ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт 128

В.Н.Байер, В.М.Катков

Процессы при движении частиц высокой энергии в магнитном поле

г.Новосибирск 1967

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Препринт

В.Н.Байер, В.М.Катков

ПРОЦЕССЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Новосибирск
1967

А Н Н О Т А Ц И Я

Предложен операторный метод рассмотрения квантовых эффектов при движении заряженных частиц в магнитном поле, позволяющий рассматривать процессы в произвольном поле для частиц с любым спином. С помощью этого метода рассмотрены квантовые явления в магнито-тормозном излучении, а также рождение пар частиц фотоном и однофотонная аннигиляция пары частиц.

PROCESSES IN HIGH ENERGY PARTICLE MOTION IN MAGNETIC FIELD

V.N.BAIER,V.M.KATKOV

An operator method for investigation of quantum phenomena in motion in a magnetic field of charged particle with arbitrary spin is presented.The quantum effects in a magnetic bremsstrahlung of particles with spin 0,1/2,1 as well as pair of particles creation by photon and one photon annihilation in a magnetic field has been considered by means of this method.

§ I. Введение

В классической электродинамике излучение при движении заряженной частицы в магнитном поле подробно исследовано. Большой интерес представляет вопрос, какие изменения в картину излучения частицы во внешнем магнитном поле внесет учет квантового характера движения и процесса излучения. Исследование таких квантовых эффектов важно в приложениях (например, при движении частиц в ускорителях), а также представляет общетеоретический интерес.

С этой целью задачу следует решать в рамках квантовой электродинамики, причем движение частицы в магнитном поле необходимо учитывать строго (без применения теории возмущений), а процесс излучения можно рассматривать в рамках теории возмущений. Расчет квантовых эффектов проводился обычно в т.н. представлении Фарри с использованием точных решений соответствующих волновых уравнений (Дирака, Клейна-Гордона) в постоянном и однородном магнитном поле. С помощью такой методики был получен ряд важных результатов, однако сам подход является весьма сложным и громоздким технически и позволяет получить результаты только в однородном и постоянном магнитном поле. Когда для изучения некоторых явлений понадобилось рассмотреть квантовые эффекты в неоднородном поле, это привело к резкому усложнению вычислений даже в слабонеоднородном поле. (Подробный обзор работ этого направления, включая и эффекты в неоднородном поле см.в [1]). В то же время даже при использовании точных решений волновых уравнений для получения результата в итоге берутся квазиклассические асимптотики найденных функций, так что в этом смысле все полученные результаты являются приближенными. Как будет видно ниже, это обстоятельство не является случайным.

В данной работе предлагается операторный метод рассмотрения квантовых эффектов при движении заряженных частиц в магнитном поле. Этот метод пригоден для рассмотрения любых квантовых явлений в магнито-тормозном излучении, а также для исследования любых других процессов с участием электронов и фотонов в магнитном поле. (В качестве примеров таких процессов в настоящей работе рассмотрены рождение пары фотоном и однофотонная аннигиляция пары). Метод достаточно прост технически и позволяет единым образом получить результаты для частиц с любым спином при движении в произвольном электромагнитном поле.

В основе метода лежит тот факт, что квантовые эффекты при движении ультрарелятивистских частиц в магнитном поле бывают двух типов. Первый из них связан с квантовым характером самого движения частиц в магнитном поле. Возникающая при этом некоммутативность динамических переменных частицы имеет порядок $\hbar\omega_0/E$ +) (где $\omega_0 = v_t/R$, R - мгновенный радиус кривизны, E - энергия частицы, v_t - компонента скорости, перпендикулярная магнитному полю). Величина

$$\frac{\hbar\omega_0}{E} = \frac{H}{H_0\gamma^2} \tag{I}$$

где $\gamma = \frac{E}{mc^2}$, H - магнитное поле,

$H_0 = \frac{m^2c^3}{e\hbar} = 4{,}41 \cdot 10^{13}$ эрстед (для электрона) - критическое поле, весьма мала и падает с ростом энергии. Таким образом движение электрона в магнитном поле с увеличением энергии становится все более "классическим".

Второй тип квантовых эффектов связан с отдачей частицы при излучении и имеет порядок $\hbar\omega/E$, где ω - частота излученного фотона.

Квантовые эффекты в магнитно-тормозном излучении мы будем характеризовать инвариантным параметром++)

+) Этот вопрос рассмотрен в приложении A .

++) Два других инвариантных параметра

$$f = \frac{e\hbar}{m^2c^3}\sqrt{|F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}|}\;; \quad g = \frac{e\hbar}{m^2c^3}\sqrt{|\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}|}$$

зависят только от поля. Поскольку мы во всем подходе полагаем $\gamma \gg 1$, то всегда $\chi \gg f, g$. Кроме того мы полагаем $f, g \ll 1$, это означает, что поле $H \ll H_0$. Указанное условие выполняется с большим запасом для всех известных полей.

$$\chi = \frac{H}{H_0}\frac{p_t}{mc} = \frac{|\dot{v}|}{c}\frac{\hbar}{mc^2}\gamma^2 = \frac{\hbar\omega_0\gamma^3}{E}\frac{v_t}{c} = \frac{\hbar e\sqrt{|(F_{\mu\nu}p^\nu)^2|}}{m^3c^4} \tag{2}$$

При $\chi \ll 1$ отдача (а значит и величина квантовых эффектов) мала, в этом случае $\omega \sim \omega_0\gamma^3$. В существенно квантовой области $\chi \gtrsim 1$ энергия излученного фотона $\hbar\omega \sim E$. Таким образом, при любых χ квантовые эффекты первого типа ничтожно малы по сравнению с эффектами излучения.

Поэтому можно пренебречь некоммутативностью операторов динамических переменных частицы между собой (величины $\sim \hbar\omega_0/E$) и учитывать только коммутаторы их с полем излученного фотона (величины $\hbar\omega/E$). Ниже это обстоятельство систематически используется.

Отметим, что предложенный подход применим, вообще говоря, для рассмотрения квантовых эффектов при взаимодействии частиц с фотонами в любом внешнем поле.

§ 2. Магнито-тормозное излучение

Рассмотрим излучение заряженной частицы при движении в магнитном поле. Матричный элемент перехода из начального состояния частицы $|i\rangle$ в соответствующее конечное состояние $|f\rangle$ с излучением фотона в низшем порядке теории возмущений по излучению запишем в виде+):

$$U_{fi} = \langle f|\frac{e}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\hbar\omega}}\int e^{i\omega t}M(t)\,dt\,|i\rangle \tag{3}$$

где

$$eM(t) = \Psi^+_{s'}(\vec{P})\left\{(j\varepsilon), e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right\}\Psi_s(\vec{P}) \tag{4}$$

Здесь $j_\mu(t)$, $\vec{r}(t)$ - соответственно операторы тока и координаты частицы, ε_μ - вектор поляризации фотона, скобки $\{,\}$ означают симметризованное произведение операторов, $\Psi(\vec{P})$ - волновая функция частицы с данными спином во внешнем поле в опера -

+) Ниже $c = 1$.

торной форме+), индексы " s " и " s' " относятся к спиновым характеристикам частицы. В соответствии со сказанным во введении в функциях $\Psi(\vec{\mathcal{P}})$ может быть взят любой порядок записи входящих операторов. Например, для частицы со спином 0

$$M_s = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}}\left\{\frac{(\varepsilon\vec{\mathcal{P}})}{m}, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right\}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} \qquad (5)$$

для частицы со спином $1/2$

$$M_e = u^+_{s'}(\vec{\mathcal{P}})(\alpha\varepsilon)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,u_s(\vec{\mathcal{P}}) \qquad (6)$$

где

$$u = \sqrt{\frac{\mathcal{H}+m}{2\mathcal{H}}}\begin{pmatrix}\varphi(\vec{\zeta}(t))\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathcal{P}}}{\mathcal{H}+m}\varphi(\vec{\zeta}(t))\end{pmatrix} \qquad (7)$$

Здесь $\varphi(\vec{\zeta}(t))$ - двухкомпонентный спинор, описывающий спиновые состояния электрона в момент времени t. Аналогично выписываются выражения и для частиц с высшими спинами.

Нас будет интересовать вероятность перехода с излучением фотона, просуммированная по всем конечным состояниям частицы. Выполняя такое суммирование получаем следующее выражение для вероятности радиационного перехода

$$dw = \frac{e^2}{4\pi\hbar}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^2\omega}\langle i|\int dt_1\int dt_2\, e^{i\omega(t_1-t_2)}M^*(t_2)M(t_1)|i\rangle \qquad (8)$$

где $e^2/4\pi\hbar = \alpha = \frac{1}{137}$

Умножая на энергию излученного фотона $\hbar\omega$ получим, очевидно, выражение для интенсивности излучения

$$dI = \frac{e^2}{4\pi}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^2}\langle i|\int dt_1\int dt_2\, e^{i\omega(t_1-t_2)}M^*(t_2)M(t_1)|i\rangle \qquad (9)$$

+) Для получения $\Psi(\vec{\mathcal{P}})$ достаточно в свободных волновых функциях заменить импульс $\vec{p}\to\vec{\mathcal{P}}(t)$, $E\to\mathcal{H}=\sqrt{\vec{\mathcal{P}}^2+m^2}$.

Приведенные выражения (8), (9) могут быть использованы для изучения любых явлений при излучении фотона частицей во внешнем поле.

В соответствии со сказанным выше в выражении для M (4) - (6) следует учитывать только коммутаторы поля фотона ($e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$) с импульсом $\vec{\mathcal{P}}$. В дальнейшем мы будем использовать соотношения

$$\vec{\mathcal{P}}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}(\vec{\mathcal{P}}-\hbar\vec{k})$$
$$\mathcal{H}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}(\mathcal{H}-\hbar\omega) \qquad (10)$$

первое из которых есть следствие того, что оператор $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ есть оператор сдвига в импульсном пространстве, а для вывода второго следует учесть, что

$$[\mathcal{H}, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}] = -i\hbar\frac{d}{dt}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad (11)$$

и провести в выражении (3) интегрирование по частям. Используя (10) можно вынести в $M(t_1)$ оператор $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_1)}$ налево, а в $M^*(t_2)$ оператор $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_2)}$ направо. После этого необходимо рассмотреть возникающую в (8), (9) комбинацию $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_2)}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_1)}$. Некоммутативность входящих сюда операторов является существенной, так что, вообще говоря, нельзя ограничиться разложением этой комбинации по низшим коммутаторам. Центральным местом в данном подходе является распутывание этой комбинации.

Для дальнейшего удобно провести в интегралах (8), (9) замену переменных

$$t_1 = t$$
$$t_2 = t+\tau \qquad (12)$$

Существенный вклад в интеграл по τ дает область $|\dot{\vec{v}}|\tau \sim \frac{1}{\gamma}$, поэтому при проведении дальнейших вычислений мы будем систематически разлагать все величины по степеням $|\dot{\vec{v}}|\tau$ и сохранять только старшие члены разложения.

Кроме того, мы для простоты будем рассматривать поля, удовлетворяющие условию

$$\frac{|\dot{\vec{H}}|\tau}{|\vec{H}|} \ll 1 \qquad (13)$$

где $|\dot{\vec{H}}|$ - характеризует изменение магнитного поля на траектории. Физически этот критерий означает, что поле на траектории мало меняется за характерное время излучения. Если ввести показатель неоднородности

$$n = \left| \frac{\partial \ln H}{\partial \ln r} \right| \tag{I4}$$

то условие (I3) можно записать в виде

$$\frac{n}{\gamma} \ll 1 \tag{I5}$$

Во всех интересных случаях поля удовлетворяют этому критерию.

В результате распутывания (см.приложение Б) получаем:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_2)}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_1)} = \exp\left\{ i\left[\omega\tau + \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}-\hbar\omega}(\vec{k}\cdot\vec{\rho} - \omega\tau)\right]\right\} \tag{I6}$$

где

$$\vec{\rho} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

Найденная комбинация $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_2)}\, e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)}$, очевидно, коммутирует с $\mathcal{H}$ (см. (I0)). При рассмотрении коммутации её с оператором $\vec{\mathcal{P}}$ следует учесть, что для того, чтобы воспользоваться соотношением (I0) необходимо, чтобы все операторы зависели от одного времени. Проводя соответствующие разложения и опуская члены $\sim 1/\gamma^2$, получаем, что $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_2)}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_1)}$ коммутирует с $\vec{\mathcal{P}}$.

Таким образом, все операторы в выражениях (8), (9) с нашей точностью оказываются коммутирующими и поэтому все они,стоящие в обкладках начального состояния, могут быть заменены на классические значения.

Теперь мы можем записать квадрат матричного элемента в виде

$$\langle i|\, M^*(t_2) M(t_1)\, |i\rangle = e^{i\left[\omega\tau + \frac{E}{E'}(\vec{k}\cdot\vec{\rho} - \omega\tau)\right]} R^*(t_2) R(t_1) \tag{I7}$$

где

$$eR(t) = \Psi^+_{s'}(\vec{\mathcal{P}}')\, \tfrac{1}{2}\left([j(\vec{\mathcal{P}}) + j(\vec{\mathcal{P}}')]\varepsilon\right) \Psi_s(\vec{\mathcal{P}}) \tag{I8}$$

здесь $E' = E - \hbar\omega$, $\vec{\mathcal{P}}' = \vec{\mathcal{P}} - \hbar\vec{k}$ уже не операторы, а с - числа. Отметим, что вся информация о спиновых и поляризационных состояниях содержится в $R(t)$.

Итак, при операции распутывания совершенно не затрагиваются спиновые и поляризационные характеристики частиц, что связано с тем, что в нашем приближении пренебрегается влиянием спина на движение (члены $\hbar\omega_0/E$). Описывающая же их функция $R(t)$ имеет форму матричного элемента перехода для свободных частиц с учетом законов сохранения. Это позволяет единым образом рассматривать задачи для любого спина.+)

Рассмотрим теперь для определенности частицы со спином $\frac{1}{2}$. Тогда

$$R(t) = \varphi_f^+ \left[A + i\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \right] \varphi_i \tag{I9}$$

где

$$A = \frac{1}{2}\, \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\mathcal{P}} \left(\frac{1}{E+m} + \frac{1}{E'+m} \right)$$
$$\vec{B} = \frac{1}{2}\left(\frac{[\vec{\varepsilon}\,\vec{\mathcal{P}}]}{E+m} - \frac{[\vec{\varepsilon}\,\vec{\mathcal{P}}']}{E'+m} \right) \tag{20}$$

Здесь мы пренебрегли членами $\sim \frac{1}{\gamma}$, кроме того, во всем подходе предполагается, что конечные электроны остаются ультрарелятивистскими.

Если воспользоваться уравнениями движения для спина во внешнем поле [2], то можно легко показать, что с точностью до членов $\sim 1/\gamma$

$$\varphi(\vec{\zeta}(t_1)) = \varphi(\vec{\zeta}(t_2)) = \varphi(\vec{\zeta}(t)) \tag{2I}$$

с учетом этого

$$R^*(t_2) R(t_1) = Sp\left[\frac{1+\vec{\sigma}\cdot\vec{\zeta}_i}{2} \left(A(t_2) - i\vec{\sigma}\cdot\vec{B}(t_2)\right) \frac{1+\vec{\sigma}\cdot\vec{\zeta}_f}{2} \left(A(t_1) + i\vec{\sigma}\cdot\vec{B}(t_1)\right)\right] \tag{22}$$

Выражение (22) может быть использовано для рассмотрения любых поляризационных и спиновых явлений при излучении электронов в магнитном поле.

Рассмотрим теперь интенсивность излучения при движении

+) См.также приложение В.

электрона во внешнем поле, просуммированную по поляризациям фотонов и спинам конечных электронов и усредненную по спинам начальных электронов.

Тогда

$$\overline{S_i} S_f \left(R^*(t_2) R(t_1) \right) = A^*(t_2) A(t_1) + \vec{B}^*(t_2) \vec{B}(t_1) \tag{23}$$

Дальнейший расчет проводится как в классической задаче магнитотормозного излучения (см., например, [3]). Проводя суммирование по поляризациям фотона имеем

$$\sum_\lambda A^*(t_2) A(t_1) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{E}{E'}\right)^2 \left[\vec{v}(t_2)\cdot\vec{v}(t_1) - 1\right]$$
$$\sum_\lambda \vec{B}^*(t_2)\cdot\vec{B}(t_1) = \frac{1}{4}\left(\frac{\hbar\omega}{E'}\right)^2 \left[\vec{v}(t_2)\cdot\vec{v}(t_1) - 1 + \frac{2}{\gamma^2}\right] \tag{24}$$

где мы отбросили члены высшего порядка по $1/\gamma$. С нашей точностью

$$\vec{v}(t_2)\vec{v}(t_1) = 1 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{2}\dot{\vec{v}}^2 \tau^2 \tag{25}$$

Подставляя (23) - (25) в (22), а (22) в (9) получаем следующее выражение для интенсивности излучения в единицу времени

$$\frac{dI_e}{dt} = -\frac{e^2}{4\pi}\frac{d^3k}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\frac{1+\alpha}{\gamma^2} + \frac{1}{2}\left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right)\dot{v}^2\tau^2\right] \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{i\alpha E\tau}{\hbar}\left[1 - \vec{n}\cdot\vec{v} - \vec{n}\cdot\dot{\vec{v}}\frac{\tau}{2} + \dot{\vec{v}}^2\frac{\tau^2}{6}\right]\right\} \tag{26}$$

где мы ввели $\alpha = \frac{\hbar\omega}{E'}$, $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{\omega}$. Эта формула дает угловое и спектральное распределение интенсивности излучения.

Введем теперь ϑ - угол между плоскостью $(\vec{v}, \dot{\vec{v}})$ и вектором $\vec{n}$ и ψ - угол между проекцией вектора $\vec{n}$ на плоскость $(\vec{v}, \dot{\vec{v}})$ и вектором $\vec{v}$. Интерес представляет интенсивность излучения, проинтегрированная по азимутальному углу вылета фотона ψ . Оказывается удобным одновременно проводить интегрирование по τ и ψ . Выражая входящие скалярные ком-

бинации

$$\vec{n}\cdot\vec{v} = |\vec{v}| \cos\vartheta \cos\psi$$
$$\vec{n}\cdot\dot{\vec{v}} = |\dot{\vec{v}}| \cos\vartheta \sin\psi \tag{27}$$

и учитывая, что с точностью до членов высшего порядка по основной вклад дают малые ψ и ϑ , получаем

$$\tau(1 - \vec{n}\cdot\vec{v}) - \frac{\tau^2}{2}\vec{n}\cdot\dot{\vec{v}} + \frac{\tau^3}{6}\dot{\vec{v}}^2 = \frac{\mu^{3/2}}{2|\dot{\vec{v}}|}\left(x + \frac{1}{3}x^3 + y + \frac{1}{3}y^3\right) \tag{28}$$

где мы в интеграле (26) проделали замену $\tau \to \tau + \frac{\psi}{|\dot{\vec{v}}|}$ и ввели обозначения

$$\mu = 1 - \vec{v}^2\cos^2\vartheta = \frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2$$
$$y = \frac{|\dot{\vec{v}}|}{\sqrt{\mu}}\tau \tag{29}$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\psi$$

Воспользовавшись известными интегралами

$$\int_0^\infty \cos b\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)dx = -\int_0^\infty x^2 \cos b\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)dx = \frac{1}{\sqrt{3}}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}b\right) \tag{30}$$
$$\int_0^\infty x \sin b\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)dx = \frac{1}{\sqrt{3}}K_{2/3}\left(\frac{2}{3}b\right)$$

получаем следующее выражение для углового и спектрального распределения интенсивности излучения в единицу времени

$$\frac{dI_e}{dt} = \frac{e^2}{4\pi}\frac{E^3}{3\pi^2|\dot{\vec{v}}|}\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^4}\mu\left\{\mu\left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right)\left[K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{(1+\alpha)}{\gamma^2}K_{1/3}^2(\eta)\right\} d\alpha\, d\sin\vartheta \tag{31}$$

где

$$\eta = \frac{1}{3}\frac{\alpha E\mu^{3/2}}{\hbar|\dot{\vec{v}}|} = \frac{\alpha}{3\chi}(\gamma^2\mu)^{3/2} \tag{32}$$

Проводящийся таким образом (исходя из формул (I7), (I8)) расчет интенсивности излучения частиц со спином 0 оказывается еще более простым. Выражение для интенсивности получается из (3I), если в первом члене в фигурных скобках опустить член $\alpha^2/2$.

В качестве еще одной иллюстрации рассмотрим магнито-тормозное излучение частиц со спином I.

В этом случае величину $M(t)$ можно записать в виде:

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}}(t_f)_\mu \left\{\left[(\varepsilon \mathcal{P}) g^{\mu\nu} - \varepsilon^\mu \mathcal{P}^\nu - \varepsilon^\nu \mathcal{P}^\mu\right], e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right\}(t_i)_\nu \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} \tag{33}$$

где t_i , t_f - поляризации начальной и конечной векторных частиц.

Дальнейшее рассмотрение аналогично случаю частиц со спином $\frac{1}{2}$ - следует перейти к описанию поляризаций через величины в системе покоя. Причем легко показать, что с точностью до членов $\sim 1/\gamma$ можно полагать поляризации в системе покоя зависящими от одного времени (ср. (2I)).

Выполняя разложение по степеням $|\vec{v}|z$ и интегрирование по переменным z и ψ (ср. (26)-(30)) получаем для углового и спектрального распределения интенсивности излучения вектона в единицу времени.

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{dI_e}{dt} + \frac{dI_1}{dt} \tag{34}$$

величина dI_e/dt дается формулой (3I), а

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{e^2}{4\pi}\,\frac{E^3\hbar^{-3}}{9\pi^2|\vec{v}|}\,\frac{\alpha^4}{(1+\alpha)^4}\,\mu^2\left[\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{1+\alpha} + \gamma^2\mu\left(1+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\right)\right]\times$$
$$\times\left(K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)\right) d\alpha\, d\sin\vartheta \tag{35}$$

Для получения полной интенсивности излучения необходимо проинтегрировать (3I), (35) по углу вылета и частоте фотона. Для вычисления интеграла по α удобно ввести представление [4]

$$\frac{1}{(1+\alpha)^m} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(m+s)}{\Gamma(m)}\,\alpha^s ds \tag{36}$$

где $1-m < \lambda < 0$

После этого интегралы по α легко вычисляются. Проделав также элементарное интегрирование по ϑ (из которого видно, что основной вклад дает область $\vartheta \sim 1/\gamma$) получаем для электрона

$$\frac{dI_e}{dt} = \frac{\sqrt{3}\,\hbar^{-2}}{32\pi^2}e^2m^2\chi^2\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}(3\chi)^s(8+2s+s^2)\Gamma(-s)\Gamma(s+2)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{4}{3}\right)ds \tag{37}$$

аналогичное вычисление для частиц со спином 0 дает

$$\frac{dI_s}{dt} = \frac{3\sqrt{3}\,\hbar^{-2}}{16\pi^2}e^2m^2\chi^2\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}(3\chi)^s\Gamma(-s)\Gamma(s+2)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{2}{3}\right)ds \tag{38}$$

и для частиц со спином 1 добавка $\frac{dI_1}{dt}$ (см.(34))

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{3\sqrt{3}\,\hbar^{-2}}{32\pi^2}e^2m^2\chi^4\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}(3\chi)^s\Gamma(-s)\times$$
$$\times\left[(s+3)\Gamma(s+4)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{5}{3}\right) + \frac{(3\chi)^2}{8}\left(\frac{3}{2}s+\frac{22}{3}\right)\Gamma(s+5)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{8}{3}\right)\right]ds \tag{39}$$

Интегралы (37) - (39) можно вычислить замыкая контур интегрирования направо при $\chi \ll 1$ (при этом получается ряд по χ) и налево при $\chi \gg 1$ (при этом получается ряд по обратным степеням χ). Ввиду громоздкости этих рядов мы выпишем здесь только первые члены соответствующих разложений.

При $\chi \ll 1$ имеем

$$\frac{dI_{s,e,v}}{dt} = \frac{e^2m^2\chi^2\hbar^{-2}}{6\pi}\left(1 - \frac{55\sqrt{3}}{16}\chi + \delta_{s,e,v}\,\chi^2 + \ldots\right) \tag{40}$$

где $\qquad \delta_s = 42, \qquad \delta_e = 48, \qquad \delta_v = \frac{105}{2}$

Первый член этих разложений есть классическое выражение для интенсивности, второй – первая квантовая поправка, оба эти члена не зависят от спина излучающей частицы, такая зависимость появляется начиная с третьего члена.

При $\chi \gg 1$ имеем

$$\frac{dI_e}{dt} = \frac{e^2m^2(3\chi)^{2/3}8\Gamma(\frac{2}{3})}{\pi\cdot 3^5\hbar^2}+\ldots,\quad \frac{dI_s}{dt} = \frac{e^2m^2(3\chi)^{2/3}\Gamma(\frac{2}{3})}{2\pi\cdot 3^3\hbar^2}+\ldots, \tag{4I}$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{e^2m^2(3\chi)^{4/3}35\Gamma(4/3)}{2\pi\cdot 3^8\hbar^2}+\ldots$$

При $\chi \gg 1$ фотоны уносят энергию порядка энергии излучающей частицы, но в то же время можно показать, что основной вклад в интегралы (3I), (35) дает область $\alpha \sim 1$, это означает, что $E' \sim E$ (оправдывая тем самым предположение об ультрарелятивизме конечных электронов). В этом случае средний угол излучения фотона $\sim \frac{1}{\gamma}\chi^{1/3}$. Итак в существенно квантовой области характер излучения заметно меняется по сравнению с классической областью.

Интересно отметить, что при $\chi \gg 1$ интенсивность излучения векторной частицы растет с энергией быстрее, чем для частиц со спином 0 и $1/2$; такая ситуация, вообще говоря, характерна для квантовой электродинамики векторной частицы.

Заметим еще, что можно получить также замкнутые формулы для dI/dt, особенно удобные для случая $\chi \sim 1$. Воспользовавшись формулой [4]

$$\int x^{\mu-1}K_\nu(x)\,dx = 2^{\mu-2}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \tag{42}$$

получаем

$$\frac{dI_s}{dt} = \frac{e^2m^2\hbar^{-2}}{6\sqrt{3}\pi}\left\{\frac{1}{2\chi}-\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{2\pi}{9}\left(1-\frac{1}{\chi^2}\right)\Phi_{2/3}(\xi)-\frac{\pi}{9\chi}\Phi_{1/3}(\xi)\right\}$$

$$\frac{dI_e}{dt} = \frac{e^2m^2\hbar^{-2}}{2\pi\cdot 3^4}\left\{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left[\left(16+\frac{13}{\chi^2}\right)\Phi_{2/3}(\xi)+\frac{1}{\chi}\left(4\gamma+\frac{2}{\chi^2}\right)\Phi_{1/3}(\xi)\right]- -19-\frac{6\sqrt{3}}{\chi}-\frac{1}{\chi^2}\right\} \tag{43}$$

$$\Phi_\nu = e^{-\frac{i\pi\nu}{2}}(J_\nu-\mathbf{J}_\nu)+e^{\frac{i\pi\nu}{2}}(J_{-\nu}-\mathbf{J}_{-\nu})$$

140

где $\qquad \xi = \frac{2i}{3\chi}, \qquad \mathbf{J}_\nu$ – функция Ангера.

Все полученные выражения для интенсивности излучения зависят от кинематических характеристик частицы $\vec{v}(t)$, $\dot{\vec{v}}(t)$ в данном поле. В однородном поле для случаев спина $1/2$ и 0 они переходят в известные выражения, полученные Клепиковым [5] и Матвеевым [6]. Все выражения для векторных частиц получены впервые.

Выражение (37) было получено также в работе Никишова и Ритуса, рассмотревших интенсивность излучения электрона в поле плоской электромагнитной волны и постоянном скрещенном поле. Они обратили внимание, что при $f, g \ll \chi$ это же выражение описывает излучение электрона в произвольном однородном поле. Проведенное рассмотрение показывает, что такая общность результата физически связана с тем, что по существу для получения его достаточно учесть отдачу при излучении. В этом смысле подход применим для весьма широкого класса внешних полей. Как Клепиков [5], так и Никишов и Ритус [7] использовали решение уравнений в определенном внешнем поле, проделанный анализ показывает, что в этом нет необходимости и для получения данного круга результатов достаточно знать гейзенберговские уравнения движения в данном внешнем поле.

Очевидно во всех выражениях характеристики неоднородности магнитного поля содержатся только в χ. Этот вопрос вызвал недавно дискуссию (для первого члена разложения при $\chi \ll 1$, см. [1]).

Заметим еще, что подобный метод рассмотрения излучения в магнитном поле, однако с разложением коммутаторов до первого члена по $\hbar\omega/E$, применялся в ряде конкретных задач [8-I0].

§ 3. Рождение пары частиц фотоном

Развитая в § 2 методика может быть использована для рассмотрения ряда других процессов. Здесь мы рассмотрим рождение пары заряженных частиц фотоном во внешнем поле. В низшем приближении теории возмущений матричный элемент процесса имеет вид (4) олько надо провести замену $k_\mu \to -k_\mu$).

$$U_{fi} = \langle q | \frac{e}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\hbar\omega}} \int e^{-i\omega t} M(t)\, dt \,|\, \bar q \rangle \qquad (44)$$

$$eM(t) = \Psi_s^{+}(\vec p)\left\{(j\varepsilon),\, e^{i\vec k\cdot\vec r}\right\}\Psi_{\bar s}(\vec{\bar p}) \qquad (45)$$

где $|q\rangle$, $|\bar q\rangle$ – соответственно состояние частицы и античастицы, $s, \bar s$ – индексы спиновых состояний.

Нас будет интересовать вероятность перехода, просуммиро – ванная по конечным состояниям родившейся пары. Эту процедуру мы будем проводить в два этапа. Прежде всего просуммируем по конечным состояниям античастицы, тогда получим

$$dw = \frac{\alpha}{(2\pi)^2\omega}\sum_q \langle q | \int dt_1 \int dt_2\, e^{i\omega(t_1-t_2)} M(t_2) M^*(t_1) \,|\, q \rangle \qquad (45)$$

это выражение аналогично (8) и дальнейшее рассмотрение проводится как в § 2. Воспользовавшись формулами (I0) вынесем в $M(t_2)$ $e^{i\vec k\cdot\vec r(t_2)}$ направо, а в $M^*(t_1)$ $e^{-i\vec k\vec r(t_1)}$ налево.

Далее следует учесть, что мы будем рассматривать случай, когда родившиеся электрон и позитрон являются ультрарелятивистскими. Основной вклад в вероятность дает область скоростей конечной частицы, для которой $1-\vec n\vec v \sim 1/\gamma^2$, $\vec n$ – направление движения фотона, по той же причине $|\dot{\vec v}|\tau \sim \frac{1}{\gamma}$

Физически это означает, что родившаяся частица движется в момент рождения в направлении движения фотона, а взаимодействие фотон-частица остается существенным пока частица не повер – нет на угол $\sim 1/\gamma$, так что картина весьма похожа на магнито-тормозное излучение. Поэтому операция распутывания и переход к классическим значениям величин в обкладках $|q\rangle$ проводится в тех же предположениях, что и в § 2.

$$\langle q | M(t_2) M^*(t_1) | q \rangle = e^{i\omega\tau - i\frac{E}{E'}(\vec k\cdot\vec p - \omega\tau)} R(t_2) R^*(t_1) \qquad (47)$$

где $\quad eR(t) = \frac{1}{2}\Psi_s(\vec p)\left([\vec j(\vec p)+\vec j(-\vec p')]\varepsilon\right)\Psi_{\bar s}(-\vec p')$

где $\hbar\omega - E = E'$, $\hbar\vec k - \vec p = \vec p'$. С учетом измене – ния знаков импульсов, по сравнению с формулой (I8), связанного с тем, что теперь фотон находится в начальном состоянии, а обе частицы – в конечном, расчет проводится как в § 2, если учесть, что $\sum_q \to \frac{1}{\hbar^3} d^3p$. После проведения интегрирования по отно – сительному времени τ и азимутальному углу вылета частицы ψ, суммирования по спину конечных частиц и усреднения по поляриза – циям фотона получаем для вероятности рождения электрон-позитронной пары в единицу времени

$$\frac{dW_e}{dt} = \frac{8}{3\pi^2}\frac{\alpha m^2}{\hbar\omega\varkappa}\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\, \mathrm{ch}^3x \left\{ K_{1/3}^2(\eta) + \mathrm{ch}^2x\,(2\,\mathrm{ch}^2y-1)\left(K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)\right)\right\} \qquad (48)$$

где

$$\varkappa = \frac{H}{H_0}\frac{\hbar k_t}{m} = \frac{e\hbar^2\sqrt{|(F_{\mu\nu}k^\nu)^2|}}{m^3},$$

$$\eta = \frac{4}{3\varkappa}\mathrm{ch}^2y\,\mathrm{ch}^3x, \quad \mathrm{ch}^2y = \frac{1}{4}\frac{(\hbar\omega)^2}{EE'}, \quad \mathrm{ch}^2x = \gamma^2\mu \qquad (49)$$

k_t – импульс фотона, перпендикулярный направлению магнитного поля.

При рассмотрении рождения пары сохраняют справедливость приведенное в § 2 утверждение об отделении спиновых характерис – тик от операции распутывания. Так что можно рассмотреть рождение пары частиц с любым спином. Например для скалярных частиц полу – чаем:

$$\frac{dW_s}{dt} = \frac{4}{3\pi^2}\frac{\alpha m^2}{\hbar\omega\varkappa}\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\, \mathrm{ch}^3x \left[\mathrm{ch}^2x\, K_{2/3}^2(\eta) + \mathrm{sh}^2x\, K_{1/3}^2(\eta)\right] \qquad (50)$$

Вычисляя эти интегралы получаем при $\varkappa \ll 1$

$$\frac{dW_e}{dt} = \frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}\,\frac{\alpha m^2 \varkappa}{\hbar^2\omega}\, e^{-\frac{8}{3\varkappa}},$$

$$\frac{dW_s}{dt} = \frac{1}{6}\,\frac{dW_e}{dt} \tag{51}$$

Для $\varkappa \gg 1$

$$\frac{dW_e}{dt} = \frac{5\,\Gamma(5/6)\,(2/3)^{1/3}\,\alpha m^2 \varkappa^{2/3}}{14\,\Gamma(2/6)\,\hbar^2\omega}, \tag{52}$$

$$\frac{dW_s}{dt} = \frac{1}{5}\,\frac{dW_e}{dt}$$

В однородном поле вероятность для электронов переходит в полученную Клепиковым [5].

§ 4. Однофотонная аннигиляция пары

Матричный элемент этого процесса есть эрмитово-сопряженный от U_{fi} (44). Выражение для $M^*(t_2)\,M(t_1)$ содержит теперь $|\bar{q}\rangle\langle\bar{q}|$. Мы воспользуемся искусственным приемом:

$$|\bar{q}_{\vec{p}\,'}\rangle\langle\bar{q}_{\vec{p}\,'}| \to \sum_{\bar{q}} |\bar{q}\rangle\langle\bar{q}|\,\delta(\vec{p}\,' + \vec{\mathcal{P}})\hbar^3 \to \delta(\vec{p}\,' + \vec{\mathcal{P}})\hbar^3 \tag{53}$$

(где $\vec{\mathcal{P}}$ – оператор импульса), с помощью которого задача сводится к одночастичным обкладкам, как в § 2,3.

Поскольку мы рассматриваем однофотонную аннигиляцию пары частиц, движущихся по криволинейным траекториям в магнитном поле, затруднительно описание этого процесса (в отличие от процесса однофотонной аннигиляции в кулоновском поле) на языке сечений. По-видимому, наиболее удобным описанием здесь является введение времени жизни частиц, движущихся в среде античастиц в магнитном поле (или наоборот).

Проводя все необходимые коммутации и распутывание получаем для вероятности однофотонной аннигиляции частицы, движущегося в среде античастиц в магнитном поле в единицу времени

$$\frac{dW}{dt} = \pi\alpha n\hbar^3 \frac{d^3k}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-i\frac{E}{E'}\left[(\vec{k}\cdot\vec{\rho}) - \omega\tau\right]}\, R^*(t_2)\,R(t_1)\,\delta(\vec{p} + \vec{p}\,' - \hbar\vec{k}) \tag{54}$$

где n – плотность античастиц. Это выражение, как и в § 2,3 может быть использовано для частиц с любым спином.

Для однофотонной аннигиляции электрон-позитронной пары, после усреднения по азимутальному углу относительного движения начальных частиц, имеем:

$$\frac{dW_e}{dt} = \frac{\alpha n m^4 \hbar}{3|\vec{v}|(E+E')E'^2E^4}\left(1 + \frac{p_z^2}{m^2}\right)\left\{\left[(E+E')^2 + (E^2+E'^2)\frac{p_z^2}{m^2}\right]K_{1/3}^2(\eta) + (E^2+E'^2)\left(1+\frac{p_z^2}{m^2}\right)K_{2/3}^2(\eta)\right\} \tag{55}$$

где

$$\eta = \frac{1}{3\varkappa}\,\frac{(E+E')^2}{EE'}\left(1 + \frac{p_z^2}{m^2}\right)^{3/2},$$

входящая в $\varkappa$ величина $k_t = \sqrt{\omega^2 - k_\parallel^2}$, $p_z = p\sin\vartheta \ll E$ – есть z проекция импульса электрона и позитрона в системе, где фотон летит перпендикулярно полю.

Основной вклад в это выражение дает область, когда электрон и позитрон движутся в одном направлении, а угол между их импульсами $\sim 1/\gamma$.

В однородном поле это выражение совпадает с полученным в [5].

Приложение А

КОММУТАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

При движении заряженных частиц во внешнем магнитном поле имеет место операторное равенство

$$\{\mathcal{H}, \vec{v}\} = c^2(\vec{p} - e\vec{A}) = c^2\vec{\mathcal{P}} \tag{AI}$$

здесь $\mathcal{H}$ - гамильтониан, $\vec{v}$ - оператор скорости, скобки $\{,\}$ означают симметризованное произведение операторов. Из него получаем уравнение для $\vec{v}$

$$\vec{v} = c^2\{\vec{\mathcal{P}}, \mathcal{H}^{-1}\} + \frac{1}{4}\left[[\vec{v}, \mathcal{H}], \mathcal{H}^{-1}\right] \tag{A2}$$

решая это уравнение иттерациями, получаем ряд по степеням $\hbar$. В первом приближении по $\hbar$ имеем

$$\vec{v} = c^2\{\vec{\mathcal{P}}, \mathcal{H}^{-1}\} \tag{A3}$$

откуда имеем

$$[r_i, v_j] = i\hbar\frac{\partial v_j}{\partial p_i} = i\hbar\frac{c^2}{\mathcal{H}}\left[\delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{c^2}\right] \tag{A4}$$

Здесь мы пренебрегли некоммутативностью компонент скорости v_i и v_j. Последняя в этом же приближении задается выражением

$$\frac{1}{c^2}[v_m, v_n] = \frac{ie\hbar c}{\mathcal{H}^2}\varepsilon_{mnl}\left[H_l\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2}v_l\,\vec{v}\cdot\vec{H}\right] \tag{5}$$

Отсюда следует соотношение неопределенностей для компонент скорости. В общем случае для ультрарелятивистских электронов

$$\frac{1}{c^2}\Delta v_i \Delta v_j \gtrsim \frac{1}{2}\frac{e\hbar c H}{E^2} = \frac{1}{2}\frac{\hbar\omega_0}{E} \tag{A6}$$

если же движение происходит в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, то

$$\Delta v_i \Delta v_j \gtrsim \frac{\hbar\omega_0}{E\gamma^2} \tag{A7}$$

Мы рассмотрели некоммутативность компонент скорости в первом порядке по $\hbar$. Из уравнения (A2) следует, что члены высшего порядка по $\hbar$ имеют вид ряда по $\hbar\omega_0/E$.

Приложение Б

РАСПУТЫВАНИЕ КОМБИНАЦИИ $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_2)}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_1)}$

Для проведения операции распутывания запишем

$$\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{\rho} \tag{БI}$$

Тогда удобно представить $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_2)}$ в виде $L\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_1)}$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_2)} = e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}(t_1)+\vec{\rho})} = L\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_1)} \tag{Б2}$$

Здесь L оператор, к определению которого сводится задача. Заменяя для краткости

$$a = i\vec{k}\cdot\vec{r}(t) \tag{Б3}$$

имеем $\quad b = i\vec{k}\cdot\vec{\rho} - i\omega\tau$

$$\exp[\xi(a+b)] = e^{-i\omega\tau}L(\xi)e^{\xi a} \tag{Б4}$$

где ξ - параметр. Оператор $L(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dL}{d\xi} = L(\xi)e^{\xi a}\,b\,e^{-\xi a} \tag{Б5}$$

Вычислим теперь

$$e^{\xi a}\,b\,e^{-\xi a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\left[a,[a,\ldots[a,b]\ldots]\right] \tag{Б6}$$

Коммутатор

$$[a,b] = -[\vec{k}\cdot\vec{r}, \vec{k}\cdot\vec{\rho}] = -i\hbar(\vec{k}\vec{\nabla}_p)(\vec{k}\cdot\vec{\rho}) \tag{Б7}$$

найдем разлагая ρ по степеням τ

$$\vec{\rho} = \vec{v}(t)\tau + \frac{1}{2!}\dot{\vec{v}}(t)\tau^2 + \frac{1}{3!}\ddot{\vec{v}}(t)\tau^3 \tag{Б8}$$

Тогда заменяя $\vec{v}(t) = \vec{P}(t)/\mathcal{H}$ и воспользовавшись гейзенберговским уравнением движения в магнитном поле, получим

$$[a,b] = -[\vec{k}\cdot\vec{r}, \vec{k}\cdot\vec{\rho}] = \frac{2\hbar\omega}{\mathcal{H}} b \tag{Б9}$$

При вычислении коммутатора мы, наряду с разложением по степеням $1/\gamma$, учитывали также, что имеет место соотношение (I3).

Входящие в (Б9) операторы $\mathcal{H}$ и b коммутируют с точностью до членов $\hbar\omega_0/E$, поэтому порядок их записи в (Б9), а также в дальнейших выражениях, несущественен. Факт, что коммутатор $[a,b]$ выражается через b, позволяет вычислить все члены ряда (Б6), если учесть, что

$$[a, \mathcal{H}^{-1}] = \frac{\hbar\omega}{\mathcal{H}^2} \tag{БI0}$$

тогда

$$e^{\xi a} b e^{-\xi a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!}(n+1)!\left(\frac{\hbar\omega}{\mathcal{H}}\right)^n b = b\frac{1}{\left(1-\frac{\hbar\omega\xi}{\mathcal{H}}\right)^2} \tag{БI1}$$

Решая с учетом сказанного об операторах b и $\mathcal{H}$ дифференциальное уравнение (Б5) с граничным условием $L(0) = e^{i\omega\tau}$ получаем

$$L(\xi) = e^{b\frac{\xi\mathcal{H}}{\mathcal{H}-\hbar\omega\xi} + i\omega\tau} \tag{БI2}$$

Тогда, учитывая (Б2), (Б3), получаем

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_2)} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}(t_1)} = L(1) = \exp\left\{i\left[\omega\tau + \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}-\hbar\omega}(\vec{k}\cdot\vec{\rho} - \omega\tau)\right]\right\} \tag{БI3}$$

что завершает решение задачи распутывания.

Приложение В

ДРУГОЙ СПОСОБ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ

В некоторых случаях, в частности при рассмотрении процессов с участием частиц с высшими спинами, оказывается удобным провести интегрирование по времени сразу же после выполнения операции распутывания (по t_1 и t_2 в формуле (I7)). Поскольку вся информация о спинах и поляризациях содержится в $R(t)$, такой подход позволяет вести рассмотрение непосредственно на уровне матричных элементов (в то время как способ интегрирования по времени принятый в работе необходимо связан с рассмотрением комбинации $R^*(t_2)R(t_1)$ в целом).

В качестве иллюстрации рассмотрим движение по круговой орбите в однородном магнитном поле с частотой ω_0. Тогда возникающие интегралы по времени (за один оборот) имеют вид

$$T_{mn} = \frac{1}{\omega_0}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu(|\vec{v}|\cos\vartheta\sin\varphi - \varphi)}\cos^m\varphi\,\sin^n\varphi\,d\varphi \tag{BI}$$

где $\varphi = \omega_0 t$, $\nu = \frac{E}{E'}\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\alpha E}{|\vec{v}|}$, например,

$$T_{00} = \frac{2\pi}{\omega_0} J_\nu(\nu|\vec{v}|\cos\vartheta) \tag{B2}$$

В общем случае T_{mn} выражается через $J_\nu(z)$ и ее производные. Эти величины весьма похожи на классические и отличаются от них множителем $\frac{E}{E'}$ в ν. Если воспользоваться известной асимптотикой

$$J_\nu(\nu|\vec{v}|\cos\vartheta) = \frac{\mu^{1/2}}{\pi\sqrt{3}} K_{1/3}\left(\frac{\nu}{3}\mu^{3/2}\right) \tag{B3}$$

и соответствующими выражениями для производных от J_ν, то легко получить все выражения для интенсивности излучения, приведенные в тексте статьи. Область применимости такого подхода такая же как для основного метода.

Литература

I. "Синхротронное излучение" под редакцией А.А.Соколова, И.М.Тернова, "Наука", Москва, I966.

2. D.Fradkin,R.Good.Rev.Mod.Phys. 33,343,1961.

3. J.Schwinger.Phys.Rev. 75,1912,1949.

4. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, Физматгиз, I962.

5. И.П.Клепиков, ЖЭТФ, 26, I9, I954.

6. А.Н.Матвеев, ЖЭТФ, 3I, 479, I956.

7. А.И.Никишов, В.И.Ритус, ЖЭТФ, 46, 776, I964.

8. J.Schwinger.Proc.Nat.Acad.Sci. 40, 132,1954.

9. V.N.Baier,V.M.Katkov.Phys,Lett.24A,327,1967.

I0. В.Н.Байер, В.М.Катков, ЖЭТФ, 52, I422, I967.

Ответственный за выпуск В.С.Фадин.
Подписано к печати май 1967г.
Усл. I,0 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.
Заказ № I28

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР