

9
И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И ЯФ 77-14

Н.И.Зиневич, М.М.Карлинер

ПОПЕРЕЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПУЧКА
ПРИ ЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ШИХТОВАННЫМ
ЖЕЛЕЗОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТА ЦИКЛИЧЕСКОГО
УСКОРИТЕЛЯ

Новосибирск

1977

ПОПЕРЕЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПУЧКА ПРИ ЕГО ВЗАИМО-
ДЕЙСТВИИ С ШИХТОВАННЫМ ЖЕЛЕЗОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТА
ЦИКЛИЧЕСКОГО УСКОРИТЕЛЯ

Н.И.Зиневич, М.М.Карлинер

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрено электромагнитное взаимодействие пучка заряженных частиц с шихтованными полюсами электромагнита в электронном синхротроне, в котором отсутствует металлическая камера. Показано, что при определенных условиях возможно возникновение поперечной неустойчивости. Найдены условия устойчивости и вычислены инкременты для сгруппированного и непрерывного пучков. Приведены численные данные для синхротрона Б-4 Института ядерной физики (г.Новосибирск)

В В Е Д Е Н И Е

В синхротронах с коротким циклом ускорения (менее 10 мсек) камера не может быть металлической, так как вихревые токи в стенках искажают конфигурацию магнитного поля в области движения частиц. Поэтому в таких синхротронах ускоряемый пучок непосредственно "видит" полюса магнита, выполняемые из изолированных пластин железа - "шихтованные" полюса (см. рис. 1). Так устроены, например, синхротроны Института ядерной физики (г. Новосибирск) Б-3М и Б-4, бустер протонного синхротрона *Fermilab* (Батавия, США) и др.

Магнитное поле пучка проникает в зазоры шихтованного железа и, диффундируя в толщу железа; "запоминается" там на несколько оборотов. Действие этого "запомненного" поля при определенных условиях может приводить к неустойчивости поперечных колебаний пучка. Причем ввиду того, что захваченный магнитный поток велик, инкременты неустойчивостей в этом случае существенно превышают инкременты при взаимодействии со сплошной металлической камерой. Впервые на опасность такого рода неустойчивостей обратил внимание, по-видимому, Б.В. Чириков /1/.

В настоящей работе приводится анализ взаимодействия пучка с шихтованными полюсами. Анализ структуры, представленной на рис. 1, слишком сложен, поэтому рассмотрена идеализированная система, изображенная на рис. 2. Это - прямоугольная камера, у которой боковые стенки выполнены из идеально проводящего материала (медные шины), а верхняя и нижняя - из шихтованного железа. Шины представляют собой в сечении полуплоскости, а шихтованное железо - неограниченные вверх и вниз полуполосы.

Кроме того, получены результаты также для другой идеализированной модели - камеры кругового сечения со стенками из шихтован-

ного железа (рис.3).

Исследование устойчивости осуществлено по известной схеме /2/. Вначале определяется электромагнитное поле, создаваемое пучком благодаря его когерентному движению. Затем анализируется движение пучка под действием наведенных полей. Рассмотрены только вертикальные колебания, хотя аналогичным способом могут быть исследованы и радиальные колебания.

Найдены условия устойчивости сплошного (равномерно распределенного по орбите) и сгруппированного пучков. Для исследования сгруппированного пучка принято предположение, что он колеблется как единое целое (макрочастица). Устойчивость сплошного пучка производится с помощью кинетического уравнения (Власова).

Авторы выражают благодарность В.Г.Давидовскому за полезные обсуждения.

§ I. Электромагнитные поля, возбуждаемые пучком в камере циклического ускорителя со стенками из шихтованного железа

Камера циклического ускорителя может рассматриваться как волновод, в котором движущийся пучок заряженных частиц возбуждает нераспространяющиеся волны. Если вся стенка камеры или ее часть выполнены из листов железа с зазорами между ними, то между листами возбуждаются электромагнитные волны, связанные с волнами в самой камере.

При проведении расчетов электромагнитного поля, возбуждаемого пучком в камере, мы будем различать две области (рис.2): область свободного пространства (область I) внутри камеры и область шихтованного железа (область II). Поля на границе этих областей должны быть "сшиты". Условия на границе двух областей в достаточной степени сложны. Поэтому вместо строгих условий мы будем пользоваться усредненными, заменяя периодически шихтованное железо непрерывной средой. Фактически это означает, что шивание производится лишь для нулевой пространственной гармоники полей. Такое шивание дает достаточно точный результат, если период шихтовки весьма мал по сравнению с размерами камеры, что почти всегда выполняется /3/.

В дальнейшем область шихтованного железа характеризуется следующими параметрами: d и d' - шаг шихтовки и расстояние между пластинами соответственно, μ_{α} и σ - магнитная проницаемость и проводимость листов железа. Применяемые обозначения координат: z - продольная координата (вдоль от камеры), x , y - вертикальная и радиальная координаты соответственно (рис.4). В обла-

ти шихтовки z — координата, перпендикулярная листам железа (т.е. параллельная оси камеры). Скорость продольного движения равновесной частицы v , частота обращения равновесной частицы ω_0 , радиус орбиты $R = \frac{v}{\omega_0}$.

Плотность тока пучка в циклическом ускорителе $\vec{j}(x, y, z, t)$, где $z = z_0 - vt$, периодична по переменной z и может быть представлена в виде ряда Фурье;

$$\vec{j}(x, y, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{j}_n(x, y, t) e^{i \frac{nz}{R}} \quad (1)$$

Общее решение неоднородной системы уравнений Максвелла (подвергнутой преобразованию Лапласа)

$$\text{rot} \vec{E} = -s\mu \vec{H}, \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + s\varepsilon \vec{E} \quad (2)$$

удовлетворяющее граничным условиям, может быть представлено в области I, как обычно, в виде суммы частного решения неоднородной системы (2) (вынужденное поле) и общего решения соответствующей однородной системы (свободного поля). В качестве частного решения удобно принять решение системы (2), удовлетворяющее на стенках камеры условию равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля, т.е. граничным условием в волноводе с идеально изотропно проводящими стенками, поперечное сечение которого совпадает с сечением камеры.

Такое решение, периодичное по z , может быть записано в виде /2/:

$$\vec{E} = -\frac{1}{2} \sum_{n,k} \frac{e^{i \frac{nz}{R}}}{[\vec{E}_k \vec{H}_k]_c} \left\{ \frac{\vec{E}_k}{\gamma_k + i \frac{\mu}{R} s} \int \vec{E}_k \vec{j}_n(s+i\mu\omega_0) ds + \frac{\vec{E}_k}{\gamma_k - i \frac{\mu}{R} s} \int \vec{E}_k \vec{j}_n(s-i\mu\omega_0) ds \right\} - \frac{1}{2s} \vec{j}_c, \quad (3)$$

6

$$\vec{H} = -\frac{1}{2} \sum_{n,k} \frac{e^{i \frac{nz}{R}}}{[\vec{E}_k \vec{H}_k]_c} \left\{ \frac{\vec{H}_k}{\gamma_k + i \frac{\mu}{R} s} \int \vec{E}_k \vec{j}_n(s+i\mu\omega_0) ds + \frac{\vec{H}_k}{\gamma_k - i \frac{\mu}{R} s} \int \vec{E}_k \vec{j}_n(s-i\mu\omega_0) ds \right\}. \quad (4)$$

Здесь $\vec{E}_k(r, s)$, $\vec{H}_k(r, s)$ — собственные векторные функции волновода с сечением камеры, γ_k — соответствующие им волновые числа (продольные); интегралы берутся по сечению камеры, \vec{r} — поперечная координата.

Заметим, что в дальнейшем мы будем пренебрегать поперечными составляющими плотности тока, которые малы по сравнению с продольной составляющей. Их вклад в соответствующие силы Лоренца порядка $\frac{v}{R}$ от вклада продольного тока /2/, где v — относительная частота поперечных колебаний, a — характерный размер камеры. Продольную составляющую электрического поля имеют только собственные векторные функции электрического типа, которые могут быть выражены через мембранную функцию $\phi_k(x, y)$ /4/:

$$\vec{E}_k^{(e)} = -\nabla \phi_k + \frac{g_k^2}{\gamma_k} \phi_k \vec{e}_z \quad (5)$$

$$\vec{H}_k^{(e)} = -\frac{s\varepsilon}{\gamma_k} \vec{e}_z \times \nabla \phi_k$$

причем функции ϕ_k удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \phi_k + g_k^2 \phi_k = 0 \quad (6)$$

с граничным условием $\phi_k = 0$ на контуре поперечного сечения волновода С. Здесь g_k^2 — собственные значения задачи. Волновые числа γ_k связаны с g_k^2 соотношением:

$$\gamma_k^2 = g_k^2 + s^2 \mu \varepsilon = g_k^2 + \frac{s^2}{c^2} \quad (7)$$

7

Таким образом, в вынужденное поле входят только электрические типы волн, благодаря чему соотношения (3) и (4) могут быть выражены через функции ϕ_c . В частности, для поперечных составляющих полей получаются выражения

$$\vec{E}_z = \sum_{m,k} \frac{e^{i\vec{z} \cdot \vec{e}}}{\gamma_{kz}^2 + \frac{m^2}{R^2}} \frac{im/R}{s\epsilon} \frac{\nabla \phi_c(x,y)}{\int \phi_c^2 ds} \int_S \phi_c(x',y') j_m(x',y', s+im\omega_0) ds' \quad (8)$$

$$\vec{H}_z = - \sum_{m,k} \frac{e^{i\vec{z} \cdot \vec{e}}}{\gamma_{kz}^2 + \frac{m^2}{R^2}} \frac{\vec{e} \times \nabla \phi_c(x,y)}{\int \phi_c^2 ds} \int_S \phi_c(x',y') j_m(x',y', s+im\omega_0) ds' \quad (9)$$

где \vec{e} — единичный вектор в направлении оси z .

Свободное поле, периодичное по z , может быть представлено следующим образом:

$$\vec{E}_{ce} = \sum_n \vec{e}_n(x,y) e^{i\vec{z} \cdot \vec{e}} \quad , \quad \vec{H}_{ce} = \sum_n \vec{h}_n(x,y) e^{i\vec{z} \cdot \vec{e}} \quad (10)$$

причем функции \vec{e}_n и \vec{h}_n выражаются через мембранные функции $\Phi_m(x,y)$ и $\Psi_m(x,y)$:

$$\vec{e}_n = \vec{e}_0 \times \nabla \Psi_m - \nabla \Phi_m + \frac{\frac{m^2}{R^2} + s^2 \mu \epsilon}{im/R} \Phi_m \vec{e}_0 \quad (11)$$

$$\vec{h}_n = \frac{s\epsilon}{im/R} \vec{e}_0 \times \nabla \Phi_m + \frac{im/R}{s\mu} \nabla \Psi_m - \frac{\frac{m^2}{R^2} + s^2 \mu \epsilon}{s\mu} \Psi_m \vec{e}_0 \quad (12)$$

Мембранные функции удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \Phi_m - (\frac{m^2}{R^2} + s^2 \mu \epsilon) \Phi_m = 0 \quad (13)$$

$$\Delta \Psi_m - (\frac{m^2}{R^2} + s^2 \mu \epsilon) \Psi_m = 0$$

Для упрощения проводимость краев листов железа, обращенных в камеру, будем считать идеальной. При этом составляющая \vec{e}_n

касательная к контуру поперечного сечения камеры, должна обращаться в нуль, то-есть

$$\frac{\partial \Psi_m}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

На периметре S поперечного сечения камеры направления векторов нормали и касательной \vec{n} и \vec{e} показаны на рис.4.

Обратимся теперь к определению электромагнитного поля между пластинами шихтованного железа. Ввиду малого расстояния, между идеально проводящими пластинами могут распространяться лишь волны с вектором электрического поля, перпендикулярным пластинам. При конечной проводимости появляется составляющая электрического поля, параллельная пластинам. Поле между пластинами с учетом их конечной проводимости может быть получено с помощью вектора Герца, имеющего лишь одну составляющую, перпендикулярную пластинам (параллельную оси камеры) /4/:

$$\vec{\Pi} = \Psi(x,y) \operatorname{ch} \eta z \cdot \vec{e}_0 \quad (15)$$

Пользуясь соотношениями /4/:

$$\vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{\Pi}) - s^2 \mu \epsilon \vec{\Pi} \quad , \quad \vec{H} = j\omega \epsilon (\nabla \times \vec{\Pi})$$

получим для поля между пластинами:

$$\vec{E} = \nabla \Psi \cdot \operatorname{sh} \eta z + \frac{\eta^2 - s^2 \mu \epsilon}{\eta} \Psi \cdot \operatorname{ch} \eta z \cdot \vec{e}_0 \quad (16)$$

$$\vec{H} = -s\epsilon/\eta \cdot (\vec{e}_0 \times \nabla \Psi) \cdot \operatorname{ch} \eta z \quad (17)$$

Величина η может быть найдена с помощью условия Леонтовича на поверхности пластин:

$$\vec{n} \times \vec{E} = \xi \cdot \vec{n} \times (\vec{H} \times \vec{n}) \quad , \quad \xi = \sqrt{\frac{s\mu\sigma}{\sigma}} \quad (18)$$

где \vec{n} — нормаль, направленная в металл пластин. Это условие, если подставить в него (16) и (17) и положить $\epsilon = \frac{d'}{2}$, дает уравнение для определения величины η :

$$\eta + h \frac{\eta d'}{2} = -s\epsilon\xi \quad (19)$$

При $\frac{\eta d'}{2} \ll 1$ (т.е. если затухание волны мало на длине, равной расстоянию между пластинами) имеем приближенное равенство

$$\eta^2 \approx -\frac{s\epsilon\xi}{d'/2} \quad (20)$$

Заметим, что функция $\Psi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Psi + (\eta^2 - s^2\mu\epsilon)\Psi = 0 \quad (21)$$

Найдем условия "сшивания" на границе между камерой и областью шихтованного железа. "Сшиванию" подлежат продольная (e_{-y}) составляющая электрического поля и составляющая магнитного поля, касательная к контуру сечения. При этом продольная составляющая электрического поля со стороны железа должна быть усреднена с учетом того, что щели между пластинами железа занимают лишь часть длины $l/3$.

Вынужденное электрическое поле (8) не имеет продольной составляющей на стенках камеры. Поэтому в соответствующее условие на границе входят лишь продольные составляющие полей (11) и (16):

$$\frac{\frac{m^2}{2} + s^2\mu\epsilon}{im/R} \Phi_m = \frac{d'}{d} \frac{\eta^2 - s^2\mu\epsilon}{\eta} \Psi_m \quad \text{на } C. \quad (22)$$

В условии сшивания тангенциальных составляющих магнитного поля войдет и соответствующая составляющая вынужденного поля. Уравнение сшивания имеет вид:

$$-\sum_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \frac{1}{\gamma_k^2 + \frac{m^2}{R^2}} \int_S \Phi_k^2 ds + \frac{1}{s} \int_S \Phi_k^2 ds + \frac{\epsilon s}{im/R} \frac{\partial \Phi_m}{\partial n} + \frac{im/R}{s\mu} \frac{\partial \Psi_m}{\partial \tau} = -\frac{s\epsilon}{\eta} \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} \quad (23)$$

Напомним, что $\frac{\partial}{\partial n}$ и $\frac{\partial}{\partial \tau}$ — производные соответственно по направлениям нормали и касательной к контуру C сечения камеры, причем нормаль направлена наружу из камеры, а касательная — имеет направление, показанное на рис. 4.

Дальнейшие вычисления будут проведены ниже для камер прямоугольного и кругового сечений.

Камера прямоугольного сечения

На рис. 2 изображен схематический разрез камеры. Решение уравнений (13) можно представить в следующей форме

$$\Phi_m = \sum_n \left[\Phi_{mn}^s \operatorname{sh} \beta_{mn} x + \Phi_{mn}^c \operatorname{ch} \beta_{mn} x \right] \sin \frac{n\pi}{\delta} \left(y + \frac{\delta}{2} \right),$$

$$\Psi_m = \sum_n \left[\Psi_{mn}^s \operatorname{sh} \beta_{mn} x + \Psi_{mn}^c \operatorname{ch} \beta_{mn} x \right] \cos \frac{n\pi}{\delta} \left(y + \frac{\delta}{2} \right),$$

где $\beta_{mn}^2 = s^2\mu\epsilon + \frac{n^2\pi^2}{\delta^2} + \frac{m^2}{R^2}$

Нетрудно найти вид функций $\Psi_m(x, y)$, определяющих конфигурацию полей между пластинами шихтовки:

$$\Psi_m(x, y) = \sum_n \sin \frac{n\pi}{\delta} \left(y + \frac{\delta}{2} \right) \Psi_{mn} e^{-\beta_{mn} x} \quad - \text{ для верхней области,}$$

$$\Psi_m(x, y) = \sum_n \sin \frac{n\pi}{\delta} \left(y + \frac{\delta}{2} \right) \Psi_{mn} e^{\beta_{mn} x} \quad - \text{ для нижней области,}$$

здесь $\gamma_n^2 = s^2\mu\epsilon + \frac{n^2\pi^2}{\delta^2} - \eta^2$

Зависимость от x взята в такой форме, чтобы удовлетворить условиям излучения.

Неизвестные коэффициенты можно определить из (14), (22), (23), учитывая, что мембранные функции $\Phi_k(x, y)$ представимы следующим образом

$$\Phi_{nz}(x, y) = \sin \frac{n\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right) \sin \frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2}\right).$$

Конкретный вид этих коэффициентов приведен в Приложении. В дальнейшем, при исследовании устойчивости вертикальных колебаний, нам понадобятся компоненты поля E_x и H_y . При этом интерес представляет лишь свободное поле, так как вынужденное поле не вызывает неустойчивости: оно совпадает с полем пучка в волноводе с идеально проводящими стенками.

Соответствующие компоненты свободного поля вблизи оси камеры ($x=0, y=0$) равны

$$E_x = - \sum_{m,n} e^{-\frac{imz}{R}} \frac{\frac{m^2 + s^2 \mu \epsilon}{R^2}}{\beta_{mn}} \Phi_{mn}^3 \sin \frac{n\pi}{2} \quad (24)$$

$$H_y = \sum_{m,n} e^{-\frac{imz}{R}} \frac{(\frac{m^2 + s^2 \mu \epsilon}{R^2})(\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + s^2 \mu \epsilon)}{\frac{im}{R} \beta_{mn} s \mu} \Phi_{mn}^3 \sin \frac{n\pi}{2}$$

Заметим, что в квазистатическом приближении действием поперечного электрического поля на частицы можно пренебречь. Подставляя Φ_{mn}^3 из (П.2) в (24) в квазистатическом приближении

$$\left(\beta_{mn} \approx \frac{n\pi}{b}, \quad \gamma_n \approx \frac{n\pi}{a} \right) \text{ получим вблизи оси камерн:} \quad (25)$$

$$\frac{1}{\epsilon} F_x = -\nu B_y = \sum_{m,n} e^{-\frac{imz}{R}} \frac{1}{s \nu \mu \epsilon \cdot d} \frac{(s \mu d' + 2\xi) \sin^2 \frac{n\pi}{2}}{1 + \frac{d'}{d} \left(1 + \frac{2\xi}{s \mu d'}\right) \text{ct} h \frac{n\pi a}{2b}} \cdot \frac{\frac{n\pi a}{2b}}{\text{sh}^2 \frac{n\pi a}{2b}}$$

$$\cdot \frac{2}{a b} \int_S x j_n(x, y, s + im\omega_0) dx dy$$

Обозначая

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s \mu d' + 2\xi) \cdot \sin^2 \frac{n\pi}{2}}{1 + \frac{d'}{d} \left(1 + \frac{2\xi}{s \mu d'}\right) \text{ct} h \frac{n\pi a}{2b}} \cdot \frac{\frac{n\pi a}{2b}}{\text{sh}^2 \frac{n\pi a}{2b}} \quad (26)$$

— импеданс камеры, получим для силы Лоренца в сопровождающей системе координат

$$\frac{1}{\epsilon} F_x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{imz}{R}} \frac{Z(s - im\omega_0)}{s - im\omega_0} \frac{1}{d \nu \mu \epsilon} \cdot \frac{2}{a b} \int_S x j_n(x, y, s) dx dy. \quad (27)$$

Представляет интерес случай, когда $b \gg a$. В этом случае в формуле (27) можно перейти к пределу $b \rightarrow \infty$, заменяя суммирование по n интегрированием. В результате получим

$$\frac{1}{\epsilon} F_x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{imz}{R}} \frac{Z(s - im\omega_0)}{s - im\omega_0} \frac{1}{d \nu \mu \epsilon} \frac{2}{\pi a^2} \int_S x j_n(x, y, s) dx dy, \quad (28)$$

причем

$$Z(s) = (s \mu d' + 2\xi) \int_0^{\infty} \frac{t dt}{\text{sh}^2 \left[1 + \frac{d'}{d} \left(1 + \frac{2\xi}{s \mu d'}\right) \right] \text{ct} h t}$$

Отметим, что аналогичное соотношение было получено В.Г. Давидовским другим способом.

Камера круглого поперечного сечения

Решение уравнений (I3) может быть записано в цилиндрической системе координат следующим образом

$$\Phi_m = \sum_n \left(\Phi_{mn}^1 \cos n\gamma + \Phi_{mn}^2 \sin n\gamma \right) J_n(\gamma_m r), \quad (29)$$

$$\Psi_m = \sum_n \left(\Psi_{mn}^1 \cos n\gamma + \Psi_{mn}^2 \sin n\gamma \right) J_n(\gamma_m r),$$

где $\gamma_m^2 = -s^2 \mu \epsilon - \frac{m^2}{R^2}$, $J_n(z)$ — функция Бесселя n -го порядка.

Для функции $\Psi_m(r, \varphi)$, определяющей поля в зазорах между листами железа, получаем

$$\Psi_m(r, \varphi) = \sum_n H_n^{(1)}(\gamma_s r) (A_{mn} \cos n\varphi + B_{mn} \sin n\varphi)$$

Здесь $\gamma_s^2 = -s^2 \mu \epsilon + \eta^2$, $H_n^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода n -го порядка. Неизвестные коэффициенты находятся из условий на границе камеры и шихтовки (14), (22), (23) с учетом того, что мембранные функции имеют вид:

$$\Phi_{nk}(r, \varphi) = J_n(t_{nk} r) \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix},$$

причем t_{nk} определяются уравнением $J_n(t_{nk} a) = 0$, a — радиус сечения камеры.

Полные выражения для коэффициентов в (29) приведены в Приложении.

Для малых значений r (29) упрощается. С точностью до величин второго порядка относительно r вблизи оси имеем:

$$\Phi_m(x, y) = (\Phi_{m1}^1 x + \Phi_{m1}^2 y) \cdot \frac{\gamma_m}{2},$$

$$\Psi_m(x, y) = (\Psi_{m1}^1 x + \Psi_{m1}^2 y) \frac{\gamma_m}{2}.$$

Пользуясь этими соотношениями, а также (10), (11), (12) и (13), для составляющих E_x и H_y свободного поля вблизи оси камеры получаем соотношения:

$$E_x = \sum_m e^{i \frac{mz}{R}} \frac{\gamma_m}{2} \frac{J_2(\gamma_m a)}{J_1'(\gamma_m a)} \Phi_{m1}^1,$$

$$H_y = \sum_m e^{i \frac{mz}{R}} \frac{(\frac{m^2}{R^2} + s^2 \mu \epsilon) \cdot J_1(\gamma_m a) - \gamma_m a s^2 \mu \epsilon J_2(\gamma_m a)}{2 \cdot \frac{im}{R} s \mu a J_1'(\gamma_m a)} \Phi_{m1}^1.$$

Пренебрегая, как и в случае прямоугольной камеры, вкладом электрического поля в силу Лоренца, найдем (при $\gamma_m a \ll 1$):

$$\frac{1}{e} F_x = -\nabla B_y = \sum_m e^{i \frac{mz}{R}} \frac{1}{s d \sqrt{\mu \epsilon}} \frac{s \mu d' + 2 \xi}{1 + \frac{d'}{d} \left(1 + \frac{2 \xi}{s \mu d'}\right) - \frac{\gamma_m a H_0(\gamma_m a)}{H_1(\gamma_m a)}} \cdot \frac{1}{\pi a^2} \int_S x j_m(x, y, s) dx dy.$$

Обозначая

$$Z(s) = \frac{s \mu d' + 2 \xi}{1 + \frac{d'}{d} \left(1 + \frac{2 \xi}{s \mu d'}\right) - \frac{\gamma_m a H_0(\gamma_m a)}{H_1(\gamma_m a)}} \quad (30)$$

— импеданс камеры, получим для силы Лоренца в сопровождающей системе координат

$$\frac{1}{e} F_x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{mz}{R}} \frac{Z(s - im\omega_0)}{s - im\omega_0} \frac{1}{d \sqrt{\mu \epsilon}} \frac{1}{\pi a^2} \int_S x j_m(x, y, s) dx dy. \quad (31)$$

Формулы (27), (28) и (31) для силы Лоренца могут быть записаны в общем виде

$$\frac{1}{e} F_x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{mz}{R}} \frac{Z(s - im\omega_0)}{s - im\omega_0} \frac{1}{d \sqrt{\mu \epsilon}} \frac{1}{S_j} \int_S x j_m(x, y, s) dx dy, \quad (32)$$

где S_j — характерная площадь взаимодействия пучка с камерой, $Z(s)$ — импеданс камеры. Напомним, что $j_m(x, y, s)$ — m -я азимутальная гармоника продольной составляющей плотности

тока пучка.

§ 2. Устойчивость когерентных вертикальных колебаний

Здесь мы рассмотрим вначале устойчивость равномерно распределенного по орбите (сплошного) пучка, а затем устойчивость пучка, сгруппированного в один сгусток.

Сплошной пучок имеет место, в частности, непосредственно после инжекции в электронном синхротроне Б-4 Института ядерной физики (Новосибирск), в котором наблюдались поперечные неустойчивости именно в этот момент времени. После захвата в режим ускорения пучок группируется в сгустки. Таким образом, исследование устойчивости в том и другом режимах представляет практический интерес.

Для описания свойств пучка обычно используется одночастичная функция распределения в 6-мерном фазовом пространстве "координата-импульс" в сопровождающей системе координат. Количество частиц, заключенных в фазовом объеме $d\vec{r} d\vec{p}$, выражается через функцию распределения следующим образом

$$dN = N f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{r} d\vec{p}$$

а плотность тока

$$\vec{j} = eN \int \vec{v} f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p}$$

где \vec{v} — вектор скорости с составляющими $\frac{p_x}{m_s}, \frac{p_y}{m_s}, \frac{p_z}{m_s}$.

Сплошной пучок

При исследовании устойчивости удобнее перейти к переменным "действие-угол" для поперечного движения /2/. Функция распределения в этих переменных может быть представлена в виде:

$$f(\psi_x, J_x, z, p_z, t) = f_0(J_x, p_z) + \tilde{f}(\psi_x, J_x, z, p_z, t) \quad (33)$$

где f_0 — равновесная функция распределения, \tilde{f} — малое возмущение.

В дальнейшем будем предполагать, что в продольном направлении силы отсутствуют. Кинетическое уравнение в линейном по \tilde{f} приближении может быть записано следующим образом /2/:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \dot{\psi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi} + \dot{z} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} + \dot{J}_x \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial J_x} = 0, \quad (34)$$

$$\dot{\psi}_x = \Omega_x(J_x, p_z), \quad \dot{z} = \frac{p_z}{M}, \quad x = \sqrt{\frac{2J_x}{m_s \Omega_x}} \sin \psi_x,$$

$$\dot{J}_x = e \frac{\partial x}{\partial \psi_x} (E_x - v B_y), \quad \dot{p}_z = 0, \quad p_x = \sqrt{2m_s \Omega_x J_x} \cos \psi_x;$$

здесь $p_z = p_z - p_0$, p_0 — импульс равновесной частицы, $M = \frac{m_s}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$ — эквивалентная "масса" продольного движения, m_s — релятивистская масса равновесной частицы.

Подвергнув (34) преобразованию Лапласа по времени, получим

$$sF - \tilde{f}_0 + \Omega_x \frac{\partial F}{\partial \psi_x} + \frac{p_z}{M} \frac{\partial F}{\partial z} = -e \frac{\partial x}{\partial \psi_x} \mathcal{L} [E_x - v B_y] \frac{\partial f_0}{\partial J_x}, \quad (35)$$

где $F(\psi_x, \tilde{z}_x, z, p_x, s) = \mathcal{L}[\tilde{f}(\psi_x, \tilde{z}_x, z, p_x, t)]$, $\tilde{f}_0(\psi_x, \tilde{z}_x, z, p_x) = \tilde{f}(\psi_x, \tilde{z}_x, z, p_x, 0)$.

Функции F и \tilde{f}_0 периодичны по ψ_x и z и могут быть представлены рядами Фурье:

$$F(\psi_x, \tilde{z}_x, z, p_x, s) = \sum_{r,m} F_{r,m}(\tilde{z}_x, p_x, s) e^{ir\psi_x + \frac{im}{R}z}, \quad \tilde{f}_0 = \sum_{r,m} \tilde{f}_{0r,m} e^{ir\psi_x + \frac{im}{R}z}$$

Подставляя эти выражения, а также выражение для x в (35), найдем, что все $F_{r,m} = 0$, кроме тех, где $r = \pm 1$.

Амплитуды $F_{\pm 1,m}$ подчиняются уравнениям

$$(s+i\Omega_x + \frac{im}{R} \frac{p_x}{M}) F_{1,m} - \tilde{f}_{01,m} = -\frac{\partial f_0}{\partial \tilde{z}_x} \cdot \frac{e}{2} \sqrt{\frac{2\tilde{z}_x}{m_s \Omega_x}} \mathcal{Y}[E_x - \sqrt{B_x}]_m, \quad (36)$$

$$(s-i\Omega_x + \frac{im}{R} \frac{p_x}{M}) F_{-1,m} - \tilde{f}_{0-1,m} = -\frac{\partial f_0}{\partial \tilde{z}_x} \cdot \frac{e}{2} \sqrt{\frac{2\tilde{z}_x}{m_s \Omega_x}} \mathcal{Y}[E_x - \sqrt{B_x}]_m.$$

Если теперь подставить сюда выражение для силы Лоренца (32) и выразить плотность тока через функцию распределения, то уравнения (36) можно привести к следующему виду:

$$(s+i\Omega_x + \frac{im}{R}) F_{1,m} - \tilde{f}_{01,m} = -K_0 \frac{\pi}{i} \frac{Z(s-im\omega_0)}{s-im\omega_0} \frac{\partial f_0}{\partial \tilde{z}_x} \tilde{z}_x \int (F_{-1,m} - F_{1,m}) d\tilde{z}_x dp_x, \quad (37)$$

$$(s-i\Omega_x + \frac{im}{R} \frac{p_x}{M}) F_{-1,m} - \tilde{f}_{0-1,m} = -K_0 \frac{\pi}{i} \frac{Z(s-im\omega_0)}{s-im\omega_0} \frac{\partial f_0}{\partial \tilde{z}_x} \tilde{z}_x \int (F_{-1,m} - F_{1,m}) d\tilde{z}_x dp_x,$$

где $K_0 = \frac{e^2 N v}{2\pi R} \frac{2\pi R}{d\sqrt{\mu} \epsilon \epsilon_j} \frac{1}{m_s \Omega_x}$.

Уравнения (37) представляют собой систему интегральных уравнений относительно амплитуд возмущения $F_{1,m}$ и $F_{-1,m}$. Эта система приводится к системе линейных алгебраических уравнений путем интегрирования по \tilde{z}_x и p_x левых и правых частей. Приравнявая затем нулю определитель системы, получим дисперсионное уравнение, определяющее устойчивость:

$$1 - K_0 \frac{\pi}{i} \frac{Z(s-im\omega_0)}{s-im\omega_0} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \tilde{z}_x} \tilde{z}_x \int d\tilde{z}_x dp_x \left(\frac{1}{s+i\Omega_x + \frac{im}{R} \frac{p_x}{M}} - \frac{1}{s-i\Omega_x + \frac{im}{R} \frac{p_x}{M}} \right) \right) = 0 \quad (38)$$

Устойчивость определяется знаком вещественной части корней дисперсионного уравнения.

Исследование корней с помощью критерия Найквиста [2] приводит к следующему условию устойчивости

$$I_0 \frac{2\pi^2 c}{\beta_s U_0 \gamma_x} \frac{R^3}{d \epsilon_j} \operatorname{Re} \left\{ \frac{Z(i\Omega_x - im\omega_0)}{\gamma_x - m} [A_m(\Omega) - iB_m(\Omega)] \right\} < 1, \quad (39)$$

где Ω — корень уравнения

$$\operatorname{Im} \left\{ Z(i\Omega_x - im\omega_0) [A_m(\Omega) - iB_m(\Omega)] \right\} = 0 \quad (40)$$

Здесь $I_0 = \frac{e N v}{2\pi R}$ — средний ток пучка, $U_0 = \frac{mc^2}{e}$

— энергия покоя в электрон-вольтах и введены обозначения:

$$A_m(\Omega) = \pi \int \frac{\partial f_0}{\partial \tilde{z}_x} \tilde{z}_x d\tilde{z}_x dp_x \delta(\Omega - \Omega_x + \frac{m}{R} \frac{p_x}{M}), \quad (41)$$

$$B_m(\Omega) = \int \frac{\partial f_0}{\partial \tilde{z}_x} \tilde{z}_x d\tilde{z}_x dp_x \frac{1}{\Omega - \Omega_x + \frac{m}{R} \frac{p_x}{M}}$$

причем

$$\delta(\Omega - \Omega_x + \frac{m}{R} \frac{p_x}{M}) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma/\pi}{\sigma^2 + (\Omega - \Omega_x + \frac{m}{R} \frac{p_x}{M})^2}$$

— функция Дирака.

Выделяя в импедансе активную и реактивную части, неравенство (39) можно переписать следующим образом

(42)

$$I_0 \frac{2\pi^2 c}{\gamma_s \omega_s \gamma_s} \frac{R^3}{d \cdot S_j} \frac{R(\omega_s - m\omega_0)}{\gamma_s - m} \frac{A_m^2 + B_m^2}{A_m} < 1.$$

Для монотонно убывающей по J_x функции распределения (т.е. $\frac{\partial f_0}{\partial J_x} < 0$ при $0 < J_x < \infty$) из (41) следует, что $A_m < 0$. Так как $R(\omega_s - m\omega_0) > 0$, то знак левой части (42) определяется разностью $\gamma_s - m$ в знаменателе. При $\gamma_s - m < 0$ неравенство (42) нарушается, начиная с некоторого порогового тока пучка, и, следовательно, соответствующие моды ("медленные" волны) становятся неустойчивыми. При $\gamma_s - m > 0$ устойчивость сохраняется при любом токе. Неравенство $\gamma_s - m > 0$ соответствует "быстрым" волнам.

Для малых амплитуд колебаний и малого разброса по продольным импульсам имеем

$$\Omega_x(J_x, p_z) \approx \Omega_{x0} + \frac{\partial \Omega_x}{\partial J_x} J_x + \frac{\partial \Omega_x}{\partial p_z} p_z. \quad (43)$$

Учитывая, что /2/

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial p_z} = -\frac{x - \gamma_s}{R} \frac{1}{M},$$

где

$$x = \frac{p_0}{\alpha} \frac{\partial \gamma_s}{\partial p_z} = R \frac{\partial \gamma_s}{\partial y}, \quad y - \text{радиальная координата,}$$

мата, (43) можно записать в виде

$$\Omega_x = \Omega_{x0} - \varepsilon J_x - \frac{x - \gamma_s}{R} \frac{p_z}{M}.$$

Тогда для величин A_m и B_m получаем

$$A_m(\varepsilon) = \pi \int \frac{\partial f_0}{\partial J_x} J_x dJ_x dp_z \delta(\Omega - \Omega_{x0} + \varepsilon J_x + \frac{m + x - \gamma_s}{R} \frac{p_z}{M}), \quad (44)$$

$$B_m(\varepsilon) = \int \frac{\partial f_0}{\partial J_x} J_x dJ_x dp_z \frac{1}{\Omega - \Omega_{x0} + \varepsilon J_x + \frac{m + x - \gamma_s}{R} \frac{p_z}{M}}.$$

Сгруппированный пучок

Для исследования устойчивости сгруппированного сгустка представим сгусток в виде одной протяженной в продольном направлении макрочастицы, такой, что плотность тока может быть представлена в виде

$$\vec{j}(x, y, z, t) = \frac{eNv}{2\pi R} \delta(x - x_0) \delta(y) g(z) \quad \text{при } t > 0,$$

где x_0 - координата центра тяжести сгустка,

$g(z)$ - функция распределения в продольном направлении.

Тогда азимутальные гармоники плотности тока, входящие в выражение для силы Лоренца (32), оказываются равными

$$j_m(x, y, t) = \frac{eNv}{2\pi R} a_m \delta(x - x_0) \delta(y), \quad (45)$$

где

$$a_m = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} g(z) e^{-i \frac{m}{R} z} dz. \quad (46)$$

Сила Лоренца (32) зависит от продольной координаты. Используя модель протяженной макрочастицы, мы должны усреднить силу Лоренца по сгустку:

$$\langle F_x \rangle = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} F_x g(z) dz$$

После усреднения получаем:

$$\frac{1}{e} \langle F_x \rangle = \frac{e N v}{2\pi R} \frac{1}{d \sqrt{\mu \epsilon} S_j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2 \frac{Z(s-im\omega_0)}{s-im\omega_0} \mathcal{L}[x_0] \quad (47)$$

Методика, развитая в [2], позволяет найти инкремент вертикальных колебаний:

$$\sigma_x = - \frac{I_0 \omega_0}{2 \gamma_s U_0 \gamma_r} \frac{R^3}{d \cdot S_j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2 \frac{R(\Omega_x + m\omega_0)}{m + \gamma_x} \quad (48)$$

где $R(\Omega_x + m\omega_0) = \text{Re } Z(i\Omega_x + im\omega_0)$.

В частности, для гауссовского распределения

$$g(z) = \frac{2\pi R}{\Delta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\Delta^2}}$$

где Δ — полуширина распределения. В этом случае

$$|a_m|^2 = e^{-\frac{m^2 \Delta^2}{R^2}}$$

Инкремент вертикальных колебаний для гауссовского сгустка будет равен:

$$\sigma_x = - \frac{I_0 \omega_0}{2 \gamma_s U_0 \gamma_r} \frac{R^3}{d \cdot S_j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m^2 \Delta^2}{R^2}} \frac{R(\Omega_x + m\omega_0)}{m + \gamma_x} \quad (49)$$

§ 3. Численные оценки

Неустойчивость пучка электронов благодаря взаимодействию с шихтованным железным сердечником наблюдалась в электронном синхротроне Б-4 в Институте ядерной физики СО АН СССР (г.Новосибирск) в процессе инжекции. Инжекция в Б-4 производится при энергии электронов около 2,5 МэВ. Высокочастотная система Б-4 в это время выключена. В ходе инжекции электроны тормозятся с помощью специального бетатронного сердечника. Свертываясь, пучок за несколько оборотов заполняет апертуру камеры, после чего включается ускоряющий бетатронный сердечник, который доводит энергию электронов примерно до 15 МэВ. Дальнейшее ускорение осуществляется высокочастотным резонатором.

В ходе наладки Б-4 было обнаружено, что при накопленном токе больше 1-2 (до 10) ампер через очень короткое время после инжекции (0,5-2,0 мксек, в зависимости от тока) развиваются вертикальные бетатронные колебания, вследствие чего значительная часть накопленного тока теряется — остается 1 + 1,5 ампера.

Эта неустойчивость может быть объяснена взаимодействием с шихтованными стенками, которое дает близкие по величине инкременты. Ниже приводятся численные оценки для Б-4.

Синхротрон Б-4 имеет следующие основные параметры:

частота обращения	$f_0 = 37,5$ МГц
энергия частиц при инжекции	$E_s = 2,5$ МэВ
вертикальный размер камеры	$\alpha = 9$ см
радиальный размер камеры	$\beta = 14$ см.
шаг шихтовки	$d = 0,6$ мм

зазор между пластинами сердечника $d' = 0,1$ мм
 доля орбиты, занятая шихтованным сердечником $\approx 0,65$,
 относительная частота вертикальных колебаний $\nu_x = 0,7$
 средний радиус равновесной орбиты $R = 127$ см

Для железа в дальнейших расчетах приняты следующие параметры:
 удельная проводимость $\sigma = 2,5 \cdot 10^6$ мс/м (высокремнистая сталь), относительная магнитная проницаемость $\mu_{ст}/\mu_0 = 400$.

Для оценки пороговых токов вертикальной неустойчивости пренебрежем зависимостью частоты бетатронных колебаний от амплитуды (кубичная нелинейность) и будем учитывать лишь разброс в пучке по импульсам и зависимость ν_x от продольного импульса (хроматизм).

Для гауссовского распределения по частотам обращения (или соответственно, по импульсам)

$$F(\omega_z) = \frac{1}{\Delta\omega_z} \sqrt{\frac{z}{\pi}} e^{-\frac{z(\omega_z - \omega_0)^2}{\Delta\omega_z^2}}$$

легко получить

$$A_m(x) = -\pi \sqrt{\frac{z}{\pi}} \frac{1}{\Delta\omega_z |m+x-\nu_x|} e^{-x^2}$$

$$B_m(x) = -\sqrt{\frac{z}{\pi}} \frac{1}{\Delta\omega_z (m+x-\nu_x)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{x+t} dt$$

где $x = \sqrt{z} \frac{Q - Q_0}{\Delta\omega_z (m+x-\nu_x)}$

Пороговый ток может быть найден с помощью неравенства (42) и уравнения (40).

На рис.5 приведена зависимость активного и реактивного сопротивлений от ω/ω_0 . Для расчетов формулы (26) и (30) могут быть

переписаны в квазистатическом приближении следующим образом:

$$\frac{Z_1}{\omega_0 \mu_0 d'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\omega (1 + H \sqrt{\frac{z}{i\omega}})}{1 + D(1 + H \sqrt{\frac{z}{i\omega}}) \operatorname{cth} \frac{\pi n G}{z}} \cdot \frac{\frac{n\pi}{z} G}{1 + \frac{n\pi G}{z}} \quad - \text{ для}$$

прямоугольной камеры,

$$\frac{Z_2}{\omega_0 \mu_0 d'} = \frac{i\omega (1 + H \sqrt{\frac{z}{i\omega}})}{1 + D(1 + H \sqrt{\frac{z}{i\omega}})} \quad - \text{ для круглой}$$

камеры.

Здесь обозначено $H = \sqrt{\frac{\mu_{ст}}{\mu_0}} \frac{\delta_0}{d'}$, $\delta_0 = \sqrt{\frac{z}{\mu_0 \omega_0 \sigma}}$, $G = \frac{q}{\delta}$,
 $D = \frac{d'}{d}$, $\omega = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Результаты расчета пороговых токов для прямоугольной камеры при $\frac{\Delta\omega_z}{\omega_z} = 1\%$, $H = 10$, $G = 0,6$, $D = 0,15$ приведены в таблице I.

Таблица I. Пороговые токи в амперах

	$x = -3,0$	$x = 0$	$x = +3,0$
$m = 1$	3,1	0,3	3,8
$m = 2$	2,0	1,5	5,5
$m = 3$	1,2	3,5	8,3
$m = 4$	0,3	4,9	12,0
$m = 5$	1,7	7,1	12,0

Следует отметить, что максимальные пороговые токи получаются при положительном хроматизме.

Отрицательный хроматизм не дает выигрыша по сравнению с нулевым хроматизмом, так как в случае отрицательного хроматизма низкие пороги получаются для высоких мод ($m = 4$ в нашем случае).

Инкременты могут быть легко вычислены для токов, значительно превышающих пороговые, когда можно пренебречь разбросом частот. В этом случае инкремент равен

$$\sigma_x = \frac{I_0 \omega_0}{2 \gamma_x \gamma_e U_0} \frac{R^3}{S_j d} \frac{R(m\omega_0 - \omega_x)}{m - \gamma_x} \frac{L}{2\pi R}$$

где L — длина части орбиты, занятой шихтованным электромагнитом. Ниже приведены результаты вычислений для $H = 10$, $G = 0,6$, $D = 0,15$, $L/2\pi R = 0,65$ и тока $I_0 = 1$ а:

m	1	2	3	4	5
σ_x (сек ⁻¹)	$0,15 \cdot 10^6$	$0,27 \cdot 10^6$	$0,27 \cdot 10^6$	$0,27 \cdot 10^6$	$0,27 \cdot 10^6$

Как видно, инкременты для $m \geq 2$ практически одинаковы (далее их величина падает). Однако, развиваться первыми будут моды с более низкими порогами.

Порядок расчетной величины инкрементов вполне согласуется с экспериментальными фактами.

Наконец приведем еще величины инкрементов для случая сгруппированного пучка, вычисленные по формуле (49) для прямоугольной камеры при $H = 10$, $G = 0,6$, $D = 0,15$, $L/2\pi R = 0,65$ и токе $I_0 = 1$ а:

Таблица 2. Инкремент в сек⁻¹

γ_x \ Δ/R :	0,05	0,1	0,2
0,3 :	$- 0,28 \cdot 10^6$	$- 0,29 \cdot 10^6$	$- 0,29 \cdot 10^6$
0,7 :	$- 0,44 \cdot 10^6$	$- 0,47 \cdot 10^6$	$- 0,46 \cdot 10^6$

Как видно из таблицы 2, для сгруппированного пучка инкременты отрицательны, то-есть имеет место когерентное затухание. Отсюда следует целесообразность инъекции короткого сгустка, в котором должен быть заключен весь инжектированный ток. В этом случае устойчивость для когерентных колебаний сгустка как единого целого обеспечивается для произвольно большого тока.

Приложение

Не останавливаясь на громоздких, но достаточно простых выкладках, приведем выражения для коэффициентов. Для камеры прямоугольного сечения имеем

$$\psi_{mn}^s = \frac{n\pi/b}{\beta_{mn}} \Phi_{mn}^c, \quad \psi_{mn}^c = \frac{n\pi/b}{\beta_{mn}} \Phi_{mn}^s \quad (\text{II.1})$$

$$\Phi_{mn}^s = \frac{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{2(\frac{m^2}{R^2} + s^2\mu\epsilon)} \frac{S\mu\beta_{mn}}{R} \frac{im}{R}}{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{2(\frac{m^2}{R^2} + s^2\mu\epsilon)} \frac{S\mu\beta_{mn}}{R} \frac{im}{R}} \sum_k \frac{K\bar{n}}{a} \frac{1 + \cos K\bar{n}}{\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2\bar{b}^2}{b^2} + \frac{K^2\bar{a}^2}{a^2} + s^2\mu\epsilon} \frac{4}{ab} \int \sin \frac{K\bar{n}}{a} (x + \frac{a}{2}) \sin \frac{n\bar{b}}{b} (y + \frac{b}{2}) j_m(s+im\omega_0) ds$$

$$\Phi_{mn}^c = \frac{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{2(\frac{m^2}{R^2} + s^2\mu\epsilon)} \frac{S\mu\beta_{mn}}{R} \frac{im}{R}}{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{2(\frac{m^2}{R^2} + s^2\mu\epsilon)} \frac{S\mu\beta_{mn}}{R} \frac{im}{R}} \sum_k \frac{K\bar{n}}{a} \frac{1 - \cos K\bar{n}}{\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2\bar{b}^2}{b^2} + \frac{K^2\bar{a}^2}{a^2} + s^2\mu\epsilon} \frac{4}{ab} \int \sin \frac{K\bar{n}}{a} (x + \frac{a}{2}) \sin \frac{n\bar{b}}{b} (y + \frac{b}{2}) j_m(s+im\omega_0) ds$$

В полученных выражениях можно суммировать ряды в числителях:

$$\Phi_{mn}^s = \frac{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{2(\frac{m^2}{R^2} + s^2\mu\epsilon)} \frac{S\mu\beta_{mn}}{R} \frac{im}{R}}{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{2(\frac{m^2}{R^2} + s^2\mu\epsilon)} \frac{S\mu\beta_{mn}}{R} \frac{im}{R}} \frac{\frac{2}{b} \int \text{sh} \beta_{mn} x' \sin \frac{n\bar{b}}{b} (y + \frac{b}{2}) j_m(s+im\omega_0) ds}{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{2(\frac{m^2}{R^2} + s^2\mu\epsilon)} \text{ch} \frac{\beta_{mn} a}{2} + \frac{\beta_{mn} \gamma_n}{\frac{n^2\bar{b}^2}{b^2} + s^2\mu\epsilon} \text{sh} \frac{\beta_{mn} a}{2}} \quad (\text{II.2})$$

$$\Phi_{mn}^c = \frac{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{2(\frac{m^2}{R^2} + s^2\mu\epsilon)} \frac{S\mu\beta_{mn}}{R} \frac{im}{R}}{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{2(\frac{m^2}{R^2} + s^2\mu\epsilon)} \frac{S\mu\beta_{mn}}{R} \frac{im}{R}} \frac{\frac{2}{b} \int \text{ch} \beta_{mn} x' \sin \frac{n\bar{b}}{b} (y + \frac{b}{2}) j_m(s+im\omega_0) ds}{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{2(\frac{m^2}{R^2} + s^2\mu\epsilon)} \text{sh} \frac{\beta_{mn} a}{2} + \frac{\beta_{mn} \gamma_n}{\frac{n^2\bar{b}^2}{b^2} + s^2\mu\epsilon} \text{ch} \frac{\beta_{mn} a}{2}}$$

Для камеры кругового поперечного сечения коэффициенты имеют

вид

$$\psi_{mn}^1 = \frac{n J_n(\gamma_m a)}{\gamma_m a J_n'(\gamma_m a)} \Phi_{mn}^2, \quad \psi_{mn}^2 = - \frac{n J_n(\gamma_m a)}{\gamma_m a J_n'(\gamma_m a)} \Phi_{mn}^1 \quad (\text{II.3})$$

$$\Phi_{mn}^1 = - \frac{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{S^2\mu\epsilon + \frac{m^2}{R^2}} \frac{im}{R} S\mu\gamma_m \sum_k \frac{t_{nk}}{t_{nk}^2 - \gamma_m^2} \frac{J_n(t_{nk} a)}{J_n'(t_{nk} a)} \frac{2/\pi a^2}{J_n'(t_{nk} a)} \int \sin n\gamma' J_n(t_{nk} r') j_m(s+im\omega_0) ds}{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{S^2\mu\epsilon + \frac{m^2}{R^2}} \frac{J_n(\gamma_m a) \frac{n^2}{a^2} - s^2\mu\epsilon J_{n-1}(\gamma_m a) J_{n+1}(\gamma_m a)}{J_n'(\gamma_m a)} - \gamma_s \gamma_m \frac{J_n(\gamma_m a) H_n'(\gamma_s a)}{H_n(\gamma_s a)}}$$

$$\Phi_{mn}^2 = - \frac{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{S^2\mu\epsilon + \frac{m^2}{R^2}} \frac{im}{R} S\mu\gamma_m \sum_k \frac{t_{nk}}{t_{nk}^2 - \gamma_m^2} \frac{J_n(t_{nk} a)}{J_n'(t_{nk} a)} \frac{2/\pi a^2}{J_n'(t_{nk} a)} \int \cos n\gamma' J_n(t_{nk} r') j_m(s+im\omega_0) ds}{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{S^2\mu\epsilon + \frac{m^2}{R^2}} \frac{J_n(\gamma_m a) \frac{n^2}{a^2} - s^2\mu\epsilon J_{n-1}(\gamma_m a) J_{n+1}(\gamma_m a)}{J_n'(\gamma_m a)} - \gamma_s \gamma_m \frac{J_n(\gamma_m a) H_n'(\gamma_s a)}{H_n(\gamma_s a)}}$$

После суммирования ряда в числителях II.3 получаем

$$\begin{pmatrix} \Phi_{mn}^1 \\ \Phi_{mn}^2 \end{pmatrix} = \frac{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{S^2\mu\epsilon + \frac{m^2}{R^2}} \frac{im}{R} S\mu\gamma_m \frac{1}{\pi a^2} \int \begin{pmatrix} \sin n\gamma' \\ \cos n\gamma' \end{pmatrix} \frac{J_n(\gamma_m r')}{J_n(\gamma_m a)} j_m(s+im\omega_0) ds}{\frac{d'(1+\frac{2\xi}{s\mu d'})}{S^2\mu\epsilon + \frac{m^2}{R^2}} \frac{J_n(\gamma_m a) \frac{n^2}{a^2} - s^2\mu\epsilon J_{n-1}(\gamma_m a) J_{n+1}(\gamma_m a)}{J_n'(\gamma_m a)} - \gamma_s \gamma_m \frac{J_n(\gamma_m a) H_n'(\gamma_s a)}{H_n(\gamma_s a)}} \quad (\text{II.4})$$

Л и т е р а т у р а

1. В.В.Мазепус, Б.В.Чириков. Когерентная неустойчивость пучка в камере с непроводящими стенками. Препринт ИЯФ, Новосибирск, 1965.
2. М.М.Карлинер. Когерентные неустойчивости пучка в электронных накопителях вследствие электромагнитного взаимодействия с окружающей структурой
 1. Когерентные движения пучка в накопителе. ИЯФ 74-105, Новосибирск, 1974.
 2. Неустойчивость когерентных поперечных колебаний. ИЯФ 74-107, Новосибирск, 1974.
3. Теория электромагнитных процессов в слоистом сердечнике. И.Е.Тамм "Собрание научных трудов", т.1, М., "Наука", 1975, стр.328-351.
4. Б.З.Каценеленбаум. Высокочастотная электродинамика. "Наука", М., 1966.

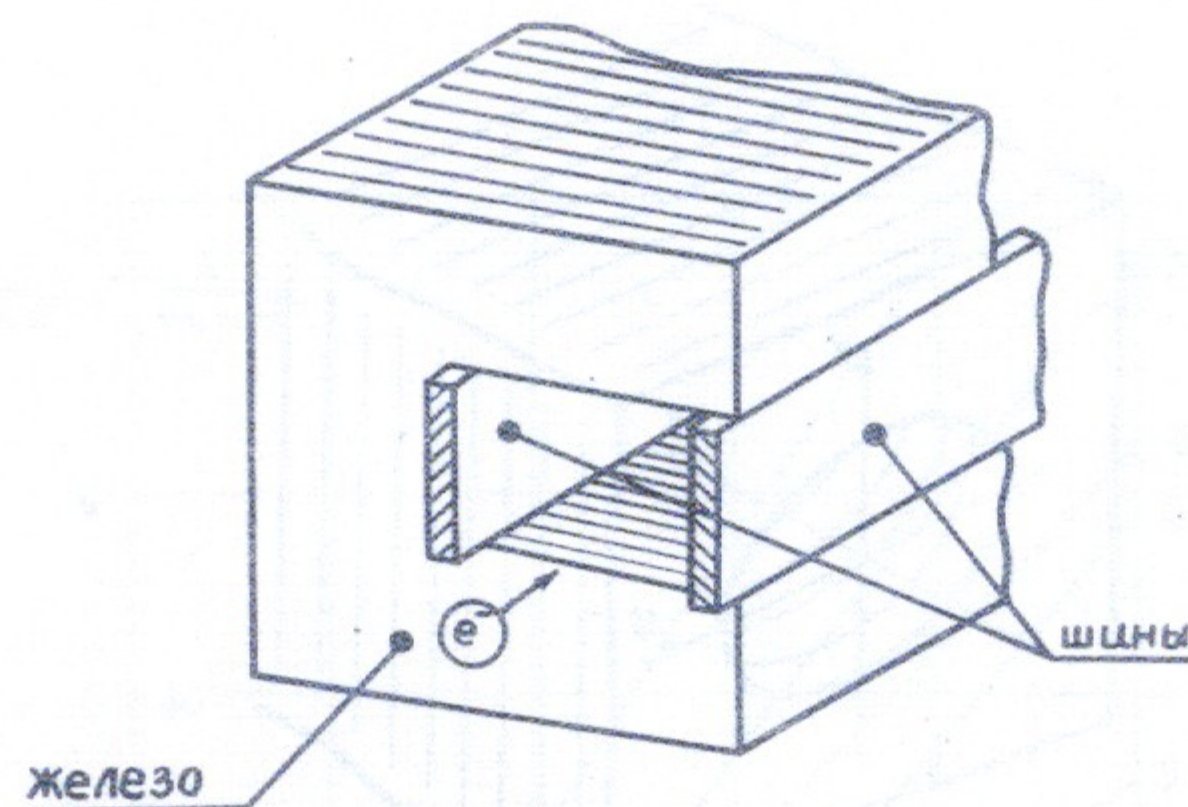


Рис.1. Фрагмент электромагнита с ламинированным сердечником.

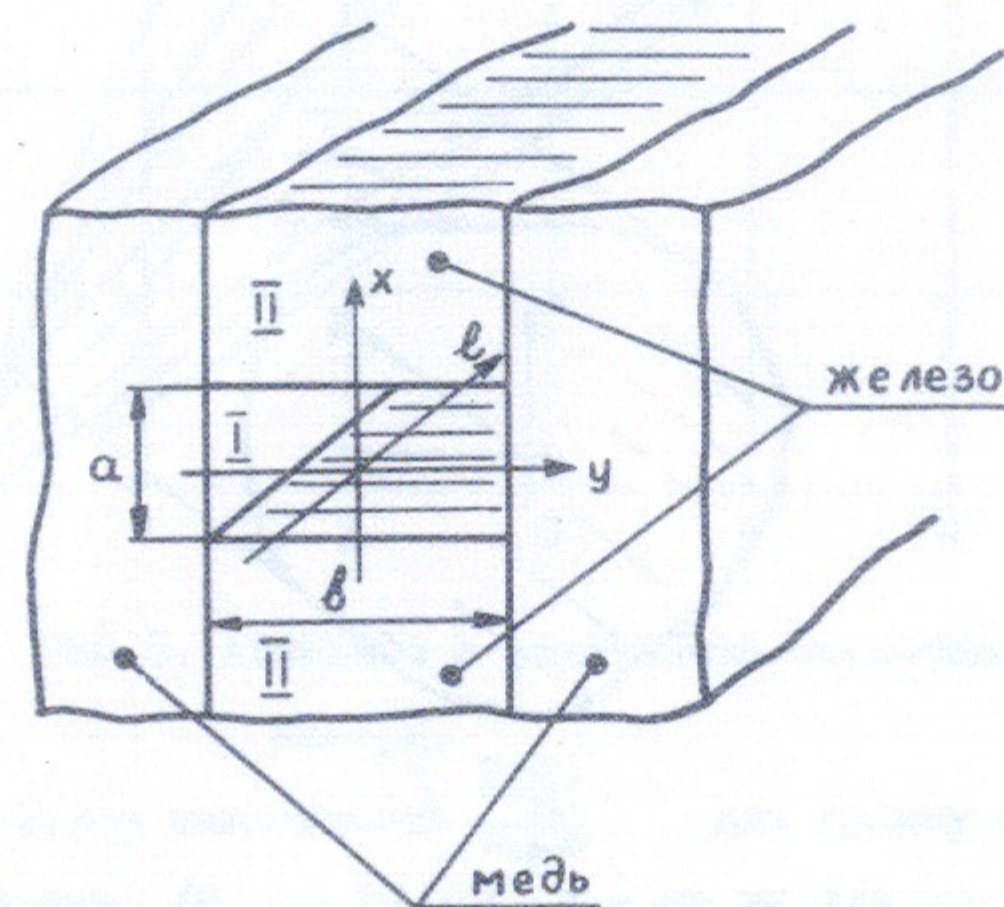


Рис.2. Модель прямоугольной камеры.

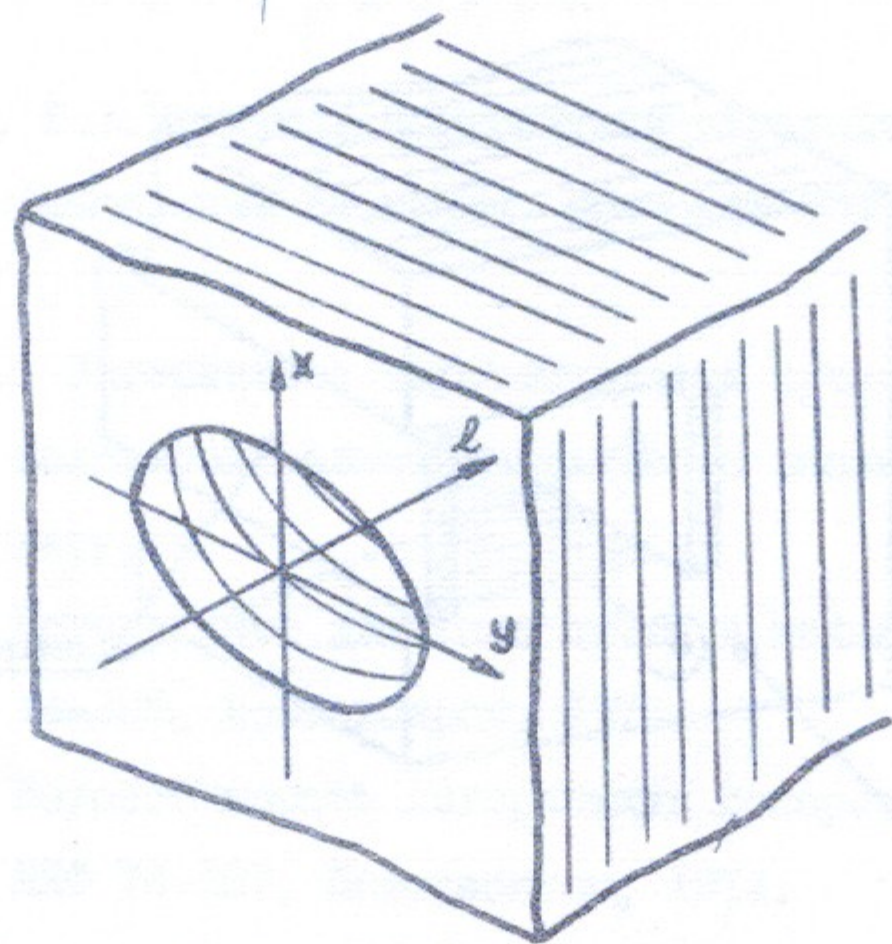


Рис.3. Модель круглой камеры.

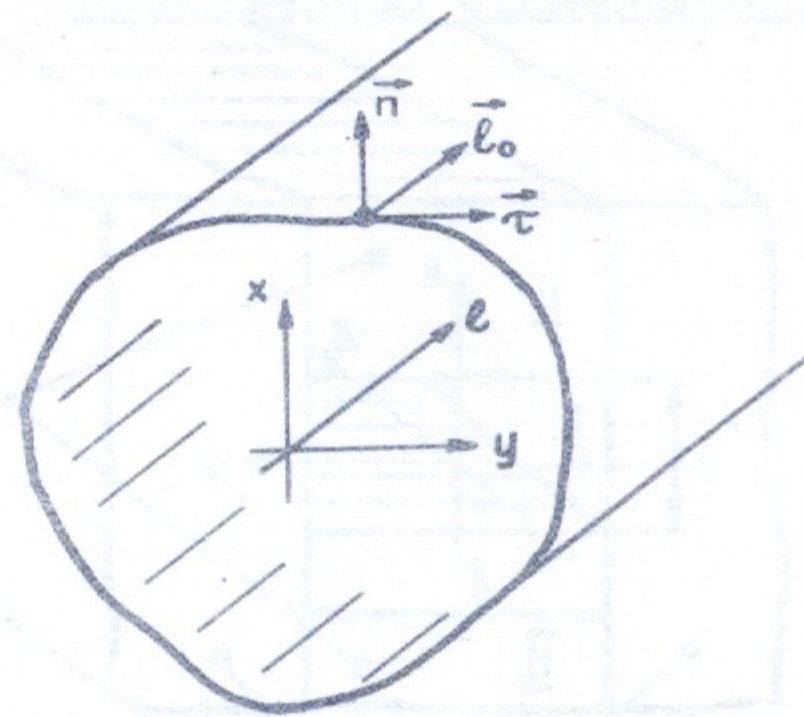


Рис.4. Направление нормали и касательной к периметру камеры.

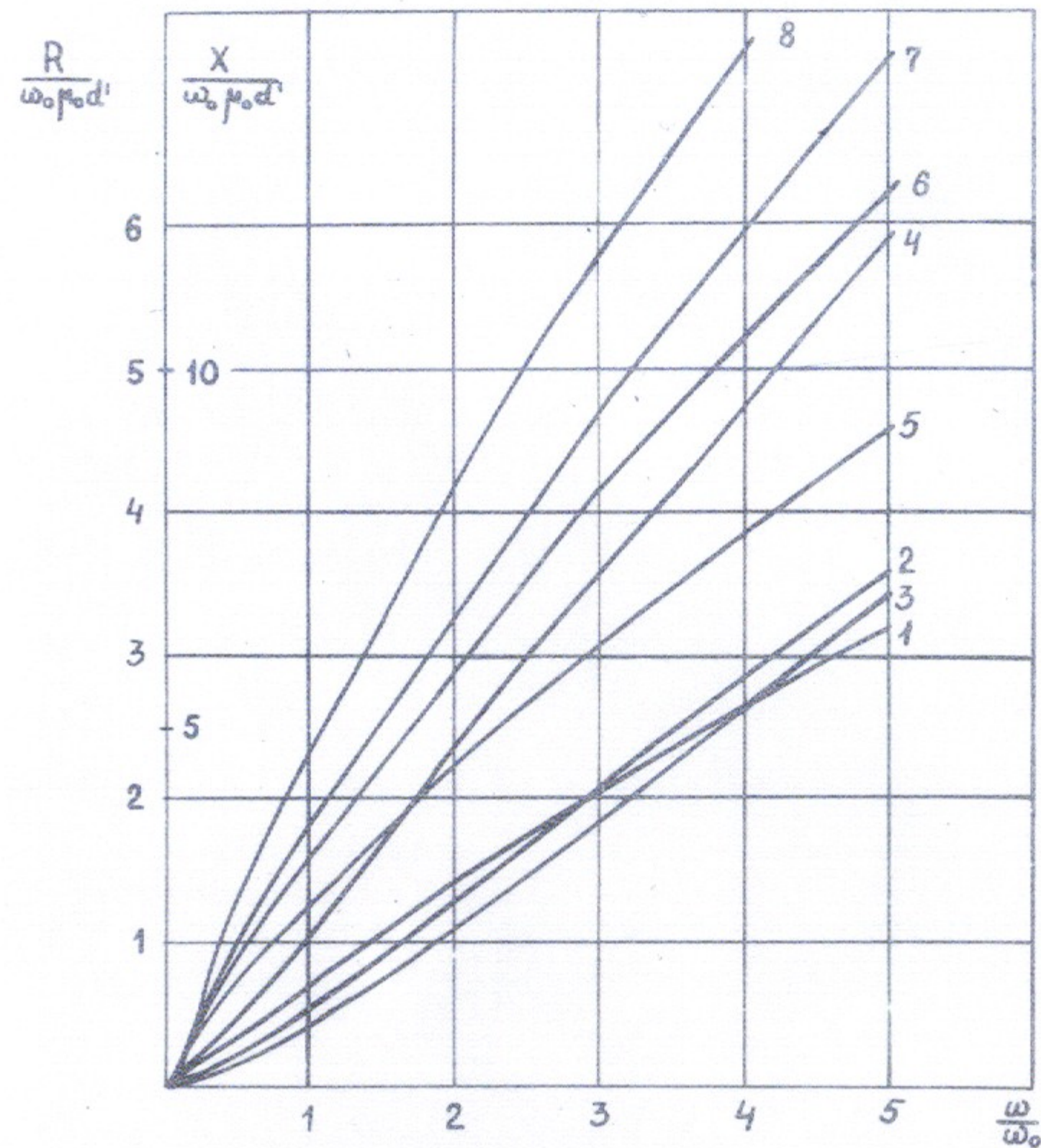


Рис.5. Активное и реактивное сопротивления камеры.

1, 2, 3 - зависимость $\frac{R(\omega)}{\omega_0 \mu_0 d^2}$ для прямоугольной камеры /H = 5, 10, 15/, 4 - то же для круглой камеры /H = 10/, 5, 6, 7 - зависимость $\frac{X(\omega)}{\omega_0 \mu_0 d^2}$ для прямоугольной камеры /H = 5, 10, 15/, 8 - то же для круглой камеры /H = 10/.

Работа поступила - 30 ноября 1976 г.

Ответств. за выпуск - С.Г. ПОПОВ

Подписано к печати 9.12-1977г. МН 02640

Усл. 2,0 печ.л., 1,6 учетно-изд.л.

Тираж 150 экз. Бесплатно

Заказ № 14.

Отпечатано на ротапинтере ИЯФ СО АН СССР