27

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 64 - 73

Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко

РЕЛАКСАЦИЯ И РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В НАКОПИТЕЛЯХ

Новосибирск

1973

Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко

РЕЛАКСАЦИЯ И РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В НАКОПИТЕЛЯХ

АННОТАЦИЯ

В квазиклассическом приближении получено уравнение для плотности поляризации, описывающее радиационную кинетику спинов ультрарелятивистских электронов (позитронов). На его основе, без ограничений на близость спиновых резонансов, принимавшихся ранее, находятся время релаксации, направление и степень равновесной поляризации в неоднородном поле. Результаты полностью определяют области устойчивости радиационной поляризации.

Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk

Ya.S.Derbenev, A.M.Kondratenko

Relaxation and Equilibrium State of Electrons' Polarization in Storage Rings

Abstract

The equation for the polarization density describing the radiative kinetics of spins of ultrarelativistic electrons (positrons) is obtained in the quasiclassical approximation. Relaxation time, direction and degree of equilibrium polarization in inhomogeneous field are found on the basis of this equation without any limitaitons on the distance to the spin resonances taken previously. The results define completely the stability region of radiative polarization.

1. В работе /1/ исследовалась кинетика поляризации частиц в накопителях в условиях, когда радиационное время релаксации орбитального движения велико по сравнению с характерными периодами прецессии спина в неоднородном поле. Фактически это предполагает достаточную удаленность от спиновых резонансов.

В области резонансов ранее делались лишь оценки деполяризующих эффектов /2/. Для количественного описания воздействия излучения на поляризацию, применимого и в резонансной ситуации, когда направление оси квантования спина в неоднородном поле существенно зависит от траектории частицы, приходится обратиться к общему уравнению для матрицы плотности в пространстве спиновых и орбитальных переменных.

2. Исходим из уравнения для расширенной матрицы R, описывающего движение системы частица + излучение:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \left\{ \mathcal{H}_{ext} + V ; R \right\} = 0$$

Выражения для гамильтониана частицы во внешнем поле $\mathcal{H}_{ext}$ и гамильтониана взаимодействия с излучением V в квазиклассическом приближении с учетом спиновой зависимости были получены в /1/. Матрица плотности электрона ρ получается из R упрощением по полевым переменным Q : $\rho = Sp_Q R$. Уравнение для ρ в низшем порядке по взаимодействию имеет вид[1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\{ \mathcal{H}_{ext} ; \rho \right\} = \frac{1}{2} Sp_Q \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ V_{t+\frac{\tau}{2}} ; \left\{ V_{t-\frac{\tau}{2}} ; \rho |0\rangle\langle 0| \right\} \right\} \qquad (1)$$

---

1) При получении в (1) члена, описывающего взаимодействие с излучением, можно оставить под интегралом лишь симметричную по τ часть, так как несимметричная часть имеет вид скобки Пуассона и может быть учтена перенормировкой гамильтониана $\mathcal{H}_{ext}$.

где V_t –оператор в представлении взаимодействия, $|0\rangle$ –волновая функция фотонного вакуума. Для получения явного выражения правой части (1) нужно вычислить интегралы от вакуумных средних по классическим траекториям. В ультрарелятивистском случае ($\gamma=(1-v^2)^{-1/2}\gg 1$), когда ускорение $\dot{\vec{v}}$ частицы меняется мало на длине формирования излучения ($\sim|\gamma\dot{\vec{v}}|^{-1}$),вычисление сводится к взятию вычетов при $\tau=0$, $\tau=i\sqrt{12}/|\gamma\dot{\vec{v}}|$ /1,3/.

Для частицы со спином 1/2 матрица ρ представляется в виде:

$$\rho=\frac{1}{2}(f+\vec{\sigma}\vec{\zeta})$$

где $\vec{\sigma}$ –матрицы Паули, $f=Sp\,\rho$ –функция распределения по орбитальным переменным, $\vec{\zeta}=Sp\,\vec{\sigma}\rho$ – плотность поляризации (здесь Sp означает упрощение по спиновым индексам). В квазиклассическом случае f и $\vec{\zeta}$ можно рассматривать как функции координат и импульсов частицы $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

В уравнении для f, поскольку разброс орбитальных квантовых чисел при $\gamma\gg 1$ велик, спиновыми поправками можно пренебречь. При этом получаем:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_0 f=St\,f$$

где $\left(\frac{d}{dt}\right)_0=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}+e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{H})\frac{\partial}{\partial\vec{p}}$ –производная вдоль траектории во внешнем поле, правая часть описывает перемешивание частиц в пучке под действием радиационного трения и квантовых флуктуаций излучения /4/:

$$St=-\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\vec{F}_r+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\frac{d}{dt}\overline{\Delta p_\alpha\Delta p_\beta}\frac{\partial}{\partial p_\beta}$$

$$\vec{F}_r=-\frac{2}{3}e^2|\dot{\vec{v}}|^2\gamma^4\vec{v}\,,\qquad \frac{d}{dt}\overline{\Delta p_\alpha\Delta p_\beta}=\frac{55}{24\sqrt{3}}\hbar\frac{e^2}{m^2}\gamma^5|\dot{\vec{v}}|^3 p_\alpha p_\beta$$

Для плотности поляризации $\vec{\xi}(\vec{P},\vec{r},t)$ после всех вычислений получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_0\vec{\xi} - \vec{W}\times\vec{\xi} = St\,\vec{\xi} - \left(\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\vec{P}\right)\lambda\,\frac{\vec{v}\times\dot{\vec{v}}}{|\dot{\vec{v}}|}f -$$

$$-\lambda\left\{\frac{5\sqrt{3}}{8}\left[\vec{\xi}-\frac{2}{9}\vec{v}(\vec{\xi}\vec{v})\right]+\frac{\vec{v}\times\dot{\vec{v}}}{|\dot{\vec{v}}|}f\right\} \tag{2}$$

Здесь $\lambda = h\frac{e^2}{m^2}\gamma^5|\dot{\vec{v}}|^3$, $\vec{W}$ –угловая скорость прецессии спина во внешнем поле /5-7/:

$$\vec{W} = -\frac{q}{\gamma}\vec{H}_c - \frac{e/m}{\gamma+1}\,\vec{v}\times\vec{E}_c$$

где $q=\frac{e}{m}+q'$ – гиромагнитное отношение, q' – его аномальная часть, $\vec{H}_c$, $\vec{E}_c$ –поля в системе покоя частицы.

Уравнение (2) содержит все существенные механизмы воздействия излучения на поляризацию. Член $St\,\vec{\xi}$ учитывает радиационное трение и флуктуации импульса, приводящие в неоднородном поле к деполяризующим эффектам[2)] /2,8/. Второй член в правой части обязан силе спин-орбитального взаимодействия с полем классического излучения /1/. Третий член описывает прямое действие излучения на поляризацию частицы и соответствует полученному в /6/ выражению для средневероятностей скорости изменения вектора спина в акте излучения.

При принятых здесь ограничениях уравнение (2) пригодно для анализа поведения поляризации ультрарелятивистских электронов в произвольных полях.

3. В накопителях частицы движутся с малым разбросом около равновесной орбиты. Изменение степени поляризации пучка обязано непосредственному действию излучения, характеризуемому временем λ^{-1}, и неравновесной части $\vec{W}$, воздействие которой становится необратимым за время радиационного перемешивания траекторий частиц Λ^{-1} ($\Lambda\sim\gamma^3\frac{e^2}{m}\dot{\vec{v}}^2 \gg \lambda$) и существенно зависит от спектра движения во внешнем поле.

2) При наличии дополнительных стохастических возмущений, они также будут давать вклад в St-член.

Искомое время релаксации спинов T может меняться в пределах $\Lambda^{-1} \lesssim T \lesssim \lambda^{-1}$. В случае, когда $T \sim \Lambda^{-1}$, пучок будет заведомо деполяризован. Действительно, при $T \ll \lambda^{-1}$ поляризующие эффекты могут быть обязаны лишь зависимости орбитального движения от спина. Так как в ультрарелятивистском случае равновесный разброс орбитальных квантовых чисел велик, то на временах Λ^{-1} этой зависимостью можно пренебречь. Ввиду практической малости времени Λ^{-1}, для потребностей эксперимента достаточно количественного исследования в области, где $T \gg \Lambda^{-1}$. При этом в нулевом приближении плотность поляризации пропорциональна функции распределения частиц, а скорость изменения степени поляризации можно находить по теории возмущений.

На равновесной траектории движение спина в общем случае представляет собой прецессию вокруг периодического направления $\vec{n}_s(\theta) = \vec{n}_s(\theta + 2\pi)$ (θ -обобщенный азимут частицы) с частотой ν_s /7/. Ввиду быстрого размешивания по фазам прецессии, средняя поляризация будет направлена по $\vec{n}_s$. Естественно поэтому задавать поляризацию проекциями на периодические по θ орты: $\vec{n}_s(\theta)$; $\vec{e}_1(\theta)$; $\vec{e}_2(\theta)$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ -поперечные к $\vec{n}_s$ орты, выбранные так, чтобы $\nu_s = const$.
В этой системе уравнение для $\vec{\zeta}$ будет отличаться от (2) вычитанием из $\vec{W}$ угловой скорости вращения базиса:

$$\vec{W} \to \vec{W} - \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_s}\left(\vec{W}_s - \nu_s \vec{n}_s\right) \equiv \nu_s \vec{n}_s + \vec{w}$$

где $\dot{\theta}_s$ -равновесная частота обращения частицы в накопителе, $\vec{W}_s(\theta)$ -значение $\vec{W}$ на равновесной траектории.

Плотность поляризации представляем в виде:

$$\vec{\zeta} = \zeta(t)\,\vec{n}_s\, f(\vec{P}, \vec{z}, t) + \Delta\vec{\zeta}$$

с условием $\int \vec{n}_s \Delta\vec{\zeta}\, d^3p\, d^3z = 0$. Проектируя уравнение (2) на $\vec{n}_s$ и производя интегрирование, получаем выражение для скорости изменения степени поляризации ζ:

$$\dot{\zeta} = \int d^3p\, d^3z\ \vec{w} \times \Delta\vec{\zeta} \cdot \vec{n}_s - \int d^3p\, d^3z\ \lambda f \left\{\frac{5\sqrt{3}}{8}\right\}\left[1 - \frac{2}{9}(\vec{n}_s \vec{v})^2\right] + \frac{\vec{v} \times \dot{\vec{v}} \cdot \vec{n}_s}{|\dot{\vec{v}}|}\Big\} \quad (3)$$

В уравнении для $\Delta\vec{\zeta}$ можно пренебречь прямым воздействием излучения ($\lambda \ll \Lambda$) и изменением ζ со временем ($T \gg \Lambda^{-1}$). При этом получаем:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_0 \Delta\vec{\zeta} - (\nu_s \vec{n}_s + \vec{w}) \times \Delta\vec{\zeta} - St\,\Delta\vec{\zeta} = \vec{w} \times \vec{n}_s\, \zeta f - \left(\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\vec{P}\right) \lambda \frac{\vec{v} \times \dot{\vec{v}}}{|\vec{v}|} f \qquad (4)$$

Для получения окончательного уравнения на ζ достаточно подставить в (3) вынужденное решение уравнения (4) для $\Delta\vec{\zeta}$ (решение однородного уравнения для $\Delta\vec{\zeta} \times \vec{n}_s$ будет быстро затухать из-за разброса частот прецессии спина $\sim \overline{\vec{w}\vec{n}_s}$) и усреднить по периоду обращения частиц. Это уравнение, очевидно, будет иметь вид:

$$\dot{\zeta} = -\alpha_+ \zeta + \alpha_- \; ; \qquad \zeta_t = \left(\zeta_0 - \frac{\alpha_-}{\alpha_+}\right) e^{-\alpha_+ t} + \frac{\alpha_-}{\alpha_+} \qquad (5)$$

где $\alpha_\pm$ -постоянные.

4. Практически в накопителе разброс частот орбитального и спинового движений значительно превышает обратное время релаксации Λ. Это обстоятельство существенно облегчает решение уравнения (4), так как столкновительный член $St\,\Delta\vec{\zeta}$ можно учесть по теории возмущений. При этом могут возникать особые точки - точки спиновых резонансов, вблизи которых, вообще говоря, $St\,\Delta\vec{\zeta}$ не может рассматриваться как малое возмущение. Однако нам и не требуется знание решения вблизи резонанса: при вычислении коэффициентов $\alpha_\pm$ контур интегрирования можно сместить в комплексную плоскость так, чтобы удовлетворить условию удаленности от резонансов. Правило обхода точек резонанса должно отвечать затуханию однородного решения уравнения (4).

В первом приближении по $\vec{w}$ вынужденное решение для $\zeta_\perp \equiv \vec{\zeta}\vec{e}^{\,*} \equiv \vec{\zeta}(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2)$ имеет вид:

$$\zeta_\perp = \zeta \hat{L}\left[f \vec{w}\vec{e}^{\,*} - i\, St(\hat{L}\, \vec{w}\vec{e}^{\,*} f)\right] - \hat{L}\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\vec{P}\, \lambda \frac{(\vec{v} \times \dot{\vec{v}} \cdot \vec{e}^{\,*})}{|\vec{v}|} f \qquad (6)$$

Здесь интегральный оператор $\hat{L}$ определен следующим образом:

$$\hat{L}\, a(t) = i \int_{-\infty}^{t} dt'\, a(t') \exp[i(\nu - i0)(t' - t)]$$

где $\nu = \nu_s + \overline{\vec{w}\vec{n}_s}$ –средняя на заданной траектории частота прецессии спина.

Перейдём к обычно применяемым в теории циклических ускорителей переменным энергии и фазы синхротронного движения и поперечных отклонений импульса и координаты от равновесной траектории $\vec{P} = \vec{P}_s(\theta)$, $\vec{r} = \vec{r}_s(\theta)$; тогда оператор $\vec{P}\frac{\partial}{\partial \vec{P}}$ можно заменить на $\gamma\, \partial/\partial\gamma$. Для вычисления $\hat{L}\,\vec{w}\vec{e}^{\,*}$ представляем $\vec{w}\vec{e}$ в виде:

$$\vec{w}\vec{e} = \sum_k w_k\, e^{i\psi_k}$$

где ψ_k –целочисленные комбинации фаз орбитального движения, а гармоники w_k постоянны на траектории частицы и полностью обязаны отклонению движения от равновесного. После подстановки (6) в (3) и усреднения по времени получаем следующие выражения для $\alpha_\pm$:

$$\alpha_+ = \frac{5\sqrt{3}}{8}\left\langle \lambda \left[1 - \frac{2}{9}(\vec{n}_s\vec{v})^2 + \frac{11}{18}\left| \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\sum_k \frac{w_k e^{i\psi_k}}{\nu - \nu_k - i0} \right|^2 \right] \right\rangle + \pi\sum_k \left\langle |w_k|^2 \delta(\nu - \nu_k) \right\rangle$$

$$\alpha_- = \left\langle \lambda\, \frac{\dot{\vec{v}} \times \vec{v}}{|\dot{\vec{v}}|} \left(\vec{n}_s - \mathrm{Re}\, \vec{e}^{\,*} \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\sum_k \frac{w_k e^{i\psi_k}}{\nu - \nu_k - i0} \right) \right\rangle \qquad (7)$$

где скобки $\langle \ldots \rangle$ означают усреднение по распределению частиц в пучке и их равновесному движению. Вместе с гармониками w_k, частоты ν и $\nu_k \equiv \dot{\psi}_k$ являются функциями интегралов движения типа амплитуд колебаний. При вычислении производной $\partial/\partial\gamma$ необходимо учитывать, что амплитуды и фазы бетатронных колебаний являются функциями не только поперечных, но и энергетических отклонений движения частицы от равновесного.

Значения $\alpha_{\pm}$, как видно, существенно зависят от близости спиновых резонансов $\nu = \nu_k$. Ввиду этого, вообще говоря, необходимо принимать во внимание и резонансы, возникающие в высших приближениях по $\vec{w}$. Формулы (7) сохраняют свой вид, если гармоники w_k определять с учетом высших приближений по $\vec{w}$ /9/:

$$\sum_k w_k e^{i\psi_k} = \vec{w}\vec{e}\left[1 - i\int_{-\infty}^{t} (\vec{w}\vec{n}_s - \vec{w}\vec{n}_s)\,dt + \ldots\right]$$

Вдали от резонансов член, содержащий $\delta(\nu-\nu_k)$, обращается в нуль, а в знаменателях $\nu-\nu_k - i0$ можно пренебречь дисперсией расстройки $\nu-\nu_k$. При этом $\alpha_{\pm}$ совпадает с выражением, полученным в /1/ (в нерезонансной ситуации $Re\,\vec{e}^{\,*}\sum_k w_k e^{i\psi_k}/(\nu-\nu_k) = \vec{n}(\vec{p},\vec{r}) - \vec{n}_s(\theta)$, где $\vec{n}$ -направление оси квантования спина неравновесной частицы).

Формулы (7) обобщают результаты /1/ на ситуации, когда при стохастических блужданиях расстройки возможны прохождения резонансов. При этом члены с производными $\partial/\partial\zeta$, как и в /1/, учитывают возмущение оси квантования $\vec{n}$ вне области резонанса, где частица, ввиду большого разброса $\nu-\nu_k$, пребывает основную долю времени. Член с δ-функцией описывает деполяризующее воздействие многократных некоррелированных прохождений резонанса. Действительно, за одно прохождение резонанса со скоростью $\dot{\varepsilon}_k \equiv \frac{d}{dt}(\nu-\nu_k)$ при условии быстроты прохождения ($|w_k|^2 \ll |\dot{\varepsilon}_k| \sim \Lambda\sqrt{\langle\varepsilon^2\rangle}$) изменение проекции вектора спина $\vec{s}$ частицы на направление $\vec{n}_s$ равно /9,10/:

$$\Delta S_{\vec{n}} = \sqrt{\vec{s}^{\,2} - S_{\vec{n}}^2}\,\sqrt{\frac{2\pi|w_k|^2}{|\dot{\varepsilon}_k|}}\,\cos\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right)$$

где ψ -значение фазы прецессии спина вокруг $\vec{n}_s$ в момент прохождения резонанса. Число прохождений резонанса в единицу времени в единичном объеме фазового пространства ($\vec{p}, \vec{r}$) равно $|\dot{\varepsilon}_k f|\,\delta(\nu-\nu_k)$. Тогда для средней скорости изменения ζ получаем:

$$\dot{\zeta} \equiv \frac{d}{dt}\overline{S_{\vec{n}}} = \left\langle |\dot{\varepsilon}_k|\,\delta(\nu-\nu_k)\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial S_{\vec{n}}}\overline{(\Delta S_{\vec{n}})^2}\right\rangle = -\pi\left\langle |w_k|^2\,\delta(\nu-\nu_k)\right\rangle \cdot \zeta$$

Максимальное деполяризующее воздействие гармоники w_k, очевидно, достигается в области $|\varepsilon_k| \lesssim \Delta \equiv \sqrt{\langle \varepsilon_k^2 \rangle - \langle \varepsilon_k \rangle^2}$;

при этом

$$(\alpha_+)_k \sim \langle |w_k|^2 \rangle / \Delta \qquad (8)$$

Как видно, условие $T = \alpha_+^{-1} \gg \Lambda^{-1}$ эквивалентно условию быстроты прохождений резонансов. Из (8) следует, что опасность могут представлять лишь резонансы, для которых $\langle |w_k|^2 \rangle / \Delta \gtrsim \lambda$.

Ранее в работе /2/, при рассмотрении быстрых диффузионных прохождений резонанса, была получена следующая оценка скорости деполяризации: $(\alpha_+)_k \sim (\langle |w_k|^2 \rangle / \Delta)(\Lambda/\Delta)^{1/3}$. Отличие этого результата от (8) связано с тем, что в /2/ не учитывалась многократность прохождения резонанса за время Λ^{-1} .

Формулы (5,7) достаточны для анализа поведения поляризации электронов (позитронов) в стационарных условиях. Гармоники w_k и дисперсия частот определяются конкретной структурой электромагнитного поля вблизи равновесной траектории. При $\alpha_+ \sim \lambda$ за время $\sim \lambda^{-1}$ устанавливается конечная степень поляризации α_- / α_+ . При $\alpha_+ \gg \lambda$ поляризация пучка исчезает за время $T \sim max(\alpha_+^{-1}, \Lambda^{-1})$.

Выражаем благодарность В.Н.Байеру, В.М.Каткову, В.М.Страховенко и А.Н.Скринскому за обсуждение работы.

Литература

1. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. ЖЭТФ 64, 1918 (1973).
2. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. ЖЭТФ 62, 430 (1972).
3. В.Н.Байер, В.М.Катков. ЖЭТФ 52, 1422 (1967).
4. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. "Теория циклических ускорителей". М., Ф.М. (1962).
5. V.Bargmann, L.Michel, V.Telegdi Phys. Rev. Lett. 2, 435, (1959)
6. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. ЖЭТФ, 58, 1695, (1970).
7. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский. ДАН СССР, 192, 1255 (1970).
8. В.Н.Байер, Ю.Ф.Орлов. ДАН СССР 165, 783 (1965).
9. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский. ЖЭТФ, 60, 1216 (1971).
10. M.Froissart, R.Stora Nucl. Instr. and Meth. 7 , 297, (1960)

Ответветственный за выпуск С.Н.Родионов
Подписано к печати I.УШ.73г. МН 08407
Усл. 0,5 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 64 . ПРЕПРИНТ.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вг.