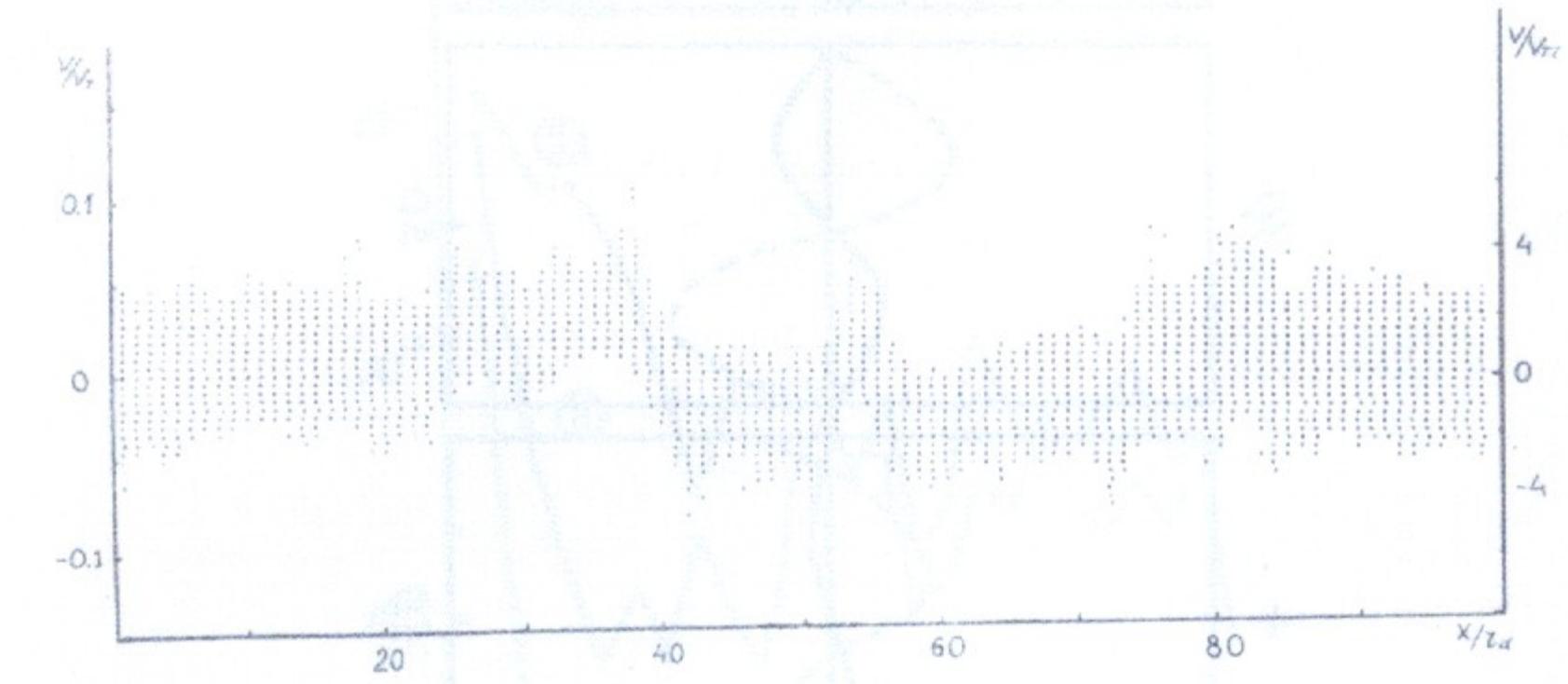


Рис.10д.

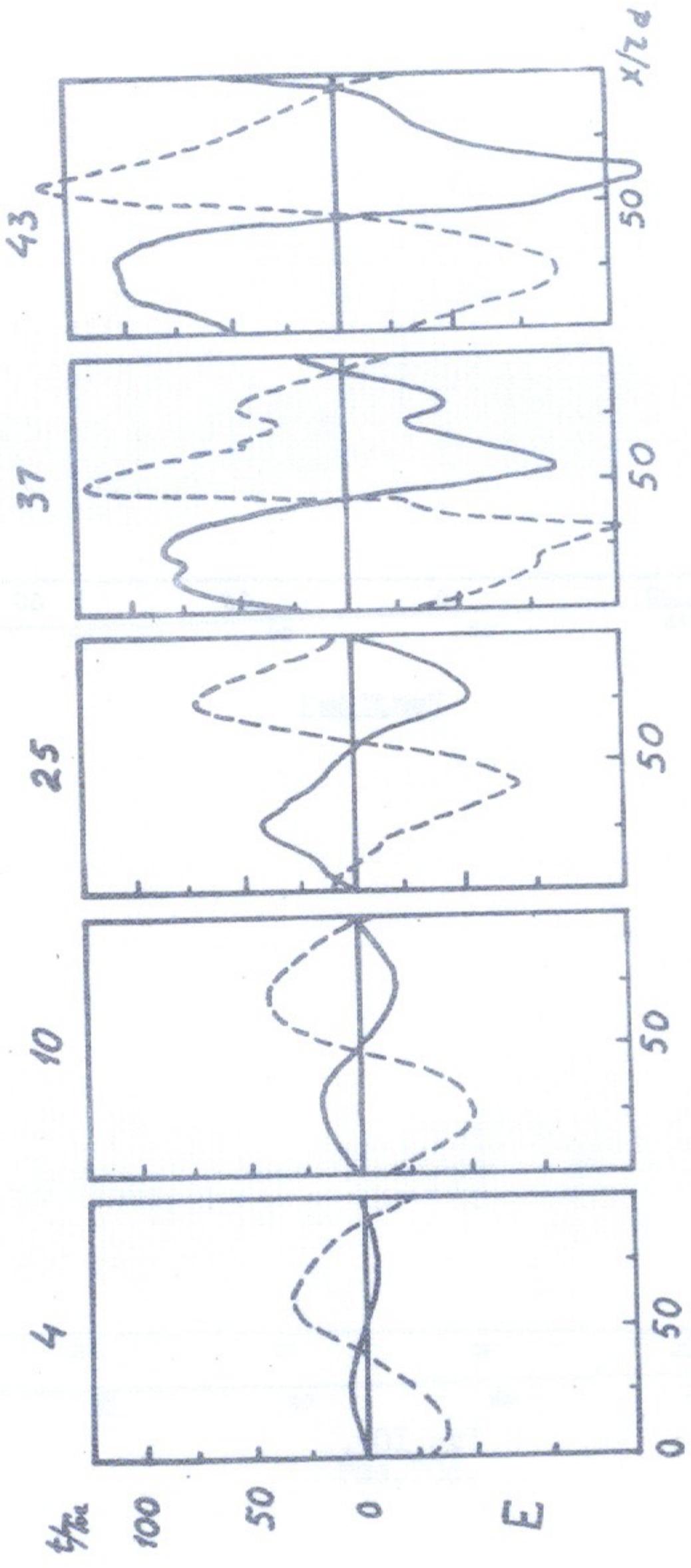


FIG. II.

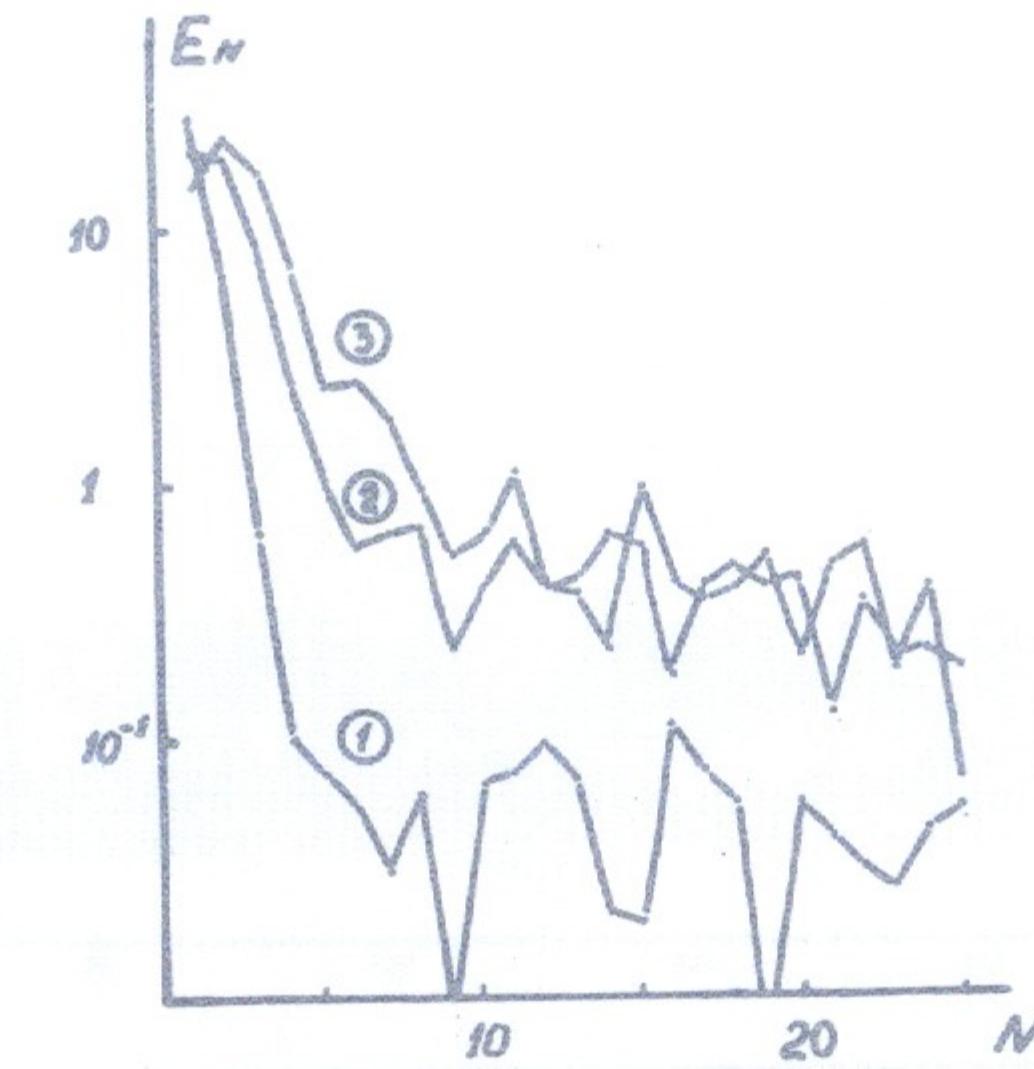


FIG. 12.

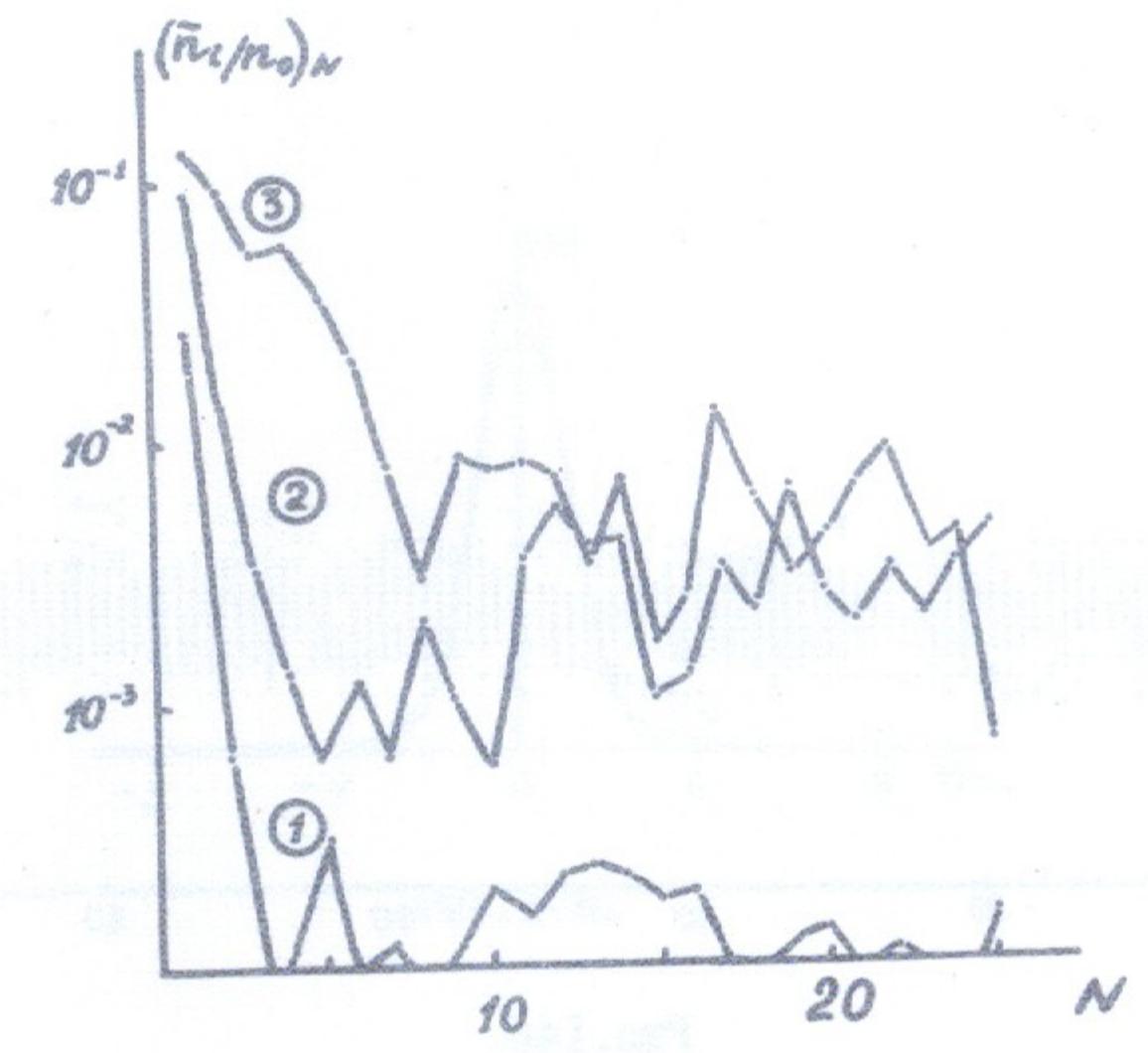


FIG. 13.

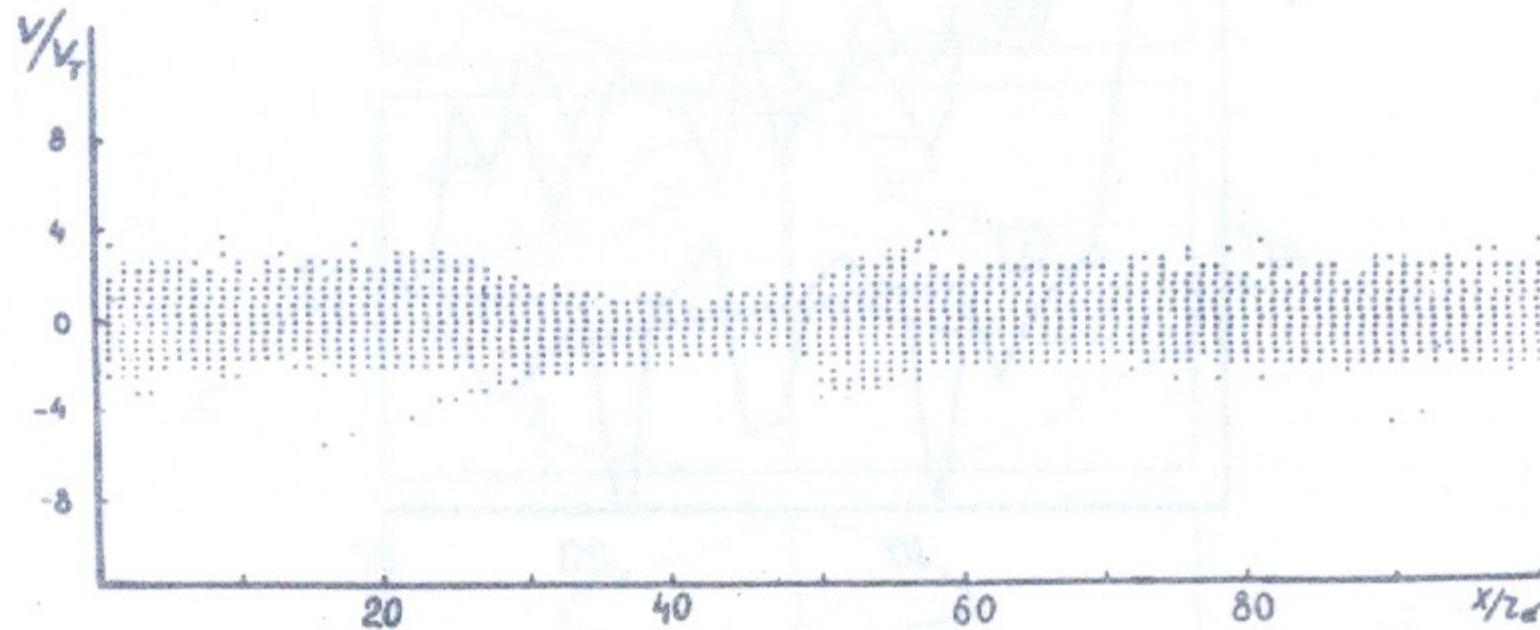


FIG. I4a.

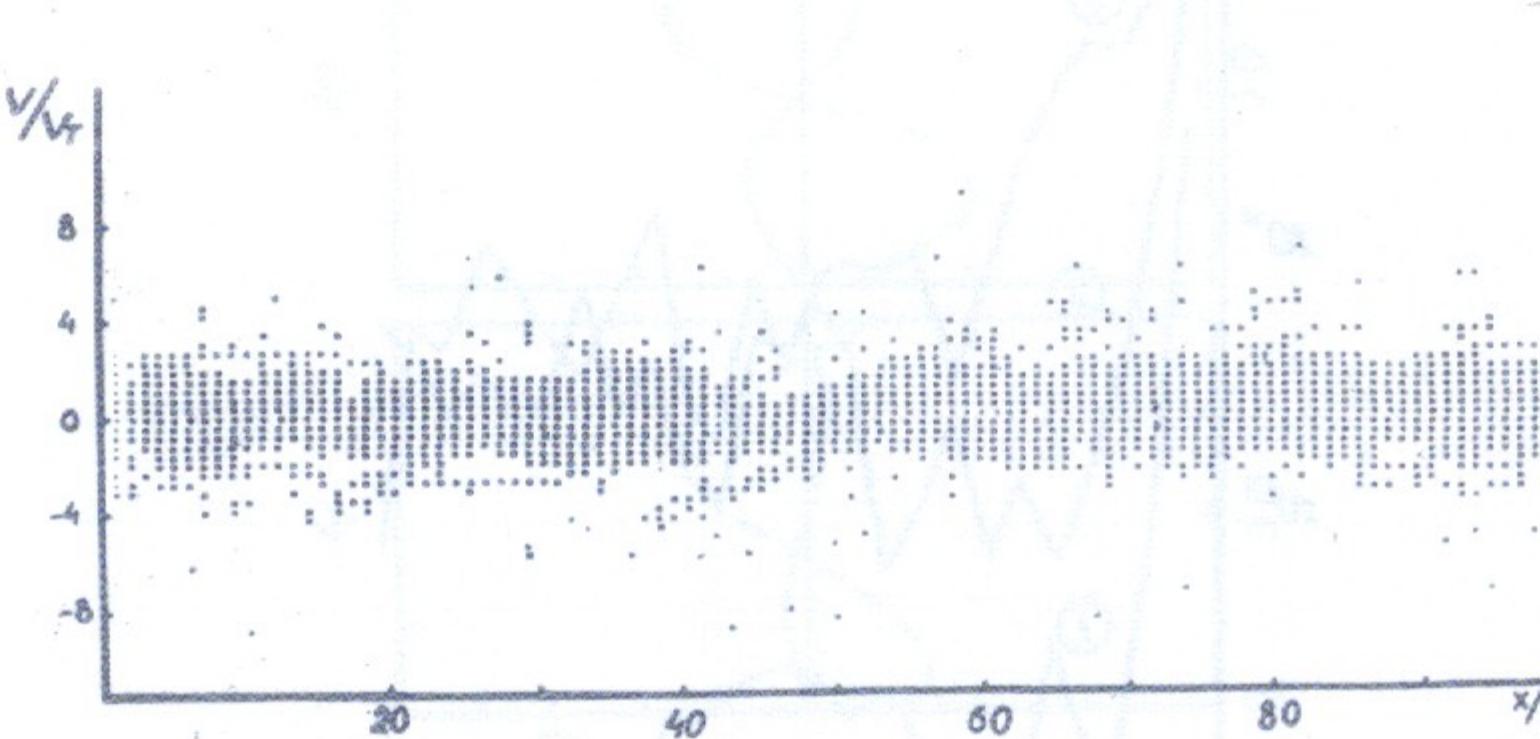


FIG. I4b.

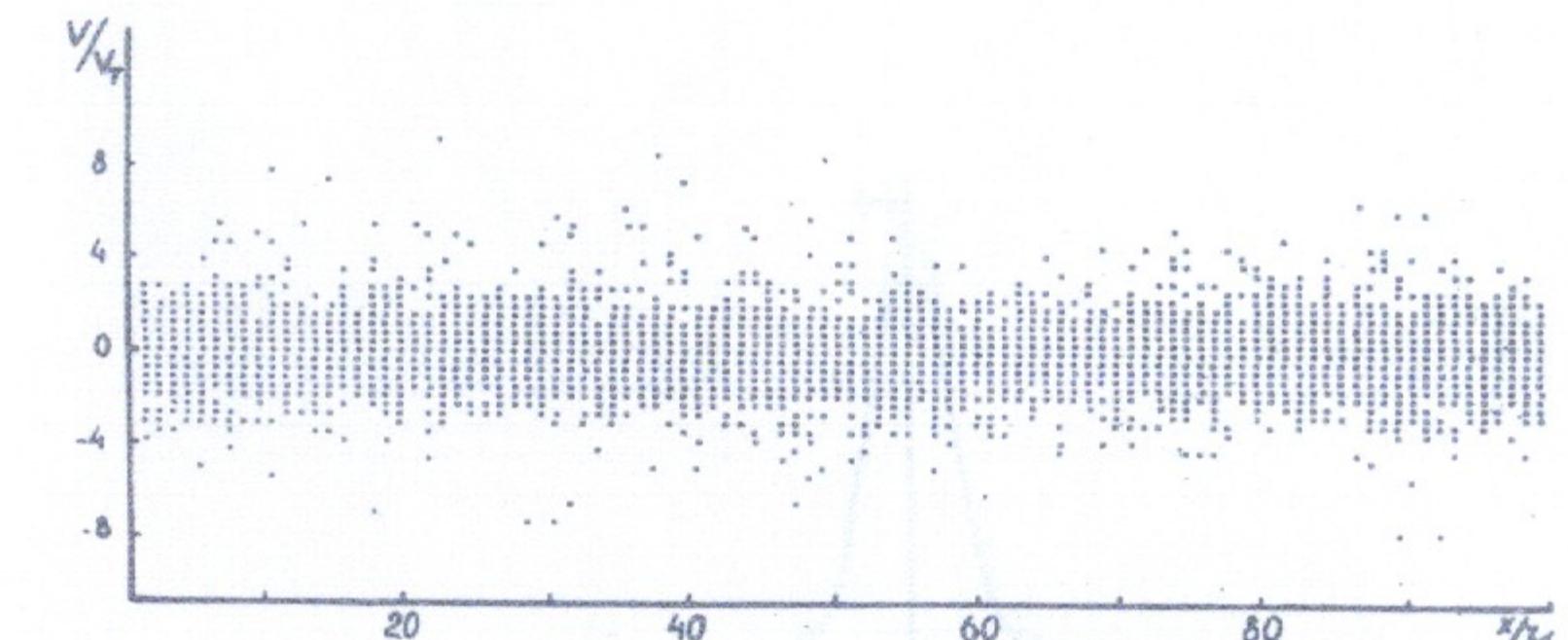


FIG. I4c.

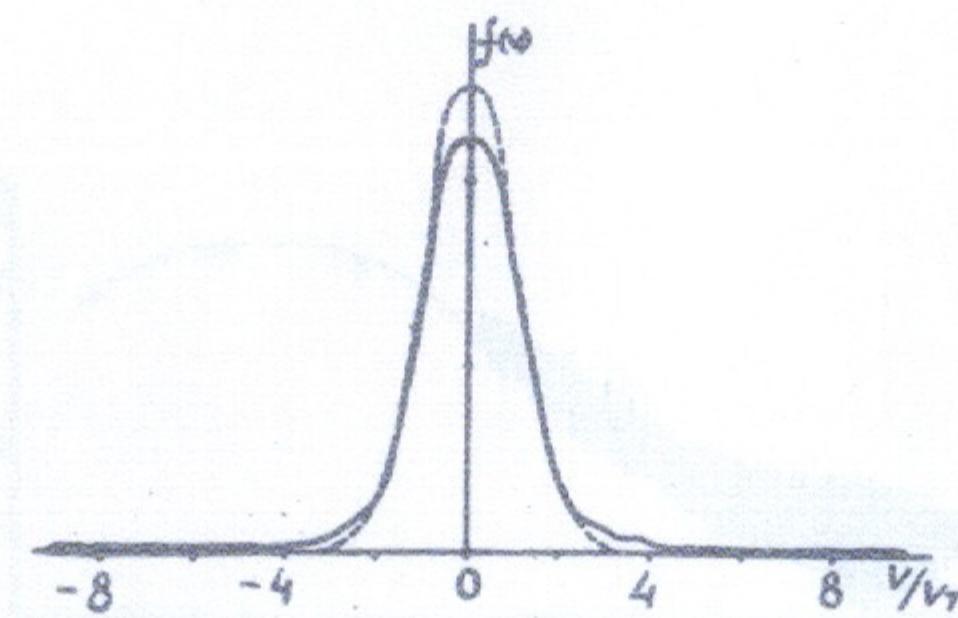


FIG. I5a.

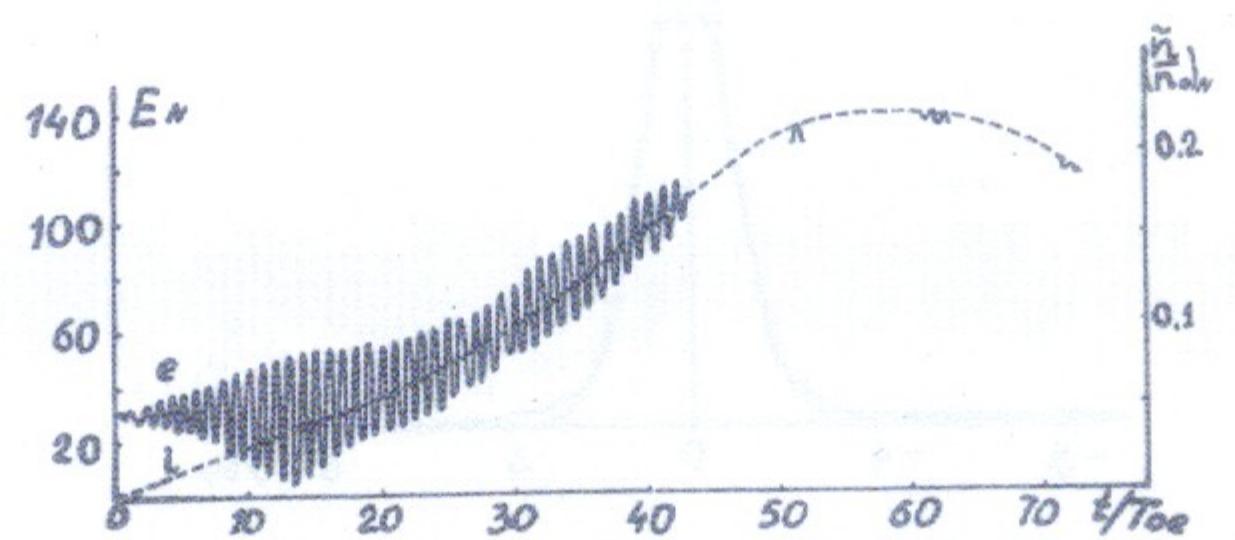
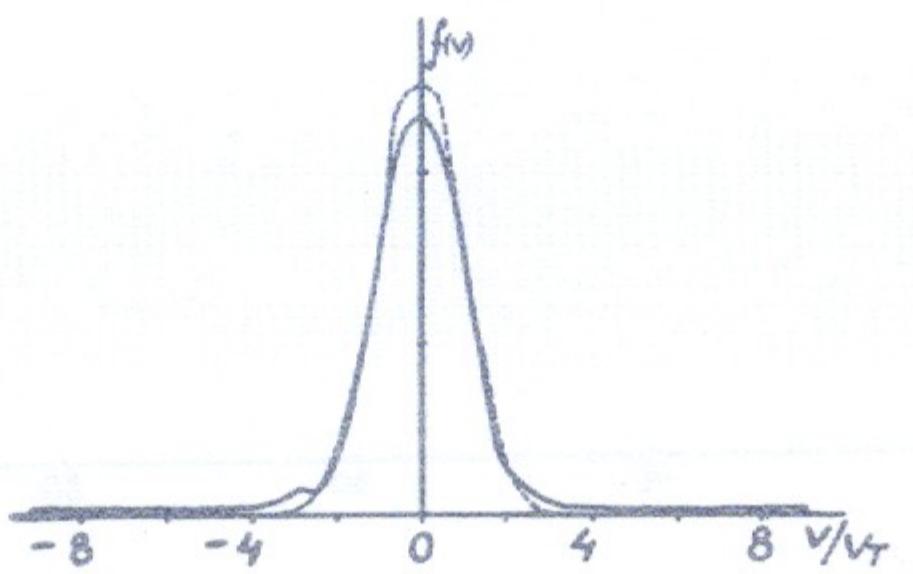


Рис.16.

Работа поступила - 3 января 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ  
Подписано к печати 10.II-1977г. МН 02646  
Усл. 2,5 печ.л., 2,0 учетно-изд.л.  
Тираж 250 экз. Бесплатно  
Заказ № 15.