

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ ИМ. Г.И. БУДКЕРА  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Спицын Роман Игоревич

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ РАЗРУШЕНИЯ  
ПЛАЗМЕННОЙ КИЛЬВАТЕРНОЙ ВОЛНЫ С  
ПОМОЩЬЮ КОНТРОЛЯ ПОТОКОВ ЭНЕРГИИ В  
ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ**

1.3.18. Физика пучков заряженных частиц и ускорительная техника

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор РАН  
Лотов Константин Владимирович

Новосибирск — 2026

# Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>Глава 1. Метод контроля потоков энергии в численном моделировании и его применение к задачам с лазерным драйвером</b> . . . . .	<b>16</b>
1.1. Основные принципы функционирования LCODE . . . . .	17
1.1.1. Моделирование плазмы . . . . .	18
1.1.2. Моделирование пучков частиц . . . . .	21
1.1.3. Моделирование лазерного импульса . . . . .	23
1.2. Контроль потоков энергии в численном моделировании . . . . .	34
1.3. Анализ точности расчета кильватерной волны при моделировании эксперимента по каналированию лазерного импульса на установке XCELS . . . . .	36
1.4. Основные результаты . . . . .	40
<b>Глава 2. Опрокидывание слабонелинейной плазменной волны из-за движения ионов плазмы</b> . . . . .	<b>41</b>
2.1. Возможная постановка эксперимента по генерации терагерцового излучения и важность времени жизни волны . . . . .	42
2.2. Определение момента опрокидывания волны с помощью контроля потоков энергии . . . . .	45
2.3. Зависимость времени жизни волны от массы иона плазмы . . . . .	46
2.4. Основные результаты . . . . .	49
<b>Глава 3. Разрушение кильватерной волны электронным гало в эксперименте AWAKE</b> . . . . .	<b>50</b>

3.1. Самомодуляционная неустойчивость протонного пучка и эксперимент AWAKE в ЦЕРН . . . . .	50
3.2. Диагностика поперечного размера протонного пучка в эксперименте AWAKE и электронное гало . . . . .	52
3.3. Динамика электронного гало . . . . .	61
3.4. Анализ энергообмена . . . . .	65
3.4.1. Энергетические процессы в электронном гало . . . . .	65
3.4.2. Энергетические процессы в плазменной волне . . . . .	69
3.5. Линзирование кильватерной волной . . . . .	71
3.6. Основные результаты . . . . .	79
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>80</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>82</b>

# Введение

Ускорители заряженных частиц плотно вошли в жизнь человечества. Сейчас они играют важную роль как в фундаментальной физике в качестве инструмента для изучения строения материи на субъядерных масштабах, так и в прикладных задачах, например, как источники пучков частиц для медицины или мощного излучения для рентгенографии. За почти вековую историю своей эволюции, начиная от работающего прототипа первого линейного ускорителя Рольфа Видероз (1928 год) или первого циклотрона Эрнеста Лоуренса (1930 год), который ускорял протоны до 80 килоэлектронвольт в камере диаметром 12 сантиметров, они развились до колоссальных установок, таких как, например, Большой адронный коллайдер, который расположен в ЦЕРН в тоннеле длиной 27 километров и ускоряет протонные и антипротонные пучки до 6,5 тераэлектронвольт.

Для фундаментальной науки ускорители являются «микроскопами», и чем глубже мы хотим проникнуть в устройство материи, тем большая энергия ускоренных частиц требуется. Эта гонка за высокими энергиями сопровождалась конкурированием идей и прорывными открытиями. Развитие высокочастотных генераторов, открытие принципа автофазировки, столкновение встречных пучков, переход к жесткой фокусировке — эти и многие другие достижения выводили ускорительную науку и технику на принципиально новый уровень. При этом предшествующие идеи не становились устаревшими, а занимали свою нишу в научных исследованиях или прикладных задачах. Если на одном графике отметить точками эквивалентную энергию пучка, достигнутую в ускорителе в соответствующем году, получится так называемый график Ливингстона (рис. 1). Заметно, что каждая технология ускорения постепенно выходила на пределы своих возможностей по достижимой энергии, и дальнейший рост энергии ускоренного пучка был возможен только благодаря какой-то новой идее, новому принципу ускорения.

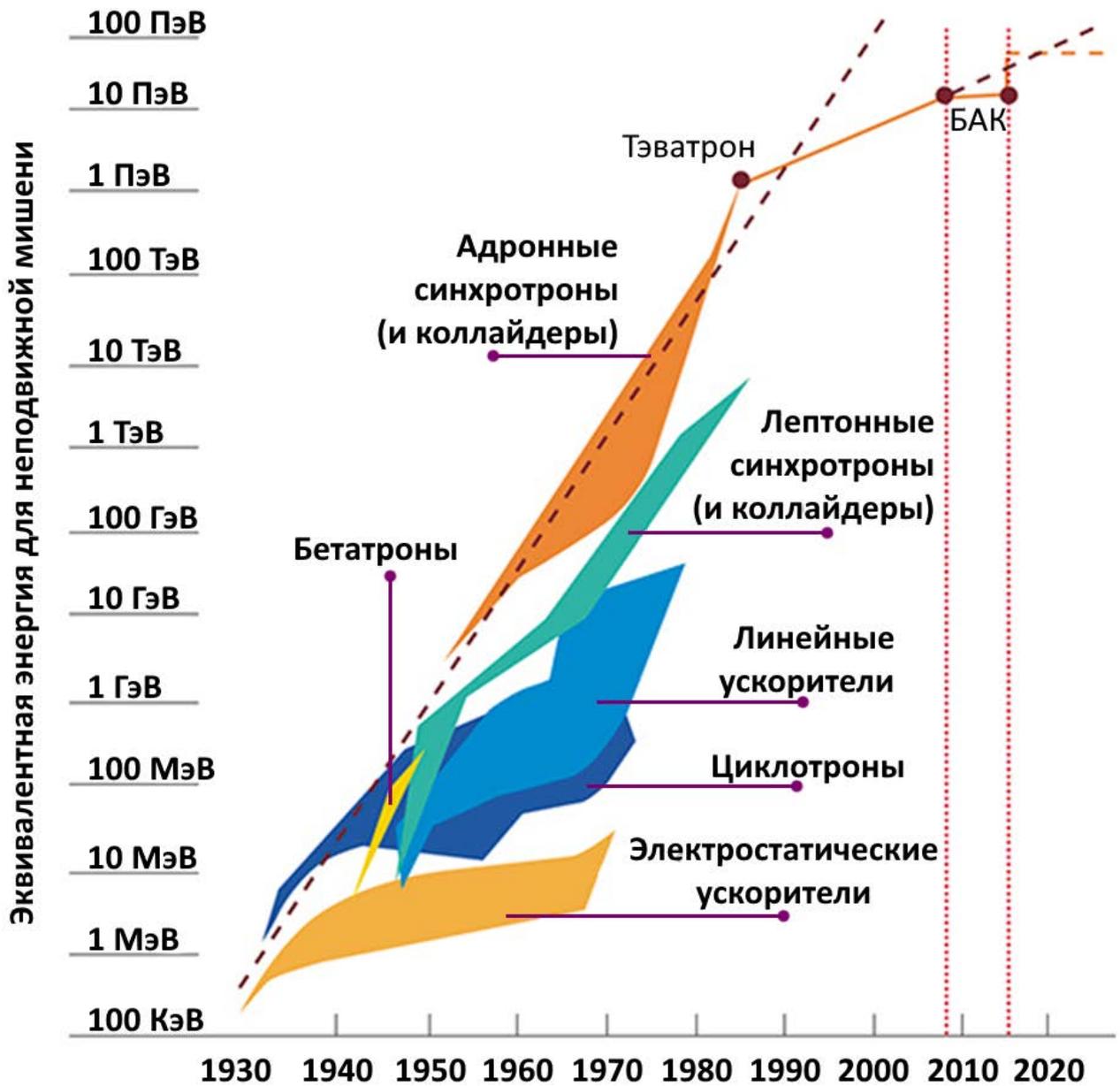


Рисунок 1 — График Ливингстона (изображение из книги [1]). По вертикальной оси отмечена эквивалентная энергия ускоренного пучка, достигнутая в году, который отмечается по горизонтальной оси. Цветными областями схематично охвачены значения энергии ускоренных частиц, достигаемые на созданных ускорителях применительно к задачам фундаментальной науки

Если рассматривать ускоритель с позиции энергетических процессов, то самым примитивным образом его можно охарактеризовать как канал передачи энергии от источника к ускоряемым частицам. Большое количество энергии человечество получать уже умеет, проблема состоит в управлении этой энергией:

как передать её в очень-очень маленькие частицы. Сделать это можно с помощью электромагнитных полей. В современных установках ускорение частиц производится с помощью высокочастотных резонаторов, в которых создается электромагнитная волна определенной моды, ускоряющая пролетающие пучки частиц. Однако ускоряющее поле в таких металлических структурах имеет верхний предел по величине примерно в сотню мегавольт на метр, связанный с риском электрического пробоя, который может испортить резонатор и вывести из строя ускоритель. Получается, что в погоне за более высокими энергиями ускоряемых частиц потребуется строить все более крупные установки, размещая в них нужное количество резонаторов. В то же время, хочется достичь высоких энергий ускоренных пучков на установке как можно меньше размера. Это стремление применимо как к установкам «большой науки», так и ускорителям из области прикладных задач и источникам излучения на их основе.

Одним из перспективных путей решения этой проблемы является плазменное кильватерное ускорение, которое уже продемонстрировало свой потенциал [2, 3, 4]. Идея его достаточно проста и напоминает серфинг в волнах позади катера на спокойном озере: создаем в невозмущенной среде волну (на воде — катером, а в плазме — лазерным импульсом или пучком заряженных частиц, называемым «драйвером»), и в этой волне начинает приобретать энергию ускоряемый объект (на воде — серфингист, а в плазме — ускоряемый электронный пучок, называемый «витнессом»). Причина интереса к этой идее заключается в достижимых ускоряющих полях. Плазма уже разрушенная среда, поэтому генерируемые таким образом поля в ней достигают величин в десятки гига вольт на метр, что, конечно же, не идет в сравнение с полями в металлических высокочастотных резонаторах, на которых успешно функционируют современные ускорители. Кроме того, ускорение частиц в этих полях происходит на коротких масштабах, что делает плазменное кильватерное ускорение потенциальным кандидатом на методы ускорения электронных пучков до энергий в гигаэлектронвольты в компактных установках («комнатных» масштабов).

В качестве драйвера, формирующего плазменную волну, может использоваться лазерный импульс, который за счет пондеромоторной силы создает разделение зарядов в плазме, выталкивая от оси легкие (по сравнению с ионами) электроны. Идея использования лазерных импульсов в качестве драйверов была предложена в 1979 году [5]. Успехи в этом направлении, доказавшие работоспособность принципа, уже достигнуты. Рекорд сейчас держится за Техасским университетом в Остине, где в 2023 году на Техасском петаваттном лазере (длина волны 1057 нм, длительность импульса 135 фс, мощность 1 ПВт) в гелий-алюминиевой плазме плотности  $5 \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$  на длине 10 см смогли ускорить пучок электронов с зарядом 340 пКл до 10 ГэВ, правда, с разбросом энергии в треть этой величины [3]. Предыдущим лидером была национальная лаборатория имени Лоуренса в Беркли с лазерным комплексом BELLA, обновившая в 2024 году свой личный рекорд: в водородной плазме плотности  $1 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$  газовой струи шириной 30 см с помощью лазера BELLA (длина волны 815 нм, длительность импульса 40 фс, мощность 500 ТВт) удалось ускорить сгусток электронов с зарядом 3 пКл до 9.15 ГэВ с разбросом энергии 20% [6]. В целом, лазерное кильватерное ускорение является перспективным кандидатом в компактные источники излучения на основе электронных пучков.

Электронные пучки тоже могут использоваться в качестве драйверов. Их взаимодействие с частицами плазмы интуитивно понятнее, чем в случае с лазерными импульсами, — просто кулоновское взаимодействие, в результате которого легкие электроны выталкиваются из приосевой области, что приводит к разделению зарядов и формированию плазменной волны. Эта идея сформулирована в современном виде в 1985 году [7], хотя экспериментально была продемонстрирована еще в 1971 году в Харькове [8]. Безусловным лидером в использовании электронных драйверов сейчас является установка FACET на Стэнфордском линейном ускорителе (SLAC, США). Их рекорд — увеличение энергии пучка электронов на 43 гигаэлектронвольта в плазменной секции длиной 85 см [4]. В этом эксперименте передняя половина электронного пучка

с ускорителя SLAC с энергией 42 ГэВ раскачала плазменную волну, а задняя половина ускорилась в ней до 85 ГэВ. Сейчас использование плазменного кильватерного ускорения с электронными драйверами рассматривается или как доускоритель пучков электронов на выходе существующих установок, или как умножитель энергии пучков, когда один электронный сгусток последовательно ускоряется кильватерными волнами сменяющихся драйверов.

Идея использования протонных пучков в качестве драйверов является самой молодой, она активно развивается с 2009 года [9, 10]. Флагманским и на данный момент единственным в мире проектом по изучению плазменного кильватерного ускорения с протонными драйверами является эксперимент AWAKE в ЦЕРН, который показал возможности ускорения электронов [2]. Кроме того, по причине новизны этой идеи, в эксперименте AWAKE обнаруживаются новые явления плазменно-пучковых взаимодействий, изучению одного из которых и посвящена одна из глав данной работы.

### **Актуальность темы**

Для плазменного кильватерного ускорения большую роль играют время жизни плазменной волны и механизмы её разрушения, поскольку ими ограничивается возможная её область, в которую можно поместить и ускорить витнесс, а также величина энергии, которую он сможет набрать, пока волна не разрушится. Кроме того, это интересный вопрос сам по себе, поскольку добавляет понимание новых эффектов в пучково-плазменных взаимодействиях.

### **Степень разработанности темы исследования**

При изучении плазменного кильватерного ускорения большую роль играет численное моделирование. Происходящие в плазме процессы являются быстропротекающими, поскольку драйверы двигаются с околосветовыми скоростями, и происходят на малых пространственных масштабах. Кроме того, не всегда есть возможность непосредственно наблюдать то или иное явление внутри плазменной секции, например, из-за невозможности разместить диагностическое оборудование, не повлияв критически на условия проведения эксперимента. Поэтому численное моделирование позволяет предсказать, что именно

можно ожидать от эксперимента с заданными параметрами. Численное моделирование взаимодействия лазерных импульсов, пучков заряженных частиц и плазмы может осуществляться основанными на методе частиц в ячейках (Particle-in-Cell) кодами (PIC-кодами). Однако расчеты этими кодами крайне ресурсоемки с точки зрения количества требуемых процессорных часов, что влечет за собой еще и финансовые затраты для работы на суперкомпьютерах, в том числе и на электроэнергию. В частности, одно полномасштабное моделирование эксперимента AWAKE PIC-кодом потребовало 22 миллиона процессорных часов [11], при этом затраты только на электроэнергию по оценкам 2019 года составили около 220 тысяч евро.

В связи с этим крайне актуально создание и использование при моделировании плазменного кильватерного ускорения специализированных быстрых кодов, основанных на каких-либо упрощениях и приближениях, снижающих на порядки трудоемкость вычислительных задач и значительно уменьшая время расчетов. Тогда появляется возможность еще и быстрого сканирования области параметров эксперимента и поиска наиболее перспективных вариантов, что, несомненно, является важным преимуществом для теоретических расчетов при постановках экспериментальных задач. Одним из таких кодов является разработанный в ИЯФ СО РАН код LCODE [12, 13, 14], описанию принципов работы которого посвящена одна из глав данной работы, включающая в себя также подробное описание разработанного автором функционального блока по расчету эволюции лазерных импульсов в плазме.

**Целью** данной работы является разработка метода определения времени жизни плазменной кильватерной волны и механизмов её опрокидывания и разрушения в нескольких практически важных конфигурациях с помощью численного моделирования.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Дополнить существующий программный код LCODE функциональным блоком, позволяющим рассчитывать эволюцию лазерного импульса в плазме.
2. Разработать метод контроля потоков энергии в численном моделировании.
3. Изучить с помощью метода контроля потоков энергии ограничение времени жизни плазменной волны из-за движения ионов плазмы.
4. Изучить с помощью метода контроля потоков энергии в численном моделировании механизм разрушения слабонелинейной плазменной волны электронным гало, определяющий время жизни плазменной волны в радиально ограниченной плазме.

**Научная новизна** состоит в разработке и применении нового инструмента численного моделирования, который позволяет определить в задачах плазменного кильватерного ускорения время жизни волны в плазме позади движущегося драйвера.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

С помощью разработанного инструментария численного моделирования найдены и исследованы эффекты, учет которых необходим для достижения контролируемого ускорения частиц с малым энергоразбросом в экспериментах по плазменному кильватерному ускорению. Кроме того, объяснены дополнительные ограничения на минимальную ширину окна моделирования.

### **Методология и методы исследования**

Численное моделирование проводилось разработанным в ИЯФ СО РАН, в том числе и автором диссертации, квазистатическим кодом LCODE, используемым для моделирования процессов плазменного кильватерного ускорения с пучковыми и лазерными драйверами. Обработка выходных данных осуществлялась в интерактивной среде Jupyter, работающей на основе языка программирования Python.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Контроль потоков энергии в численном моделировании является эффективным инструментом для характеристики энергетических процессов в плазменном кильватерном ускорении и удобным индикатором выхода ошибки расчетов за допустимые пределы.
2. Метод контроля потоков энергии позволяет определить время жизни плазменной волны.
3. Численным моделированием подтвержден теоретический вывод о том, что если ограничение времени жизни плазменной волны связано с движением ионов плазмы, то время жизни волны пропорционально кубическому корню отношения массы иона плазмы к его заряду.
4. Плазменная волна, созданная узким протонным драйвером в эксперименте АWAКЕ при низкой плотности плазмы ( $2 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ), затухает за счет того, что вокруг плазмы образуется электронное гало и уносит из волны энергию.
5. За разрушение плазменной волны, созданной узким протонным драйвером, ответственны первые возвращающиеся электроны гало, энергия которых невелика, из-за чего они направляются полями плазменной волны именно в область её ускоряющей фазы, забирая из волны энергию.

### **Степень достоверности и апробация результатов**

Достоверность полученных результатов обеспечивается косвенным совпадением наблюдаемых в эксперименте процессов и результатов численного моделирования. Результаты работы докладывались автором и обсуждались на следующих международных конференциях и семинарах:

1. 4-я Европейская конференция по современным методам ускорения «ЕААС — 2019» (Италия, о.Эльба, сентябрь 2019).
2. 38-е собрание коллаборации АWAКЕ по физическим и экспериментальным вопросам (Швейцария, ЦЕРН, дистанционно, май 2020).
3. Общее собрание коллаборации АWAКЕ (Швейцария, ЦЕРН, дистанционно, сентябрь 2020).

4. Межинститутский семинар «Новые методы ускорения частиц и экстремальные состояния материи» (Новосибирск, дистанционно, февраль 2021).
5. Семинар ускорительных лабораторий ИЯФ СО РАН (Новосибирск, май 2021).
6. Зимняя школа по физике высоких плотностей энергии РФЯЦ-ВНИИТФ (Снежинск, 25 февраля - 01 марта 2024 года).

Также результаты докладывались соавторами работ на конференциях:

1. 20-я научная школа «Нелинейные волны — 2022» (Нижний Новгород, 07 – 13 ноября 2022 года).
2. 12-й Азиатский форум по ускорителям и детекторам «AFAD — 2023» (Австралия, Мельбурн, дистанционно, 12 – 14 апреля 2023 года).
3. 28-я Международная конференция по ускорителям заряженных частиц «RuPAC'23» (Новосибирск, 11 – 15 сентября 2023 года).
4. 13й Азиатский форум по ускорителям и детекторам «AFAD — 2024» (Тайвань, Синьчжу, дистанционно, 17 – 19 апреля 2024 года).
5. 7-я Международная конференция по экстремальным состояниям вещества и излучения «ICMRE — 2024» (Китай, Ханчжоу, 13 – 17 мая 2024 года).
6. 8-я Международная конференция по сверхбыстрым оптическим явлениям «UltrafastLight — 2024» (Москва, 30 сентября – 02 октября 2024 года).

### **Публикации автора по теме диссертации**

По теме диссертации опубликовано 7 работ, из которых 3 публикации в научных журналах из списка ВАК при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации [15, 16, 17], 4 публикации в рецензируемых научных изданиях, входящих в базы Scopus и Web of Science и приравненных к статьям из списка ВАК [18, 19, 20, 21]:

1. Advanced quasistatic approximation / Tuev P.V., **Spitsyn R.I.**, Lotov K.V. – Текст : электронный // Plasma Physics Reports. – 2023. –

- Vol.49. – nr. 2. – P. 229–238. – URL: <https://doi.org/10.1134/S1063780X22601249>. – Дата публикации: 17.04.2023 [15].
2. Laser Wakefield Acceleration in a Plasma Channel / M.S. Dorozhkina, K.V. Baluev, D.D. Kutergin, ..., **R.I. Spitsyn**, ... [и др.]. – Текст : электронный // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. – 2023. – Vol.50. – Suppl. 6. – P. S715–S723. – URL: <https://doi.org/10.3103/S1068335623180057>. – Дата публикации: 07.10.2023 [16].
  3. Plasma Wakefield Acceleration Driven by XCELS Laser Pulse / Kutergin D.D., Lotov I.K., Minakov V.A., **Spitsyn R.I.**, ... [и др.]. – Текст : электронный // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2024. – Vol.21. – nr. 3. – P. 316–321. – URL: <https://doi.org/10.1134/S1547477124700183>. – Дата публикации: 07.06.2024 [17].
  4. Characterization of wavebreaking time and dissipation of weakly nonlinear wakefields due to ion motion / **R.I. Spitsyn**, I.V. Timofeev, A.P. Sosedkin, and K.V. Lotov. – Текст : электронный // Physics of Plasmas. – 2018. – Vol. 25. – nr. 4. – P. 103103. – URL: <https://doi.org/10.1063/1.5048549>. – Дата публикации: 03.10.2018 [18].
  5. Wakefield decay in a radially bounded plasma due to formation of electron halo / **R.I. Spitsyn**, K.V. Lotov. – Текст : электронный // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2021. – Vol.63. – nr. 5. – P. 055002. – URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6587/abe055>. – Дата публикации: 19.03.2021 [19].
  6. Proton beam defocusing in AWAKE experiment: comparison of simulations and measurement / A.A. Gorn, M. Turner, E. Adli, ..., **R.I.Spitsyn**, ... [и др.]. – Текст : электронный // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2020. – Vol. 62. – nr. 12. – P. 125023. – URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6587/abc298>. – Дата публикации: 06.11.2020 [20].
  7. Experimental study of long timescale dynamics of a plasma wakefield driven by a self-modulated proton bunch / J. Chappell, E. Adli, ...,

**R.I.Spitsyn**, ... [и др.]. – Текст : электронный // Physical Review Accelerators and Beams. – 2021. – Vol.24. – nr. 1. – P. 011301. – URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.011301>. – Дата публикации: 05.01.2021 [21].

**Личный вклад** автора в получении результатов, выносимых на защиту, является определяющим. Автор принимал активное участие в постановке задачи, участвовал в разработке применяемых в работе численных кодов, проводил численное моделирование и анализ полученных результатов, а также участвовал в подготовке публикаций и докладов. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в его опубликованные работы:

в статьях 1 [15], 2 [16] и 3 [17] — в разработке и реализации численной схемы для решения уравнения эволюции лазерного импульса в плазме;

в статье 4 [18] — в проведении численного моделирования, анализе влияния движения ионов плазмы на время жизни плазменной волны, разработке метода определения времени жизни плазменной волны в численном моделировании и установлению зависимости величины времени жизни волны от отношения массы иона плазмы к его заряду;

в статье 5 [19] — в проведении численного моделирования, анализа динамики электронного гало и процессов его энергообмена с плазменной кильватерной волной, а также установления механизма её разрушения;

в статьях 6 [20] и 7 [21] — в объяснении механизма затухания плазменной волны вследствие её взаимодействия с электронами гало.

### **Объем и структура работы**

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения.

Полный объём диссертации составляет 89 страниц, включая 30 рисунков. Список литературы содержит 44 наименования.

**Первая глава** посвящена описанию принципов функционирования программного комплекса LCODE, моделям и уравнениям, заложенным в его осно-

ву, в частности лазерному решателю [22, 15], позволяющему рассчитать эволюцию лазерного импульса в плазме, его применению в задачах расчета динамики лазерного драйвера [16, 17], а также описанию метода контроля потоков энергии, который позволяет проследить, как энергия перемещается по области моделирования.

**Вторая глава** посвящена применению метода контроля потоков энергии к задаче по опрокидыванию плазменной волны, вызванному движением ионов плазмы [18], конкретно к практической задаче, связанной с возможным проектом эксперимента по генерации терагерцового излучения в плазменных волнах встречных лазерных импульсов в Институте лазерной физики СО РАН.

**В рамках третьей главы** рассматривается применение метода контроля потоков энергии к изучению механизма разрушения слабонелинейной плазменной волны электронным гало. Это явление было обнаружено в эксперименте AWAKE и может ограничивать время жизни плазменной волны. С помощью численного моделирования изучен энергообмен между электронном гало и плазменной волной и обнаружена причина, из-за которой происходит разрушение волны [19].

# Глава 1. Метод контроля потоков энергии в численном моделировании и его применение к задачам с лазерным драйвером

Как отмечалось ранее, численное моделирование играет важную роль в изучении процессов плазменного кильватерного ускорения. С одной стороны, оно позволяет детально смоделировать и проанализировать происходящие в плазме процессы и восстановить полную картину явления по фрагментарным экспериментальным данным, объем которых может быть ограничен, например, по причине отсутствия подходящих диагностических инструментов или быстрого протекания процессов на очень малых масштабах. В то же время, с помощью быстрых кодов появляется возможность проведения множества моделирований с разными начальными параметрами эксперимента, чтобы найти наиболее перспективные и показательные варианты.

Для изучения процессов плазменного кильватерного ускорения в данной работе используется код LCODE, разработанный в ИЯФ СО РАН коллективом сотрудников, в том числе и автором работы, а конкретно двумерная версия кода, которая моделирует процессы в плоской декартовой или осесимметричной геометрии.

В разделе 1.1 описаны общие принципы построения кода LCODE и его блоки, разработанные сотрудниками, занимающимися плазменным кильватерным ускорением в ИЯФ СО РАН, и взятые из источников [12, 13, 14]. Подраздел 1.1.3 содержит описание реализованного в виде функционального блока кода LCODE оригинального лазерного решателя, разработанного автором диссертации [22, 15]. В разделе 1.2, не содержащем оригинальных результатов автора, вводится и объясняется понятие потоков энергии в сопутствующем окне, впервые появившееся в работе [23]. Раздел 1.3 посвящен применению метода контроля потоков энергии из раздела 1.2 для определения точности ква-

зистатического моделирования лазер-плазменного взаимодействия, подробно описанному в работах [16, 17], в которых использовался разработанный автором диссертации лазерный решатель.

## 1.1. Основные принципы функционирования LCODE

Быстродействие LCODE по сравнению с традиционными PIC-кодами обеспечивается использованием квазистатического приближения. Ключевая идея упрощения, используемого в данной модели, заключается в том, что характерные времена изменения, например, формы драйвера, намного больше периода плазменной волны. Тогда при моделировании окна, движущегося со скоростью света  $c$  в направлении оси  $z$ , можно ввести сопутствующую координату  $\xi = z - ct$  и для характеристик плазмы, пучков частиц и лазерных импульсов использовать функциональные зависимости именно от неё. Тогда в случае небольших областей моделирования, для которых эволюцией драйвера можно пренебречь (например, вблизи драйвера) зависимость какой-либо величины от  $\xi$  можно рассматривать и как функцию от продольной координаты  $z$  при фиксированном времени  $t$ , и как временную эволюцию по  $t$  в фиксированной точке  $z$ . При изучении же долговременной динамики процессов кильватерного ускорения со значительным изменением формы драйвера в масштабах длинного окна моделирования (большой области позади драйвера) зависимость от  $\xi$  интерпретируется как временная эволюция в конкретной точке пространства.

В LCODE с помощью некоторой заданной «базовой» плотности плазмы  $n_0$ , а также фундаментальных физических констант, таких как скорость света  $c$ , масса электрона  $m_e$  и его заряд  $e$ , все используемые в численном моделировании физические величины обезразмериваются. Получающиеся единицы измерения приведены в таблице 1, где  $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m_e}$  — плазменная частота.

Таблица 1 — Единицы измерения физических величин, используемые в LCODE

Величина	Единица измерения
Масса:	$m_e$
Скорость:	$c$
Электрический заряд:	$e$
Плотность частиц:	$n_0$
Частота:	$\omega_p$
Время:	$\omega_p^{-1}$
Расстояние:	$c/\omega_p$
Волновое число:	$k_p = \omega_p/c$
Импульс:	$mc$
Плотность заряда:	$en_0$
Плотность тока:	$ecn_0$
Ток:	$mc^3/e$
Поле:	$mc\omega_p/e$
Потенциал:	$mc^2/e$
Плотность энергии:	$n_0mc^2$
Плотность потока энергии:	$n_0mc^3$
Поток энергии:	$n_0mc^5/\omega_p^2$
Сила:	$mc\omega_p$

### 1.1.1. Моделирование плазмы

В LCODE плазма моделируется двумя способами. Первый способ основан на представлении плазмы заряженными макрочастицами (кинетическая модель), во втором способе плазма описывается гидродинамически (жидкостная модель). Код может работать как в двумерной декартовой, так и цилиндрической системе координат.

Поскольку в данной работе проводились расчеты для осесимметричных задач с использованием кинетической модели, то подробно опишем только эту модель в цилиндрической системе координат. В этой модели электромагнитное

поле рассчитывается путем численного решения уравнений Максвелла, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j} + \vec{j}_b + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \rho + \rho_b, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  — электрическое и магнитное поля,  $\rho$  и  $\vec{j}$  — плотности заряда и тока в плазме,  $\rho_b$  и  $\vec{j}_b$  — плотности заряда и тока сторонних частиц. Использование в квазистатическом приближении упомянутой выше сопутствующей координаты  $\xi$  позволяет записать

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (1.2)$$

что преобразует уравнения (1.1) к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_r &= \rho + \rho_b - \frac{\partial E_z}{\partial \xi}, & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r &= -\frac{\partial B_z}{\partial \xi}, & (1.3) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (E_r - B_\varphi) &= \rho - j_z, & \frac{\partial E_z}{\partial r} &= j_r, & \frac{\partial B_z}{\partial r} &= -j_\varphi, & E_\varphi &= -B_r. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если частицы пучка движутся преимущественно в продольном направлении, то можно считать  $j_{bz} = \rho_b$ , пренебрегая компонентами  $j_{br}$  и  $j_{b\varphi}$  тока пучка, что и делается в LCODE. Для обеспечения устойчивости алгоритма вместо уравнения (1.3) методом конечных разностей решаются следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_r - E_r = \frac{\partial(\rho + \rho_b)}{\partial r} - \frac{\partial j_r}{\partial \xi} - \tilde{E}_r, \quad \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r - B_r = \frac{\partial j_\varphi}{\partial \xi} - \tilde{B}_r, \quad (1.5)$$

где  $\tilde{E}_r$  и  $\tilde{B}_r$  — некоторые предсказания значений (приближенные значения) полей  $E_r$  и  $B_r$ . Эти уравнения получаются дифференцированием уравнений (1.3) и подстановкой в них выражений (1.4). Если предсказанные значения близки к конечным полям, вычитание полей (с тильдами или без них) из обеих частей равенств не приводит к большой ошибке. Граничные условия для уравнений (1.4) – (1.5) соответствуют идеально проводящей трубке радиуса  $r_{\max}$ :

$$\begin{aligned} E_r(0) = B_r(0) = B_\varphi(0) = E_z(r_{\max}) = B_r(r_{\max}) = 0, & \quad (1.6) \\ \int_0^{r_{\max}} 2\pi r B_z dr = \pi r_{\max}^2 B_0, \end{aligned}$$

где  $B_0$  — внешнее продольное магнитное поле (оно не меняет аксиальную симметрию системы).

Каждая макрочастица плазмы с массой  $M$  и зарядом  $q$  также характеризуется поперечной координатой ( $r$ ) и тремя компонентами импульса ( $p_r$ ,  $p_\varphi$  и  $p_z$ ). Параметры макрочастиц плазмы определяются перед пучком (при  $\xi = 0$ ), а затем изменяются послойно в соответствии с уравнениями

$$\frac{d\vec{p}}{d\xi} = \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{d\xi} = \frac{q}{v_z - 1} \left( \vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}] \right), \quad (1.7)$$

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{v_r}{v_z - 1}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{M^2 + p^2}}. \quad (1.8)$$

Моделирование взаимодействия частицы плазмы со стенкой (при  $r_{\max}$ ) осуществляется размещением этой частицы в области моделирования вблизи стенки в расчетной точке столкновения, будто бы частица столкнулась со стенкой, потеряла свой импульс и кинетическую энергию и с их нулевыми значениями начала двигаться вновь в существующих электромагнитных полях, что схематично показано на рис. 1.1.

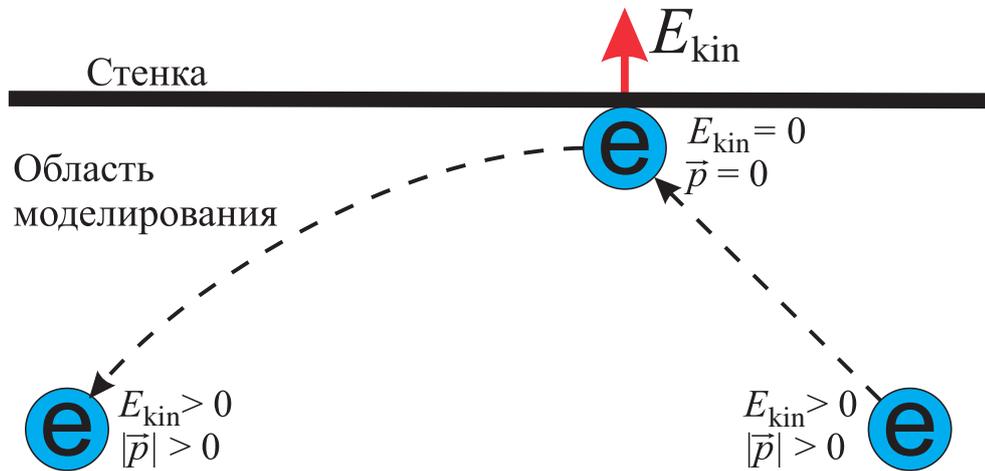


Рисунок 1.1 — Взаимодействие быстрых электронов с границей области моделирования. При столкновении электрон теряет свой импульс  $\vec{p}$  и кинетическую энергию  $E_{\text{kin}}$ , передавая её в стенку. После этого заряженная частица начинает двигаться в электромагнитном поле волны, заново набирая энергию и импульс

Ток и плотность заряда плазмы вычисляются путем суммирования по макрочастицам плазмы, находящимся в заданном радиальном интервале:

$$\vec{j} = A \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i}{1 - v_{z,i}}, \quad \rho = A \sum_i \frac{q_i}{1 - v_{z,i}}, \quad (1.9)$$

где  $A$  — нормировочный коэффициент. Вклад частицы в плотность и ток зависит от скорости макрочастиц в окне моделирования, что отражено в знаменателях выражений (1.9).

Отклик плазмы рассчитывается послойно в сторону уменьшения  $\xi$  (справа налево на рисунке 1.2). Расчет электромагнитных полей требует значения производных от токов по  $\xi$ , для чего используется схема предиктор-корректор [24]: сначала частицы плазмы из слоя  $a$  перемещаются в слой  $b$  полями слоя  $a$ , далее вычисляются токи и все поля в слое  $b$ , затем частицы плазмы из слоя  $a$  перемещаются в слой  $b$  средними полями слоев  $a$  и  $b$ , снова вычисляются токи и поля в слое  $b$ , после чего частицы плазмы снова перемещаются из слоя  $a$  в слой  $b$  с помощью средних полей. При первом вычислении полей в качестве  $\tilde{E}_r$  и  $\tilde{B}_r$  используются радиальные поля из предыдущего слоя. При втором вычислении полей ранее найденные средние радиальные поля используются как  $\tilde{E}_r$  и  $\tilde{B}_r$ . Мелкомасштабные (масштаба шага сетки) шумы плотности плазмы подавляются отдельным алгоритмом [24].

Структура алгоритма позволяет легко сократить шаг по  $\xi$  в областях с мелкомасштабной структурой поля, что происходит автоматически, если плотность тока плазмы  $|j_z|$  превышает некоторое пороговое значение.

### 1.1.2. Моделирование пучков частиц

Пучки заряженных частиц в LCODE моделируются макрочастицами, причем в двумерной геометрии положение частицы с массой  $m_b$  и зарядом  $q_b$  описывается её продольной и поперечной координатами ( $\xi_b$  и  $r_b$ ) и тремя

компонентами импульса  $\vec{p}_b$ , что позволяет записать уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \frac{dr_b}{dt} &= v_{br}, & \frac{d\xi_b}{dt} &= v_{bz} - 1, \\ \frac{d\vec{p}_b}{dt} &= q_b \vec{E} + q_b [\vec{v}_b \times \vec{B}], & \vec{v}_b &= \frac{\vec{p}_b}{\sqrt{m_b^2 + p_b^2}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для численного решения этих уравнений применяется метод средней точки, являющийся модификацией метода Эйлера, в котором вычисление действующих на макрочастицу полей производится на половинном шаге по времени в предсказанном с помощью линейной интерполяции местоположении частицы. Для частиц с малым продольным импульсом и связанной с этим высокой частотой бетатронных колебаний шаг по времени автоматически уменьшается для повышения точности расчетов.

В отсутствие внешнего магнитного поля ( $B_0 = 0$ ) момент импульса частиц пучка должен сохраняться, поэтому азимутальная составляющая импульса  $p_{b\phi}$  не изменяется согласно уравнению (1.10), а находится из условия сохранения  $r_b p_{b\phi} = \text{const}$ .

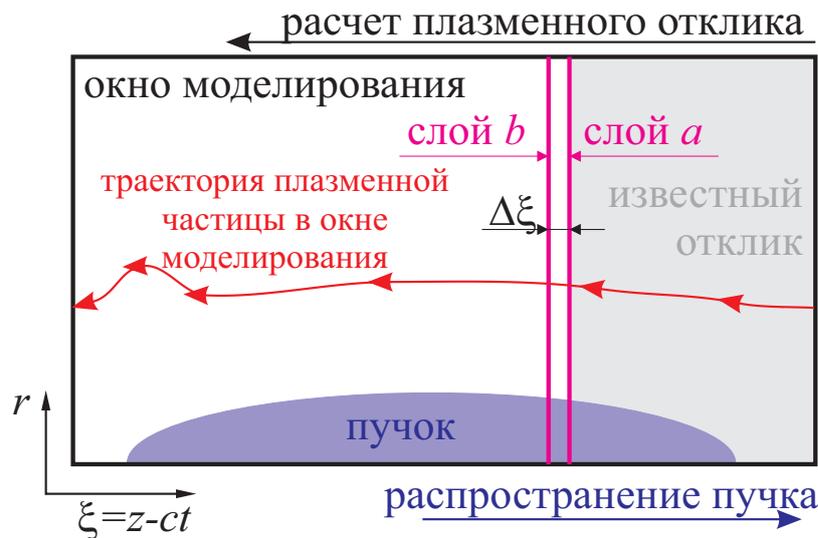


Рисунок 1.2 — Расчет отклика плазмы в квазистатическом приближении

### 1.1.3. Моделирование лазерного импульса

В LCODE за моделирование лазерных импульсов отвечает функциональный блок с численной схемой, подробно описанной в работах [22, 15]. На основе имеющихся параметров плазмы он вычисляет изменение лазерного импульса и силу, действующую на частицы плазмы со стороны лазерного импульса. При этом не теряется важное преимущество LCODE по сравнению с другими кодами — быстроедействие.

В работе блока используется двумерная квазистатическая модель лазерного импульса, который описывается вектор-потенциалом

$$\hat{A}_\perp(\xi, x_\perp, t) = A_\perp(\xi, x_\perp, t) \exp(ik_0\xi) + K.C. \quad (1.11)$$

в виде произведения медленно меняющейся огибающей функции  $A_\perp$  на быстроосциллирующую фазу. Под  $K.C.$  подразумевается комплексно-сопряженное слагаемое, а аргументом  $x_\perp$  обозначена поперечная координата ( $x$  в случае декартовой или  $r$  в случае цилиндрической геометрии).

Непосредственно из уравнений Максвелла можно получить уравнение эволюции огибающей вектор-потенциала [25]:

$$\left[ \frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( ik_0 + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \nabla_\perp^2 \right] A_\perp(\xi, x_\perp, t) = k_p^2 \frac{\bar{n}}{n_0 \bar{\gamma}} A_\perp(\xi, x_\perp, t), \quad (1.12)$$

где  $k_0 = \omega_0/c$  — волновое число лазерного импульса,  $\nabla_\perp^2$  — двумерный лапласиан,  $\bar{n}$  — плотность плазмы, усредненная по периоду лазерного импульса, а  $\bar{\gamma}$  — гамма-фактор электронов плазмы, тоже усредненный по периоду лазерного импульса и равный

$$\bar{\gamma} = \sqrt{1 + \frac{1}{m_e^2 c^2} \left( |\vec{p}|^2 + \left| \frac{e}{c} A_\perp \right|^2 \right)}. \quad (1.13)$$

В используемой модели предполагается, что лазерный импульс распространяется в уже ионизованной среде, например, его предвестником.

Влияние поляризации лазерного импульса сводится к числовому коэффициенту  $P$ , который входит в действующую на частицу плазмы с зарядом  $q$  ponderomotorную силу, которая применительно к данной задаче вычисляется по формуле

$$\vec{F}_p = -P \frac{q^2}{2m\bar{\gamma}} \nabla |A^2|. \quad (1.14)$$

В случае круговой поляризации коэффициент  $P$  равен 1, в случае линейной — 0.5.

Перейдем к безразмерным величинам, введенным в разделе 1.1.1. При этом под  $k_0$  далее будет подразумеваться отношение волновых чисел лазерного импульса и плазменной волны, а величиной  $\hat{n} = \bar{n}/n_0$  будем обозначать безразмерную плотность плазмы. Для краткости также опустим символ  $\perp$ , а поскольку в данной работе рассматривается моделирование осесимметричных задач, то и поперечную координату  $x_\perp$  переобозначим как  $r$  в цилиндрической системе координат. Уравнение (1.12) в таких безразмерных величинах записывается в виде

$$2ik_0 \frac{\partial A(\xi, r, t)}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial A(\xi, r, t)}{\partial \xi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A(\xi, r, t)}{\partial r} \right) = \frac{\hat{n}}{\bar{\gamma}} A(\xi, r, t). \quad (1.15)$$

Вычисление значений огибающей производится на сетке с  $N_n$  узлов и шагом  $h$  по продольной координате,  $\xi_n = n \cdot h$  ( $0 \leq n < N_n$ ), и  $N_l$  узлов и шагом  $g$  по поперечной координате,  $r_l = l \cdot g$  ( $0 \leq l < N_l$ ). Временная эволюция рассчитывается с шагом по времени  $\tau$ , а номер шага по времени обозначается индексом  $m$ . Каждая сетка, определенная для какого-то момента времени  $t_m = m \cdot \tau$ , будет называться слоем. Совокупность узлов с одинаковым индексом  $n$  (сечение сетки по соответствующей индексу  $n$  координате  $\xi_n$ ) будет называться столбцом (рис. 1.3).

Для численного решения вектор-потенциал лазерного импульса представляется в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$A(\xi, r, t) = \Re A(\xi, r, t) + i \Im A(\xi, r, t). \quad (1.16)$$

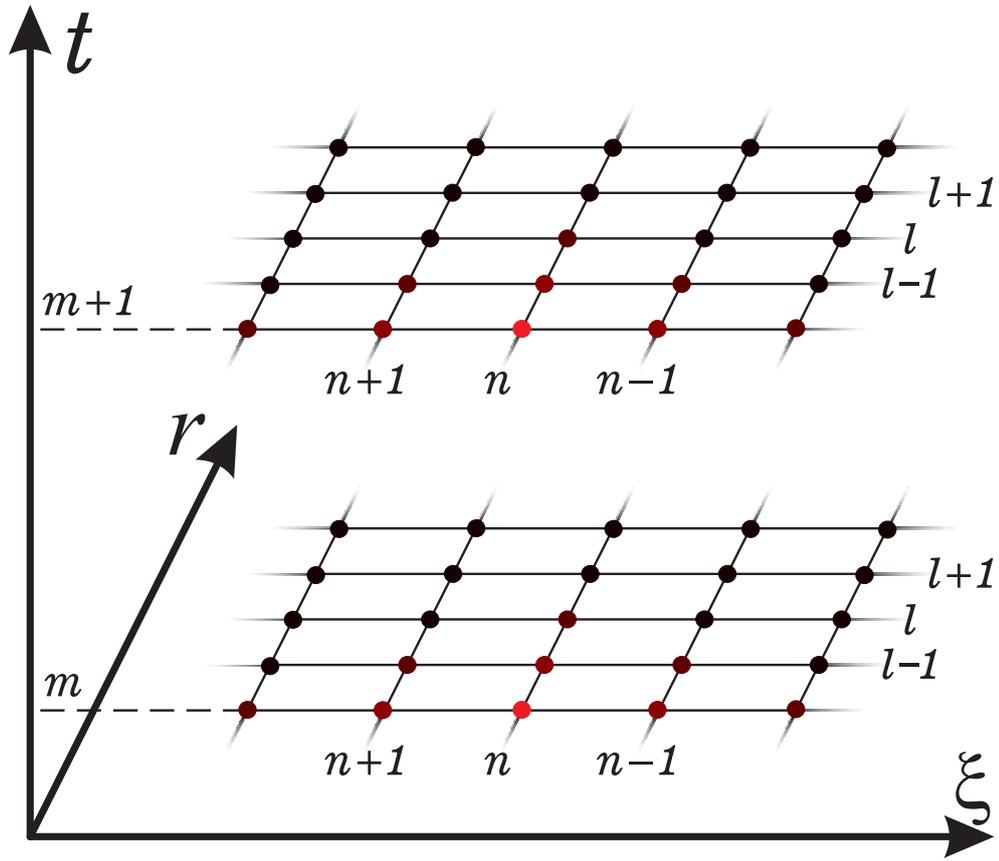


Рисунок 1.3 — Сеточное разбиение счетной области. Сетки имеют по  $N_n$  узлов по продольной координате  $\xi$ , отстоящих друг от друга с шагом  $h$  и обозначаемых индексом  $n$ , и  $N_l$  узлов по поперечной координате  $r$ , отстоящих друг от друга с шагом  $g$  и обозначаемых индексом  $l$ . Каждая определенная в конкретный момент времени сетка образует слой по времени, обозначаемый индексом  $m$ . Узлы покрашены для условного обозначения амплитуды огибающей вектор-потенциала моделируемого лазерного импульса

Такой способ, в отличие от представления «модуль/фаза»

$$A(\xi, r, t) = a(\xi, r, t) \cdot e^{i\varphi(\xi, r, t)}, \quad (1.17)$$

позволяет избежать возникновения в разностной схеме произведения производных от разных функций во втором и третьем слагаемых уравнения (1.15). Таким образом, в каждом узле сетки численного решения содержатся два числа: значения действительной и мнимой частей искомого вектор-потенциала  $A(\xi, r, t)$  лазерного импульса.

У уравнения (1.15) имеются две особенности, которые необходимо учитывать при создании численного алгоритма. В первую очередь, нелинейность,

которая заложена в усредненном гамма-факторе электронов плазмы в правой части уравнения (1.13). По этой причине не подходит, например, использование быстрого преобразования Фурье для построения численного решения, поскольку выполнение прямого и обратного преобразования Фурье в каждый момент времени в каждой точке сетки серьезно замедлит вычислительный процесс и лишит LCODE быстродействия. Второй особенностью является смешанная производная по времени и продольной координате  $\xi$  во втором слагаемом уравнения (1.15).

Алгоритм численного решения основан на методе конечных разностей. Производная по времени представляется односторонней правой разностной схемой

$$\frac{\partial A(\xi_n, r_l, t_m)}{\partial t} = \frac{A_{n,l}^{m+1} - A_{n,l}^m}{\tau}, \quad (1.18)$$

что позволяет запустить вычисления с некоторого начального профиля лазерного импульса. Данная разностная схема имеет первый порядок аппроксимации.

Оператор Лапласа по поперечным координатам расписывается центральными разностными схемами второго порядка аппроксимации:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A(\xi_n, r_l, t_m)}{\partial r} \right) = \frac{A_{n,l+1}^m - 2A_{n,l}^m + A_{n,l-1}^m}{g^2} + \frac{1}{lg} \frac{A_{n,l+1}^m - A_{n,l-1}^m}{2g}. \quad (1.19)$$

Поскольку численное моделирование в LCODE производится в окне моделирования, которое движется со скоростью света вместе с драйвером, например, слева направо, то естественно считать, что информация в этом окне может передаваться только справа налево, иначе нарушается принцип причинности. Для численной схемы это означает, что значение какой-либо функции в некоторой точке зависит только от значений в точках, которые находятся «перед» ней, а не «после» неё. Таким образом, накладывается ограничение на разностные схемы для производной по продольной координате  $\xi$ : «физическими» являются только односторонние разностные схемы. Поэтому в блоке расчета эволюции лазерного импульса для производной по продольной координате  $\xi$  используется прямая противопотоковая разностная схема второго порядка

аппроксимации:

$$\frac{\partial A(\xi_n, r_l, t_m)}{\partial \xi} = \frac{-3A_{n,l}^m + 4A_{n-1,l}^m - A_{n-2,l}^m}{2h}. \quad (1.20)$$

В окне моделирования координата  $\xi$  отсчитывается от 0 в отрицательном направлении, поэтому прямой схеме соответствует именно такая нумерация индексов.

Из этих же физических соображений следует, что перед лазерным импульсом плазма всегда будет невозмущенная. Тогда в самом начале счѐтного окна можно задать граничное условие с двумя дополнительными столбцами по  $\xi$ , в которых вектор-потенциал лазерного импульса тождественно равен нулю, а плазма с заданной постоянной плотностью является невозмущенной. В этом случае разностная схема, получаемая с помощью формулы (1.20), преобразуется в явную схему с шаблоном, в котором одна точка на новом слое по времени вычисляется по семи известным точкам (рис.1.4а).

Однако явные схемы, как правило, являются устойчивыми только в некоторой области параметров уравнения и сетки области моделирования. Для повышения устойчивости алгоритма следует преобразовать схему в неявную. Разностную схему для поперечного лапласиана (выражение (1.19)), а также правую часть уравнения (1.15) можно расписать по схеме Кранка-Николсон [26]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A(\xi_n, r_l, t_m)}{\partial r} \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{A_{n,l-1}^m - 2A_{n,l}^m + A_{n,l+1}^m}{g^2} + \frac{1}{lg} \frac{A_{n,l+1}^m - A_{n,l-1}^m}{2g} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{A_{n,l-1}^{m+1} - 2A_{n,l}^{m+1} + A_{n,l+1}^{m+1}}{g^2} + \frac{1}{lg} \frac{A_{n,l+1}^{m+1} - A_{n,l-1}^{m+1}}{2g} \right), \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\frac{\bar{n}}{\bar{\gamma}} A(\xi_n, r_l, t_m) = \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} A_{n,l}^{m+1} + \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} A_{n,l}^m, \quad (1.22)$$

где используются значения  $\bar{n}$  и  $\bar{\gamma}$  из тех же узлов сетки на известном слое, что и значения  $A_{n,l}^m$ . Тогда получится неявная схема с шаблоном, в котором неизвестные значения функций в трех точках на новом слое по времени вычисляются по известным значениям функций в семи точках (рис.1.4б).

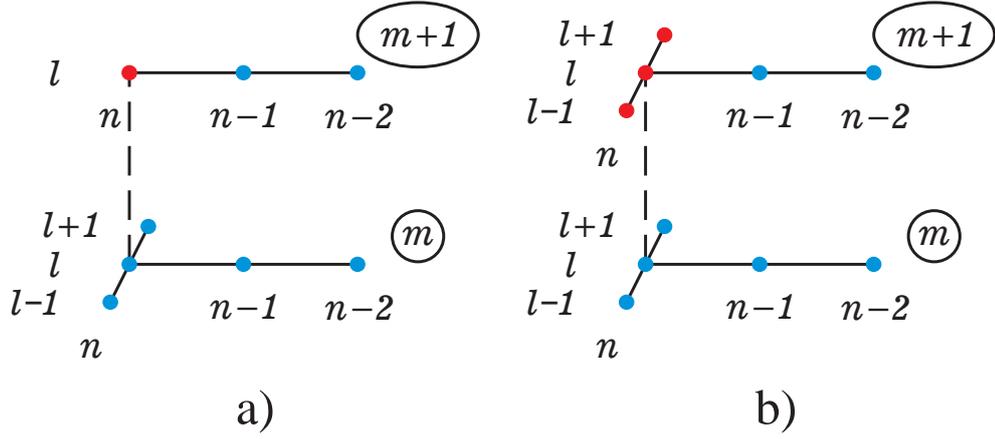


Рисунок 1.4 — Шаблоны разностных схем: а) — явная схема, б) — неявная схема. Красные точки соответствуют узлам сетки с неизвестными искомыми значениями функций, синие — узлам с известными значениями функций

Таким образом, из исходного уравнения (1.15) для каждого столбца сетки получается система уравнений, содержащая по  $N_l - 2$  уравнений вида

$$a_l A_{n,l-1}^{m+1} + c_l A_{n,l}^{m+1} + b_l A_{n,l+1}^{m+1} = RHS_{n,l}^{m+1}, \quad (1.23)$$

где коэффициенты  $a_l$ ,  $b_l$  и  $c_l$  равны

$$\begin{aligned} a_l &= 1 - \frac{1}{2l}, \\ b_l &= 1 + \frac{1}{2l}, \\ c_l &= -2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} + \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) + i \frac{4k_0 g^2}{\tau}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

а  $RHS_{n,l}^{m+1}$  — комплексная функция с действительной частьюю

$$\begin{aligned} \Re RHS_{n,l}^{m+1} &= 2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \Re A_{n,l}^m - \frac{4k_0 g^2}{\tau} \Im A_{n,l}^m - \\ &\quad - (\Re A_{n,l-1}^m + \Re A_{n,l+1}^m) + \frac{1}{2l} (\Re A_{n,l-1}^m - \Re A_{n,l+1}^m) - \\ &\quad - \frac{2g^2}{h\tau} (\Re A_{n-2,l}^m - 4\Re A_{n-1,l}^m) - \frac{2g^2}{h\tau} (4\Re A_{n-1,l}^{m+1} - \Re A_{n-2,l}^{m+1}) \end{aligned} \quad (1.25)$$

и мнимой частью

$$\begin{aligned} \Im RHS_{n,l}^{m+1} &= 2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \Im A_{n,l}^m + \frac{4k_0 g^2}{\tau} \Re A_{n,l}^m - \\ &\quad - (\Im A_{n,l-1}^m + \Im A_{n,l+1}^m) + \frac{1}{2l} (\Im A_{n,l-1}^m - \Im A_{n,l+1}^m) - \\ &\quad - \frac{2g^2}{h\tau} (\Im A_{n-2,l}^m - 4\Im A_{n-1,l}^m) - \frac{2g^2}{h\tau} (4\Im A_{n-1,l}^{m+1} - \Im A_{n-2,l}^{m+1}). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Для каждого вычисляемого столбца  $[n]$  на слое  $[m+1]$  столбцы  $[n-1]$  и  $[n-2]$  на слоях  $[m]$  и  $[m+1]$  считаются известными, поэтому они переносятся в правую часть как известные значения.

Для замыкания системы уравнений необходимы еще два уравнения, которые получаются из граничных условий на верхней и нижней границах счетной области. Для моделирования процессов внутри металлической камеры граничные условия выбираются отражающими — равенство нулю первой производной по поперечной координате. Это означает, что на нижней границе окна  $A_{n,0} = A_{n,1}$ , а на верхней  $A_{n,N_l-2} = A_{n,N_l-1}$ .

Поскольку функции и коэффициенты в системе уравнений (1.23) являются комплексными, введем векторы

$$\vec{f}_{n,l}^m = \begin{pmatrix} \Re A_{n,l}^m \\ \Im A_{n,l}^m \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

$$RH\vec{S}_{n,l}^m = \begin{pmatrix} \Re R H S_{n,l}^m \\ \Im R H S_{n,l}^m \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

и матрицы

$$\begin{aligned} \hat{L}_l &= \begin{pmatrix} L_l^D & -L_l^A \\ L_l^A & L_l^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2l} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2l} \end{pmatrix}, \\ \hat{R}_l &= \begin{pmatrix} R_l^D & -R_l^A \\ R_l^A & R_l^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2l} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2l} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\hat{C}_l = \begin{pmatrix} C_l^D & -C_l^A \\ C_l^A & C_l^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} + \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) & -\frac{4k_0g^2}{\tau} \\ \frac{4k_0g^2}{\tau} & -2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} + \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

где верхними индексами  $D$  и  $A$  обозначены элементы главных и побочных диагоналей соответственно. Забегая вперед, отметим, что по построению элементы главных диагоналей являются действительными частями коэффициентов из выражений (1.24), а элементы побочных диагоналей — мнимыми.

Тогда система уравнений (1.23) переписывается в виде

$$\hat{L}_l \vec{f}_{l-1} + \hat{C}_l \vec{f}_l + \hat{R}_l \vec{f}_{l+1} = R\vec{H}S_l, \quad (1.31)$$

где индексы  $n$  и  $m$  опущены как фиксированные в привязке к конкретному столбцу сетки конкретного слоя, и решается с помощью метода матричной прогонки [27]. Он является обобщением обычного метода прогонки, посредством которого решаются системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами, но со спецификой, что вместо коэффициентов появляются матрицы, а вместо функций — векторы.

При условии существования обратной матрицы  $C_l^{-1}$  решение вычисляется рекуррентным образом:

$$\vec{f}_l = \hat{\alpha}_{l+1} \vec{f}_{l+1} + \vec{\beta}_{l+1}. \quad (1.32)$$

Матрица  $\hat{\alpha}_{l+1}$  и вектор  $\vec{\beta}_{l+1}$  вычисляются с помощью соотношений:

$$\hat{\alpha}_{l+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{l+1}^{11} & \alpha_{l+1}^{12} \\ \alpha_{l+1}^{21} & \alpha_{l+1}^{22} \end{pmatrix} = - \left( \hat{C}_l + \hat{L}_l \hat{\alpha}_l \right)^{-1} \hat{R}_l = -R_l^D \left( \hat{C}_l + L_l^D \hat{\alpha}_l \right)^{-1}, \quad (1.33)$$

$$\vec{\beta}_{l+1} = \left( \hat{C}_l + \hat{L}_l \hat{\alpha}_l \right)^{-1} \left( R\vec{H}S_l - \hat{L}_l \vec{\beta}_l \right) = \left( \hat{C}_l + L_l^D \hat{\alpha}_l \right)^{-1} \left( R\vec{H}S_l - L_l^D \vec{\beta}_l \right). \quad (1.34)$$

Отражающие граничные условия на нижней и верхней границах счетной области

$$\begin{aligned} \vec{f}_{n,0} &= \vec{f}_{n,1}, \\ \vec{f}_{n,N_l-2} &= \vec{f}_{n,N_l-1} \end{aligned} \quad (1.35)$$

определяют матрицы

$$\hat{R}_0 = -\hat{C}_0 = -\hat{L}_{N_l-1} = \hat{C}_{N_l-1} = E, \quad (1.36)$$

где  $E$  — единичная матрица, и векторы

$$R\vec{H}S_0 = R\vec{H}S_{N_l-1} = 0. \quad (1.37)$$

Определим вид матрицы  $\hat{\alpha}_l$  и её симметрию. Распишем уравнение (1.33):

$$\hat{\alpha}_{l+1} = \frac{-R_l^D}{\Delta_l} \begin{pmatrix} C_l^D + L_l^D \alpha_l^{22} & C_l^A - L_l^D \alpha_l^{12} \\ -C_l^A - L_l^D \alpha_l^{21} & C_l^D + L_l^D \alpha_l^{11} \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

где  $\Delta_l$  — определитель матрицы  $\hat{\alpha}_{l+1}$  (вычисленный по правой части выражения (1.33)):

$$\Delta_l = (C_l^D + L_l^D \alpha_l^{11}) (C_l^D + L_l^D \alpha_l^{22}) + (C_l^A - L_l^D \alpha_l^{12}) (C_l^A + L_l^D \alpha_l^{21}). \quad (1.39)$$

С учетом сформулированных граничных условий в каждой из первых матриц  $\hat{\alpha}_1$  и  $\hat{\alpha}_2$  элементы побочных диагоналей равны по модулю, но противоположны по знаку:

$$\hat{\alpha}_1 = -\hat{C}_0^{-1} \hat{R}_0 = E, \quad (1.40)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{-R_1^D}{\Delta_1} \begin{pmatrix} C_1^D + L_1^D & -C_1^A \\ C_1^A & C_1^D + L_1^D \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

По методу математической индукции можно доказать, что все матрицы  $\hat{\alpha}_l$  имеют такой же вид. База индукции получена выражениями (1.40) – (1.41). Предположим теперь, что матрица  $\hat{\alpha}_l$  состоит из элементов  $\alpha_l^{11} = \alpha_l^{22} = \alpha_l^D$  и  $\alpha_l^{12} = -\alpha_l^{21} = -\alpha_l^A$ , и убедимся, что тогда матрица  $\hat{\alpha}_{l+1}$  имеет аналогичный вид:

$$\hat{\alpha}_{l+1} = \frac{-R_l^D}{\Delta_l} \begin{pmatrix} C_l^D + L_l^D \alpha_l^D & C_l^A + L_l^D \alpha_l^A \\ -C_l^A - L_l^D \alpha_l^A & C_l^D + L_l^D \alpha_l^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{l+1}^D & -\alpha_{l+1}^A \\ \alpha_{l+1}^A & \alpha_{l+1}^D \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Если теперь учесть упомянутое ранее замечание, что элементы главных диагоналей матриц  $\hat{L}_l$ ,  $\hat{C}_l$  и  $\hat{L}_l$  являются действительными частями коэффициентов из выражений (1.24), а элементы побочных диагоналей — мнимыми, а также определения  $\vec{f}_l$  и  $R\vec{H}S_l$  выражениями (1.27) – (1.28), полученные формулы метода матричной прогонки для удобства практической реализации можно свести к обычной прогонке с алгебраическими коэффициентами, но с учетом того, что у всех величин потребуется отдельно вычислять действительную и

мнимую части. Обозначим  $\Re\alpha_l = \alpha_l^D$ ,  $\Im\alpha_l = \alpha_l^A$ ,  $\Re\beta_l = \beta_l^1$ ,  $\Im\beta_l = \beta_l^2$ .  
Формулы (1.33) и (1.34) преобразуются в выражения

$$\begin{aligned}\Re\alpha_{l+1} &= \frac{-\left(1 + \frac{1}{2l}\right) \left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Re\alpha_l - 2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} + \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \right)}{\left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Re\alpha_l - 2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} + \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \right)^2 + \left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Im\alpha_l + \frac{4k_0g^2}{\tau} \right)^2}, \\ \Im\alpha_{l+1} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{2l}\right) \left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Im\alpha_l + \frac{4k_0g^2}{\tau} \right)}{\left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Re\alpha_l - 2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} + \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \right)^2 + \left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Im\alpha_l + \frac{4k_0g^2}{\tau} \right)^2},\end{aligned}\tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}\Re\beta_{l+1} &= \frac{\left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Re\alpha_l - 2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} + \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \right) (\Re RHS_l - \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Re\beta_l)}{\left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Re\alpha_l - 2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} + \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \right)^2 + \left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Im\alpha_l + \frac{4k_0g^2}{\tau} \right)^2} + \\ &+ \frac{\left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Im\alpha_l + \frac{4k_0g^2}{\tau} \right) (\Im RHS_l - \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Im\beta_l)}{\left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Re\alpha_l - 2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} + \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \right)^2 + \left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Im\alpha_l + \frac{4k_0g^2}{\tau} \right)^2}, \\ \Im\beta_{l+1} &= \frac{\left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Re\alpha_l - 2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} + \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \right) (\Im RHS_l - \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Im\beta_l)}{\left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Re\alpha_l - 2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} + \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \right)^2 + \left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Im\alpha_l + \frac{4k_0g^2}{\tau} \right)^2} - \\ &- \frac{\left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Im\alpha_l + \frac{4k_0g^2}{\tau} \right) (\Re RHS_l - \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Re\beta_l)}{\left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Re\alpha_l - 2g^2 \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} + \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \right)^2 + \left( \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \Im\alpha_l + \frac{4k_0g^2}{\tau} \right)^2}.\end{aligned}\tag{1.44}$$

Решение системы уравнений (1.23) на каждом слое с индексом  $m$  в каждом столбце с индексом  $n$  тогда вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}\Re A_l &= \Re\alpha_{l+1} \Re A_{l+1} - \Im\alpha_{l+1} \Im A_{l+1} + \Re\beta_{l+1}, \\ \Im A_l &= \Re\alpha_{l+1} \Im A_{l+1} + \Im\alpha_{l+1} \Re A_{l+1} + \Im\beta_{l+1}.\end{aligned}\tag{1.45}$$

Описанный выше алгоритм можно реализовать и в трехмерной геометрии. Точно так же по схеме Кранка-Николсон можно расписать вторую производную по второй поперечной координате, входящую в лапласиан в третьем слагаемом уравнения (1.15). После этого можно применить метод продольно-поперечной прогонки [28] (по двум перпендикулярным направлениям),

когда сначала прогонкой по одной координате вычисляется промежуточный слой  $[m + \frac{1}{2}]$  по данным с известного слоя  $[m]$ , а затем прогонкой по второй координате вычисляется новый слой  $[m + 1]$  по данным с известного слоя  $[m]$  и промежуточного слоя  $[m + \frac{1}{2}]$ .

Еще одним достоинством полученного алгоритма является возможность распараллеливания вычислений. Как видно из рис. 1.4, для вычисления одного столбца  $[n]$  сетки на новом слое  $[m + 1]$  требуются значения вектор-потенциала из двух предыдущих столбцов  $[n - 1]$  и  $[n - 2]$  (две точки), а также значения с трех столбцов ( $[n]$ ,  $[n - 1]$  и  $[n - 2]$ ) с предыдущего слоя по времени  $[m]$  (пять точек). Это означает, что после вычисления уже одного столбца  $[n]$  с нового слоя  $[m + 1]$  можно вычислять не только столбец  $[n + 1]$  со слоя  $[m + 1]$ , но и столбец  $[n]$  со слоя  $[m + 2]$  (рис. 1.5).

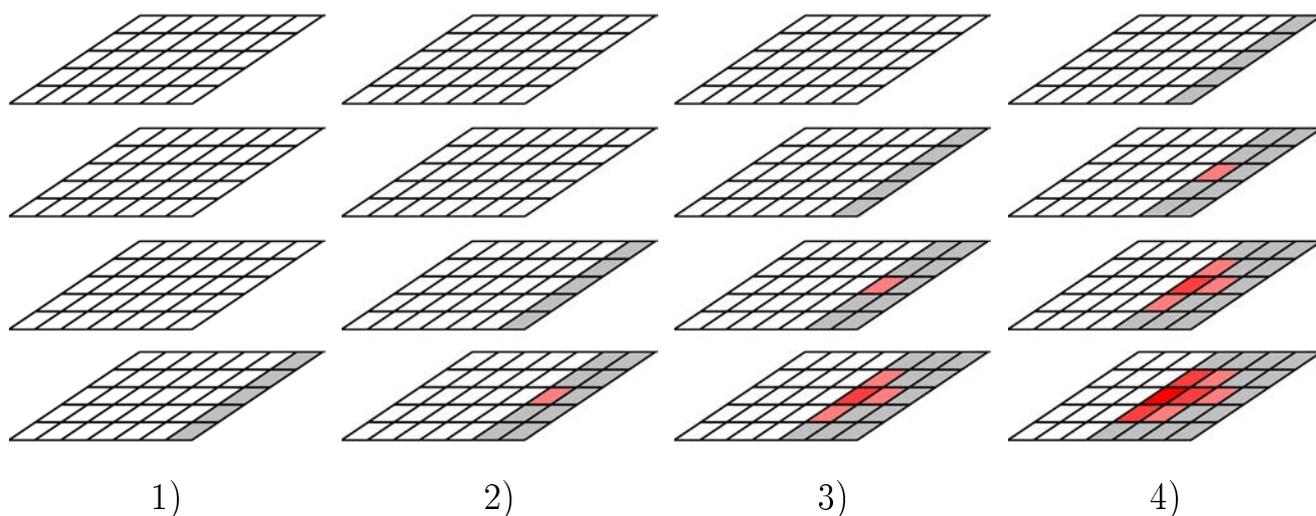


Рисунок 1.5 — Параллельное вычисление столбцов на разных слоях по времени. Разными цветами схематично представлены значения вычисляемого вектор-потенциала лазерного импульса с гауссовым профилем. Первая итерация алгоритма вычисляет значения неизвестной функции на первом столбце первого слоя. На второй итерации могут параллельно проводиться вычисления уже на двух слоях, на следующей итерации — уже на трех слоях и т.д.

## 1.2. Контроль потоков энергии в численном моделировании

Ранее упоминалось, что ускоритель можно рассматривать как канал передачи энергии от источника в ускоряемые частицы. Тогда с точки зрения энергетических процессов плазменное кильватерное ускорение будет выглядеть как передача энергии от драйвера в витнесс посредством плазменной волны. В таком случае, с помощью численного моделирования можно отслеживать, как в происходящих в плазме процессах передается энергия, в каком виде она существует и куда уходит.

Плотность потока энергии  $\vec{S}$  в окне моделирования, которое движется относительно лабораторной системы отсчета со скоростью света, является суммой плотности потока электромагнитной энергии  $\vec{S}_{\text{em}}$  и плотности потока кинетической энергии  $\vec{S}_{\text{p}}$ , содержащейся в частицах плазмы:

$$\vec{S} = \vec{S}_{\text{em}} + \vec{S}_{\text{p}}, \quad (1.46)$$

$$\vec{S}_{\text{em}} = -c\vec{e}_z \frac{E^2 + B^2}{8\pi} + \frac{c}{4\pi} \left[ \vec{E} \times \vec{B} \right], \quad (1.47)$$

$$\vec{S}_{\text{p}} = \sum_j (\gamma_j - 1) m_j c^2 (\vec{v}_j - c\vec{e}_z), \quad (1.48)$$

где  $\gamma_j$ ,  $m_j$  и  $\vec{v}_j$  — релятивистский фактор, масса и скорость частиц плазмы, соответственно, а суммирование производится по отдельным частицам, содержащимся в рассматриваемом объеме.

Поток энергии  $\Psi$  в продольном направлении в окне моделирования получается интегрированием по сечению окна  $z$ -компоненты уравнения 1.46, а аналогичное интегрирование величин (1.47) и (1.48) дает составляющие его потоки электромагнитной и кинетической энергии соответственно. В коде LCODE за положительное направление продольной координаты  $\xi$  принято направление распространения драйвера вдоль оси  $z$ , окно моделирования относительно лабораторной системы отсчета движется в этом же направлении со скоростью

света. В таком случае поток энергии будет противонаправлен оси продольных координат, поэтому возникает дополнительный знак «минус». Кроме того, в аксиально симметричном случае интегрирование по полярному углу  $\varphi$  сводится к умножению на  $2\pi$ . Поток электромагнитной энергии

$$\Psi_{\text{em}}(r_{\text{max}}, \xi) = \int_0^{r_{\text{max}}} \left( \frac{c}{8\pi} (E^2 + B^2) - \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}]_z \right) 2\pi r dr \quad (1.49)$$

и поток кинетической энергии частиц

$$\Psi_{\text{p}} = \frac{1}{\Delta t} \sum_j (\gamma_j - 1) m_j c^2, \quad (1.50)$$

где суммирование производится по частицам, пересекающим выбранное сечение за единицу времени  $\Delta t$ , в сумме дают полный поток энергии в сечении окна моделирования:

$$\Psi(r_{\text{max}}, \xi) = \Psi_{\text{em}}(r_{\text{max}}, \xi) + \Psi_{\text{p}}(r_{\text{max}}, \xi). \quad (1.51)$$

Если рассматривать плазму в гидродинамической модели как жидкость, то поток кинетической энергии можно вычислить как

$$\Psi_{\text{f}}(r_{\text{max}}, \xi) = \int_0^{r_{\text{max}}} \sum_{s=i,e} (n_s m_s c^2 (\gamma_s - 1) (c - v_{sz})) 2\pi r dr, \quad (1.52)$$

где  $n_s$ ,  $\vec{v}_s$  и  $\gamma_s$  — количественная плотность, средняя скорость и релятивистский фактор частиц соответствующей компоненты плазмы (ионы и электроны) с массой частиц  $m_s$ , соответственно.

Если какой-то электрон долетает до стенки, то, с точки зрения энергообмена, он оставляет на ней свою энергию (становится «холодным») и начинает двигаться вновь с нулевой кинетической энергией в существующих электромагнитных полях (рис. 1.1). Тогда, сопоставив величине этой энергии продольную координату  $\xi$ , в которой электрон достигает границы области моделирования, можно определить поток энергии  $\Psi_{\text{wall}}$ , уходящей из области моделирования в стенку. Если вычислить плотность потока энергии поперек всего окна моделирования от оси до стенки, то есть вычислить величины (1.49) и (1.50) в

пределах от  $r = 0$  до  $r = r_{\max}$ , а также добавить поток энергии  $\Psi_{\text{wall}}$ , который уходит в стенку, то должна получиться величина, характеризующая весь поток энергии  $\Psi_{\Sigma}$ , то есть полную энергию, которая содержится в сечении окна моделирования.

При отсутствии источников или каналов потерь энергии величина  $\Psi_{\Sigma}$  является постоянной. В присутствии драйвера она нарастает до определенного значения по мере того как драйвер раскачивает плазменную волну, передавая свою энергию в движение частиц плазмы и электромагнитные поля.

Величины  $\Psi_p$  и  $\Psi_f$  совпадают только в случае холодной плазмы. После опрокидывания волны они начинают различаться по причине, например, возникающих быстрых электронов, которые по-разному учитываются в «частичной» модели плазмы (величина  $\Psi_p$ ) и «жидкостной» модели (величина  $\Psi_f$ ),

$$\Delta\Psi = \Psi_p - \Psi_f \neq 0. \quad (1.53)$$

Таким образом, контроль потоков энергии в численном моделировании является удобным инструментом для характеристики энергетических процессов в плазменном кильватерном ускорении. С его помощью можно анализировать, где и как в области моделирования содержится энергия, обнаруживать появление быстрых электронов, которые при опрокидывании плазменной волны выбиваются из коллективного движения.

### **1.3. Анализ точности расчета кильватерной волны при моделировании эксперимента по каналированию лазерного импульса на установке XCELS**

Большинство мировых лабораторий с установками, способными создавать короткие мощные лазерные импульсы, в той или иной степени имеют программы исследований по плазменному кильватерному ускорению с лазерными

драйверами, причем эксперименты уже имеют характер достижения определенного результата (например, рекордные значения или возможности применения в смежных научно-технических задачах), а не просто проверки концепции. Для этих задач и требуется численное моделирование, способное спроектировать и предсказать наиболее перспективные параметры эксперимента для достижения нужного результата, и желательно быстрое.

В городе Саров в Международном центре исследований экстремальных световых полей (XCELS) строится уникальный источник лазерного излучения на основе оптического параметрического усиления чирпированных импульсов в кристалле дейтерированного дигидрофосфата калия (DKDP) с проектной мощностью 600 ПВт. Более подробно проект описан в работе [29]. С помощью численного моделирования кодом LCODE было проведено исследование по определению возможных параметров эксперимента по плазменному кильватерному ускорению с использованием лазерного импульса одного из каналов установки XCELS в качестве драйвера, подробно описанное в работах [16] и [17], в ходе которого было также изучены точности вычисления эволюции лазерного импульса и кильватерной волны в целом.

Численное моделирование проводилось для параметров одного канала установки XCELS, в котором распространяется линейно поляризованный лазерный импульс с энергией 400 Дж и длиной волны 910 нм. Для подавления дифракционного расплывания импульса предлагается использовать канал с параболическим поперечным профилем плотности плазмы (с минимумом на оси), что позволит лазерному импульсу распространяться в плазме вплоть до истощения или дефазировки.

В ходе моделирования с разными начальными данными и параметрического поиска установлено, что с помощью лазерного импульса XCELS можно ускорить сгусток электронов с зарядом 50 пКл до энергии 100 ГэВ с энерго-разбросом менее 1%. Для длительности лазерного импульса получена оценка в 200 фс, что в 8 раз превышает проектную минимальную длительность импульса, и является оптимальным значением: более короткий импульс быстро

истощается в канале, а более длинный создает меньший темп ускорения. Плотность плазмы на оси при этом составляет  $3 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$  ( $1.5 \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$  на границе), что обеспечивает некоторый оптимум между быстрым истощением и искажением формы лазерного импульса при высокой плотности плазмы и малым темпом ускорения при низкой плотности.

Эта научная задача стала фактически первым применением лазерного решателя LCODE для изучения именно эволюции лазерного импульса в плазме. Другой важный результат связан с применением метода контроля потоков энергии в окне моделирования для определения необходимой величины шага сетки по продольной координате  $\xi$ .

Производные вектор-потенциала лазерного импульса по пространственным координатам определяют электромагнитное поле лазерного импульса. Тогда можно получить аналог формулы (1.49) для вычисления его энергии  $Q_l$ , проинтегрировав плотность энергии электромагнитного поля по всему окну моделирования:

$$Q_l = \int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dV \approx \frac{m_e^2 c^4}{4\pi e^2} \int \left( \frac{\partial \Re e (A e^{ik_0 \xi})}{\partial \xi} \right)^2 dV, \quad (1.54)$$

где производные по поперечным координатам не учитываются по причине их малости.

Выражение (1.51) позволяет получить количество энергии, покидающее окно моделирования через его заднюю границу, то есть энергию, приобретаемую плазменной волной. Если вычисляемый на самом последнем слое окна моделирования поток энергии  $\Psi(\xi_{\max})$  сопоставить с соответствующей координатой  $z$  лабораторной системы отсчета, можно проинтегрировать выражение (1.51) вдоль всего пройденного пути от начала до точки с координатой  $z$ , что дает количество энергии  $Q_p$ , полученное плазменной волной:

$$Q_p(z) = \int_0^z \Psi(z') dz'. \quad (1.55)$$

Начальная энергия лазерного импульса известна —  $Q_0 = 400 \text{ Дж}$ , тогда разность величин  $Q_0$  и  $Q_l$  характеризует потери энергии лазерным импульсом

на создание плазменной волны и должна соответствовать энергии плазменной волны  $Q_p$ :

$$Q_p = Q_0 - Q_l \equiv \Delta Q_l. \quad (1.56)$$

Полученное условие (1.56) позволяет установить критерий для определения шага сетки моделирования по продольной координате для достижения необходимой точности в конкретной задаче (рис. 1.6). Как видно, с уменьшением величины шага  $\Delta\xi$  равенство (1.56) соблюдается на всё большем пути распространения лазерного импульса в плазменном канале, а значит, удастся точно промоделировать всё большую длину взаимодействия лазерного импульса и плазмы.

Поскольку величина  $Q_p$  получается из величины потока  $\Psi$  в конце окна моделирования, сформулированный критерий позволяет утверждать о точности работы всего кода, а не только расчета лазер-плазменного взаимодействия.

Из рисунка 1.6 следует еще одно важное наблюдение. Для квазистатического моделирования истощения лазерных импульсов даже с использованием модели огибающей требуется вычислять изменения величин на масштабах дли-

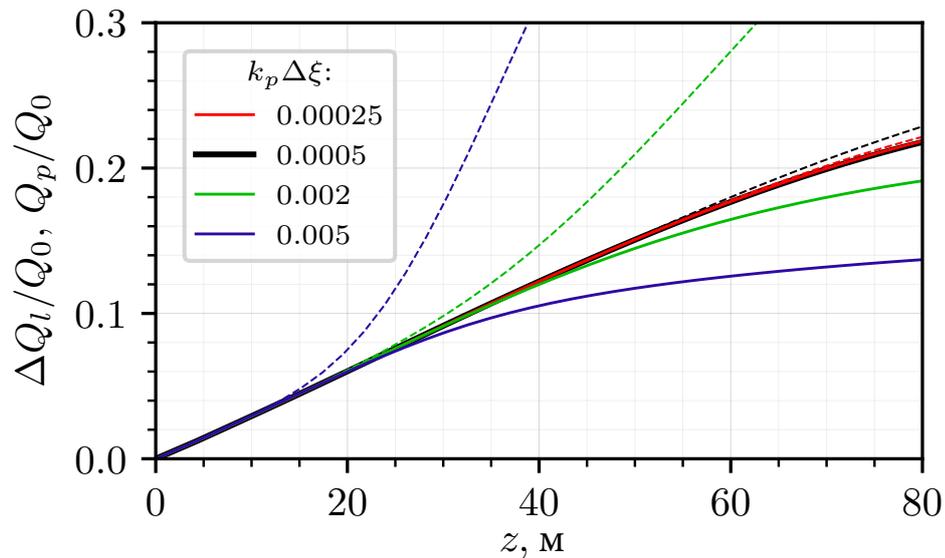


Рисунок 1.6 — Изменение энергии лазерного импульса  $\Delta Q_l$  (пунктирные линии) и суммарная энергия  $Q_p$ , отданная лазером плазме, (сплошные линии) в зависимости от пройденного в плазме расстояния  $z$  при моделировании с разным продольным шагом сетки  $\Delta\xi$ . Изображение из работы [16]

ны волны лазерного импульса, то есть использовать сетку с величиной шага по продольной координате  $\Delta\xi$  намного меньшей длины волны. В частности, в рассмотренной в этом разделе задаче при обезразмеривании всех величин на плотность плазмы у стенки  $1.5 \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$  безразмерная длина волны лазерного излучения составляет  $\lambda = 0.021k_p^{-1}$ , и приемлемая точность численного моделирования, оцениваемая по энергообмену между лазерным драйвером и плазменной волной на протяжении всего канала, получилась только при шаге по продольной координате  $\Delta\xi = 0.0005k_p^{-1}$ , что соответствует 42 узлам сетки на длину волны лазерного импульса. Однако даже при подобном требовании на величину шага сетки сохраняется преимущество квазистатических кодов по сравнению с PIC-кодами в быстродействии [16].

## 1.4. Основные результаты

Разработан решатель уравнения эволюции огибающей вектор-потенциала лазерного импульса, встроенный в виде функционального блока в программный комплекс LCODE, позволяющий рассчитывать долговременную динамику лазерного импульса с сохранением энергобаланса системы с требуемой точностью.

Предложен метод контроля потоков энергии в численном моделировании, позволяющий отслеживать движение энергии в окне моделирования и определять требуемые параметры расчета для достижения заданной точности сохранения энергии в системе.

Установлено, что для квазистатического моделирования истощения лазерного импульса даже в модели огибающей требуется использовать малый шаг по продольной координате  $\xi$ , чтобы на масштабе длины волны лазерного импульса оказывалось много узлов сетки моделирования.

## Глава 2. Опрокидывание слабонелинейной плазменной волны из-за движения ионов плазмы

Применение описанного в предыдущей главе метода контроля потоков энергии позволило проанализировать возможную экспериментальную демонстрацию метода генерации узкополосного терагерцового излучения при взаимодействии двух плазменных волн. Согласно теоретической идее, предложенной в работе [30], если в плазме навстречу друг другу запустить два лазерных импульса с разными поперечными размерами, то взаимодействие двух плазменных волн, образованных этими лазерными драйверами, приведет к генерации излучения на второй гармонике плазменной частоты. Экспериментальная проверка метода планировалась в Институте лазерной физики СО РАН, поэтому постановка задачи для моделирования основывалась на параметрах работающих в институте фемтосекундных лазеров.

Данная глава основывается на результатах работы [18]. Раздел 2.1 содержит описание возможной постановки эксперимента по генерации терагерцового излучения, сформулированное коллективом сотрудников ИЯФ СО РАН, изучающих плазменные методы генерации терагерцового излучения. В разделе 2.2 описано применение автором диссертации метода контроля потоков энергии из раздела 1.2 для определения времени жизни плазменной волны. В разделе 2.3 содержатся результаты проведенного автором диссертации исследования зависимости времени жизни плазменной волны от массы ионов плазмы с помощью численного моделирования и его сравнения с существующей теоретической моделью.

## 2.1. Возможная постановка эксперимента по генерации терагерцового излучения и важность времени жизни волны

По проекту эксперимента два аксиально симметричных соосных гауссовых лазерных импульса с длиной волны 830 нм, длительностью 39 фс и полной энергией 0.2 Дж встречаются в сверхзвуковой газовой струе. Ожидаемая плотность плазмы равна  $2.5 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Поперечные размеры импульсов в перетяжке составляют 20 и 7.5 мкм.

Моделируемые лазерные импульсы имеют линейную поляризацию, частоту  $\omega_0 = 25.44\omega_p$  и огибающую

$$E_x = E_0 e^{-r^2/\sigma_s^2} \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2c\tau}\right), \quad 0 < t < 2\tau. \quad (2.1)$$

Длительность импульса на полувысоте составляет  $\tau \approx 3.5\omega_p^{-1}$ , а амплитуда электрического поля  $E_0$  позволяет получить параметр лазерной амплитуды  $a_0 = eE_0/(m_e\omega_0c) = 0.7$ . Поперечные размеры импульсов ( $s = 1,2$ ) составляют  $\sigma_1 = 5.87c/\omega_p$  и  $\sigma_2 = 2.27c/\omega_p$ . В эксперименте интенсивность лазерного импульса достаточно велика, чтобы произвести ионизацию водорода, двукратную ионизацию гелия и пятикратную ионизацию азота. При этом, однако, возникающая в этом режиме плазменная волна является слабонелинейной, поэтому можно воспользоваться принципом суперпозиции и для получения оценок моделировать эволюцию импульсов по отдельности с помощью быстрого квазистатического кода, каким является LCODE.

В этой задаче влияние на эволюцию плазменной волны оказывает возмущение изначально однородного ионного фона. Если из-за движения ионов их плотность оказывается сильно возмущенной, происходит пересечение траекторий частиц плазмы, то есть плазменная волна опрокидывается и, как следствие, затухает [31, 32, 33, 34]. На подобном примере и будет продемонстри-

ровано использование потоков энергии в окне моделирования для описания энергетических процессов [18].

Амплитуду кильватерной волны удобно описывать с помощью кильватерного потенциала  $\Phi$ , производные от которого по пространственным координатам связаны с полями:

$$E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}, \quad E_r - B_\varphi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}. \quad (2.2)$$

Для удобства введем одномерную функцию  $\Phi_{\text{axis}}(\xi) = \Phi(\xi, r = 0)$ , описывающую кильватерный потенциал на оси. Характерное поведение  $\Phi_{\text{axis}}$  при моделировании описанной выше задачи представлено на рис. 2.1(a). Поскольку в этой задаче изучается долговременная динамика кильватерной волны, зависимость от  $\xi$  интерпретируется как зависимость от времени. В окне моделирования короткий лазерный импульс движется вправо, раскачивая позади себя плазменную волну. Амплитуда волны некоторое время остается постоянной, а затем начнет уменьшаться, причем видно, что уменьшается она ни резко, ни экспоненциально, поэтому возникает проблема того, как определить момент опрокидывания волны.

Из рисунка 2.1(b) видно, почему поток энергии  $\Psi$  является более удобной величиной для описания процессов энергообмена в плазме, чем обычная

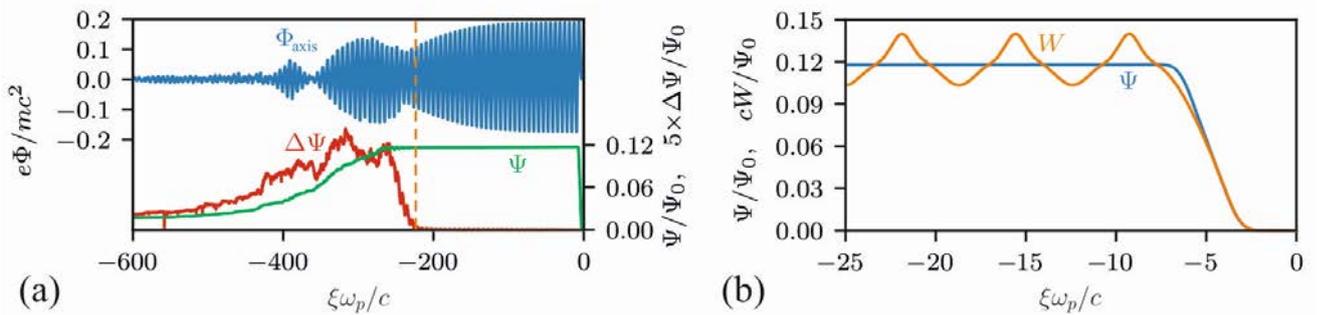


Рисунок 2.1 — (a) Кильватерный потенциал  $\Phi_{\text{axis}}$  на оси (синяя линия), поток энергии  $\Psi$  (зеленая линия) и увеличенная в 5 раз для видимости величина  $\Delta\Psi$  (красная линия). Начало опрокидывания волны отмечено вертикальной пунктирной линией оранжевого цвета. (b) Поток энергии  $\Psi$  (синяя линия) и линейная плотность энергии  $W$  (оранжевая линия) на протяжении первых периодов волны

линейная плотность энергии  $W$ , где суммирование производится по частицам плазмы в сечении в тонком слое толщиной  $\Delta z$ . Линейная плотность энергии не является постоянной величиной, поскольку из-за плазменной волны возникают продольные потоки энергии как в рассматриваемый слой, так и из него.

Моделирование проводилось в окне шириной  $10c/\omega_p$  и длиной  $1000c/\omega_p$ . Размер ячейки составляет  $0.01c/\omega_p$ , а шаг по времени равен  $0.01\omega_p^{-1}$ . Для моделирования плазмы используются по 10 радиально взвешенных частиц (5 электронов и 5 ионов) в каждой ячейке. Для примера моделировалась плазма с ионами гелия  $\text{He}^{2+}$ .

Слабонелинейная волна при рассматриваемых параметрах плазмы и драйвера опрокидывается, как показано в работах [31, 32], вследствие искажения плотности ионов (рис. 2.2(a)). Эти возмущения приводят к различию частот колебаний электронов на разных расстояниях от оси, и, следовательно, к искривлению фазовых фронтов электронной плотности (рис. 2.2(b–c)). В момент опрокидывания волны  $\xi_*$  относительный фазовый сдвиг между областями пониженной ионной плотности (при  $r \leq c/\omega_p$ ) и невозмущенной плотности (на больших  $r$ ) достигает величины  $2\pi$  (рис. 2.2(c)). Тогда некоторая группа электронов плазмы выпадает из коллективных колебаний, пересекает ось и продолжает двигаться к границе окна моделирования. При этом и амплитуда волны на оси  $\Phi_{axis}$  не уменьшается монотонно после опрокидывания

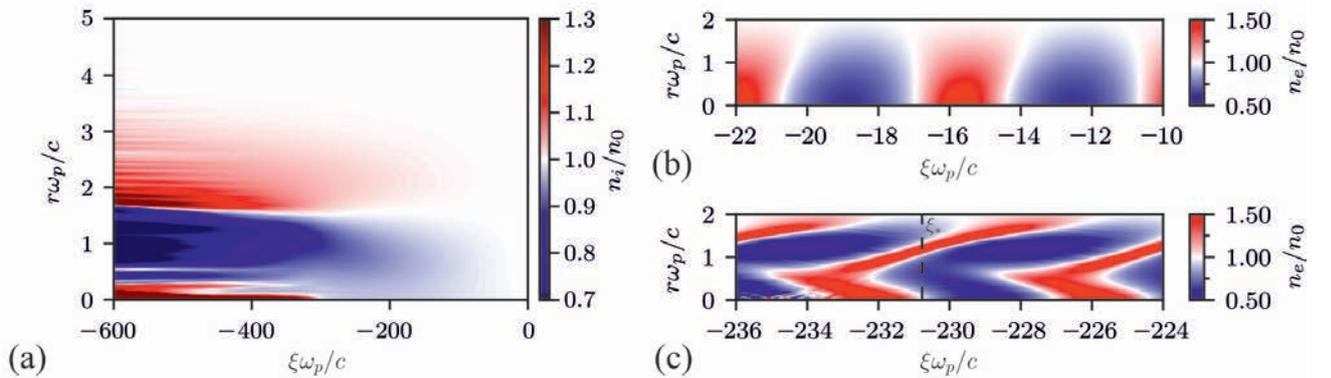


Рисунок 2.2 — (a) Радиальное распределение ионной плотности. (b) Радиальное распределение плотности электронов  $n_e$  почти сразу позади драйвера и (c) около момента опрокидывания волны  $\xi_*$

волны. Наоборот, она возрастает на короткий период и только потом затухает (рис. 2.1(a)). При моделировании плазменной волны, созданной самомодулирующимся протонным драйвером, также наблюдается такое поведение (рис.12 в работе [35]), которое объясняется концентрацией энергии волны в приосевой области на начальной стадии опрокидывания [36, 37].

## 2.2. Определение момента опрокидывания волны с помощью контроля потоков энергии

В работе [30] отмечается, что при численном моделировании случая с неподвижными ионами полностью электромагнитным кодом, основанном на методе частиц в ячейках, излучение продолжается в течение нескольких десятков периодов волн, что определяется истощением кильватерных волн. Этого времени достаточно, чтобы существенные возмущения изначально однородного ионного фона возникали под воздействием плазменных колебаний, поэтому в реальном эксперименте время жизни кильватерных волн будет меньше. В связи с этим, проблема определения времени жизни волны критична, так как определяет возможный временной интервал (или допустимую рассинхронизацию) между встречными лазерными импульсами так, чтобы один из лазерных импульс мог пролетать в еще существующей (не затухшей) плазменной волне, созданной другим лазерными импульсом.

С помощью описанного в разделе 1.2 метода анализа потоков энергии  $\Psi$  и величины  $\Delta\Psi$  можно сформулировать критерий для определения времени жизни кильватерной волны: сопоставить момент опрокидывания волны с точкой, в которой начинается резкий рост величины  $\Delta\Psi$ . Для количественной оценки можно принять момент, когда величина  $\Delta\Psi$  начинается резко возрастать, например, превышает 1% от максимального значения  $\Psi$ . Этот метод определения момента опрокидывания более практичен, чем обнаружение точек пересечения

Таблица 2 — Времена жизни волны  $t_{s*}$ , полученные из численного моделирования, для двух лазерных импульсов ( $s = 1, 2$ ); максимальная задержка между импульсами равна  $t_D = t_{1*} - t_{2*}$

Плазма	$t_{1*}$ , пс ( $\omega_p t_{1*}$ )	$t_{2*}$ , пс ( $\omega_p t_{2*}$ )	$t_D$ , пс
H <sup>+</sup>	4.3 (383.6)	2.0 (180.3)	2.3
He <sup>2+</sup>	5.5 (487.4)	2.6 (230.3)	2.8
N <sup>5+</sup>	5.9 (528.2)	2.9 (261.2)	3.0

траекторий частиц плазмы, поскольку они могут быть вызваны начальной температурой плазмы или численным нагревом плазмы.

В результате моделирования кодом LCODE было установлено, что время жизни плазменной волны, созданной широким лазерным импульсом ( $\sigma_1 = 5.87c/\omega_p$ ), больше времени жизни узкого импульса ( $\sigma_2 = 2.27c/\omega_p$ ). Тогда при стремлении к максимально длительной возможной генерации терагерцового излучения, то есть при условии, что плазменные волны существовали и взаимодействовали вплоть до одновременного разрушения, широкий лазерный импульс может прилетать раньше узкого на величину времени задержки  $t_D$ , определяемую разностью времен жизни плазменных волн, созданных этими лазерными импульсами. Характерные времена жизни плазменной волны для газов, которые может ионизовать лазерный импульс в эксперименте (водород до H<sup>+</sup>, гелий до He<sup>2+</sup> и азот до N<sup>5+</sup>), приведены в таблице 2.

Полученные результаты отвечают на вопрос о допустимой возможной задержке между импульсами в эксперименте.

### 2.3. Зависимость времени жизни волны от массы иона плазмы

Теория опрокидывания волны из-за движения ионов плазмы была описана в работах [31] и [32], но сравнение с численным моделированием в интервале

реалистичных масс ионов не проводилось. Располагая быстрым квазистатистическим кодом LCODE [12, 13, 14] и точной диагностикой момента опрокидывания волны, мы можем провести моделирование по широкому интервалу отношений массы иона  $m_i$  к его заряду  $q_i$  (рис. 2.3). Теоретические оценки на рис. 2.3 происходят из адаптации формулы (33) из работы [32] для профиля лазерного импульса (2.1) в начале этой главы. Как следует из результатов численного моделирования, волна опрокидывается на один-два периода плазменной волны раньше, чем предсказывает теория, что является хорошей точностью, учитывая, что в численном моделировании момент опрокидывания волны привязан к фазе волны (рис. 2.2(c)), потому принимает «дискретные» значения.

Наблюдаемая зависимость времени опрокидывания волны от параметров ионов плазмы как  $m_i^{1/3}$  имеет простое объяснение. Радиальная сила, действующая на ионы, не зависит от массы иона. Она часто называется пондеромоторной силой, хотя, строго говоря, эта сила связана с полем разделения зарядов и соответствует пондеромоторной силе, действующей на электроны. Эта сила линейно ускоряет ионы в радиальном направлении от оси и смещает их на расстояние  $\delta r \propto t^2/m_i$  (рис. 2.4). Несмотря на то, что ионы ускоряются по-раз-

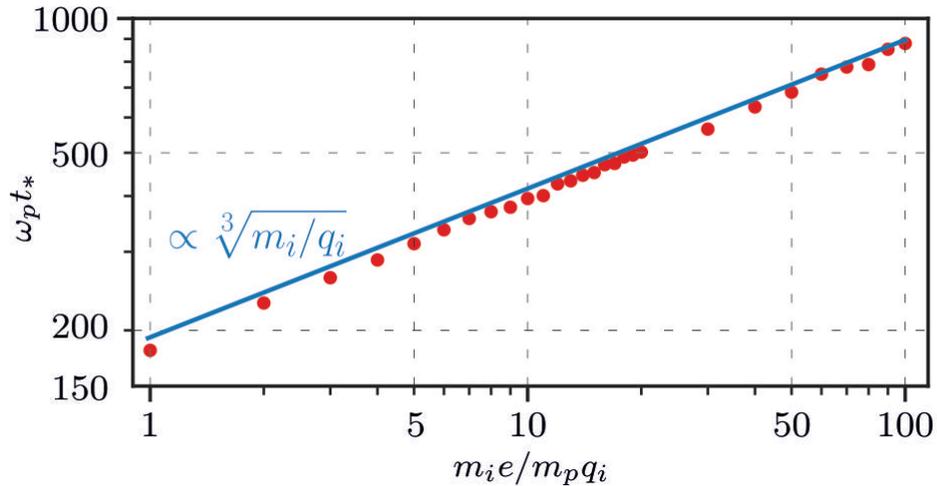


Рисунок 2.3 — Момент опрокидывания волны  $t_*$  в зависимости от отношения массы иона  $m_i$  к его заряду  $q_i$  (в единицах отношения  $m_p/e$  для протона).

Синяя линия соответствует теоретической оценке, красные точки получены из результатов численного моделирования

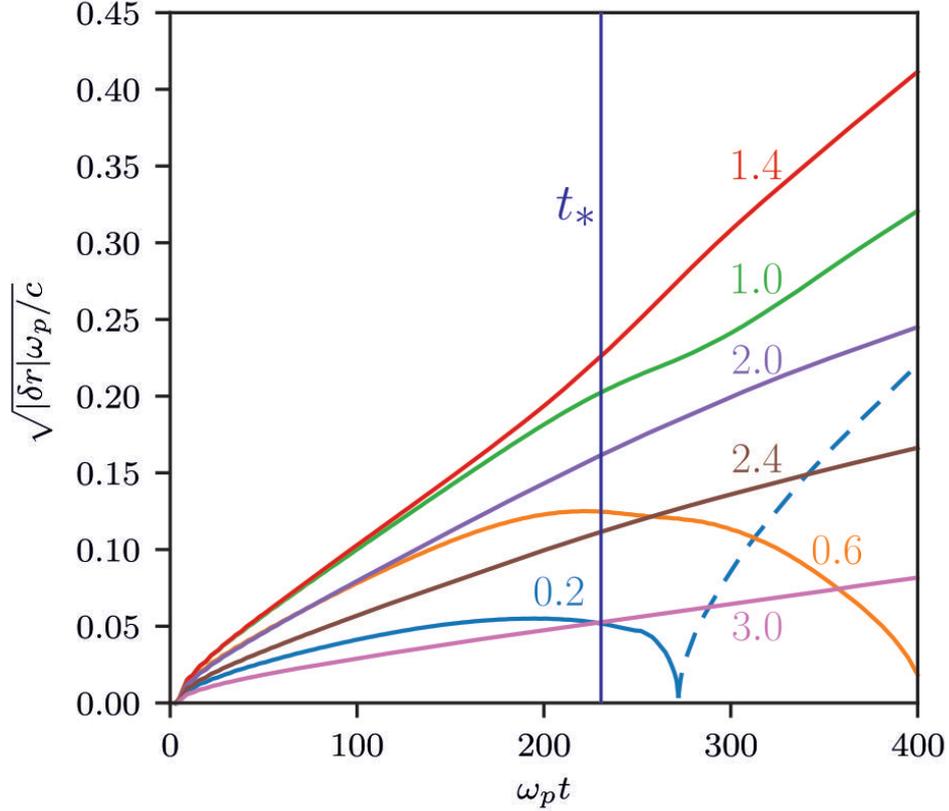


Рисунок 2.4 — Смещение ионов с течением времени. Для большей наглядности линейности ускорения показан квадратный корень величины смещения иона  $\delta r$ . Числа рядом с кривыми соответствуют начальным радиусам ионов в единицах  $c/\omega_p$ . Пунктирная линия описывает движение иона, пересекающего ось (т.е., с  $\delta r < 0$ )

ному на разных радиусах, изменение плотности ионов  $\delta n_i$  и удлинение периода волны  $\delta \lambda_p$  имеют одинаковое поведение  $|\delta n_i| \propto \delta \lambda_p \propto t^2/m_i$ , пока возмущения остаются небольшими. Волна опрокидывается, когда совокупный сдвиг фазы достигает величины порядка  $2\pi$ , то есть интеграл

$$\int_0^{t_*} \delta \lambda_p(t) dt \propto \frac{t_*^3}{m_i} \quad (2.3)$$

достигает некоторой предельной величины, откуда и следует зависимость

$$t_* \propto m_i^{1/3}. \quad (2.4)$$

Наблюдаемое на рис. 2.4 поведение смещения ионов на разных радиусах не только доказывает линейность их ускорения в радиальном направлении, но также показывает важную особенность движения ионов. Начальный

импульс, переданный ионам драйвером, пренебрежимо мал в сравнении с влиянием кильватерной волны, как и предсказано в работе [32]. После того, как волна опрокидывается, приосевые ионы меняют свое направление движения от оси на противоположное и формируют увеличение плотности около оси, что видно на рис. 2.2(а).

## 2.4. Основные результаты

Предложен метод определения момента опрокидывания кильватерной волны с помощью контроля потоков энергии. В частности, показано, как с помощью этого метода можно определять момент опрокидывания плазменной волны, связанный с движением ионов плазмы. Для примера было проведено численное моделирование возможного эксперимента по генерации терагерцового излучения в кильватерных волнах встречных лазерных импульсов и получены оценки, накладывающие ограничение на возможную временную задержку между импульсами.

Обнаружена корреляция между качественным изменением поведения ионов в приосевой области с резким ростом ионной плотности на оси и моментом опрокидывания плазменной волны. Зависимость времени жизни плазменной волны пропорциональна кубическому корню из отношения массы иона плазмы  $m_i$  к его заряду  $q_i$ , однако систематического исследования в этом направлении не проводилось, поэтому этот результат не выносится как защищаемое положение.

## Глава 3. Разрушение кильватерной волны электронным гало в эксперименте AWAKE

В разделе 3.1 приводится краткое описание эксперимента AWAKE по ускорению электронов в кильватерной волне, созданной самомодулированным протонным драйвером, что изложено в работе [2]. Раздел 3.2 основан на выполненных сотрудниками коллаборации AWAKE работах [38] и [20], посвященных сравнению результатов диагностики поперечного размера протонного пучка в эксперименте AWAKE с численным моделированием, а также на работе [21], в которой изучалась эффективность ускорения электронов в зависимости от положения лазерного импульса относительно протонного драйвера. В этих работах согласие экспериментальных результатов и численного моделирования появилось только после корректного учета влияния электронного гало на плазменную волну. Автор диссертации занимался изучением механизма разрушения плазменной волны электронным гало, чему посвящены разделы 3.3 – 3.5, основанные на работе [19].

### 3.1. Самомодуляционная неустойчивость протонного пучка и эксперимент AWAKE в ЦЕРН

Ускоритель заряженных частиц можно представить как канал передачи энергии из некоторого источника в ускоряемые частицы. В случае с кильватерным ускорением в плазме источником энергии является драйвер, который создает плазменную волну. Таким образом, одним из факторов, определяющих перспективность метода кильватерного ускорения, является энергосодержание драйвера. Энергия лазерных импульсов, достигаемая на современных

установках, не превышает 50 Дж. Электронные драйверы энергетичнее лазерных импульсов, но и их энергия, по современному положению дел, не превышает полтора сотен джоулей. Безусловное лидерство в этом плане принадлежит протонным пучкам. Их энергосодержание может превышать тысячи джоулей, как, например, около 20 кДж в пучке Протонного суперсинхротрона SPS или свыше 150 кДж в протонном пучке Большого адронного коллайдера. Именно большое энергосодержание и делает использование протонных драйверов перспективным путем к достижению энергий ускоренных электронов в несколько тераэлектронвольт за пролет в одной плазменной секции.

Протонные пучки, получаемые на современных ускорителях, хоть и являются высокоэнергетичными по сравнению с остальными типами драйверов, тем не менее, не способны раскачать плазменную волну так, чтобы в ней можно было ускорять частицы. Причина тому — их длина, которая значительно превышает длину плазменной волны. Однако длинный протонный пучок в плазме подвержен поперечной неустойчивости, которая называется самомодуляционной [39, 40]. Наглядное объяснение механизма этой неустойчивости выглядит следующим образом. Влетающий в плазму длинный протонный пучок создает кильватерную волну некоторой малой амплитуды. Электрические поля, возникающие в этой волне, воздействуют, в том числе, и на сам протонный пучок. Радиальное электрическое поле влияет на протонный пучок как фокусирующая (сжимающая пучок ближе к оси) либо дефокусирующая (рассеивающая протоны пучка от оси) сила. Соответственно, если часть пучка попадает в дефокусирующую фазу плазменной волны, протоны разлетаются от оси, и размер пучка увеличивается (при этом уменьшается его плотность). Действие фокусирующей силы обратное: протоны сжимаются ближе к оси, размер пучка локально уменьшается, и его плотность увеличивается. При этом такие сжавшиеся протонные сгустки оказываются эквидистантно расположенными с интервалами порядка длины плазменной волны. В результате формируется положительная обратная связь, и подобная последовательность из сгустков резонансно раскачивает плазменную волну еще сильнее. Проблема заключается

в том, что неустойчивость будет развиваться из случайной точки для каждого нового протонного драйвера, а следовательно, и ускоряющая фаза плазменной волны будет для каждого очередного протонного драйвера находиться в разных местах. Чтобы использовать самомодуляционную неустойчивость в плазменном кильватерном ускорении, её нужно уметь контролировать, то есть понимать, с какой точки начинает развиваться неустойчивость и в каких местах образуются протонные сгустки.

### **3.2. Диагностика поперечного размера протонного пучка в эксперименте AWAKE и электронное гало**

Для экспериментального изучения возможностей плазменного кильватерного ускорения требуется метод, гарантирующий контроль развития самомодуляционной неустойчивости, чтобы была ясность, где именно окажется ускоряющая фаза плазменной волны, чтобы поместить в неё ускоряемый пучок (витнесс).

Одна из методов контроля заключается в создании управляемого затравочного возмущения, которое, выражаясь простым языком, быстрее раскачает плазменную волну с заранее определенной фазой [41, 42]. Затравочное возмущение можно создать резким фронтом протонного пучка, который, в свою очередь, можно сформировать следующим образом. В камеру, заполненную газом, влетает длинный высокоэнергетичный протонный пучок, и соосно с ним летит короткий лазерный импульс, который своим полем производит ионизацию газа. Тогда в образовавшейся плазме движется только находящаяся позади лазерного импульса часть протонного пучка, имеющая, с точки зрения плазмы, резкий фронт [43].

Вокруг такой идеи создания плазменной кильватерной волны и построен эксперимент AWAKE в ЦЕРН [2]. В этом эксперименте протонный пучок из

Протонного суперсинхротрона SPS (предускоритель Большого адронного коллайдера) с энергией 400 ГэВ, количеством протонов  $N_p$  до  $3.1 \times 10^{11}$  частиц в пучке, среднеквадратичной длиной  $\sigma_z = 6 - 10$  см и шириной  $\sigma_r \approx 200$  мкм влетает в 10-метровую секцию, заполненную парами рубидия (рис. 3.1). Источниками паров в секции являются расположенные на концах секции ячейки с жидким рубидием. Пары рубидия формируются при нагреве этих ячеек, что, во-первых, позволяет получить высокую однородность плотности газа (и, следовательно, плазмы), а во-вторых, поддержанием разной температуры ячеек можно обеспечить градиент плотности газа. Создаваемую таким способом плотность можно варьировать в пределах  $10^{14} \div 10^{15}$  см $^{-3}$ . Лазерный импульс, используемый для отрыва единственного электрона с внешней орбитали атома рубидия, длительностью 120 фс, длиной волны 780 нм и энергией 450 мДж фокусируется на входе в газовую секцию до 1 мм (ширина на полувысоте) и создает плазменный канал радиуса 1.5 мм.

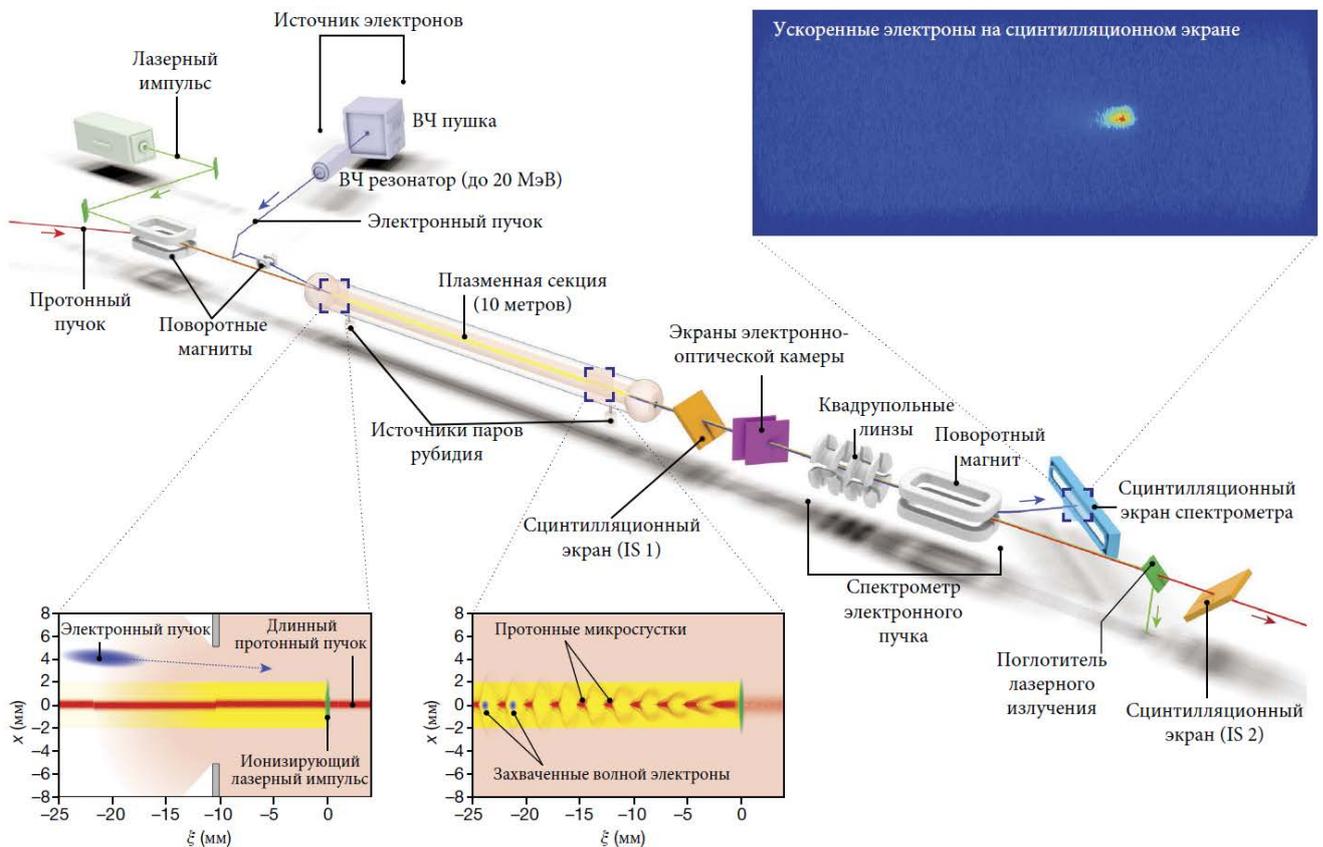


Рисунок 3.1 — Схема эксперимента AWAKE. Изображение из работы [2]

Эксперимент AWAKE является проверкой возможности ускорения частиц в плазме протонными драйверами, поэтому в нем, в том числе, проверялся и сам принцип контролируемой самомодуляции протонного пучка. Поскольку плотность плазмы должна быть однородной с высокой точностью, никакие диагностические окна или устройства не могут располагаться внутри плазменной секции, только за её пределами. Убедиться в существовании самомодуляции протонного пучка можно измерением, например, его поперечного размера [38]. Для этой цели после плазменной секции располагаются два сцинтилляционных экрана (рис. 3.2), на расстояниях 1.66 (IS 1) и 9.75 (IS 2) метров от конца секции, которые позволяют оценить динамику разлета протонного пучка. Стоит упомянуть также, что каждый из экранов включает в себя две диагностики: поперечный профиль всего протонного пучка, центральная часть которого будет наиболее яркой (рис. 3.2(a)), и поперечный профиль дефокусированных протонов (рис. 3.2(b)), который получают с помощью маски, затеняющей яркое пятно, создаваемое на экране центральной частью протонного пучка.

Результат, наблюдаемый на сцинтилляционном экране диагностики, приведен на рис. 3.3. Плотность плазмы  $n_0$  в эксперименте равна  $1.965 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$  [20]. На картине поперечного распределения протонного пучка видна яр-

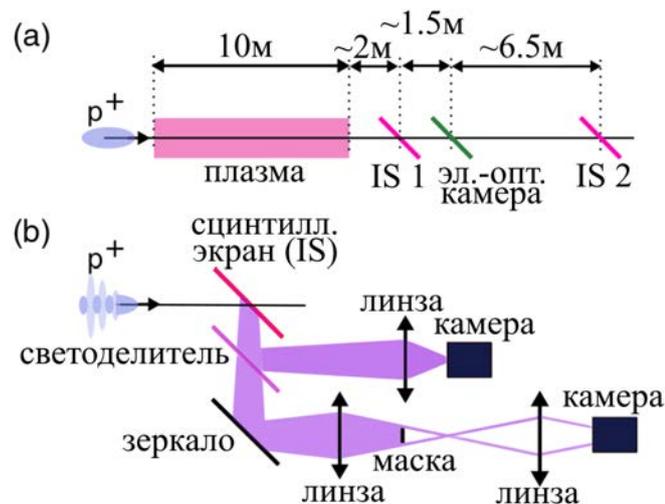


Рисунок 3.2 — Схематическое изображение диагностики поперечного размера протонного пучка. (а) — пространственное расположение сцинтилляционных экранов IS 1 и IS 2, (б) — разделение светового потока с экранов для диагностики частей пучка (центра и «гало»). Изображение из работы [38]

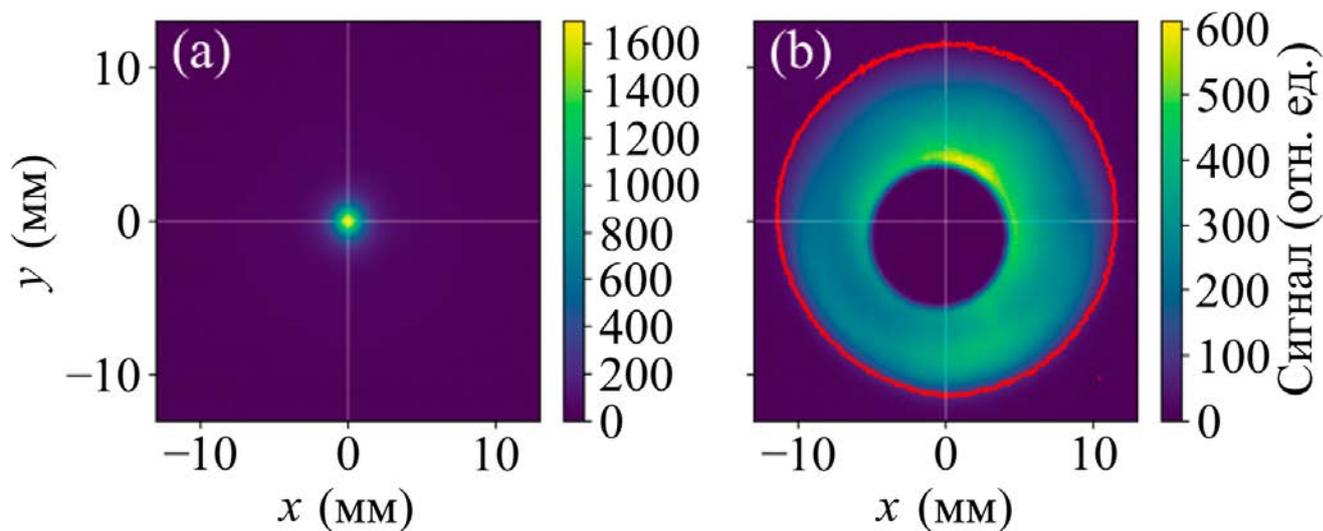


Рисунок 3.3 — Изображение поперечного размера протонного пучка, полученное на сцинтилляционном экране. (a) — центральная часть, (b) — «гало» (центральная часть закрыта маской). Изображение из работы [20]

какая центральная часть протонного пучка, а также рассеянные в процессе самомодуляции протоны, находящиеся в некоторой области вокруг протонного пучка.

Численное моделирование проводилось с параметрами, перечисленными в таблице 3. Как упоминалось ранее, лазерный импульс ионизирует пары рубидия, в результате чего в этой сформированной плазме фактически летит только часть протонного пучка, расположенная позади лазерного импульса. Поэтому лазерный импульс не моделируется, а производится численное моделирование динамики протонного пучка с резким фронтом, движущегося в плазме с заданной плотностью. При плотности плазмы  $1.965 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$  поперечный размер протонного драйвера оказывается мал по сравнению с толщиной плазменного скин слоя  $c/\omega_p$ . В плазменной волне образуются большие градиенты электрических полей, которые приводят к быстрому пересечению траекторий электронов плазмы, то есть к опрокидыванию волны. В результате некоторые электроны плазмы получают достаточную добавку к поперечному импульсу и энергии, чтобы вылететь из плазмы (рис. 3.4). Плазма в этом случае становится положительно заряженной за счет нескомпенсированного заряда оставшихся ионов. Следствием такого разделения зарядов является радиальное электри-

Таблица 3 — Параметры эксперимента AWAKE, используемые для численного моделирования в работе [20], по которым были получены рисунки 3.4, 3.5 и 3.6 (параметр  $N_b$  для рис. 3.5 варьировался)

Параметр, обозначение	Величина
Длина плазменной секции, $L$	10.3 м
Плотность плазмы, $n_0$	$1.965 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$
Скин слой плазмы, $c/\omega_p$ ,	380 мкм
Радиус плазмы, $r_{pl}$	1.5 мм
Масса иона плазмы, $M_i$	$157000 m_e$
Начальная температура плазмы, $T_e$	0 эВ
Энергия протонного пучка, $W_b$	400 ГэВ
Количество протонов в пучке, $N_b$	$2.86 \times 10^{11}$
Энергоразброс пучка, $\delta W_b$	0.35%
Длина протонного пучка, $\sigma_{zb}$	6.57 см
Радиус протонного пучка, $\sigma_{rb}$	200 мкм
Нормализованный эмиттанс пучка, $\epsilon_{bn}$	3.6 мм мрад
Смещение лазерного импульса относительно центра протонного пучка, $\xi_s$	3.75 см ( $0.57 \sigma_{zb}$ )

ческое поле, которое возвращает вылетевшие электроны обратно. Таким образом, вокруг плазмы образуется область отрицательного заряда с некоторой плотностью электронов, которая называется электронным гало.

Вообще говоря, в задачах численного моделирования часто возникает дилемма, связанная с размером области моделирования. «Широкое» окно с высоким разрешением может точнее соответствовать реальному эксперименту, но будет очень долго вычисляться даже на суперкомпьютерах. Применительно к данной задаче, «узкое» окно (шириной  $4.5c/\omega_p$  при радиусе плазмы  $3.96c/\omega_p$ ), позволяет «отключить» появление электронного гало, а возникающее электрическое поле за пределами плазмы в этом малом зазоре не будет кардинально влиять на динамику частиц. При этом ради повышения скорости расчетов мы «жертвуем» некоторыми физическими процессами, а результат будет соответствовать экспериментальным данным с некоторой точностью. Однако при

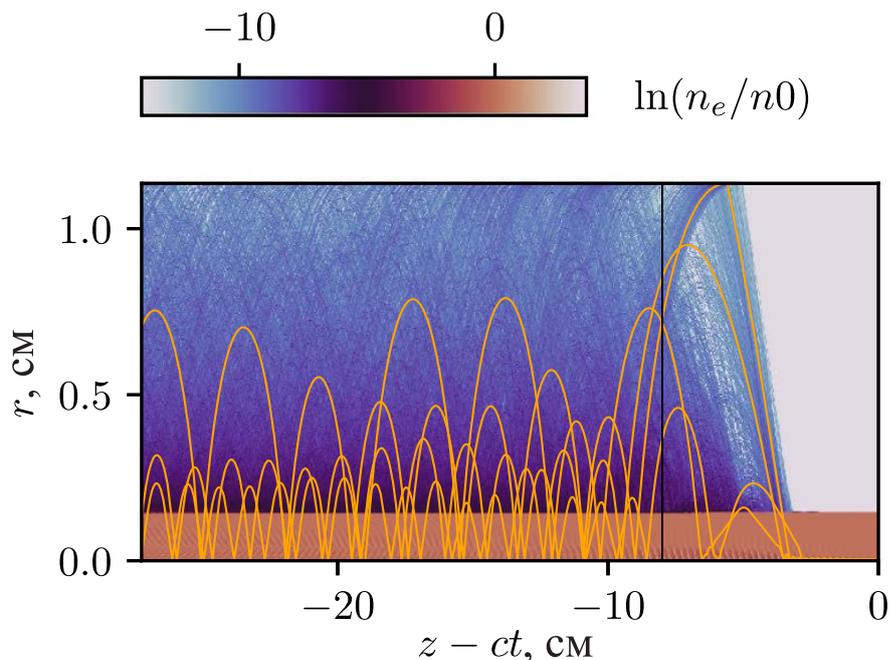


Рисунок 3.4 — Распределение плотности электронов в окне моделирования и несколько характерных траекторий электронов, образующих электронное гало. Моделирование проводилось квазистатическим кодом LCODE в двумерном осесимметричном случае. Изображение из работы [20]

проверке оказалось, что такое отключение электронов гало приводит к результатам моделирования, которые, на первый взгляд, противоречат интуитивному ожиданию. Возникающее радиальное электрическое поле, с одной стороны, возвращает вылетевшие электроны обратно в плазму, в то же время, дополнительно толкает дефокусированные протоны пучка еще дальше от оси. Тогда моделирование с близко расположенной к плазме стенкой, когда этого поля нет, должно было бы показать меньший разлет протонного пучка, однако всё оказалось наоборот: размер протонного пучка оказался даже большим, чем наблюдалось в эксперименте (рис. 3.5).

Причина этого кроется во времени жизни кильватерной волны, которое можно оценивать по характерному поведению кильватерного потенциала  $\Phi$ , производные которого по пространственным координатам, в соответствии с уравнениями (2.2), определяют действующие на частицы электромагнитные поля. Если амплитуда резко упала, значит, частицы уже не будут эффектив-

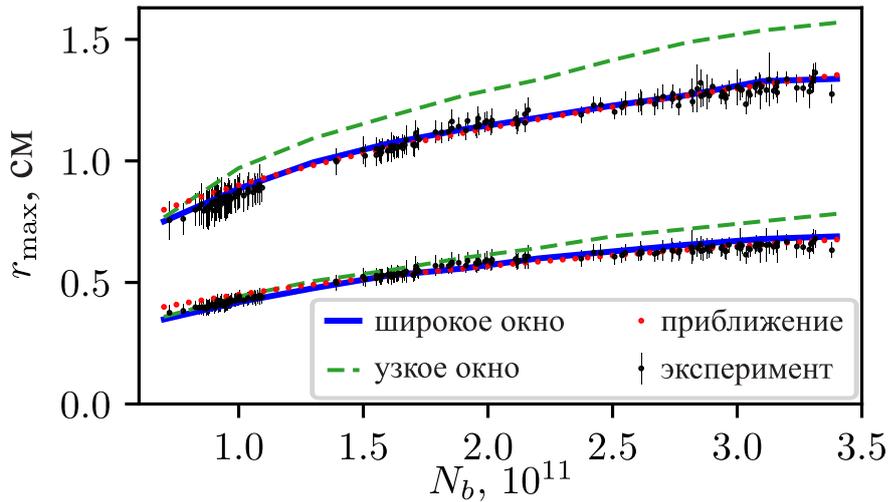


Рисунок 3.5 — Поперечный размер (радиус) протонного пучка в зависимости от количества частиц в пучке. Наборы линий соответствуют данным со сцинтилляционных экранов IS 2 (верхний набор) и IS 1 (нижний набор). Черные точки — экспериментально полученные значения, а синяя и зеленая штрихованная линия соответствуют результатам численного моделирования с широким ( $30c/\omega_p$ ) и узким ( $4.5c/\omega_p$ ) окнами. Изображение из работы [20]

но ускоряться в такой волне, следовательно, волну можно считать затухшей (разрушенной).

Как видно из рис. 3.6, в случае узкого окна моделирования амплитуда кильватерной волны после раскачки драйвером держится на одном уровне достаточно долго. Это означает, что процесс самомодуляции протонного пучка будет длиться, пока кильватерная волна не затухнет и не перестанет расталкивать от оси протоны пучка, попавшие в дефокусирующую фазу. При моделировании более приближенного к реальности случая — моделирования с широким окном, когда электроны плазмы вылетают и образуют гало, оказалось, что плазменная волна быстро разрушается. В отсутствие дефокусирующих полей кильватерной волны протоны не будут столь сильно разлетаться от оси, и именно в этом случае предсказываемый моделированием поперечный размер протонного пучка хорошо согласуется с экспериментальными данными (рис. 3.5).

Важность учета влияния электронного гало на происходящие внутри плазменной волны процессы применительно к эксперименту AWAKE была так-

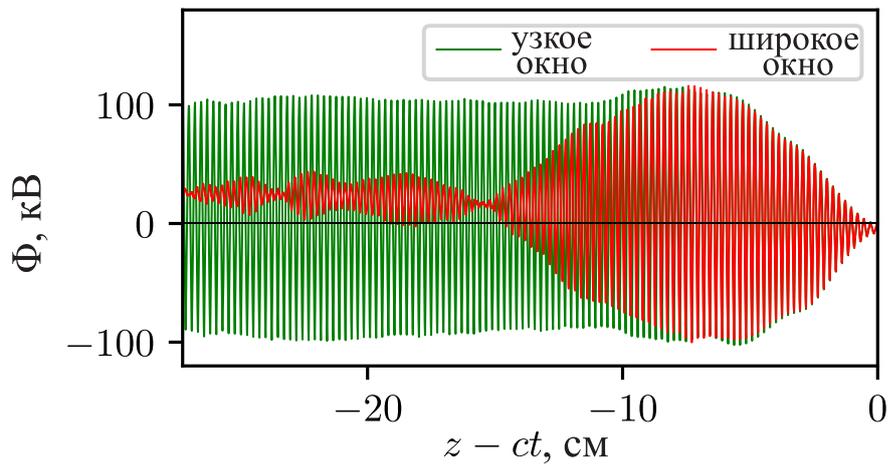


Рисунок 3.6 — Поведение кильватерного потенциала при моделировании в узком окне ( $4.5c/\omega_p$ ) и широком окне ( $30c/\omega_p$ ). Изображение из работы [20] же обнаружена при изучении эффективности ускорения электронов в плазменной волне в зависимости от расположения лазерного импульса относительно протонного драйвера [21]. В результате смещения лазерного импульса из середины протонного пучка в его начало или конец плазма «видит» либо меньшую часть протонного пучка, либо большую, соответственно. Это влияет на формируемую в плазме позади лазерного импульса кильватерную волну и электромагнитные поля. Экспериментальные данные, с которыми сравнивались результаты численного моделирования, относились к набираемой ускоряемым электронным пучком энергии в зависимости от того, насколько далеко он оказывался позади лазерного импульса, то есть насколько сильно была раскачана плазменная волна. Сразу позади лазерного импульса амплитуда кильватерной волны только начинает нарастать, поэтому и энергия электронного витнесса, который будет находится сразу позади лазерного импульса, будет невелика. По мере развития само модуляционной неустойчивости протонного драйвера и раскачки плазменной волны ускоряемые электроны будут набирать все больше и больше энергии, однако обнаружилось, что плазменная волна вскоре начинает затухать, что приводит к наблюдаемому в эксперименте уменьшению энергии ускоряемого электронного пучка при его значительном удалении от лазерного импульса (рис. 3.7(a)).

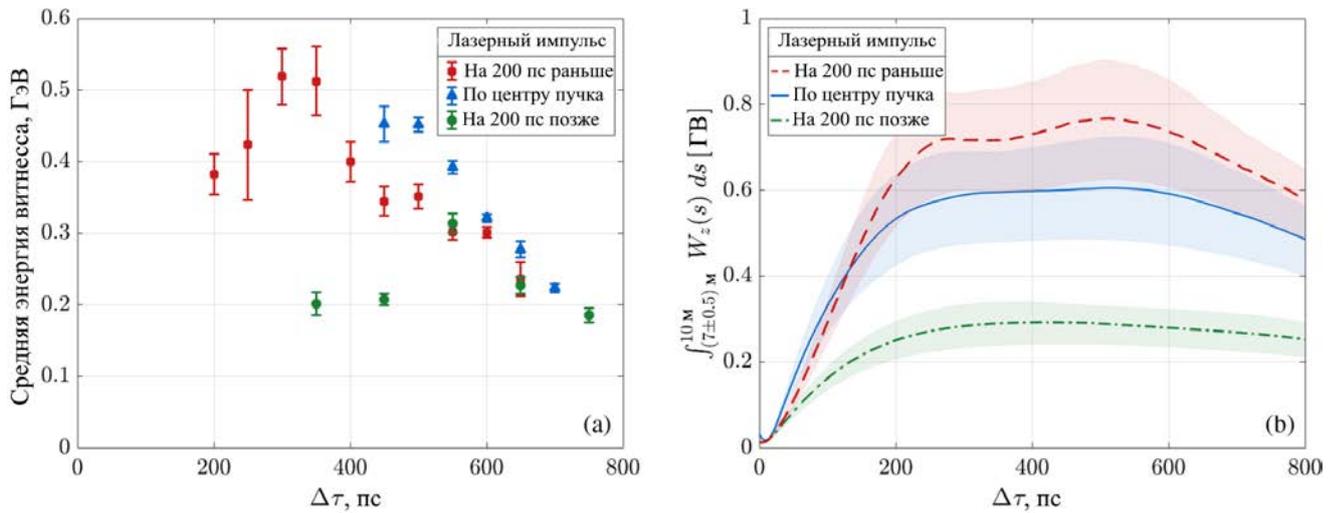


Рисунок 3.7 — Зависимость набираемой электронным витнессом энергии в зависимости от его запаздывания относительно лазерного импульса (то есть, насколько далеко в плазменной волне позади лазерного импульса оказывается электронный пучок) для трех случаев расположения лазерного импульса относительно протонного драйвера: синим обозначены данные, полученные для лазерного импульса, находящегося посередине протонного пучка, а красным и зеленым — при положении лазерного импульса ближе к «голове» и «хвосту» протонного драйвера, соответственно. (a) — экспериментальные данные, (b) — результаты численного моделирования с широким окном (с учетом влияния электронного гало). Изображение из работы [21]

Численное моделирование производилось кодом LCODE, и первоначально, для быстрого получения результатов, окно моделирования было сделано узким, охватывающим только область плазменного столба. Из-за этого влияние упомянутых выше электронов гало на плазменную волну не учитывалось, и плазменная волна в численном моделировании существовала достаточно долго с некоторой конечной амплитудой. Соответственно, из результатов моделирования следовало, что энергия электронного витнесса выходит на некоторую постоянную величину по мере его удаления от лазерного импульса, что никак не соответствовало экспериментальным данным. Получить соответствие между экспериментальными данными и численным моделированием (рис. 3.7) удалось после учета влияния электронного гало, то есть при расширении окна моделирования, чтобы оно охватывало не только область плазменного столба,

но и окружающее его пространство, что подтверждает роль электронного гало в разрушении плазменной волны.

### 3.3. Динамика электронного гало

Для изучения динамики электронного гало сначала проводилось численное моделирование распространения протонного пучка в плазменной секции на 4 метра, поскольку, пролетев в плазме именно такое расстояние, протонный пучок оказывается полностью разбит на микросгустки вследствие самомодуляции. В этом случае он создает плазменную волну с большими градиентами электрических полей [44], в которых некоторые электроны плазмы, как упоминалось ранее, получают достаточный поперечный импульс, чтобы вылететь из плазмы. Это соответствует моделированию до  $t_{limit} = 10600 \omega_p^{-1}$ , после чего начинается изучение динамики плазменной волны и электронного гало. Параметры численного моделирования приведены в таблице 4.

В некоторых точках внутри плазменной волны происходит пересечение траекторий электронов. Если пересечение траекторий электронов происходит на «гребне» плотности плазмы, когда фронт плазменной волны оказывается сильно искривленным, эти электроны плазмы получают достаточную добавку к поперечному импульсу и энергии, чтобы вылететь из плазмы (рис. 3.8(a)). Пересечение траекторий электронов в областях, где фронт плазменной волны не искривлен, в свою очередь, не приводит к тому, что эти электроны выбиваются из коллективного движения в целом (рис. 3.8(b)).

Видно, что электроны, образующие гало вокруг плазменного столба, с некоторого момента начинают вылетать пучками из определенной фазы каждого периода плазменной волны. Плазму эти электроны покидают как из поливочного шланга, возвращаясь обратно в весьма широком интервале по продольной координате  $\xi$  (рис. 3.9(a)). Корреляции между точкой вылета и точкой

Таблица 4 — Параметры для численного моделирования эксперимента AWAKE в рамках изучения динамики электронного гало

Параметр, обозначение	Величина
Плотность плазмы, $n_0$	$1.965 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$
Скин слой плазмы, $c/\omega_p$ ,	0.038 см
Радиус плазмы, $R_p$	1.5 мм
Масса иона плазмы, $M_i$	$157000 m_e$
Начальная температура плазмы, $T_e$	0 эВ
Энергия протонного пучка, $W_b$	400 ГэВ
Количество протонов в пучке, $N_b$	$3 \times 10^{11}$
Энергоразброс пучка, $\delta W_b$	0.35%
Длина протонного пучка, $\sigma_{zb}$	6.98 см
Радиус протонного пучка, $\sigma_{rb}$	150 мкм
Нормализованный эмиттанс пучка, $\epsilon_{bn}$	3.6 мм мрад
Смещение лазерного импульса относительно центра протонного пучка, $\xi_s$	3.75 см (0.57 $\sigma_{zb}$ )
Шаг сетки по $r$ , $\delta r$	$0.01 c/\omega_p$
Шаг сетки по $\xi$ , $\delta \xi$	$0.01 c/\omega_p$
Шаг по времени $t$ , $\delta t$	$200 \omega_p$

возвращения в плазму не наблюдается, а пройденное снаружи плазмы расстояние зависит от энергии  $\Delta W_{wb}$ , полученной электроном после опрокидывания волны (рис. 3.9(b)).

За счет вылетающих электронов в плазме образуется избыточный положительный заряд от ионов. В результате такого разделения зарядов за границей плазмы появляется радиальное электрическое поле, которое нарастает (против оси  $\xi$ ) по мере того, как все больше и больше электронов покидают плазму (рис. 3.10). Возникающее радиальное электрическое поле притягивает вылетающие электроны обратно. При этом в таком нарастающем электрическом поле электроны доускоряются и возвращаются в плазму с большей энергией, чем при вылете из плазмы. Возвращаясь, они пролетают её насквозь (в двумерном осесимметричном случае это моделируется «отражением» от оси).

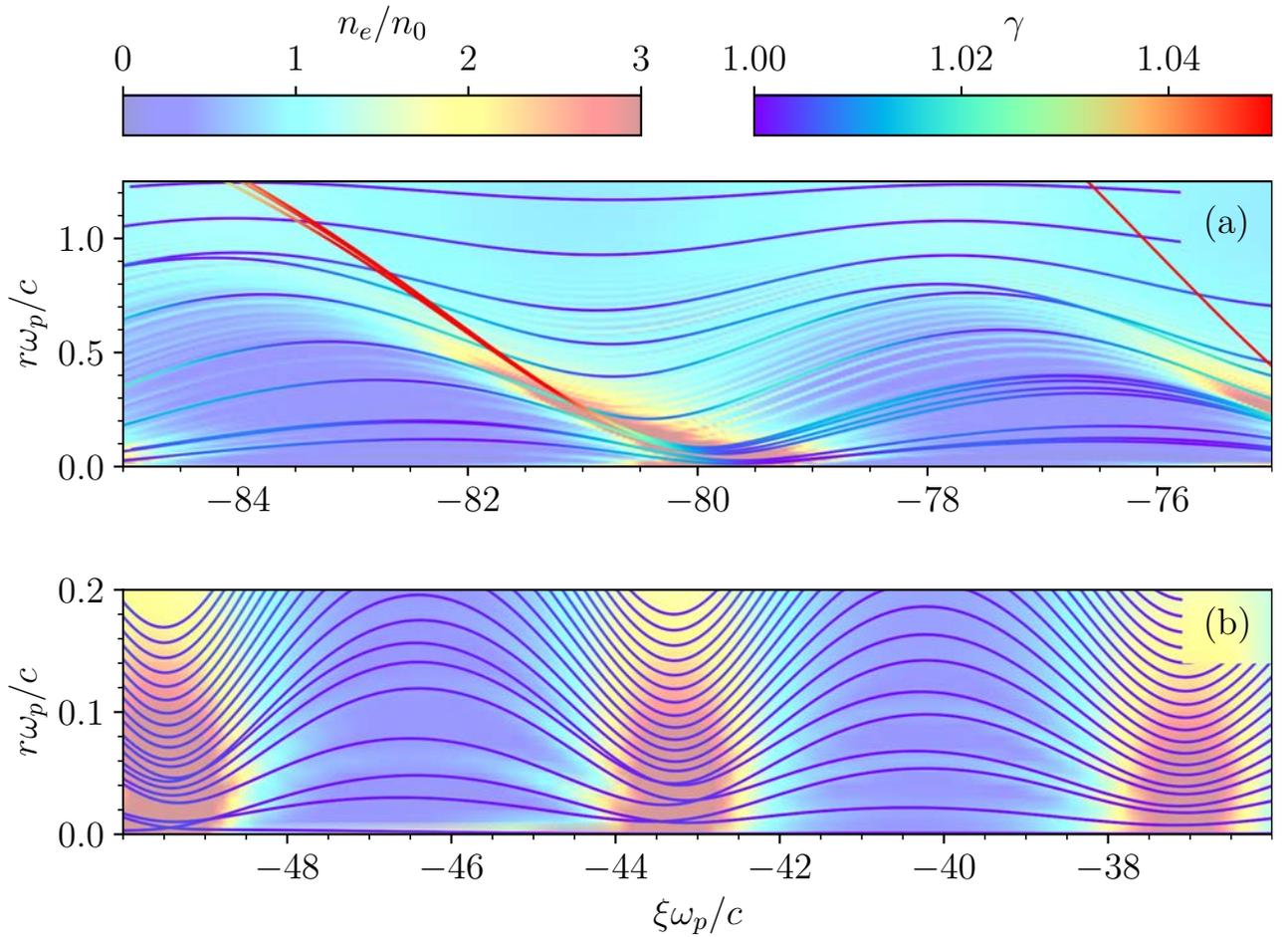


Рисунок 3.8 — Траектории электронов плазмы на фоне электронной плотности  $n_e$ . (a) — Опрокидывание плазменной волны, сопровождающееся появлением электронов гало. (b) — Пересечения траекторий, которые не приводят к появлению быстрых электронов, способных покинуть плазму. Цвет линии траектории соответствует релятивистскому фактору  $\gamma$  электрона

Вблизи оси электрон попадает в плазменную волну, в электромагнитных полях которой его энергия изменяется на величину  $\Delta W_{ee}$ . Если электрон попадает в ускоряющую фазу кильватерной волны, он дополнительно ускоряется, забирая из волны энергию  $\Delta W_{ee} > 0$ , и наоборот, попадая в тормозящую фазу, электрон замедляется, возвращая в волну энергию  $\Delta W_{ee} < 0$  (рис. 3.9(b)).

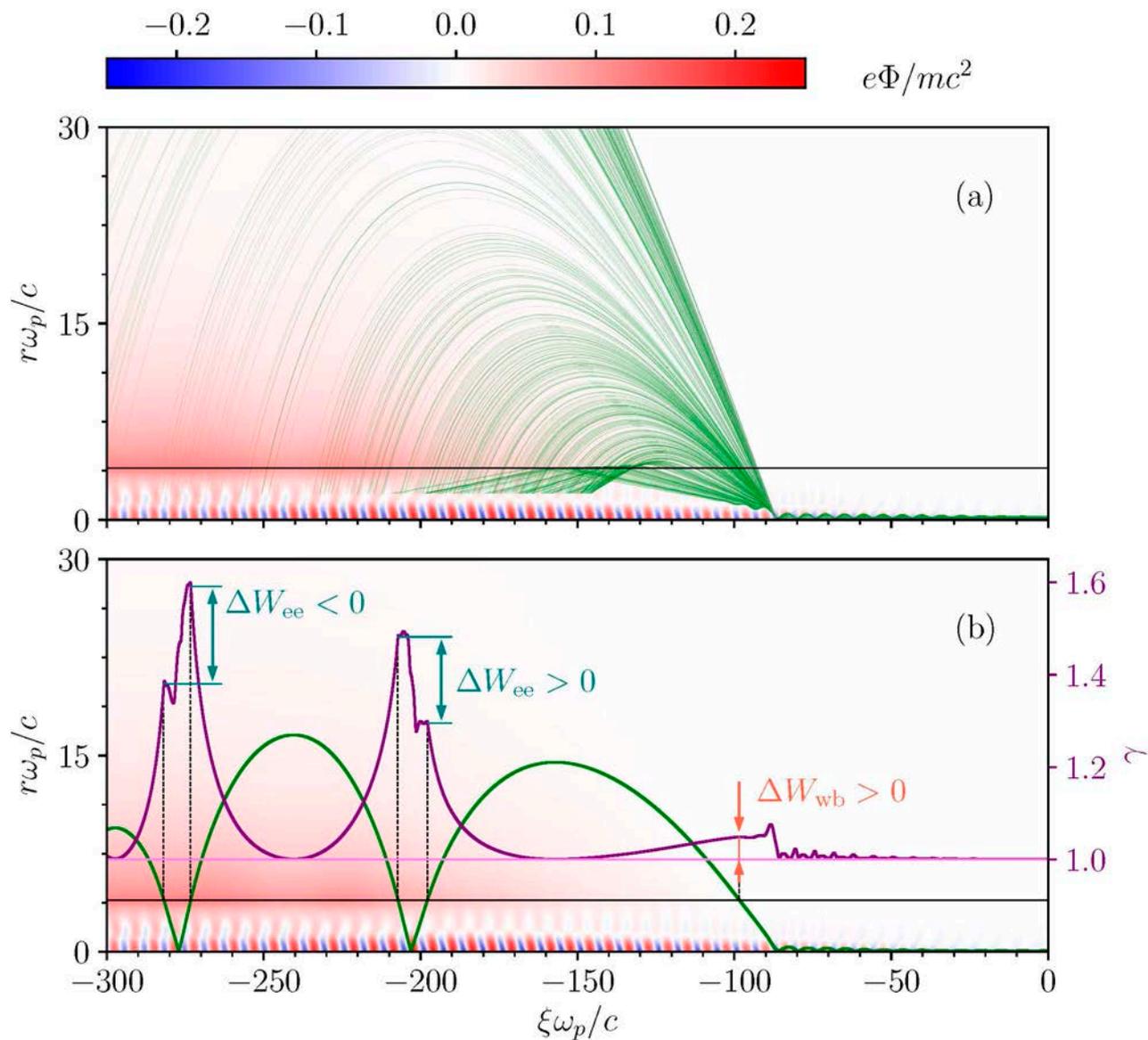


Рисунок 3.9 — Характерные траектории электронов гало на фоне кильватерного потенциала  $\Phi$ , показанного цветом. (a) — Пример пучка траекторий электронов гало, появившихся в одном периоде плазменной волны (в интервале  $-86.5 < \xi\omega_p/c < -85.5$ ). Траектории не дорисованы до конца, чтобы была видна фаза кильватерного потенциала, в которую возвращаются электроны. (b) — Траектория электрона гало (зеленая линия) и его релятивистский фактор  $\gamma(\xi)$  (фиолетовая линия). Черные горизонтальные линии соответствуют границе плазмы

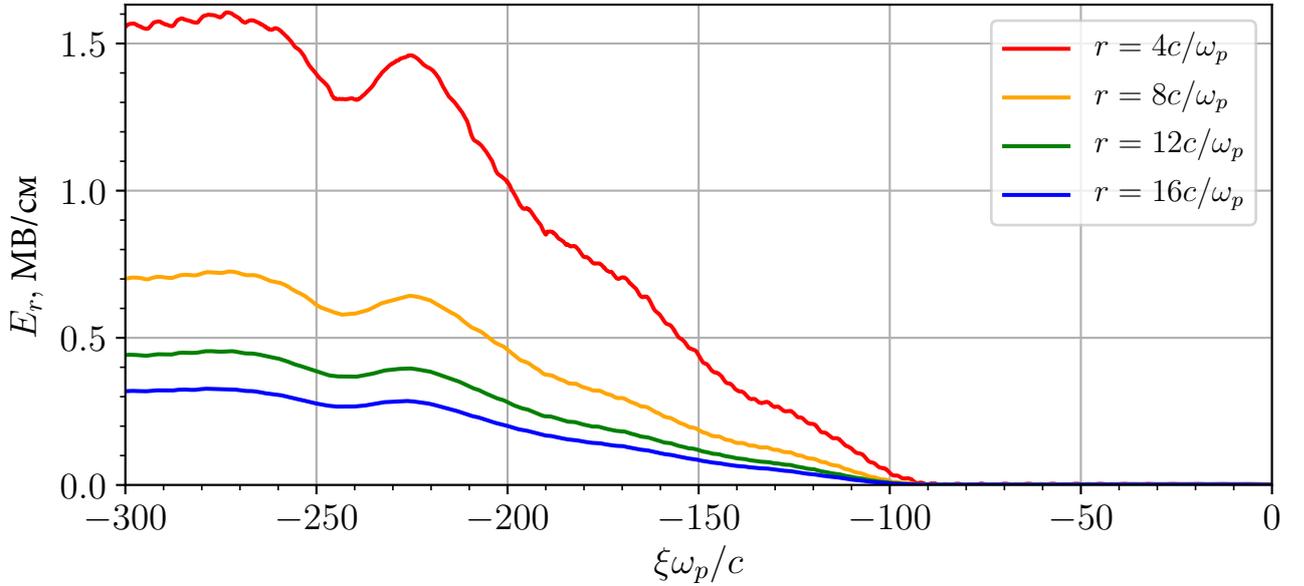


Рисунок 3.10 — Радиальное электрическое поле  $E_r(\xi)$  на разных радиусах снаружи от плазменного столба

### 3.4. Анализ энергообмена

С точки зрения энергетических процессов внутри плазменной волны, её разрушение связано с резкими потерями энергии. Чтобы понять, какую роль в этом процессе играют электроны гало, требуется сравнить процессы энергообмена в плазменной волне и электронном гало, то есть проанализировать, как именно энергия уходит из плазменной волны, и как энергия поступает в электронное гало.

#### 3.4.1. Энергетические процессы в электронном гало

Как было сказано выше, каждый пролет электрона гало сквозь плазму сопровождается либо изъятием из плазменной волны некоторого количества энергии  $\Delta W_{ee} > 0$ , либо наоборот, возвращением в волну энергии  $\Delta W_{ee} < 0$ . Очевидно, что впервые вылетающий из плазмы (после опрокидывания вол-

ны) электрон всегда только забирает из волны некоторое количество энергии  $\Delta W_{wb} > 0$ .

Эти изменения энергии  $\Delta W$  каждого электрона гало в каждом акте энергообмена с плазменной волной можно сопоставить с продольной координатой  $\xi_e$ , в которой электрон пересекает ось (для  $\Delta W = \Delta W_{ee}$ ), или в которой поперечная координата электрона имеет последний локальный минимум перед первым вылетом из плазмы (для  $\Delta W = \Delta W_{wb}$ ). Далее эти изменения энергии можно последовательно просуммировать, получив в результате изменение энергии  $\Upsilon_\Sigma$  всей совокупности электронов гало как функцию продольной координаты  $\xi$  (рис. 3.11):

$$\Upsilon_{wb}(\xi) = \sum_{\xi_e > \xi} \Delta W_{wb}(\xi_e), \quad \Upsilon_{ee}(\xi) = \sum_{\xi_e > \xi} \Delta W_{ee}(\xi_e), \quad (3.1)$$

$$\Upsilon_\Sigma = \Upsilon_{wb} + \Upsilon_{ee}. \quad (3.2)$$

Суммирование в уравнениях (3.1) производится по всем электронам, попадающим в окно моделирования в единицу времени, поэтому величины  $\Upsilon_{wb}$ ,  $\Upsilon_{ee}$ , и  $\Upsilon_\Sigma$  имеют размерность потока энергии.

Следует отметить, что величина  $\Upsilon_\Sigma$  характеризует энергию, которая забирается из плазменной волны электронами гало, но не текущее значение энергии, которая содержится в электронах гало. Например, взаимодействие электронов гало с электрическим полем снаружи плазмы тоже изменяет их энергию.

Очевидно, что зависимость  $\Upsilon_\Sigma(|\xi|)$  в среднем будет неубывающей (если двигаться по продольной оси в отрицательные значения  $\xi$ ), как минимум из-за электронов, которые после опрокидывания волны получают достаточную энергию, чтобы вылететь из плазмы. Количество таких электронов увеличивается по мере движения влево от начала окна, что дает в среднем постепенный рост как кривой  $\Upsilon_\Sigma$ , так и  $\Upsilon_{wb}$ . Иначе ведет себя зависимость  $\Upsilon_{ee}$ . По идее, она должна быть вообще постоянной, если исходить из соображений, что электроны после опрокидывания вылетают «как из шланга» (рис. 3.9(a)) и, соот-

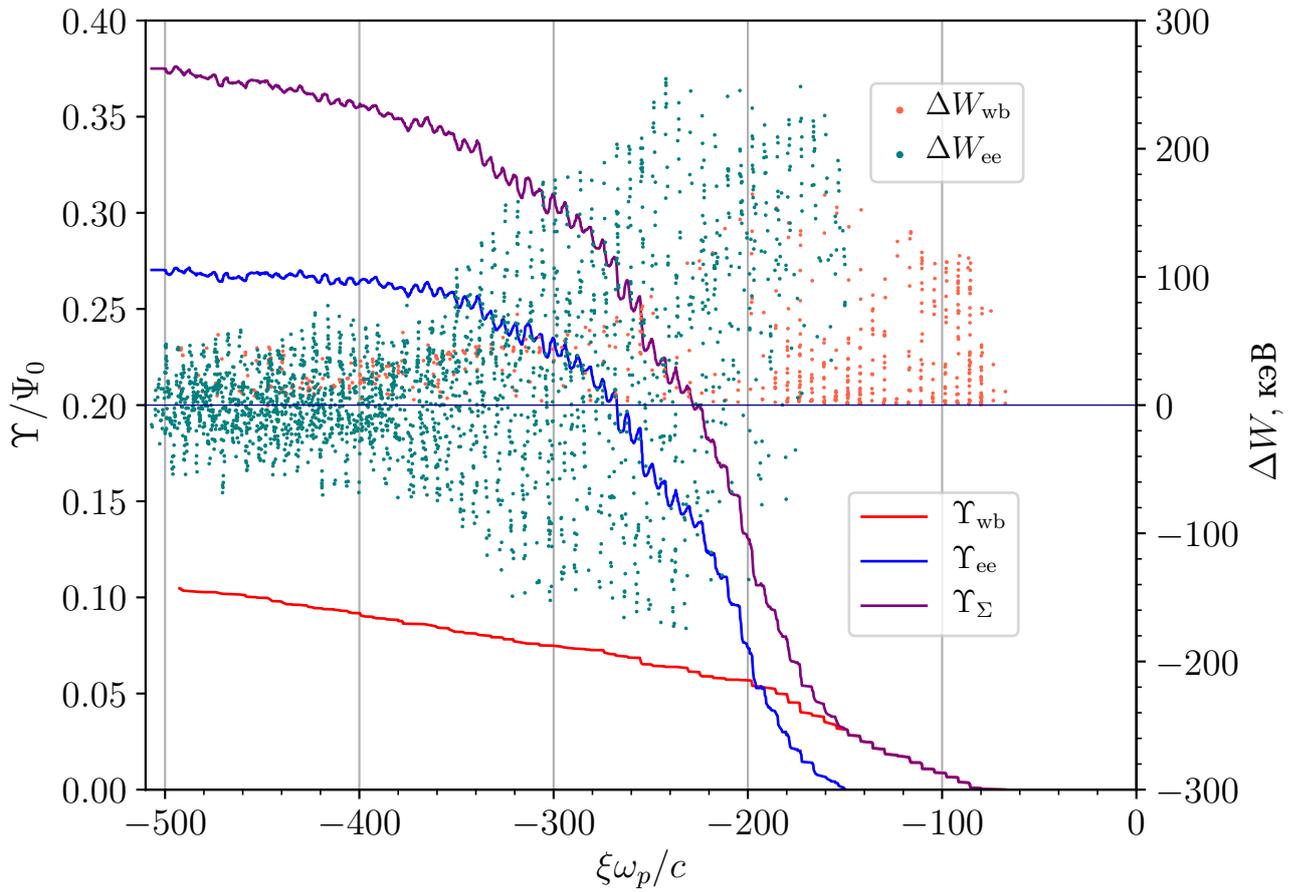


Рисунок 3.11 — Энергообмен с плазменной волной с точки зрения электронного гало. Красные точки — величина энергии  $\Delta W_{wb}$ , которую уносит из плазменной волны электрон, вылетающий впервые после опрокидывания волны. Бирюзовые точки — величина энергии  $\Delta W_{ee}$ , которую забирают из волны или отдают в волну возвращающиеся электроны во всех последующих пролетах через плазму. Красная, синяя и фиолетовая линия — величины  $\Upsilon_{wb}$ ,  $\Upsilon_{ee}$  и  $\Upsilon_{\Sigma}$ , соответственно

ответственно, возвращаясь в плазму, они в приосевой области попадают в случайные фазы кильватерной волны. Тогда в среднем должно быть, во-первых, одинаковое количество ускоренных и замедленных электронов, и, во-вторых, количество отнятой у плазменной волны энергии было бы равно количеству возвращенной энергии. Такое поведение величины  $\Upsilon_{ee}$  наблюдается в конце окна ( $\xi < -350c/\omega_p$ ), когда, вообще говоря, значение кильватерного потенциала уже уменьшается, и плазменная волна оказывается разрушенной. Однако до этого (с  $\xi = -180c/\omega_p$ ), когда первые вылетевшие электроны возвращаются обратно в плазму, наблюдается необычная асимметрия. Во-первых, электро-

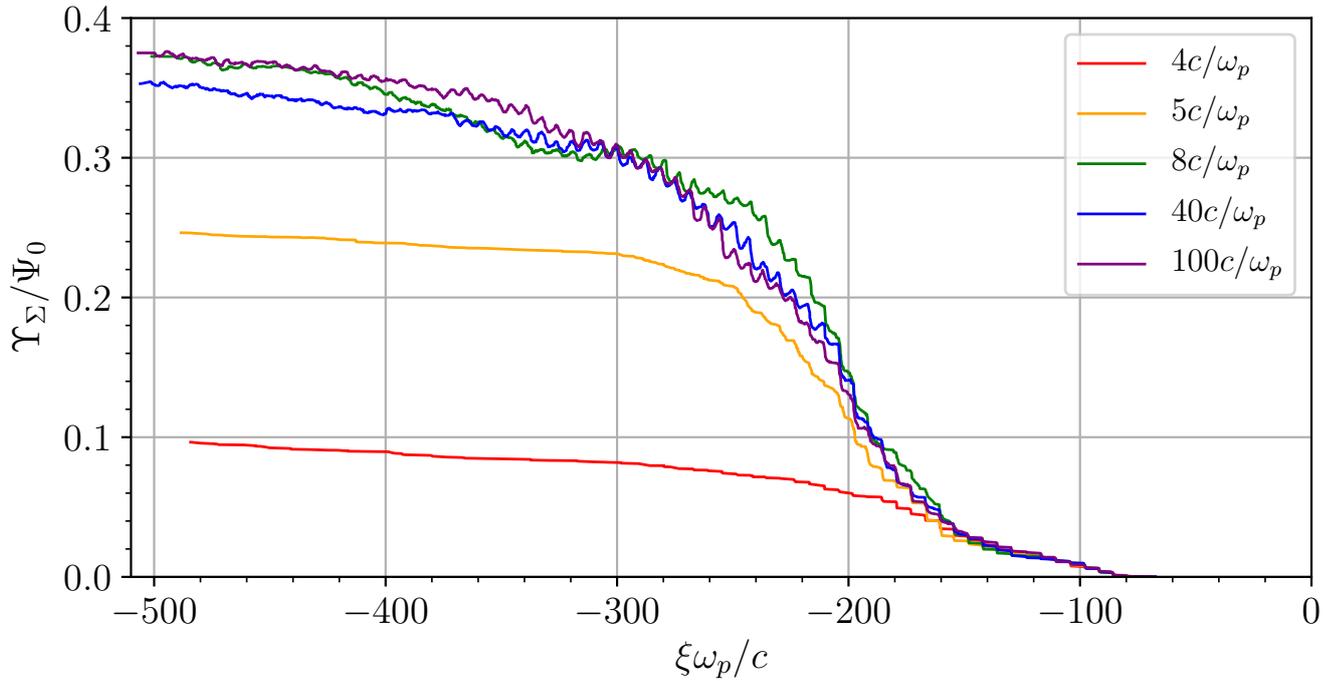


Рисунок 3.12 — Энергия, взятая электронами гало из плазменной волны, для численного моделирования с разным расстоянием для стенки  $r_{\max}$ , указанным на графике

нов, которые, ускоряясь, забирают из волны энергию, больше, чем замедляющихся электронов. Во-вторых, в среднем величина взятой из волны энергии за первый пролет электрона сквозь плазму больше, чем величина возвращенной в волну энергии.

Необходимо упомянуть также о зависимости величины  $\Upsilon_{\Sigma}$  от поперечного размера (ширины) окна моделирования. Как уже упоминалось ранее, моделирование узкого окна (то есть с близко расположенной границей счетной области к границе плазмы) «отключает» появление электронного гало и его влияние на плазменную волну. Однако результаты моделирования окон разной ширины (рис. 3.12) показывают, что уже при ширине счетной области, превышающей удвоенный радиус плазмы, поглощение энергии волны электронным гало ведет себя так же, как и в случае моделирования очень широкого окна (до  $25R_p$ ).

### 3.4.2. Энергетические процессы в плазменной волне

Для изучения энергетических процессов, происходящих в плазменной волне, воспользуемся анализом потоков энергии, описанных в разделе 1.2.

Сама плазменная волна занимает только некоторую приосевую область (по крайней мере, пока волна не разрушена). Информацию об энергетических процессах в плазменной волне тогда можно получить, если проинтегрировать потоки энергии, вычисляемые с помощью уравнений (1.49) – (1.50), только по области поперечного сечения окна моделирования, где есть волна. Для этого нужно локализовать плазменную волну, а именно определить радиус области, в пределах которой существуют плазменные колебания. Обнаружить эту область можно по плотности потока энергии, радиально взвешенная  $z$ -компонента  $2\pi r S_z$  которого представлена на рис. 3.13. Домножение на коэффициент  $2\pi r$  необходимо именно для корректной оценки энергии, содержащейся на данном радиусе, поскольку в данной работе двумерное моделирование проводится в осесимметричном случае.

В приосевой области (маркер '1' на рис. 3.13) хорошо видна энергия, которая содержится в плазменной волне (сумма энергии электромагнитных полей и кинетической энергии частиц плазмы). Также вблизи границы плазмы видна энергия, связанная с обратным током (маркер '2' на рис. 3.13), который компенсирует ток электронов гало, и энергия вылетающих из плазмы после опрокидывания волны электронов гало и возникающих из-за этого электромагнитных полей (маркер '3' на рис. 3.13). Поскольку групповая скорость плазменной волны очень мала, энергия волны остается там, где её передал в волну протонный драйвер. Тогда в качестве области локализации плазменной волны можно принять  $r = r_{wf} = 2c/\omega_p$ .

Потери энергии плазменной волны можно охарактеризовать разностью между общим потоком энергии  $\Psi_\Sigma$  (в котором учтены потери от быстрых электронов, которые успели долететь до стенки, как на рис. 1.1) и потоком энергии,

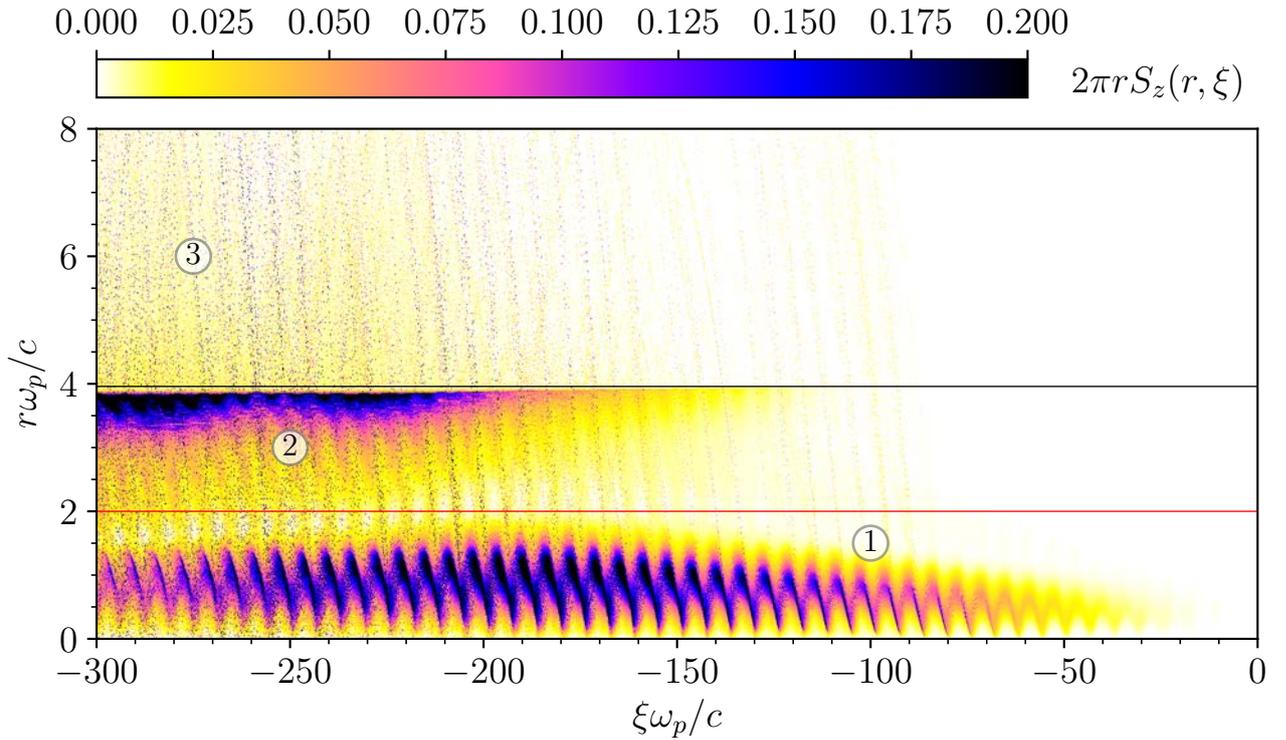


Рисунок 3.13 — Плотность потока энергии  $2\pi r S_z$  в окне моделирования. Черная горизонтальная линия на  $r = R_p = 3.96c/\omega_p$  соответствует границе плазмы. Красная горизонтальная линия на  $r = r_{wf} = 2c/\omega_p$  отделяет область плазменной волны от остальной плазмы

содержащейся именно в плазменной волне. Использование величины

$$\Psi_{\text{total}}(\xi) = \Psi(r_{\text{wf}}, \xi), \quad (3.3)$$

вычисленной по формуле (1.51) как поток энергии через сечение окна моделирования от 0 до  $r_{\text{wf}}$ , некорректно для анализа энергетических потерь плазменной волны, поскольку эта величина уже содержит в себе кинетическую энергию электронов гало. Эти электроны, вообще говоря, уже не являются частью плазменной волны, но, возвращаясь и пролетая плазму насквозь, они оказываются в приосевой области и дают вклад в величину  $\Psi_{\text{total}}$ . Однако, как известно, в линейной ленгмюровской волне энергия (обозначим для определенности её  $E_{\text{full}}$ ) в среднем поровну содержится в энергии электромагнитных полей  $E_{\text{em}}$  и кинетической энергии частиц плазмы  $E_{\text{kin}}$ :

$$\langle E_{\text{em}} \rangle = \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2} E_{\text{full}}. \quad (3.4)$$

Тогда для количественных оценок можно воспользоваться удвоенным значением потока электромагнитной энергии, посчитанного по области плазменной волны

$$\Psi_{\text{wf}}(\xi) = 2\Psi_{\text{em}}(r_{\text{wf}}, \xi), \quad (3.5)$$

а потери энергии плазменной волны можно оценить как

$$\Psi_{\text{loss}} = \Psi_{\Sigma} - \Psi_{\text{wf}}. \quad (3.6)$$

Поведение вышперечисленных потоков энергии как функций продольной координаты  $\xi$  представлено на рис. 3.14.

По мере того, как протонный драйвер раскачивает плазменную волну, то есть передает в плазму энергию, величина  $\Psi_{\Sigma}$  растет. Поначалу с ней совпадают и величины  $\Psi_{\text{total}}$  и  $\Psi_{\text{wf}}$ , ведь вся энергия поступает в плазменную волну. Чуть позже появляются первые быстрые электроны, которые уносят часть энергии из волны, потому эти величины начинают различаться. Важно отметить, что величина потерь энергии плазменной волной  $\Psi_{\text{loss}}$  достаточно хорошо качественно и количественно совпадает с величиной  $\Upsilon_{\Sigma}$ , характеризующей энергию, полученную электронным гало. Это означает, что разрушение плазменной волны связано с тем, что электроны гало именно уносят энергию из плазменной волны, а не забирают её в одном месте и возвращают в другом, как можно было бы предположить из рисунка 3.9(b), «сглаживая» плазменные колебания и «демпфируя» волну.

### 3.5. Линзирование кильватерной волной

В предыдущем разделе было установлено, что энергия плазменной волны уносится электронами гало. Картина траекторий электронов, вылетающих после опрокидывания волны, на рис. 3.9(a) указывает на то, что по возвращении в плазму эти электроны должны попадать в случайные фазы кильватерной

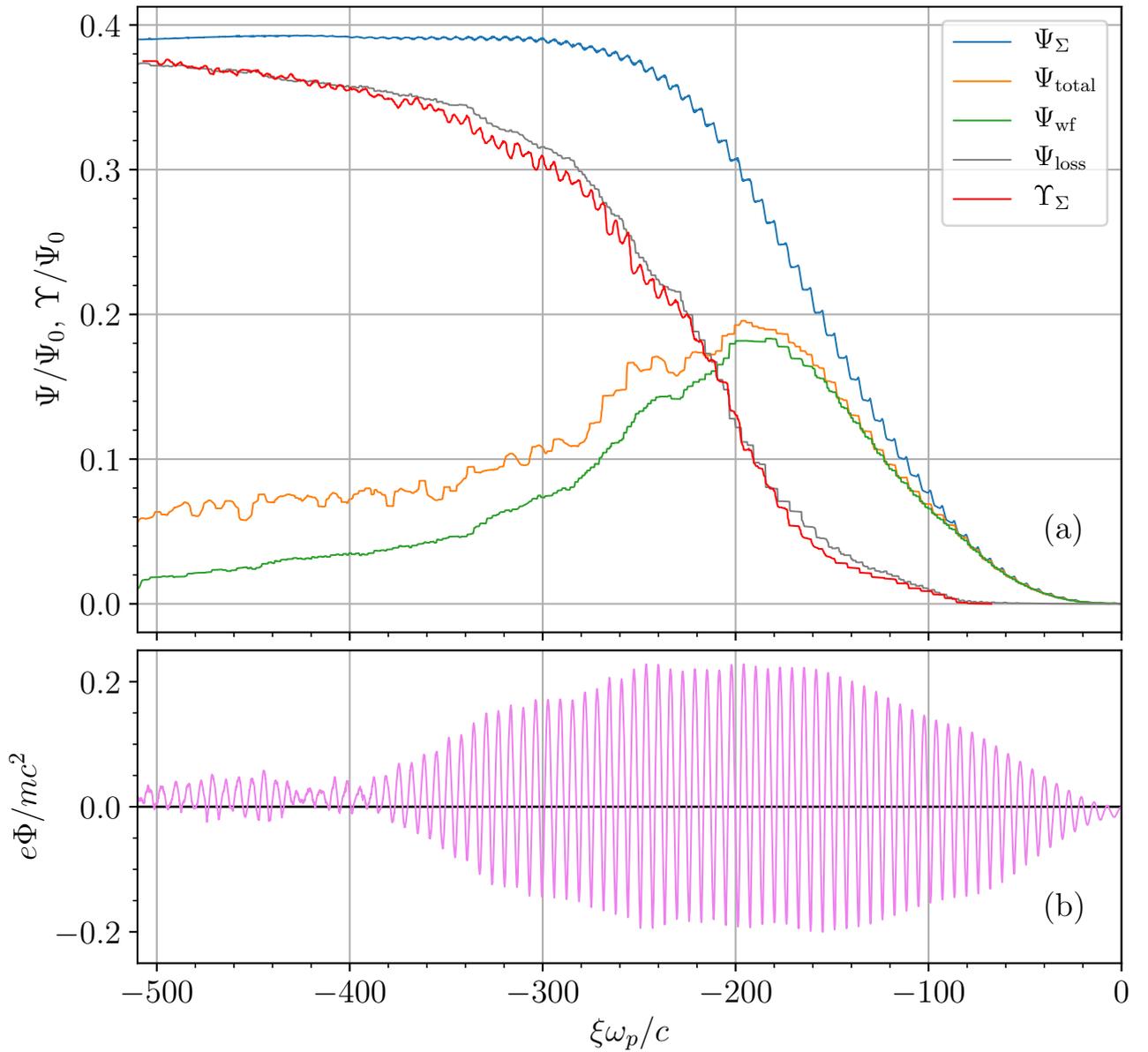


Рисунок 3.14 — Поток энергии как функции продольной координаты  $\xi$ .

Красная линия соответствует изменению энергии электронного гало, вычисленному по формуле (3.2). Для оценки масштабов по продольной координате  $\xi$  ниже приведен кильватерный потенциал  $\Phi$  на оси

волны и будут как ускоряться, так и замедляться, в среднем соблюдая баланс. Однако резкий рост величины  $\Upsilon_{ee}$  (и, следовательно,  $\Upsilon_{\Sigma}$ ) около  $\xi = -180c/\omega_p$  на рис. 3.11 указывает на наличие какого-то эффекта, который заставляет первые возвращающиеся в плазму электроны гало попадать именно в ускоряющую фазу кильватерной волны и преимущественно забирать энергию, чем возвращать её обратно в плазменную волну при замедлении.

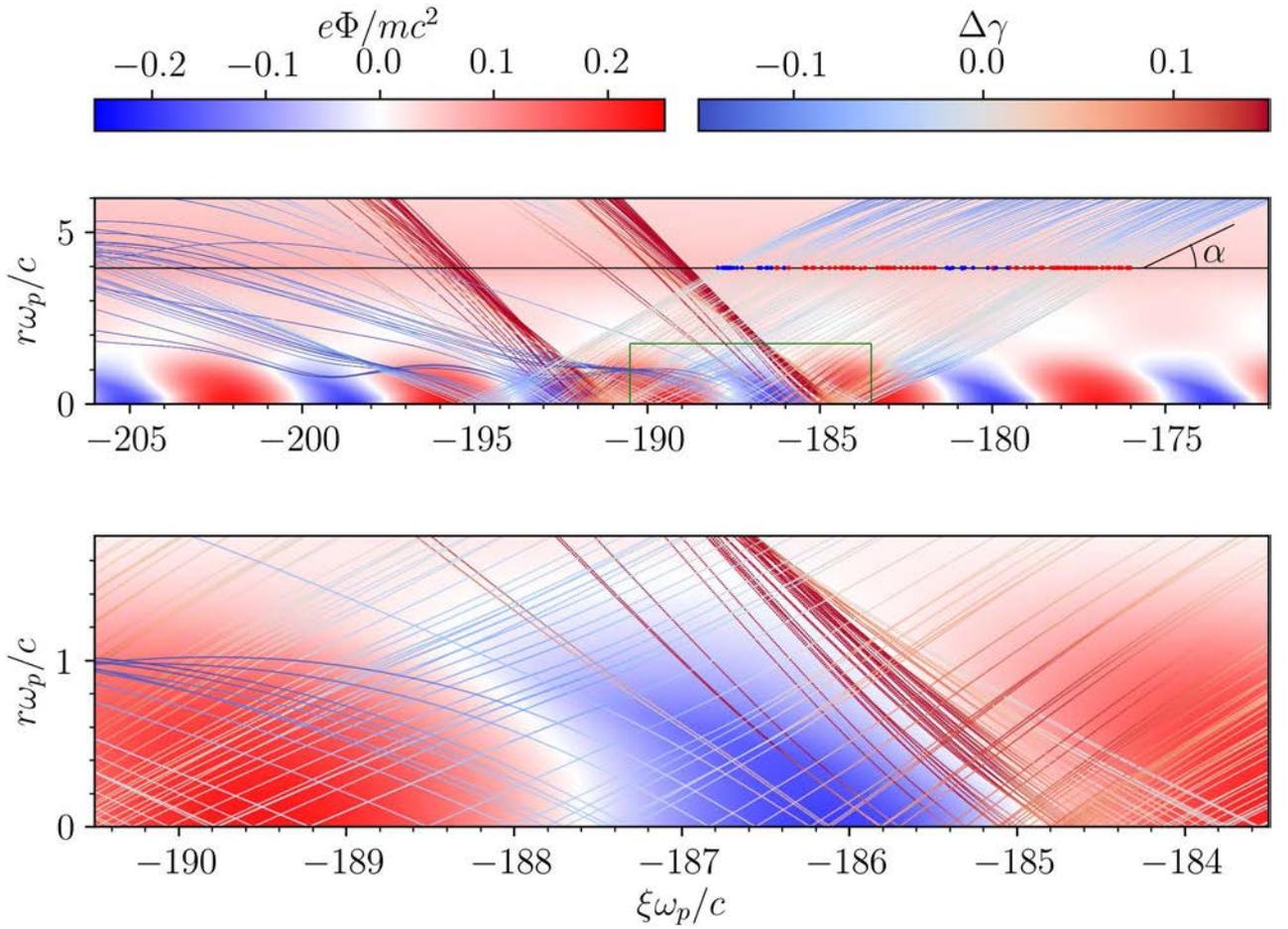


Рисунок 3.15 — Траектории электронов, влетающих в плазму около  $\xi = -180c/\omega_p$ . Нижнее изображение — выделенный зелёной рамкой фрагмент верхнего. Цветной фон соответствует кильватерному потенциалу  $\Phi$ . Черная линия — граница плазмы. Красные и синие точки на траекториях в месте их пересечения границы плазмы — пометки ускоренных или замедленных электронов, а цвет траектории — изменение  $\Delta\gamma$  релятивистского фактора электрона относительно его значения на входе в плазму

Для детального изучения этого явления рассмотрим траектории электронов гало, пролетающих плазму именно в этой области (около  $\xi = -185c/\omega_p$ ), но влетающих под некоторыми примерно одинаковыми углами  $\alpha$  (рис. 3.15). Из определения кильватерного потенциала (уравнения (2.2)) следует, что ускорение или замедление электронов происходит на градиентах кильватерного потенциала. Другими словами, на цветной карте кильватерного потенциала  $\Phi$  синие области для электронов являются потенциальными «горбами», красные — потенциальными «ямами», а ускорение или замедление будет происходить

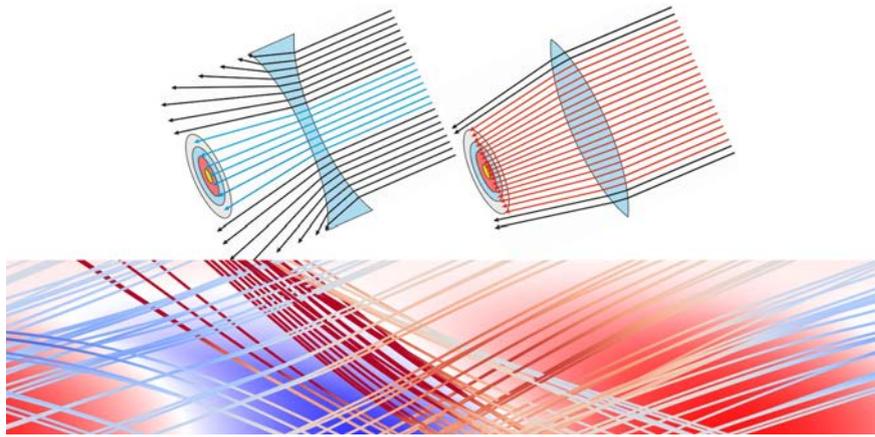


Рисунок 3.16 — К пояснению «линзирования» кильватерной волной

на «склоне» (то есть, на градиенте). Как видно из рис. 3.15, траектории, которые должны были бы попасть (если бы траектория была прямолинейная) на оси в область с наибольшим тормозящим градиентом (и где электроны вернули бы наибольшую энергию обратно в плазменную волну) отклоняются в стороны от этой области. Обратная ситуация наблюдается с траекториями, которые должны были бы попасть в окрестность области наибольшего ускоряющего градиента: они сходятся как можно ближе к этой области. В результате получается, во-первых, большее число электронов, которые ускоряются и забирают из плазменной волны энергию. Во-вторых, при ускорении электрона из волны забирается больше энергии, чем возвращается при замедлении, поскольку область наибольшего замедляющего градиента электроны «избегают», в отличие от области наибольшего ускоряющего градиента. Получается будто бы линзирование: плазменная волна представляется как последовательность фокусирующих и рассеивающих линз, направляющих траектории электронов в наибольшее ускоряющее поле и отклоняющих их от наибольшего замедляющего поля (рис. 3.16).

Под какими вообще углами  $\alpha$  влетают возвращающиеся в плазму электроны? Можно построить зависимость угла, под которым электрон пересекает границу плазмы, от продольной координаты  $\xi$ , где это происходит. Получающаяся зависимость представлена на рис. 3.17, из которого следует, что электроны,

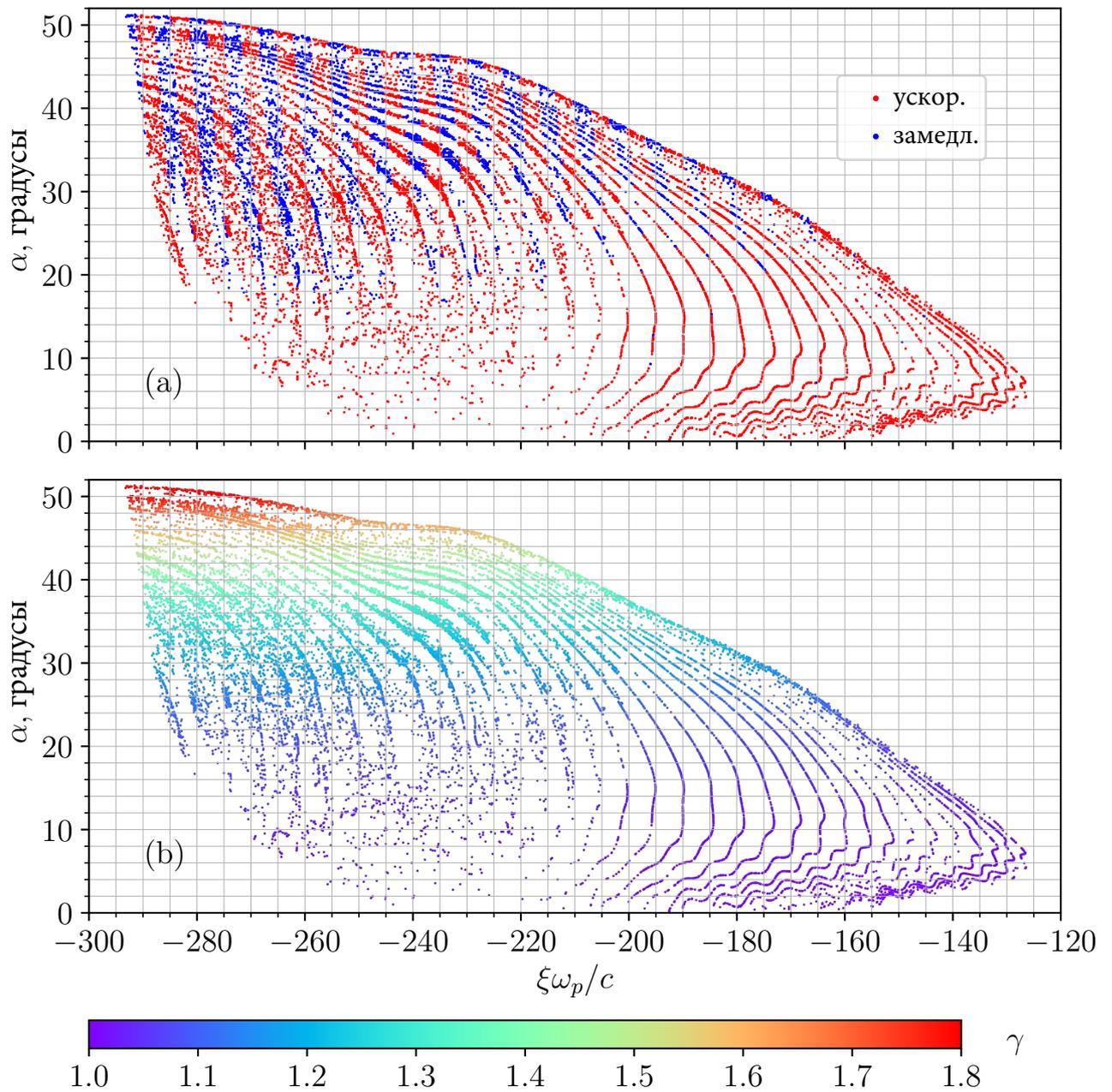


Рисунок 3.17 — Зависимость угла влета электрона в плазму от продольной координаты точки влета. (а) — цвет точки означает ускоренную частицу (красная точка) или замедленную частицу (синяя точка). (б) — цвет точки соответствует релятивистскому фактору  $\gamma$  на входе в плазму

влетающие под небольшими углами (менее 16 градусов к границе плазмы, в нижней части графика) только ускоряются, забирая энергию из волны.

Чтобы понять, почему так происходит, нужно сравнить поведение траекторий электронов, которые влетают в плазму примерно в одной точке, но под разными углами, и сравнить движение ускоряющихся и замедляющихся электронов. Пример пучка таких траекторий представлен на рис. 3.18. Радиальное

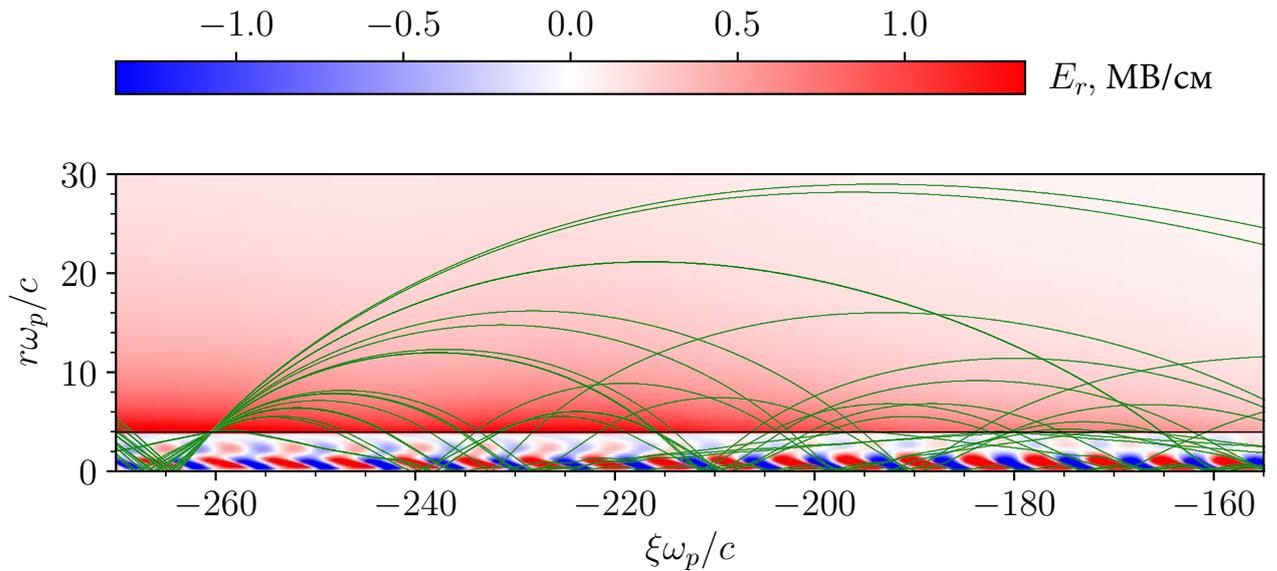


Рисунок 3.18 — Траектории электронов, влетающих в плазму при  $\xi \approx -260c/\omega_p$ . Цветовой фон соответствует радиальному электрическому полю  $E_r$  за границей плазмы, которая отмечена черной горизонтальной линией

электрическое поле вокруг плазменного столба увеличивается по мере того, как все больше электронов, формирующих электронное гало, покидают плазму (рис. 3.10). Ранее отмечалось, что из-за такого поведения поля электроны вылетают из плазмы при одном его значении, а возвращаются в плазму при гораздо большем значении. Это приводит к тому, что угол влета в плазму у таких электронов оказывается большим. Кроме того, такие электроны и из плазмы вылетели с большей энергией (дальше отлетели от плазмы), и энергии за счет ускорения в радиальном электрическом поле получили больше. Поэтому такие быстрые электроны пролетают приосевую область волны, практически никак не отклоняясь, то есть попадают в ту фазу волны, куда должны были бы попасть по прямолинейным траекториям. Из рис. 3.17(b) видно, что наибольшим углам влета соответствуют наибольшие энергии электронов.

Получается, что траектории электронов, влетающих в плазму под наибольшими углами, практически не подвергаются влиянию кильватерной волны в приосевой области. Посмотрим на пример таких траекторий на рис. 3.19(a). Действительно, эти электроны достаточно быстрые, чтобы долетать до оси почти по прямолинейным траекториям, не подвергаясь значительному откло-

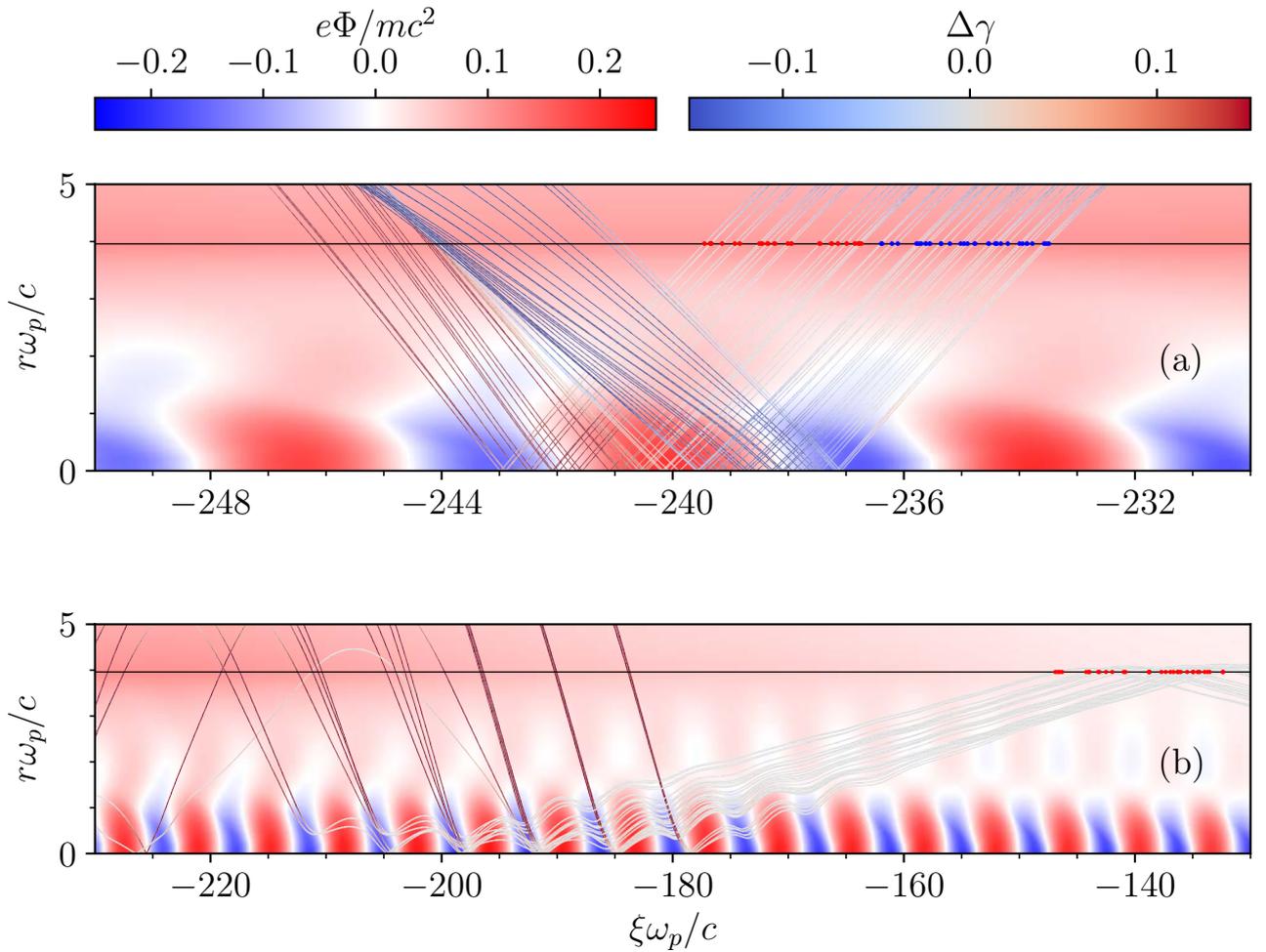


Рисунок 3.19 — Траектории высокоэнергичных (а) и низкоэнергичных (б) электронов гало, влетающих в плазму под примерно одинаковыми углами.

Цветной фон соответствует кильватерному потенциалу  $\Phi$ . Черная горизонтальная линия — граница плазмы. Красные и синие точки на траекториях в месте их пересечения границы плазмы — пометки ускоренных или замедленных электронов, а цвет траектории — изменение  $\Delta\gamma$  релятивистского фактора электрона относительно его значения на входе в плазму. Соотношение осей на рис.(b) сделано 1:4, чтобы траектории были лучше различимы

нению линзированием кильватерного потенциала. Поэтому количество ускоренных и замедленных электронов в целом получается примерно одинаковым, и наблюдается баланс по величине энергии, которую электроны гало забирают из волны или возвращают обратно (что объясняет постоянство величины  $\Upsilon_{ee}$  при  $\xi < -350c/\omega_p$  на рис. 3.11).

Теперь становится ясно, почему разрушение волны происходит из-за первых возвращающихся электронов. Они влетают в плазму под малыми углами, потому что после опрокидывания получили энергию, достаточную, только чтобы покинуть плазму, но не улететь далеко. Сильного влияния радиального электрического поля на себе они не испытали, потому что, во-первых, не вылетали из плазмы далеко, а во-вторых, в этот момент электрическое поле за границей плазмы еще не столь велико, чтобы сильно влиять на их движение. Поэтому эти электроны возвращаются в плазму со сравнительно низкой энергией (но достаточной, чтобы пролететь плазму насквозь) и легко отклоняются кильватерной волной именно в области ускоряющего градиента, где они дополнительно забирают из волны энергию и еще больше ускоряются (рис. 3.19(b)). С этим и связан наблюдаемый на рис. 3.11 около  $\xi = -180c/\omega_p$  резкий рост величины  $\Upsilon_{ee}$ , и следовательно,  $\Upsilon_{\Sigma}$ .

Может, однако, показаться, что, если волна разрушается именно этими первыми возвращающимися в плазму электронами, которые влетают под малыми углами (то есть не вылетали далеко), то этот эффект должен проявиться и в случае близко расположенной стенки. Однако в этом случае не будет моделироваться разлет электронного гало в широкой области вокруг плазмы, и, как следствие, не будет создаваться большое электрическое поле, придающее поперечный импульс вылетевшим электронам для скорого возвращения в плазму. Поэтому в случае узкого окна моделирования вылетевшие и потерявшие энергию и импульс после взаимодействия со стенкой электроны в отсутствие возвращающей силы влетают обратно в плазму по очень пологим траекториям, в перспективе попадая в приосевую область значительно позднее.

### 3.6. Основные результаты

В данной главе был изучен механизм разрушения плазменной волны электронным гало. Электронное гало образовано электронами, которые после опрокидывания плазменной волны получают достаточно энергии, чтобы покинуть радиально ограниченную плазму. С помощью анализа потоков энергии в окне моделирования было установлено, что в процессе разрушения плазменной волны её энергия именно уносится электронами гало, которые пролетают сквозь плазму. При этом непосредственно за разрушение ответственны электроны, энергии которых (полученной после опрокидывания волны) хватает, только чтобы пересечь границу плазмы, не улетая далеко. Тогда они почти сразу же возвращаются обратно в плазму, и кильватерная волна сама притягивает их в ускоряющую фазу волны. В результате этого электроны преимущественно ускоряются и забирают энергию из волны, уменьшая её амплитуду.

## Заключение

В данной работе с помощью численного моделирования квазистатистическим кодом LCODE изучались ограничения времени жизни плазменной волны и механизмы её разрушения в нескольких практических значимых конфигурациях. Эти вопросы очень критичны для задач плазменного кильватерного ускорения, поскольку проясняют, как долго плазменная волна будет существовать в конкретной точке плазмы, что важно для определения ограничений возможной области позади драйвера, в которой можно разместить витнесс для его ускорения. Код LCODE был дополнен функциональным блоком, вычисляющим эволюцию лазерного импульса в плазме в модели огибающей вектор-потенциала, что позволило моделировать лазерные драйверы, создающие плазменную волну и изменяющиеся в ходе лазер-плазменного взаимодействия. Важным инструментом в исследовании стал предложенный метод контроля потоков энергии в окне моделирования, с помощью которого можно отслеживать, куда и каким образом передается энергия в процессах, связанных с плазменной волной, а также обнаруживать появление быстрых электронов, которые при опрокидывании плазменной волны выбиваются из коллективного движения. Метод продемонстрировал, что встроенный в код LCODE лазерный решатель при условии разрешения лазерной длины волны продольным шагом сетки способен корректно моделировать истощение лазерных импульсов в плазме.

В частности, с помощью такого метода было изучено опрокидывание плазменной волны из-за движения ионов плазмы. Результаты численного моделирования позволили оценить время жизни кильватерной волны до разрушения её этим эффектом. Полученный результат имеет практическую важность для экспериментальной проверки идеи по генерации терагерцового излучения плазменными кильватерными волнами встречных лазерных импульсов, поскольку ограничивает возможную временную задержку или рассинхронизацию между двумя встречными лазерными импульсами.

Другим изученным механизмом, ограничивающим время жизни плазменной волны, стало взаимодействие электронного гало со слабонелинейной плазменной волной, образующейся в одном из вариантов эксперимента AWAKE на низкой плотности ( $2 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ). С помощью метода контроля потоков энергии был изучен энергообмен между электронами гало и плазменной волной и установлено, что энергия из плазменной волны уносится пролетающими сквозь плазму электронами гало. При этом плазменная волна оказывает линзирующий эффект на пролетающие в приосевой области электроны: она сама направляет их в ускоряющее поле, отклоняя от замедляющего. Непосредственно за разрушение волны ответственны именно первые возвращающиеся обратно в плазму электроны. Их энергия недостаточно высока, чтобы игнорировать линзирование, поэтому они преимущественно забирают из плазменной волны энергию в процессе ускорения, тем самым разрушая её. Этот эффект также накладывает дополнительное требование на размер окна моделирования: узкое окно не просто исключает электронное гало, а изменяет динамику кильватерной волны, поэтому пренебрегать этим эффектом в численном моделировании нельзя.

## Список литературы

- [1] Серый А.А., Серая Е.И. / Изобретая инструменты науки будущего. Ускоряющая науку ТРИЗ: Физика ускорителей, лазеров, плазмы. - Текст : непосредственный // Пер. с англ. - Москва : ЛЕНАНД, 2016. - 320 с. - ISBN 978-5-9710-3185-7.
- [2] E. Adli [и др.] / Acceleration of electrons in the plasma wakefield of a proton bunch. - Текст : электронный // Nature. - 2018. - Vol.561. - P. 363–367. - URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0485-4>. - Дата публикации: 29.08.2018.
- [3] C. Aniculaesei [и др.] / The acceleration of a high-charge electron bunch to 10 GeV in a 10-cm nanoparticle-assisted wakefield accelerator. - Текст: электронный // Matter and Radiation at Extremes. - 2024. - Vol.9. - P. 014001. - URL: <https://doi.org/10.1063/5.0161687>. - Дата публикации: 15.11.2023.
- [4] I. Blumenfeld, C. Clayton, F. Decker [и др.] / Energy doubling of 42 GeV electrons in a metre-scale plasma wakefield accelerator. - Текст : электронный // Nature. - 2007. - Vol.445. - P. 741–744. - URL: <https://doi.org/10.1038/nature05538>. - Дата публикации: 15.02.2007.
- [5] T. Tajima, J.M. Dawson / Laser Electron Accelerator. - Текст : электронный // Physical Review Letters. - 1979. - Vol.43. - P. 267. - URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.267>. - Дата публикации: 23.07.1979.
- [6] A. Picksley [и др.] / Matched Guiding and Controlled Injection in Dark-Current-Free, 10-GeV-Class, Channel-Guided Laser-Plasma Accelerators. - Текст : электронный // Physical Review Letters. - 2024. - Vol.133. - P. 255001. - URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.133.255001>. - Дата публикации: 18.12.2024.

- [7] P. Chen, J.M. Dawson, R.W. Huff [и др.] / Acceleration of Electrons by the Interaction of a Bunched Electron Beam with a Plasma. - Текст : электронный // Physical Review Letters. - 1985. - Vol.54. - P. 693. - URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.693>. - Дата публикации: 18.02.1985.
- [8] Березин А.К., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И. [и др.] / Экспериментальное исследование взаимодействия модулированных релятивистских пучков с плазмой. - Текст : электронный // Письма в ЖЭТФ. - 1971. - Т.13. - Стр. 498–503. - URL: [http://jetpletters.ru/ps/718/article\\_11122.pdf](http://jetpletters.ru/ps/718/article_11122.pdf). - Дата публикации: 05.05.1971.
- [9] A. Caldwell, K. Lotov, A. Pukhov [и др.] / Proton-driven plasma-wakefield acceleration. - Текст : электронный // Nature Physics. - 2009. - Vol.5. - P. 363–367. - URL: <https://doi.org/10.1038/nphys1248>. - Дата публикации: 12.04.2009.
- [10] N. Kumar, A. Pukhov, and K. Lotov / Self-Modulation Instability of a Long Proton Bunch in Plasmas. - Текст : электронный // Physical Review Letters. - 2010. - Vol.104. - P. 255003. - URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.255003>. - Дата публикации: 25.06.2010.
- [11] N. Moschuering , K.V. Lotov, K. Bamberg [и др.] / First fully kinetic three-dimensional simulation of the AWAKE baseline scenario. - Текст : электронный // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2019. – Vol. 61. – P. 104004. – URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6587/ab411e>. – Дата публикации: 18.09.2019.
- [12] K.V. Lotov / Simulation of ultrarelativistic beam dynamics in plasma wake-field accelerator. - Текст : электронный // Physics of Plasmas. - 1998. - Vol.5. - P. 785–791. - URL: <https://doi.org/10.1063/1.872765>. - Дата публикации: 01.03.1998.

- [13] K.V. Lotov / Fine wakefield structure in the blowout regime of plasma wakefield accelerators. - Текст : электронный // Physical Review Special Topics – Accelerators and Beams. - 2003. - Vol.6. - P. 061301. - URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.6.061301>. - Дата публикации: 06.06.2003.
- [14] A.P. Sosedkin and K.V. Lotov / LCODE: A parallel quasistatic code for computationally heavy problems of plasma wakefield acceleration. - Текст : электронный // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. - 2015. - Vol.829. - P. 350–352. - URL: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2015.12.032>. - Дата публикации: 23.12.2015.
- [15] Tuev P.V., Spitsyn R.I., Lotov K.V. / Advanced quasistatic approximation. – Текст : электронный // Plasma Physics Reports. – 2023. – Vol.49. – nr. 2. – P. 229–238. – URL: <https://doi.org/10.1134/S1063780X22601249>. – Дата публикации: 17.04.2023.
- [16] M.S. Dorozhkina, K.V. Baluev, D.D. Kutergin [и др.] / Laser Wakefield Acceleration in a Plasma Channel. – Текст : электронный // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. – 2023. – Vol.50. – Suppl. 6. – P. S715–S723. – URL: <https://doi.org/10.3103/S1068335623180057>. – Дата публикации: 07.10.2023
- [17] Kutergin D.D., Lotov I.K., Minakov V.A. [и др.] / Plasma Wakefield Acceleration Driven by XCELS Laser Pulse. – Текст : электронный // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2024. – Vol.21. – nr. 3. – P. 316–321. – URL: <https://doi.org/10.1134/S1547477124700183>. – Дата публикации: 07.06.2024.
- [18] R.I. Spitsyn, I.V. Timofeev, A.P. Sosedkin, and K.V. Lotov / Characterization of wavebreaking time and dissipation of weakly nonlinear wakefields due to ion

- motion. – Текст : электронный // Physics of Plasmas. – 2018. – Vol. 25. – nr. 4. – P. 103103. – URL: <https://doi.org/10.1063/1.5048549>. – Дата публикации: 03.10.2018.
- [19] R.I. Spitsyn, K.V. Lotov / Wakefield decay in a radially bounded plasma due to formation of electron halo. – Текст : электронный // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2021. – Vol.63. – nr. 5. – P. 055002. – URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6587/abe055>. – Дата публикации: 19.03.2021.
- [20] A.A. Gorn, M. Turner, E. Adli [и др.] / Proton beam defocusing in AWAKE experiment: comparison of simulations and measurement. – Текст : электронный // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2020. – Vol. 62. – nr. 12. – P. 125023. – URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6587/abc298>. – Дата публикации: 06.11.2020.
- [21] J. Chappell, E. Adli [и др.]. / Experimental study of long timescale dynamics of a plasma wakefield driven by a self-modulated proton bunch. – Текст : электронный // Physical Review Accelerators and Beams. – 2021. – Vol.24. – nr. 1. – P. 011301. – URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.011301>. – Дата публикации: 05.01.2021.
- [22] Р.И. Спицын / Численная реализация квазистатической модели лазерного драйвера для плазменного кильватерного ускорения. – Текст : электронный // Магистерская диссертация, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ). – Новосибирск, 2016. – URL: <https://lib.nsu.ru/xmlui/handle/nsu/11450>. – Дата публикации: 01.11.2016.
- [23] K.V. Lotov / Blowout regimes of plasma wakefield acceleration. – Текст : электронный // Physical Review E. – 2004. – Vol.69. – P. 046405. – URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.046405>. – Дата публикации: 27.04.2004.

- [24] I.Yu. Kargapolov, N.V. Okhotnikov, I.A. Shalimova [и др.] / Declustering of macroparticles in long-term simulations of plasma wakefield acceleration. - Текст : электронный // Physics of Plasmas. - 2025. - Vol.32. - P. 023905. - URL: <https://doi.org/10.1063/5.0251688>. - Дата публикации: 25.02.2025.
- [25] P. Mora, T.M. Antonsen / Kinetic modeling of intense, short laser pulses propagating in tenuous plasmas. - Текст : электронный // Physics of Plasmas. - 1997. - Vol.4. - P. 217–229. - URL: <https://doi.org/10.1063/1.872134>. - Дата публикации: 01.01.1997.
- [26] J. Crank and P. Nicolson / A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. - Текст : электронный // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. - 1947. - Vol.43. - P. 50–67. - URL: <https://doi.org/10.1017/S0305004100023197>. - Дата публикации: 01.01.1947.
- [27] А.А. Самарский, Е.С. Николаев / Методы решения сеточных уравнений. - Текст : непосредственный // Москва : Наука, 1978. – 592 с.
- [28] Н.Н. Яненко / Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. - Текст : непосредственный // Новосибирск : Наука, 1967. - 197 с.
- [29] Е.А. Хазанов, А.А. Шайкин, И.Ю. Костюков [и др.] / XCELS – Международный центр исследований экстремальных световых полей. - Текст : электронный // Квантовая электроника. - 2023. - Т.53. - nr.2. - P. 95–122. - URL: <https://quantum-electronics.ru/xcels-mezhdunarodnyj-centr-issledovaniy>. - Дата публикации: 18.12.2022.
- [30] I.V. Timofeev, V.V. Annenkov, and E.P. Volchok / Generation of highfield narrowband terahertz radiation by counterpropagating plasma wakefields.

- Текст : электронный // Physics of Plasmas. - 2017. - Vol.24. - P. 103106. - URL: <https://doi.org/10.1063/1.4993100>. - Дата публикации: 20.09.2017.
- [31] L.M. Gorbunov, P.Mora, and A.A. Solodov / Plasma ion dynamics in the wake of a short laser pulse. - Текст : электронный // Physical Review Letters. - 2001. - Vol.86. - P. 3332. - URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.3332>. - Дата публикации: 09.04.2001.
- [32] L.M. Gorbunov, P.Mora, and A.A. Solodov / Dynamics of a plasma channel created by the wakefield of a short laser pulse. - Текст : электронный // Physics of Plasmas. - 2003. - Vol.10. - P. 1124–1134. - URL: <https://doi.org/10.1063/1.1559011>. - Дата публикации: 01.04.2003.
- [33] J. Vieira, R.A. Fonseca, W.B. Mori [и др.] / Ion motion in selfmodulated plasma wakefield accelerators. - Текст : электронный // Physical Review Letters. - 2012. - Vol.109. - P. 145005. - URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.145005>. - Дата публикации: 05.10.2012.
- [34] J. Vieira, R.A. Fonseca, W.B. Mori [и др.] / Ion motion in the wake driven by long particle bunches in plasmas. - Текст : электронный // Physics of Plasmas. - 2014. - Vol.21. - P. 056705. - URL: <https://doi.org/10.1063/1.4876620>. - Дата публикации: 22.05.2014.
- [35] A. Caldwell [и др.] / Path to AWAKE: Evolution of the concept. - Текст : электронный // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. - 2015. - Vol.829. - P. 350–352. - URL: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2015.12.050>. - Дата публикации: 02.01.2016.
- [36] V.A. Minakov, A.P. Sosedkin and K.V. Lotov / Accelerating field enhancement due to ion motion in plasma wakefield accelerators. - Текст : электронный // Plasma Physics and Controlled Fusion. - 2019. - Vol.61. - P. 114003. -

- URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6587/ab41a7>. - Дата публикации: 02.10.2019.
- [37] V.A. Minakov and K.V. Lotov / Transformer ratio growth due to ion motion in plasma wakefield accelerators. - Текст : электронный // Physics of Plasmas. - 2024. - Vol.31. - P. 034503. - URL: <https://doi.org/10.1063/5.0197176>. - Дата публикации: 21.03.2024.
- [38] M. Turner [и др.] / Experimental Observation of Plasma Wakefield Growth Driven by the Seeded Self-Modulation of a Proton Bunch. - Текст : электронный // Physical Review Letters. - 2019. - Vol.122. - P. 054801. - URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.054801>. - Дата публикации: 08.02.2019.
- [39] J. Krall and G. Joyce / Transverse equilibrium and stability of the primary beam in the plasma wake-field accelerator. - Текст : электронный // Physics of Plasmas. - 1995. - Vol.2. - P. 1326–1331. - URL: <https://doi.org/10.1063/1.871344>. - Дата публикации: 01.04.1995.
- [40] D.H. Whittum / Transverse two-stream instability of a beam with a Bennett profile. - Текст : электронный // Physics of Plasmas. - 1997. - Vol.4. - P. 1154–1159. - URL: <https://doi.org/10.1063/1.872202>. - Дата публикации: 01.04.1997.
- [41] K.V. Lotov / Instability of long driving beams in plasma wakefield accelerators. - Текст : электронный // URL: <https://epaper.kek.jp/e98/PAPERS/MOP12E.PDF>. - Дата обращения: 22.07.2025.
- [42] P. Muggli [и др.] / AWAKE readiness for the study of the seeded self-modulation of a 400 GeV proton bunch. - Текст : электронный // Plasma Physics and Controlled Fusion. - 2018. - Vol.60. - P. 014046. - URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6587/aa941c>. - Дата публикации: 29.11.2017.

- [43] A. Caldwell, K. Lotov, A. Pukhov [и др.] / Plasma wakefield excitation with a 24 GeV proton beam. - Текст : электронный // Plasma Physics and Controlled Fusion. - 2018. - Vol.60. - P. 014046. - URL: <https://doi.org/10.1088/0741-3335/53/1/014003>. - Дата публикации: 16.12.2011.
- [44] K.V. Lotov, V.A. Minakov, and A.P. Sosedkin / Parameter sensitivity of plasma wakefields driven by self-modulating proton beams. - Текст : электронный // Physics of Plasmas. - 2014. - Vol.21. - P. 083107. - URL: <https://doi.org/10.1063/1.4892183>. - Дата публикации: 07.08.2014.