

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ ИМ. Г. И. БУДКЕРА  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

САЛЬНИКОВ СЕРГЕЙ ГЕОРГИЕВИЧ

**ПРИПОРОГОВЫЕ РЕЗОНАНСЫ  
В ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ**

1.3.3. Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант  
доктор физико-математических наук,  
профессор  
Мильштейн Александр Ильич

Новосибирск – 2026

# Оглавление

<b>Введение</b>		4
<b>Глава 1. Рождение адронных пар вблизи порога</b>		23
1.1.	Взаимодействие адронов в конечном состоянии	25
1.2.	Взаимодействие адронов в промежуточном состоянии	29
1.3.	Прямоугольная яма как модель взаимодействия	34
1.4.	Случай нескольких каналов реакции	42
<b>Глава 2. Рождение пар <math>\Lambda\bar{\Lambda}</math> и <math>\Lambda_c\bar{\Lambda}_c</math> в <math>e^+e^-</math> аннигиляции</b>		53
2.1.	Описание процесса $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$	53
2.2.	Описание процесса $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$	58
2.2.1.	Взаимодействие в конечном состоянии при наличии тензорных сил	59
2.2.2.	Сечение рождения $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$ в $e^+e^-$ аннигиляции	66
<b>Глава 3. Нуклон-антинуклонное взаимодействие</b>		72
3.1.	Описание процессов $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$ и $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$	72
3.1.1.	Сечения рождения $p\bar{p}$ и $n\bar{n}$ в $e^+e^-$ аннигиляции	74
3.1.2.	Сечения нуклон-антинуклонного рассеяния	77
3.1.3.	Модель $N\bar{N}$ взаимодействия и описание экспериментальных данных	78
3.2.	$N\bar{N}$ взаимодействие в промежуточном состоянии	86
<b>Глава 4. Рождение пары <math>N\bar{N}</math> в распадах <math>J/\psi</math> и <math>\psi(2S)</math></b>		94
4.1.	Распады $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma(\omega, \rho)$ и $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\gamma$	95
4.2.	Распады $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'\pi^+\pi^-$ и $J/\psi \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)\gamma$	102
4.3.	Распады $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$ и $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$	107

<b>Глава 5. Взаимодействие мезонов в конечном состоянии . . . . .</b>	118
5.1. Рождение $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ в $e^+e^-$ аннигиляции . . . . .	119
5.1.1. Теория рождения $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ в $e^+e^-$ аннигиляции . . . . .	119
5.1.2. Описание экспериментальных данных . . . . .	123
5.2. Рождение $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$ в $e^+e^-$ аннигиляции . . . . .	127
5.2.1. Описание процессов рождения $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$ в $e^+e^-$ аннигиляции . . . . .	127
5.2.2. Нарушение изотопической инвариантности в рождении пар $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$ . . . . .	132
<b>Заключение . . . . .</b>	136
<b>Список литературы . . . . .</b>	138

# Введение

## Актуальность темы исследования

Изучение свойств фундаментальных взаимодействий между элементарными частицами является важнейшей задачей современной физики. В частности, большой интерес представляет экспериментальное изучение деталей сильного взаимодействия между адронами на расстояниях  $\sim 1$  фм. Одной из причин такого интереса является то, что точные аналитические расчёты эффектов сильного взаимодействия при низких энергиях (менее 1 ГэВ) на сегодняшний день вызывают технические трудности из-за непертурбативного характера квантовой хромодинамики. Поэтому в большинстве случаев описание взаимодействия между адронами основано на различных феноменологических подходах. Для построения феноменологических моделей необходимо привлекать полученную из экспериментов информацию о сильном взаимодействии. Чем больше различных экспериментальных данных используется при создании модели, тем больше будет её предсказательная сила, что, в свою очередь, может быть полезно при планировании новых прецизионных экспериментов. В дальнейшем, говоря о низких энергиях, мы, как правило, будем подразумевать именно область кинетических энергий рождённых частиц менее 1 ГэВ.

Различные проявления сильного взаимодействия между адронами изучаются в самых разных процессах. К примеру, хорошо изучены процессы рассеяния нуклонов (протонов и нейтронов) друг на друге, а также пион-нуклонное рассеяние. Известно, что при низких энергиях кварковая структура адронов не играет определяющей роли, и процессы их взаимодействия можно описывать на языке мезонов и барионов (см. [1]). Для теоретического описания нуклон-нуклонного рассеяния при низких энергиях было предложено несколько феноменологических моделей, таких как неймегенский потенциал [2; 3], парижский потенциал [4], боннский потенциал [5; 6] и другие.

В последнее время большое внимание стало уделяться изучению и других процессов, в которых в конечном состоянии рождается пара барион-антибарион или мезон-антимезон. С одной стороны, появилось много экспериментальных данных для сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$ ,  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$ ,  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ ,  $e^+e^- \rightarrow D\bar{D}$  и других. Выяснилось, что зависимость сечений таких процессов от энергии вблизи порогов реакций зачастую имеет весьма нетривиальный характер. С другой стороны, теоретиками были предложены различные идеи, объясняющие наблюдаемые эффекты. Доминирующей идеей является важность учёта взаимодействия между адронами в конечном состоянии. Именно взаимодействие в конечном состоянии позволяет объяснить как резкий рост сечений на пороге реакций, так и наличие резонансных пиков или провалов в зависимости сечений от энергии.

В диссертации развивается подход к описанию взаимодействия между адронами в конечном состоянии. Обсуждается как общая идея метода, так и его применение ко многим конкретным процессам.

### **Степень разработанности темы исследования**

Безусловно, самым изученным из адронов является протон. Структура и свойства протона исследовались, в частности, в процессе рассеяния электронов на протонах (начиная с работ [7; 8]). Используя формулу Розенблюта [9], из измерений дифференциального сечения рассеяния электронов на протонах удалось извлечь электромагнитные формфакторы протона. Зная зависимость формфакторов от величины переданного при рассеянии импульса, можно, в свою очередь, определить характерный радиус протона. Такой способ измерения радиуса протона является одним из основных и сегодня.

Кроме того, проводились многочисленные эксперименты по протон-протонному и протон-нейтронному рассеянию при различных энергиях и переданных импульсах. Для теоретического описания полученных при низких энергиях данных были предложены различные потенциальные модели нуклон-нук-

лонного взаимодействия. В их число входят, например, неймегенский потенциал [2; 3], парижский потенциал [4], боннский потенциал [5; 6], потенциал, основанный на киральной кварковой модели [10]. Все подобные модели являются феноменологическими. При этом параметры модельных потенциалов подбираются так, чтобы наилучшим образом описывать имеющиеся экспериментальные данные для полных и дифференциальных сечений рассеяния. Затем, с использованием данных моделей можно вычислять другие величины, которые сложно наблюдать в экспериментах напрямую, такие как фазы рассеяния или зависящие от спинов вклады в сечения рассеяния.

С появлением экспериментальных данных по протон-антипротонному рассеянию стали развиваться модели нуклон-антинуклонного взаимодействия. Дополнительная сложность, по сравнению с нуклон-нуклонным рассеянием, состоит в том, что в таких процессах возможна аннигиляция исходных частиц в многочисленные мезонные состояния. При этом сечение аннигиляции сравнимо с сечением упругого рассеяния из-за большого числа доступных аннигиляционных каналов. Для феноменологического описания аннигиляции зачастую используют так называемые оптические потенциалы, содержащие минимую часть. Вещественную часть нуклон-антинуклонных потенциалов можно получить, применив преобразование  $G$ -сопряжения к известному нуклон-нуклонному потенциалу. Однако мнимая часть оптического потенциала может быть определена только из сравнения с экспериментальными данными по нуклон-антинуклонному рассеянию. Подобным образом были построены парижский [11; 12], неймегенский [13; 14], юлихский [15–17] нуклон-антинуклонные потенциалы. Развиваются также модели нуклон-антинуклонного взаимодействия в рамках киральной эффективной теории поля [18; 19] и модели конституентных夸克ов [20; 21].

Все упомянутые выше модели дают лишь феноменологическое описание имеющихся экспериментальных данных. При этом потенциалы нуклон-антинуклонного взаимодействия в рамках разных подходов имеют совершенно раз-

личную параметризацию. Параметры моделей выбираются так, чтобы наилучшим образом описать имеющиеся экспериментальные данные, включающие, как правило, полное и дифференциальное сечение упругого рассеяния, сечение процесса перезарядки  $p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}$ , сечение аннигиляции в мезоны и некоторые другие данные. Затем с использованием полученных моделей вычисляются другие характеристики нуклон-антинуклонного взаимодействия, которые затруднительно напрямую измерить в эксперименте. По этой причине разные модели зачастую одинаково хорошо описывают те свойства взаимодействия, которые измеряются экспериментально, однако, дают существенно разные предсказания для тех характеристик, которые в экспериментах ещё не измерялись. К примеру, все нуклон-антинуклонные потенциалы хорошо воспроизводят вклады в сечения нуклон-антинуклонного рассеяния, не зависящие от спинов частиц. Однако предсказания для зависящих от спинов вкладов в сечения нуклон-антинуклонного рассеяния, полученные в рамках разных моделей, значительно отличаются друг от друга [22–24]. Поэтому на сегодняшний день трудно предсказать ожидаемое время поляризации антипротонного пучка методом фильтрации на поляризованной мишени [25].

Влияние нуклон-антинуклонного взаимодействия проявляется не только в рассеянии, но и в процессах с рождением нуклон-антинуклонной пары из других начальных состояний. К примеру, была обнаружена резкая зависимость от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  [26–37] и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$  [38–42] вблизи порогов этих реакций. Самое естественное объяснение этого эффекта — нуклон-антинуклонное взаимодействие в конечном состоянии. Заметим, что на важность учёта взаимодействия между частицами в конечном состоянии в разных процессах указывалось ещё в середине прошлого века, например, в работах [43; 44]. Резонансная форма зависимости вероятности процесса от инвариантной массы пары  $p\bar{p}$ , связанная с их взаимодействием, также наблюдается в распадах  $\psi$ - и  $B$ -мезонов [45–63]. Подобные процессы представляют собой ещё один источник информации о свойствах нуклон-антинуклонного взаимодействия.

имодействия. Если в процессе рассеяния нуклона на антинуклоне измеряется нуклонный формфактор в пространственноподобной области передач импульса, то в процессах с рождением нуклон-антинуклонных пар можно измерять формфакторы во времениподобной области. Кроме того, как будет показано в дальнейшем, взаимодействие в конечном состоянии зависит от волновой функции системы на малых расстояниях, в то время как свойства рассеяния определяются поведением волновой функции системы на больших расстояниях.

С развитием экспериментальных возможностей выяснилось, что эффекты взаимодействия в конечном состоянии наблюдаются и в процессах с рождением пар других частиц. Речь идёт как о парах барион-антибарион ( $\Lambda\bar{\Lambda}$ ,  $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  и других [64–74]), так и о парах мезон-антимезон ( $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ ,  $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  и других [75–84]). Оказалось, что в таких процессах также наблюдается нетривиальная зависимость сечений от энергии вблизи порогов реакций, причём зачастую эта зависимость имеет резонансный характер. При этом форма наблюдаемых резонансных пиков не описывается формулами Брейта-Вигнера. Однако для объяснения результатов экспериментов не обязательно предполагать существование новых резонансов. Взаимодействие адронов в конечном состоянии само по себе может приводить к нетривиальной зависимости сечений от энергии, что объясняет множество эффектов, наблюдаемых в экспериментах.

Ещё одним интересным эффектом является резкая зависимость от энергии сечений рождения лёгких мезонов вблизи порога рождения пары адронов. К примеру, в экспериментах было обнаружено быстрое падение сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$ ,  $e^+e^- \rightarrow 2(\pi^+\pi^-\pi^0)$  и некоторых других вблизи порога рождения нуклон-антинуклонных пар [34; 85–89]. Такие эффекты объясняются рождением вблизи порога виртуальной нуклон-антинуклонной пары с последующей аннигиляцией в мезоны. Взаимодействие нуклона с антинуклоном в промежуточном состоянии приводит к сильной зависимости сечений таких процессов от энергии.

Таким образом, целый ряд припороговых резонансных явлений, наблю-

даемых на эксперименте, оказывается связан со взаимодействием адронов в промежуточном или конечном состоянии. Поэтому и теоретическое, и экспериментальное изучение процессов, в которых проявляются припороговые резонансы, представляет огромный интерес. Недаром в монографии [90] было отмечено, что «изучение формы пороговых аномалий в сечениях позволяет получить много информации о свойствах системы».

Механизм рождения пары адронов можно объяснить следующим образом. На малых расстояниях  $r \sim 1/\sqrt{s}$ , где  $\sqrt{s}$  — суммарная энергия в системе центра масс, рождается кварк-антикварковая пара. По мере разлёта кварков, на больших расстояниях  $r \sim 1/\Lambda_{\text{КХД}}$ , происходит образование адронов (адронизация). В дальнейшем образовавшаяся адронная система может описываться некоторой волновой функцией. Свойства родившейся кварк-антикварковой пары определяются величиной параметром  $\sqrt{s}$ , который мало меняется в припороговой области энергий. Волновая функция системы адронов, напротив, может меняться существенно вблизи порога. Это происходит из-за того, что скорости рождающихся адронов в таком случае малы, а значит адроны взаимодействуют между собой продолжительное время, что приводит к сильному изменению волновой функции. Поэтому резонансная энергетическая зависимость сечений процессов определяется, в первую очередь, именно волновой функцией адронной системы.

Из общего курса квантовой механики известно (см., например, [91], §132), что при рассеянии медленных частиц, имеющих большую длину волны по сравнению с размером потенциала, тонкие детали взаимодействия не являются важными. А именно, сечение рассеяния медленных частиц выражается через небольшое число параметров, таких как длина рассеяния и эффективный радиус взаимодействия. Это утверждение справедливо и при описании припороговых резонансов в системе адронов, поскольку резонансная зависимость сечений таких процессов от энергии зачастую также определяется небольшим числом параметров. Общие закономерности, которым должны подчиняться се-

чения реакций вблизи порога, были выяснены ещё в работах [92—94]. Кроме того, в работах [95; 96] рассматривалась зависимость сечений от энергии ниже порога при наличии связанных состояний, а также при наличии нестабильного квазистационарного состояния выше порога.

Благодаря наличию малого числа важных параметров, необходимых для описания припороговых резонансов, можно использовать различные феноменологические модели. Если разные модели дают близкие значения ключевых параметров, то и предсказываемые этими моделями зависимости сечений процессов от энергии будут находиться в согласии между собой. Поэтому разными группами развиваются разные подходы к описанию взаимодействия в конечном состоянии. Одни авторы используют потенциалы взаимодействия в импульсном представлении и находят амплитуды процессов, решая уравнение Липпмана-Швингера (см., например, [18; 97–102]). Другие авторы используют подход Ватсона-Мигдала [103], параметризуют  $K$ -матрицу рассеяния [104; 105] или используют разложение эффективного радиуса для амплитуды [106] и определяют значения параметров из сравнения результатов вычислений с экспериментальными данными. Были попытки вычислить поправки к амплитуде рождения пары  $p\bar{p}$ , рассматривая обмен пионом в одной петле [107]. В некоторых работах резонансные вклады в амплитуду процесса вблизи порога описываются суммой функций Брейта-Вигнера (см., например, [108–110]), несмотря на то, что такое описание припороговых резонансов является неправомерным.

Предложенный в диссертации подход заключается в параметризации потенциала взаимодействия между адронами в координатном представлении и нахождении соответствующей волновой функции пары адронов путём решения уравнения Шрёдингера. Преимуществом такого подхода является то, что он позволяет наглядно интерпретировать полученные потенциалы взаимодействия, рассматривать многоканальные задачи, а также легко учитывать такие эффекты как вклад кулоновского потенциала, нарушение изотопической инвариантности и другие. В последующих главах будет рассмотрено применение

этого подхода к описанию припорогового поведения сечений в различных процессах.

**Целями диссертационной работы являются:**

1. Развитие подхода к описанию взаимодействия между адронами в конечном и промежуточном состояниях в области низких энергий.
2. Описание зависимости от энергии сечений рождения пар  $p\bar{p}$ ,  $n\bar{n}$ ,  $\Lambda\bar{\Lambda}$ ,  $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  в электрон-позитронной аннигиляции вблизи порогов.
3. Описание зависимости от энергии сечений рождения состояний 3 ( $\pi^+\pi^-$ ), 2 ( $\pi^+\pi^-\pi^0$ ) и  $K^+K^-\pi^+\pi^-$  в электрон-позитронной аннигиляции вблизи порога рождения нуклон-антинуклонных пар.
4. Описание распределений по инвариантной массе пары  $p\bar{p}$  в распадах  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma(\pi^0, \eta, \omega)$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\gamma(\pi^0, \eta)$  вблизи порога рождения  $p\bar{p}$ .
5. Описание зависимости от энергии сечений рождения пар  $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$  и  $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  в электрон-позитронной аннигиляции вблизи порогов.

Для достижения поставленных целей были **решены следующие задачи**:

1. Разработка способа вычисления амплитуд процессов с учётом взаимодействия в конечном состоянии.
2. Получение формулы для вычисления сечений рождения пар адронов в электрон-позитронной аннигиляции в случае одного и нескольких каналов реакции с учётом взаимодействия в конечном состоянии.
3. Получение формулы для вычисления сечений рождения пар адронов с учётом тензорных сил, действующих между ними.

4. Построение моделей взаимодействия между  $\Lambda$  и  $\bar{\Lambda}$ , а также  $\Lambda_c$  и  $\bar{\Lambda}_c$ , объясняющих зависимости от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  и  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  вблизи порогов.
5. Построение модели нуклон-антинуклонного взаимодействия, объясняющей зависимости от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$  вблизи порогов, а также зависимости от энергии электромагнитных формфакторов протона и нейтрона во времениподобной области.
6. Описание зависимости от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$ ,  $e^+e^- \rightarrow 2(\pi^+\pi^-\pi^0)$  и  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$  вблизи порога рождения нуклон-антинуклонных пар с использованием предложенной модели нуклон-антинуклонного взаимодействия.
7. Описание распределений по инвариантной массе  $p\bar{p}$  в распадах  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma(\pi^0, \eta, \omega)$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\gamma(\pi^0, \eta)$  с учётом нуклон-антинуклонного взаимодействия в конечном состоянии.
8. Разработка модели взаимодействия между  $D^{(*)}$  и  $\bar{D}^{(*)}$  мезонами, объясняющей зависимости от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow D\bar{D}$ ,  $e^+e^- \rightarrow D^*\bar{D}$  и  $e^+e^- \rightarrow D^*\bar{D}^*$  вблизи порогов.
9. Построение модели взаимодействия между  $B^{(*)}$  и  $\bar{B}^{(*)}$  мезонами, объясняющей зависимости от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow B\bar{B}$ ,  $e^+e^- \rightarrow B^*\bar{B}$  и  $e^+e^- \rightarrow B^*\bar{B}^*$  вблизи порогов.

## Научная новизна

1. Впервые предложен последовательный подход к вычислению эффектов взаимодействия в конечном состоянии в процессах с рождением пары адронов. Подход основан на решении уравнения Шрёдингера в координатном представлении.

2. Впервые проведён правильный учёт поправки к сечению рождения пары адронов за счёт кулоновского взаимодействия между заряженными адронами на фоне сильного взаимодействия.
3. Впервые предложен способ учёта влияния взаимодействия между виртуальными адронами в промежуточном состоянии вблизи порога рождения пары реальных адронов на сечения процессов с рождением других частиц.
4. Впервые получена простая аналитическая формула, хорошо описывающая зависимость от энергии сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  с учётом взаимодействия в конечном состоянии.
5. Впервые предложена модель взаимодействия между  $\Lambda_c$  и  $\bar{\Lambda}_c$ , описывающая экспериментальные данные детектора BESIII для сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  и отношения  $|G_E/G_M|$  для  $\Lambda_c$ -бариона.
6. Впервые предложена модель нуклон-антинуклонного взаимодействия в конечном состоянии, учитывая разницу масс протона и нейтрона, а также кулоновское взаимодействие между протоном и антiproтоном, хорошо воспроизводящая зависимость от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$  вблизи порогов, а также отношений электромагнитных формфакторов для протона и для нейтрона во времениподобной области.
7. Впервые удалось описать резкое падение сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$ ,  $e^+e^- \rightarrow 2(\pi^+\pi^-\pi^0)$  и  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$  вблизи порога рождения нуклон-антинуклонных пар влиянием взаимодействия между виртуальными нуклоном и антинуклоном в промежуточном состоянии.
8. Впервые предсказаны угловые распределения в распадах  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$  с учётом нуклон-антинуклонного взаимодействия в

конечном состоянии.

9. Впервые объяснена нетривиальная зависимость от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow B\bar{B}$ ,  $e^+e^- \rightarrow B^*\bar{B}$  и  $e^+e^- \rightarrow B^*\bar{B}^*$  вблизи порогов, связанная со взаимодействием  $B^{(*)}$ -мезонов в конечном состоянии и переходами между разными каналами.
10. Впервые изучено взаимодействие  $D^{(*)}$ -мезонов в каналах  $D^0\bar{D}^0$ ,  $D^+D^-$ ,  $D^{*0}\bar{D}^0$ ,  $D^{*+}D^-$ ,  $D^{*0}\bar{D}^{*0}$  и  $D^{*+}\bar{D}^{*-}$ , и дано объяснение нетривиальной зависимости от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow D\bar{D}$ ,  $e^+e^- \rightarrow D^*\bar{D}$  и  $e^+e^- \rightarrow D^*\bar{D}^*$  вблизи порогов.

## Теоретическая и практическая значимость

В диссертационной работе на многих примерах показана важность учёта взаимодействия в конечном состоянии при описании сечений процессов с рождением пары адронов вблизи порога. Развит метод расчёта эффектов взаимодействия в конечном состоянии, основанный на решении уравнения Шрёдингера в координатном представлении. Такой подход представляется не только наиболее наглядным по сравнению с другими подходами, но и удобен при рассмотрении сложных многоканальных задач. Проведённые аналитические и численные расчёты показали, что во всех изученных экспериментально процессах взаимодействие между адронами в конечном состоянии объясняет резкую припороговую зависимость сечений от энергии. Речь идёт, например, о таких процессах как  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$ ,  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$ ,  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ ,  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$ ,  $e^+e^- \rightarrow B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  и  $e^+e^- \rightarrow D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ . При этом зависимость сечений таких процессов от энергии вблизи порогов определяется небольшим числом параметров, а конкретные детали взаимодействия не играют определяющей роли. В работе также предложен способ учёта влияния взаимодействия между виртуальными адронами в промежуточном состоянии на сечения процессов с рождением лёгких мезонов. Развитые в работе идеи могут быть использованы в дальнейшем при описании

многих других процессов в физике элементарных частиц.

Представленные в работе результаты показывают, что исследование зависимости от энергии сечений процессов с рождением пар адронов вблизи порога может дать уникальную информацию о взаимодействии между адронами. Проведённые расчёты могут послужить стимулом для последующего теоретического и экспериментального изучения наиболее интересных диапазонов энергии и обнаружения нетривиального поведения сечений различных процессов.

## **Методология и методы исследования**

В работе использовались аналитические и численные методы решения уравнения Шрёдингера, а также систем уравнений Шрёдингера для нескольких каналов. Для подбора оптимальных параметров потенциалов взаимодействия между адронами использовались различные процедуры оптимизации. В том числе, мной были разработаны специальные программы, предназначенные для численного решения различных задач, рассматриваемых в данной диссертации. Для проверки результатов вычислений большинство расчётов повторялись с использованием разных языков программирования.

## **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Учёт взаимодействия в конечном состоянии является критически важным при описании сечений процессов с рождением пары медленных адронов вблизи порога.
2. Зависимость сечений процессов от энергии, связанная со взаимодействием в конечном состоянии определяется небольшим числом параметров, таких как энергии мелких и виртуальных уровней.
3. Взаимодействие между  $\Lambda_{(c)}$  и  $\bar{\Lambda}_{(c)}$  в конечном состоянии объясняет сильную зависимость от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  и  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  вблизи порогов.

4. Нуклон-антинуклонное взаимодействие в конечном состоянии объясняет нетривиальную зависимость от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$  вблизи порогов, а также зависимость от энергии отношений электромагнитных формфакторов для протона и для нейтрона во времениподобной области.
5. Взаимодействие виртуальных нуклона и антинуклона в промежуточном состоянии объясняет резкое падение сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$ ,  $e^+e^- \rightarrow 2(\pi^+\pi^-\pi^0)$  и  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$  вблизи порога рождения реальных нуклон-антинуклонных пар.
6. Нуклон-антинуклонное взаимодействие в конечном состоянии объясняет сильную зависимость от инвариантной массы  $p\bar{p}$  вероятностей распадов  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma(\pi^0, \eta, \omega)$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\gamma(\pi^0, \eta)$  вблизи порога рождения  $p\bar{p}$ .
7. Взаимодействие между  $B^{(*)}$  и  $\bar{B}^{(*)}$  мезонами с учётом переходов между каналами  $B\bar{B}$ ,  $B^*\bar{B}$  и  $B^*\bar{B}^*$  объясняет нетривиальную зависимость от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow B\bar{B}$ ,  $e^+e^- \rightarrow B^*\bar{B}$  и  $e^+e^- \rightarrow B^*\bar{B}^*$  вблизи порогов. Учёт этого взаимодействия необходим при измерении разницы масс заряженных и нейтральных  $B^{(*)}$ -мезонов.
8. Взаимодействие между  $D^{(*)}$  и  $\bar{D}^{(*)}$  мезонами с учётом переходов между каналами  $D^0\bar{D}^0$ ,  $D^+D^-$ ,  $D^{*0}\bar{D}^0$ ,  $D^{*+}D^-$ ,  $D^{*0}\bar{D}^{*0}$  и  $D^{*+}D^{*-}$  объясняет нетривиальную зависимость от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow D^0\bar{D}^0$ ,  $e^+e^- \rightarrow D^+D^-$ ,  $e^+e^- \rightarrow D^{*0}\bar{D}^0$ ,  $e^+e^- \rightarrow D^{*+}D^-$ ,  $e^+e^- \rightarrow D^{*0}\bar{D}^{*0}$  и  $e^+e^- \rightarrow D^{*+}D^{*-}$  вблизи порогов.

## Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность работы подтверждается хорошим согласием теоретических предсказаний с результатами экспериментов. Результаты исследований, пред-

ставленные в диссертационной работе, опубликованы в ведущих международных журналах и докладывались на 5 ведущих научных конференциях:

1. Международная сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН, посвящённая 60-летию ОИЯИ, Россия, Дубна, 2016;
2. Международная сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН, посвящённая 50-летию Баксанской нейтринной обсерватории, Россия, Нальчик, 2017;
3. International Conference on Exotic Atoms and Related Topics (EXA2017), Австрия, Вена, 2017;
4. The 2024 International Workshop on Future Tau Charm Facilities (FTCF2024), Китай, Хэфэй, 2024;
5. Сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН, посвящённая 70-летию В.А. Рубакова, Россия, Москва, 2025.

## Публикации

Основные результаты диссертационного исследования получены в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте ядерной физики им. Г.И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук в 2014–2024 годах. Материалы диссертации опубликованы в 16 работах, из них 14 статей в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК [111–124], 2 статьи в сборниках трудов конференций [125; 126].

### Работы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России:

1. Isoscalar amplitude dominance in  $e^+e^-$  annihilation to  $N\bar{N}$  pair close to the threshold // Physics of Atomic Nuclei. — 2014. — Vol. 77, no. 9. — P. 1173–1177. — DOI: 10.1134/S1063778814080043.

2. *Dmitriev V. F., Milstein A. I., Salnikov S. G.* Real and virtual  $N\bar{N}$  pair production near the threshold // *Physical Review D*. — 2016. — Vol. 93, no. 3. — P. 034033. — DOI: 10.1103/PhysRevD.93.034033.
3. *Dmitriev V. F., Milstein A. I., Salnikov S. G.* Angular distributions in  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$  decays // *Physics Letters B*. — 2016. — Vol. 760. — P. 139–142. — DOI: 10.1016/j.physletb.2016.06.056.
4. *Milstein A. I., Salnikov S. G.* Interaction of real and virtual  $p\bar{p}$  pairs in  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma(\rho, \omega)$  decays // *Nuclear Physics A*. — 2017. — Vol. 966. — P. 54–63. — DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2017.06.002.
5. *Milstein A. I., Salnikov S. G.* Fine structure of the cross sections of  $e^+e^-$  annihilation near the thresholds of  $p\bar{p}$  and  $n\bar{n}$  production // *Nuclear Physics A*. — 2018. — Vol. 977. — P. 60–68. — DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2018.06.002.
6. *Milstein A. I., Salnikov S. G.* Coulomb effects in the decays  $\Upsilon(4S) \rightarrow B\bar{B}$  // *Physical Review D*. — 2021. — Vol. 104, no. 1. — P. 014007. — DOI: 10.1103/PhysRevD.104.014007.
7. *Milstein A. I., Salnikov S. G.* Final-state interaction in the process  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  // *Physical Review D*. — 2022. — Vol. 105, no. 7. — P. 074002. — DOI: 10.1103/PhysRevD.105.074002.
8. Effects of isospin violation in the  $e^+e^- \rightarrow B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  cross sections / A. E. Bondar, A. I. Milstein, R. V. Mizuk, S. G. Salnikov // *Journal of High Energy Physics*. — 2022. — Vol. 2022, no. 5. — P. 170. — DOI: 10.1007/JHEP05(2022)170.
9. *Milstein A. I., Salnikov S. G.*  $N\bar{N}$  production in  $e^+e^-$  annihilation near the threshold revisited // *Physical Review D*. — 2022. — Vol. 106, no. 7. — P. 074012. — DOI: 10.1103/PhysRevD.106.074012.

10. Мильштейн А. И., Сальников С. Г. Естественное объяснение недавних результатов исследования  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 2023. — Т. 117, № 12. — С. 901–903. — DOI: 10.31857/S1234567823120054.
11. Salnikov S. G., Milstein A. I. Near-threshold resonance in  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  process // Physical Review D. — 2023. — Vol. 108, no. 7. — P. L071505. — DOI: 10.1103/PhysRevD.108.L071505.
12. Salnikov S. G., Bondar A. E., Milstein A. I. Coupled channels and production of near-threshold  $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  resonances in  $e^+e^-$  annihilation // Nuclear Physics A. — 2024. — Vol. 1041. — P. 122764. — DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2023.122764.
13. Salnikov S. G., Milstein A. I. Meson production in  $J/\psi$  decays and  $J/\psi \rightarrow N\bar{N}\gamma$  process // Nuclear Physics B. — 2024. — Vol. 1002. — P. 116539. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2024.116539.
14. Salnikov S. G., Milstein A. I. Production of  $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$  near the thresholds in  $e^+e^-$  annihilation // Physical Review D. — 2024. — Vol. 109, no. 11. — P. 114015. — DOI: 10.1103/PhysRevD.109.114015.

**Личный вклад автора** в получении результатов, выносимых на защиту, является определяющим. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причём вклад диссертанта был определяющим. Список публикаций в журналах, рекомендованных ВАК, приведённый в конце автореферата, содержит 14 работ. Авторский вклад соискателя заключается:

в статье 1 — в проверке используемых формул и результатов вычисления сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$ ;

в статье 2 — в построении модели нуклон-антинуклонного взаимодействия в состояниях  $^3S_1$  и  $^3D_1$  с разными изоспинами; в подборе параметров потенциала нуклон-антинуклонного взаимодействия, наилучшим образом описывающего имеющиеся экспериментальные данные; в вычислении сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$  и электромагнитных формфакторов протона; в вычислении вклада взаимодействия виртуальной пары  $N\bar{N}$  в сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow 6\pi$ ;

в статье 3 — в оптимизации параметров модели нуклон-антинуклонного взаимодействия; в вычислении распределений по углам вылета частиц и по инвариантной массе  $p\bar{p}$  в распадах  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$ ;

в статье 4 — в построении модели нуклон-антинуклонного взаимодействия в состояниях  $^1S_0$  с разными изоспинами; в подборе параметров потенциала нуклон-антинуклонного взаимодействия, наилучшим образом описывающего имеющиеся экспериментальные данные для распределений по инвариантной массе  $p\bar{p}$  в распадах  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma(\omega)$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\gamma$ ;

в статье 5 — в получении формул для амплитуд процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$  с учётом взаимодействия в конечном состоянии и нарушения изотопической инвариантности; в подборе параметров потенциала нуклон-антинуклонного взаимодействия, наилучшим образом описывающего имеющиеся экспериментальные данные вблизи порогов рождения  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$ ; в вычислении сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$  и электромагнитных формфакторов протона;

в статье 6 — в подборе параметров потенциала взаимодействия между  $B$ -мезонами, позволяющего воспроизвести форму линии  $\Upsilon(4S)$ , наблюданную в распаде  $\Upsilon(4S) \rightarrow B\bar{B}$ ; в вычислении влияния кулоновского взаимодействия на отношение вероятностей распадов с рождением заряженных и нейтральных  $B$ -мезонов;

в статьях 7 и 11 — в построении модели взаимодействия между  $\Lambda_c$  и  $\bar{\Lambda}_c$  в состояниях  $^3S_1$  и  $^3D_1$ ; в подборе параметров потенциала взаимодействия,

позволяющего описать наблюдаемые на детекторах Belle и BESIII особенности зависимости от энергии сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c \bar{\Lambda}_c$ ;

в статье 8 — в вычислении спектров распадов  $\Upsilon(4S) \rightarrow B\bar{B}$  и  $\Upsilon(5S) \rightarrow B^*\bar{B}^*$  с учётом кулоновского взаимодействия между заряженными  $B$ -мезонами; в подборе параметров потенциала взаимодействия между  $B^{(*)}$ -мезонами;

в статье 9 — в подборе параметров потенциала нуклон-антинуклонного взаимодействия, наилучшим образом описывающего новейшие экспериментальные данные для сечений рождения  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$  в  $e^+e^-$  аннигиляции, а также электромагнитных формфакторов протона и нейтрона во времениподобной области; в вычислении сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$ ; в вычислении вклада взаимодействия виртуальной пары  $N\bar{N}$  в сечения процессов  $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$ ,  $e^+e^- \rightarrow 2(\pi^+\pi^-\pi^0)$  и  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$ ;

в статье 10 — в получении аналитической формулы для сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  с учётом взаимодействия в конечном состоянии; в подборе параметров потенциала взаимодействия между  $\Lambda$  и  $\bar{\Lambda}$ , позволяющего описать наблюдаемую зависимость от энергии сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ ;

в статье 12 — в построении модели взаимодействия между  $B^{(*)}$  и  $\bar{B}^{(*)}$  мезонами с учётом переходов между разными каналами; в подборе параметров потенциала взаимодействия, наилучшим образом описывающей наблюдаемую зависимость от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow B\bar{B}$ ,  $e^+e^- \rightarrow B^*\bar{B}$  и  $e^+e^- \rightarrow B^*\bar{B}^*$  вблизи порогов;

в статье 13 — в подборе параметров потенциала нуклон-антинуклонного взаимодействия в состояниях  ${}^1S_0$  с разными изоспинами, наилучшим образом описывающего имеющиеся экспериментальные данные для распределений по инвариантной массе  $p\bar{p}$  в распадах  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma(\omega)$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\gamma$ , а также распределения по инвариантной массе  $3(\pi^+\pi^-)$  в распаде  $J/\psi \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)\gamma$ ;

в статье 14 — в построении модели взаимодействия между заряженными и нейтральными  $D^{(*)}$  и  $\bar{D}^{(*)}$  мезонами с учётом переходов между разными каналами; в подборе параметров потенциала взаимодействия, наилучшим об-

разом описывающего наблюдаемую зависимость от энергии сечений рождения  $D^+D^-$ ,  $D^0\bar{D}^0$ ,  $D^{*+}D^-$ ,  $D^{*0}\bar{D}^0$ ,  $D^{*+}D^{*-}$  и  $D^{*0}\bar{D}^{*0}$  в  $e^+e^-$  аннигиляции вблизи порогов.

## **Структура и объём диссертации**

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертации 163 страницы, включая 31 рисунок и 6 таблиц. Библиография включает 192 наименования на 26 страницах.

## Глава 1

### Рождение адронных пар вблизи порога

Рассмотрим некоторый процесс с рождением адронной пары вблизи порога реакции. Речь может идти о самых разных процессах, в том числе о распадах тяжёлых адронов с возможным рождением и других частиц, помимо рассматриваемой пары. Пока для определённости мы будем говорить о рождении пары адронов в электрон-позитронной аннигиляции:  $e^+e^- \rightarrow h\bar{h}$ , где  $h$  — некоторый адрон (мезон или барион), имеющий массу  $M$ . Характерная величина массы адронов, рождение которых мы будем рассматривать, от одного ГэВ и выше. Например, речь может идти о нуклонах ( $M \approx 939$  МэВ),  $\Lambda$ -гиперонах ( $M \approx 1116$  МэВ),  $D$ -мезонах ( $M \approx 1870$  МэВ) или  $B$ -мезонах ( $M \approx 5280$  МэВ). Для пары адронов, имеющих суммарную кинетическую энергию  $E$  в системе центра масс, кинематический инвариант  $s = (2M + E)^2$  (здесь и далее мы используем естественную систему единиц,  $\hbar = c = 1$ ). Вблизи порога рождения пары адронов выполняются условия  $\sqrt{s} \gg E$ , а также  $\sqrt{s} \gg \Lambda_{\text{КХД}}$ . Здесь  $\Lambda_{\text{КХД}} \sim 300 \div 350$  МэВ — характерный масштаб конфайнмента в КХД.

Ниже мы подразумеваем, что электрон-позитронная аннигиляция идёт только через один виртуальный фотон в промежуточном состоянии, поскольку любые поправки, связанные с возможностью рождения большего числа виртуальных фотонов, малы из-за слабости электромагнитного взаимодействия. Тогда процесс рождения адронов в электрон-позитронной аннигиляции можно рассматривать следующим образом. Сперва на малых расстояниях  $r \sim 1/\sqrt{s}$  из виртуального фотона рождаются кварк и антикварк, разлетающиеся в разные стороны. По мере удаления кварка и антикварка друг от друга сильное взаимодействие между ними возрастает. На расстояниях  $r \sim 1/\Lambda_{\text{КХД}}$  поле становится настолько сильным, что из вакуума начинают рождаться новые кварк-антикварковые пары и глюоны. При объединении кварков и антиквар-

ков друг с другом формируются бесцветные адроны, которые затем разлетаются на большое расстояние. Взаимодействие между адронами при этом продолжается и на больших расстояниях  $r \gtrsim 1/\Lambda_{\text{КХД}}$ , что сказывается на вероятности рождения такой адронной системы.

Благодаря разделению масштабов ( $1/\sqrt{s} \ll 1/\Lambda_{\text{КХД}}$ ) учёт взаимодействия в конечном состоянии в процессах  $e^+e^- \rightarrow h\bar{h}$  вблизи порога упрощается. Матричный элемент рождения  $h\bar{h}$  из виртуального фотона может быть представлен в виде интеграла по импульсам адронов от произведения некоторых множителей, описывающих переход фотона в кварки, а затем кварков во взаимодействующие адроны. Поскольку рождение кварков происходит на малых расстояниях, зависимость соответствующего множителя от импульсов определяется большим параметром  $\sqrt{s}$ , который меняется слабо при небольшом изменении кинетической энергии адронов. Взаимодействие адронов между собой, наоборот, сильно зависит от их кинетической энергии, которая меняется существенно в припороговой области. Поэтому интеграл по импульсам адронов будет набираться в области  $p \ll \sqrt{s}$ , где множители, описывающие рождение кварков, могут быть вынесены из-под интеграла в виде некоторой константы. Таким образом, сильная зависимость сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow h\bar{h}$  от энергии вблизи порога реакции должна определяться взаимодействием адронов на расстояниях  $r \gtrsim 1/\Lambda_{\text{КХД}}$ .

Пара родившихся в  $e^+e^-$  аннигиляции нерелятивистских адронов может быть описана с помощью некоторой волновой функции. Эта волновая функция может быть получена как решение уравнения Шрёдингера в потенциале, описывающем взаимодействие адронов между собой на расстояниях  $r \gtrsim 1/\Lambda_{\text{КХД}}$ . Явный вид уравнения зависит от рассматриваемой системы адронов, так как он определяется квантовыми числами системы, количеством возможных конечных состояний, тем, какие силы действуют между адронами, и т.д. В последующих разделах диссертации будут рассмотрены как некоторые общие примеры решения уравнения Шрёдингера, так и конкретные процессы с рождением па-

ры адронов вблизи порога.

## 1.1. Взаимодействие адронов в конечном состоянии

Для начала рассмотрим влияние взаимодействия в конечном состоянии на амплитуду некоторого процесса с рождением пары бессpinовых адронов в состоянии с относительным орбитальным моментом  $L$ . Затравочная амплитуда такого процесса (то есть амплитуда, вычисленная без учёта взаимодействия между адронами) будет пропорциональна их импульсу в степени  $L$ , а также будет иметь соответствующую зависимость от углов вылета адронов. А именно

$$T_{\text{адр}}(\mathbf{k}) \propto k^L Y_{Lm}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{k}$  — импульс адронов в их системе центра масс,  $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{ME}$ ,  $Y_{Lm}$  — сферические функции, а знак « $\hat{\phantom{x}}$ » над вектором здесь и далее обозначает соответствующий вектор единичной длины. Для простоты мы опускаем другие множители, входящие в амплитуду процесса  $T_{\text{адр}}$ , такие как вектора поляризации участвующих в реакции частиц, спиновые множители, импульсы других частиц и т.д. Также опущены слабо зависящие от энергии множители, описывающие рождение кварков на малых расстояниях. Для справки отметим, что здесь и далее используется следующее определение сферических функций:

$$Y_{Lm}(\mathbf{n}) = Y_{Lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2L+1)(L-|m|)!}{4\pi(L+|m|)!}} P_L^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (1.2)$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  — полярный и азимутальный углы единичного вектора  $\mathbf{n}$ , а  $P_L^m(x)$  — присоединённые полиномы Лежандра.

Амплитуда вероятности обнаружения адронов с импульсом, равным  $\mathbf{p}$ , даётся их волновой функцией в импульсном представлении  $\Phi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{p})$ . Эта функция получается преобразованием Фурье из соответствующей волновой функции в координатном представлении:

$$\Phi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{p}) = \int d^3r \Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.3)$$

Здесь  $\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r})$  — волновая функция непрерывного спектра, асимптотика которой на больших расстояниях содержит плоскую волну и сходящуюся сферическую волну, а именно

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (1.4)$$

где  $f$  — некоторая функция от энергии и углов. Заметим, что именно функция  $\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r})$  (или  $\Phi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{p})$ ) должна использоваться при вычислении различных матричных элементов в качестве волновой функции конечного состояния, принадлежащего непрерывному спектру (см. [91], §136). Если мы знаем затравочную амплитуду рождения адронов,  $T_{\text{адр}}(\mathbf{p})$ , а также волновую функцию  $\Phi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{p})$ , то можно вычислить амплитуду рождения пары адронов с учётом взаимодействия в конечном состоянии. Эта амплитуда,  $\mathcal{T}_{\text{адр}}(\mathbf{k})$ , может быть получена из затравочной амплитуды  $T_{\text{адр}}(\mathbf{p})$  интегрированием по всем возможным значениям импульса адронов с учётом их импульсного распределения (см., например, обзор [127] и работы [128; 129]):

$$\mathcal{T}_{\text{адр}}(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^{(-)*}(\mathbf{p}) T_{\text{адр}}(\mathbf{p}) \propto \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^{(-)*}(\mathbf{p}) p^L Y_{Lm}(\hat{\mathbf{p}}). \quad (1.5)$$

Разложение координатной волновой функции  $\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)*}(\mathbf{r})$  по парциальным волнам можно записать в виде

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)*}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{m=-L}^L (-i)^L \psi_L^{(R)}(r) Y_{Lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{Lm}^*(\hat{\mathbf{r}}), \quad (1.6)$$

где  $\psi_L^{(R)}(r)$  — регулярное в нуле решение радиального уравнения Шрёдингера в потенциале, описывающем взаимодействие адронов. Здесь мы используем нормировку радиальных волновых функций, соответствующую асимптотике

$$\psi_L^{(R)}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2ikr} \left( S_L e^{i(kr - \pi L/2)} - e^{-i(kr - \pi L/2)} \right), \quad (1.7)$$

где  $S_L$  — некоторые зависящие от энергии коэффициенты. Аналогичное разложение для волновой функции в импульсном представлении имеет вид

$$\Phi_{\mathbf{k}}^{(-)*}(\mathbf{p}) = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{m=-L}^L (-i)^L \varphi_L^{(R)}(p) Y_{Lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{Lm}^*(\hat{\mathbf{p}}). \quad (1.8)$$

Используя разложение плоской волны по сферическим функциям

$$e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{m=-L}^L i^L j_L(pr) Y_{Lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) Y_{Lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (1.9)$$

несложно показать, что связь между радиальными функциями в разных представлениях имеет вид

$$\varphi_L^{(R)}(p) = 4\pi i^L \int dr r^2 \psi_L^{(R)}(r) j_L(pr), \quad (1.10)$$

где  $j_L(x)$  — сферические функции Бесселя первого рода. Подставляя разложение (1.8) в формулу (1.5), мы получаем (с использованием свойств преобразований Фурье и функций Бесселя)

$$\mathcal{T}_{\text{адр}}(\mathbf{k}) \propto \frac{(2L+1)!!}{L!} Y_{Lm}(\hat{\mathbf{k}}) \frac{\partial^L \psi_L^{(R)}}{\partial r^L}(0), \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial^L \psi_L^{(R)}}{\partial r^L}(0) = 4\pi (-i)^L \frac{L!}{(2L+1)!!} \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} p^L \varphi_L^{(R)}(p), \quad (1.12)$$

где  $\frac{\partial^L \psi_L^{(R)}}{\partial r^L}(0)$  —  $L$ -тая производная радиальной волновой функции при  $r = 0$ .

Сравнивая амплитуду (1.11) с затравочной амплитудой (1.1), мы приходим к выводу, что учёт взаимодействия между адронами в конечном состоянии приводит к умножению затравочной амплитуды процесса на множитель

$$\mathcal{F}_L = \frac{(2L+1)!!}{k^L L!} \frac{\partial^L \psi_L^{(R)}}{\partial r^L}(0). \quad (1.13)$$

Тогда проинтегрированное по углам сечение процесса с рождением пары адронов будет пропорционально

$$\sigma \propto \int d\Omega_{\mathbf{k}} k |\mathcal{T}_{\text{адр}}(\mathbf{k})|^2 \propto k^{2L+1} |\mathcal{F}_L|^2, \quad (1.14)$$

где множитель  $k$  под интегралом связан с фазовым объёмом конечного состояния пары адронов. Здесь, как и раньше, мы не включаем входящие в сечение процесса множители, связанные с другими частицами, участвующими в реакции, поскольку нас интересует зависимость сечения от  $k$ . Множитель  $k^{2L+1}$  в

сечении (1.13) соответствует зависимости сечения от энергии вблизи порога реакции без учёта взаимодействия в конечном состоянии. Величину  $|\mathcal{F}_L|^2$  мы в дальнейшем будем называть коэффициентом усиления сечения рождения пары адронов в состоянии с орбитальным моментом  $L$  за счёт взаимодействия в конечном состоянии. Можно легко убедиться, что в отсутствие взаимодействия  $\mathcal{F}_L = 1$ .

Таким образом, амплитуда процесса с учётом взаимодействия между адронами в конечном состоянии (1.11) пропорциональна волновой функции адронной системы (или её  $L$ -той производной) в нуле. Этот результат выглядит вполне естественно, поскольку волновая функция в нуле соответствует амплитуде вероятности того, что взаимодействующие адроны могли оказаться на малых расстояниях в момент рождения. Аналогичные выражения были представлены, например, в обзоре [127] для амплитуд вероятности аннигиляции чармония в различные состояния. Коэффициент усиления для состояний с  $L = 0$  выражался через волновую функцию в нуле, например, в работах [130; 131]. Также очень часто изменение сечений процессов за счёт кулоновского взаимодействия в конечном состоянии описывается при помощи фактора Гамова-Зоммерфельда-Сахарова [132–135], который соответствует асимптотике волновой функции в кулоновском поле на малых расстояниях. Отметим, что волновая функция  $\psi_0^{(R)}(0)$  обратно пропорциональна функции Йоста, через которую также часто выражают коэффициент усиления сечений за счёт взаимодействия в конечном состоянии (см., например, [136], §9.3).

Чтобы найти волновую функцию образовавшейся пары бессpinовых адронов нужно решить уравнение Шрёдингера в центральном потенциале  $V(r)$ , описывающем их взаимодействие. Как известно, радиальная волновая функция  $\psi_L(r)$  в состоянии с орбитальным моментом  $L$  удовлетворяет уравнению

$$\left[ \frac{p_r^2}{M} + V(r) + \frac{L(L+1)}{Mr^2} - E \right] \psi_L(r) = 0, \quad (1.15)$$

где  $p_r^2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r$  — радиальная часть оператора Лапласа (с противополож-

ным знаком). Как уже упоминалось выше, интересующее нас решение  $\psi_L^{(R)}(r)$  должно быть регулярно при  $r = 0$ , а при  $r \rightarrow \infty$  иметь асимптотику (1.7). В разделе 1.3 мы рассмотрим подробнее модельный потенциал, для которого уравнение (1.15) может быть решено аналитически, и найдём коэффициент усиления сечений за счёт взаимодействия в конечном состоянии.

## 1.2. Взаимодействие адронов в промежуточном состоянии

Процессы, в которых родившаяся пара реальных адронов улетает на бесконечность, мы будем называть упругими процессами. Именно они обсуждались до сих пор в этой главе, сечение упругих процессов  $\sigma_{\text{упр}}$  даётся формулой (1.14). Возможны также процессы другого рода, в которых сначала рождается пара виртуальных адронов в промежуточном состоянии, а затем происходит аннигиляция этих адронов в другие частицы. Такие процессы мы будем называть неупругими процессами рождения пары адронов. Взаимодействие между адронами в промежуточном состоянии сильно влияет на зависимость сечения неупругих процессов от энергии. Полным сечением рождения пары адронов ( $\sigma_{\text{полн}}$ ) мы будем называть сумму сечения упругого процесса ( $\sigma_{\text{упр}}$ ) и сечения неупругих процессов ( $\sigma_{\text{неупр}}$ ). В случае вещественного потенциала взаимодействия  $V(r)$  полное сечение совпадает с упругим сечением, а  $\sigma_{\text{неупр}} = 0$  для любой энергии. Для феноменологического учёта возможности аннигиляции пары адронов в другие частицы удобно использовать так называемый оптический потенциал  $V(r)$ , имеющий отрицательную мнимую часть в дополнение к вещественной части. Оптические потенциалы были впервые предложены в работе [137] для описания взаимодействия нейтронов с ядрами и с тех пор применялись в самых разных задачах. При наличии оптического потенциала сечение неупругих процессов будет больше нуля как выше порога рождения пары реальных адронов, так и ниже этого порога.

Прежде, чем ввести удобное выражение для полного сечения, рассмотрим случай вещественного потенциала  $V(r)$ . Перепишем упругое сечение рождения пары адронов (1.14), совпадающее в этом случае с полным сечением, в виде

$$\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{упр}} \propto \int d\Omega_{\mathbf{k}} k |\mathcal{T}_{\text{адр}}(\mathbf{k})|^2 = 2 \int d^3\mathbf{k}' \delta(k'^2 - k^2) |\mathcal{T}_{\text{адр}}(\mathbf{k}')|^2, \quad (1.16)$$

где  $\delta(x)$  —  $\delta$ -функция Дирака. Теперь воспользуемся теоремой Сохоцкого-Племеля для вещественной прямой в форме

$$\frac{1}{k'^2 - k^2 - i0} = \mathcal{P} \frac{1}{k'^2 - k^2} + i\pi \delta(k'^2 - k^2), \quad (1.17)$$

где символ  $\mathcal{P}$  означает вычисление интеграла в смысле главного значения. Тогда с учётом выражения для амплитуды (1.5) сечение принимает вид

$$\sigma_{\text{полн}} \propto (4\pi)^2 \text{Im} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} T_{\text{адр}}^*(\mathbf{p}) \frac{\Phi_{\mathbf{k}'}^{(-)}(\mathbf{p}) \Phi_{\mathbf{k}'}^{(-)*}(\mathbf{p}')}{k'^2 - k^2 - i0} T_{\text{адр}}(\mathbf{p}'). \quad (1.18)$$

Выразим сечение рождения пары адронов через функцию Грина  $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|E)$  уравнения Шрёдингера

$$\left[ \frac{\mathbf{p}^2}{M} + V(r) - E \right] \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|E) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.19)$$

где  $\mathbf{p}^2 = -\Delta$  — оператор Лапласа. Известно, что функцию Грина можно представить в виде (см., например, [90], глава IV)

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|E) = M \sum_{nLm} \frac{\Psi_{nLm}(\mathbf{r}) \Psi_{nLm}^*(\mathbf{r}')}{k_{nL}^2 - k^2 - i0} + M \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{\Psi_{\mathbf{k}'}^{(-)}(\mathbf{r}) \Psi_{\mathbf{k}'}^{(-)*}(\mathbf{r}')}{k'^2 - k^2 - i0}, \quad (1.20)$$

где  $k = \sqrt{ME}$ ,  $\Psi_{nLm}(\mathbf{r})$  — собственные функции, принадлежащие дискретному спектру и соответствующие энергиям  $E_{nL} = k_{nL}^2/M$ . Здесь суммирование ведётся по всем состояниям дискретного спектра, а интегрирование по всем состояниям непрерывного спектра. Функция Грина в координатном представлении  $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|E)$  связана с функцией Грина в импульсном представлении  $\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'|E)$  соотношением

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|E) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - i\mathbf{p}'\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'|E). \quad (1.21)$$

При этом для функции Грина  $\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'|E)$  будет выполнено разложение, аналогичное (1.20), но с заменой координатных волновых функций на импульсные волновые функции согласно определению (1.3), а именно

$$\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'|E) = M \sum_{nLm} \frac{\Phi_{nLm}(\mathbf{p}) \Phi_{nLm}^*(\mathbf{p}')}{k_{nL}^2 - k^2 - i0} + M \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{\Phi_{\mathbf{k}'}^{(-)}(\mathbf{p}) \Phi_{\mathbf{k}'}^{(-)*}(\mathbf{p}')}{k'^2 - k^2 - i0}. \quad (1.22)$$

В случае вещественного потенциала взаимодействия  $V(r)$  суммы по состояниям дискретного спектра в выражениях (1.20) и (1.22) также вещественны (за исключением вкладов  $\delta$ -функций, соответствующих энергиям связанных состояний). Таким образом, используя представление (1.22), сечение (1.18) для положительных энергий можно представить в виде

$$\sigma_{\text{полн}} \propto \frac{(4\pi)^2}{M} \text{Im} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} T_{\text{адр}}^*(\mathbf{p}) \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'|E) T_{\text{адр}}(\mathbf{p}'). \quad (1.23)$$

Смысл полученного выражения для сечения можно пояснить следующим образом. Известно, что в соответствии с оптической теоремой полное сечение процесса (совпадающее с упругим сечением в случае вещественного потенциала) пропорционально мнимой части амплитуды упругого рассеяния вперёд. Иллюстрация оптической теоремы показана на рисунке 1.1. Справа на этом рисунке показана диаграмма, соответствующая вкладу промежуточных состояний, содержащих пару взаимодействующих адронов, в амплитуду упругого процесса рассеяния вперёд. В квантовой теории поля такие диаграммы выражаются через поляризационный оператор. В нерелятивистском пределе соответствующий вклад в амплитуду будет выражаться через функцию Грина взаимодействующей пары адронов, а именно

$$f(0) \propto \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} T_{\text{адр}}^*(\mathbf{p}) \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'|E) T_{\text{адр}}(\mathbf{p}'). \quad (1.24)$$

С учётом вышесказанного, полное сечение рождения пары адронов должно даваться выражением (1.23), которое можно применять и в случае оптических потенциалов  $V(r)$ , имеющих мнимую часть. Мы примем выражение (1.23) за

определение полного сечения (с точностью до некоторых множителей, которые мы опускали и выше при вычислении упругого сечения).

$$\sum \left| \text{---} \begin{array}{c} T \\ \diagup \diagdown \end{array} \right|^2 \propto \text{Im} \left( \text{---} \begin{array}{c} T \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{G} \\ \diagup \diagdown \end{array} \begin{array}{c} T \\ \text{---} \end{array} \right)$$

Рисунок 1.1 — Иллюстрация оптической теоремы для полного сечения рождения пары адронов.  $T$  соответствует затравочной амплитуде рождения пары из некоторого начального состояния, а  $\mathcal{G}$  — функция Грина взаимодействующей пары адронов. Штриховка иллюстрирует взаимодействие в конечном или промежуточном состоянии

Теперь упростим полное сечение (1.23), принимая во внимание зависимость затравочных амплитуд от импульса (1.1). Имеем

$$\sigma_{\text{полн}} \propto \frac{(4\pi)^2}{M} \text{Im} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} p^L Y_{Lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'|E) p'^L Y_{Lm}(\hat{\mathbf{p}}') . \quad (1.25)$$

Для вычисления интеграла (1.25) разложим плоские волны в выражении (1.21) по сферическим функциям, используя (1.9):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|E) &= (4\pi)^2 \sum_{LL'mm'} i^{L-L'} Y_{Lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{L'm'}^*(\hat{\mathbf{r}}') \times \\ &\times \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} j_L(pr) Y_{Lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'|E) j_{L'}(p'r') Y_{L'm'}(\hat{\mathbf{p}}') . \end{aligned} \quad (1.26)$$

С другой стороны, разложение функции Грина по сферическим функциям имеет вид (см., например, [90], глава IV)

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|E) = \sum_{Lm} \mathcal{D}(r, r'|E) Y_{Lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{Lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') , \quad (1.27)$$

где  $\mathcal{D}(r, r'|E)$  — функция Грина радиального уравнения Шрёдингера. Поскольку сферические функции образуют полный ортонормированный базис, ради-

альная функция Грина может быть записана в виде интеграла

$$\mathcal{D}(r, r' | E) = (4\pi)^2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} j_L(pr) Y_{Lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}' | E) j_L(p'r') Y_{Lm}(\hat{\mathbf{p}}'). \quad (1.28)$$

Сравнивая данное выражение с интегралом в формуле (1.25) и принимая во внимание асимптотику сферических функций Бесселя при малых значениях аргумента, мы получаем

$$\sigma_{\text{полн}} \propto \frac{1}{M} \left( \frac{(2L+1)!!}{L!} \right)^2 \text{Im} \left[ \frac{\partial^L}{\partial r^L} \frac{\partial^L}{\partial r'^L} \mathcal{D}(r, r' | E) \right] \Big|_{r, r' \rightarrow 0}. \quad (1.29)$$

Отметим, что связь между полным сечением процесса и мнимой частью функции Грина использовалась в работе [138], хотя и при решении несколько иной задачи.

Напомним, что радиальная функция Грина  $\mathcal{D}(r, r' | E)$  является решением уравнения

$$\left[ \frac{p_r^2}{M} + V(r) + \frac{L(L+1)}{Mr^2} - E \right] \mathcal{D}(r, r' | E) = \frac{1}{rr'} \delta(r - r'). \quad (1.30)$$

Функция Грина, имеющая асимптотику, соответствующую задаче рассеяния, выражается через регулярное  $\psi_L^{(R)}$  и нерегулярное  $\psi_L^{(N)}$  в нуле решения уравнения Шрёдингера (1.15) в виде

$$\mathcal{D}(r, r' | E) = Mk \left[ \psi_L^{(R)}(r) \psi_L^{(N)}(r') \theta(r' - r) + \psi_L^{(R)}(r') \psi_L^{(N)}(r) \theta(r - r') \right]. \quad (1.31)$$

Здесь  $\theta(x)$  — функция Хевисайда, а нерегулярное решение нормировано в соответствии с асимптотикой

$$\psi_L^{(N)}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} e^{i(kr - \pi L/2)}. \quad (1.32)$$

Заметим, что при вычислении функции Грина для  $E < 0$  нужно считать, что импульс имеет положительную мнимую часть, то есть  $k = i\sqrt{-ME} = i|k|$ .

### 1.3. Прямоугольная яма как модель взаимодействия

В качестве простейшего примера взаимодействия между адронами рассмотрим потенциал в виде прямоугольной ямы,  $V(r) = -V_0 \cdot \theta(a - r)$ , где  $V_0$  — глубина ямы,  $a$  — её радиус. В дальнейшем мы увидим, что подобные простые модели зачастую неплохо описывают экспериментальные данные. Регулярное в нуле решение радиального уравнения Шрёдингера (1.15), имеющее асимптотику (1.7) на больших расстояниях, выражается через сферические функции Бесселя  $j_L(x)$  и Ганкеля  $h_L^{(1)}(x)$  и  $h_L^{(2)}(x)$ :

$$\begin{aligned}\psi_L^{(R)}(r < a) &= A_L j_L(qr), \\ \psi_L^{(R)}(r > a) &= \frac{1}{2} \left( S_L h_L^{(1)}(kr) + h_L^{(2)}(kr) \right), \\ k &= \sqrt{ME}, \quad q = \sqrt{M(E + V_0)}.\end{aligned}\tag{1.33}$$

Здесь  $A_L$  и  $S_L$  — некоторые коэффициенты, которые можно найти из спивки двух решений при  $r = a$ . Произведя спивку решений, можно найти значение волновой функции (или её  $L$ -той производной) при  $r = 0$  и получить общее выражение для фактора  $\mathcal{F}_L$  (см. (1.13)), а именно

$$\mathcal{F}_L = \frac{iq^L}{k^{L+1}a^2} \frac{1}{k j_L(qa)h_{L-1}^{(1)}(ka) - q j_{L-1}(qa)h_L^{(1)}(ka)}.\tag{1.34}$$

Упругое сечение рождения пары адронов (1.14) при этом принимает вид

$$\sigma_{\text{упр}} \propto \frac{1}{ka^4} \frac{|q|^{2L}}{\left| k j_L(qa)h_{L-1}^{(1)}(ka) - q j_{L-1}(qa)h_L^{(1)}(ka) \right|^2}.\tag{1.35}$$

В случае вещественного потенциала взаимодействия выражение для упругого сечения можно записать и в более простом виде.

Нерегулярное в нуле решение уравнения Шрёдингера (1.15), имеющее на бесконечности асимптотику (1.32), можно представить в виде

$$\begin{aligned}\psi_L^{(N)}(r < a) &= B_L j_L(qr) + C_L y_L(qr), \\ \psi_L^{(N)}(r > a) &= i h_L^{(1)}(kr),\end{aligned}\tag{1.36}$$

где  $y_L(x)$  — сферическая функция Бесселя второго рода. Коэффициенты  $B_L$  и  $C_L$  определяются из спивки решений при  $r = a$ . В результате для полного сечения процесса (1.29) получается выражение

$$\sigma_{\text{полн}} \propto \text{Im} [kq^{2L} A_L B_L] = \text{Im} \left[ q^{2L+1} \frac{q h_L^{(1)}(ka) y_{L+1}(qa) - k h_{L+1}^{(1)}(ka) y_L(qa)}{k j_L(qa) h_{L-1}^{(1)}(ka) - q j_{L-1}(qa) h_L^{(1)}(ka)} \right]. \quad (1.37)$$

### Упругое сечение для $L = 0$

Рассмотрим более подробно рождение пары адронов в состоянии с  $L = 0$ . В этом случае формула (1.34) может быть приведена к виду

$$\mathcal{F}_0 = \frac{q e^{-ika}}{q \cos(qa) - ik \sin(qa)}. \quad (1.38)$$

Тогда коэффициент усиления сечения рождения пары за счёт взаимодействия в конечном состоянии равен

$$|\mathcal{F}_0|^2 = \left| \frac{q}{q \cos(qa) - ik \sin(qa)} \right|^2. \quad (1.39)$$

В случае вещественного потенциала взаимодействия (а значит вещественного  $q$ ) выражение для коэффициента усиления принимает более простой вид

$$|\mathcal{F}_0|^2 = \frac{q^2}{q^2 \cos^2(qa) + k^2 \sin^2(qa)}, \quad \text{если } V_0 \in \mathbb{R}. \quad (1.40)$$

В любом случае сечение упругого процесса для  $L = 0$  равно

$$\sigma_{\text{упр}} \propto k |\mathcal{F}_0|^2. \quad (1.41)$$

Для достаточно глубокой потенциальной ямы ( $V_0 \gg E$ , а значит  $q \gg k$ ) резонансное усиление сечения будет наблюдаться при условии

$$q_0 a = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) + \delta, \quad (1.42)$$

где  $q_0 = \sqrt{MV_0}$ ,  $n$  — целое неотрицательное число, а  $|\delta| \ll 1$ .

При выполнении условия (1.42) легко показать, что длина рассеяния медленных частиц в рассматриваемом потенциале равна  $a_0 = 1/q_0\delta$  (см., например, [91], §133). При этом будет наблюдаться резонансное рассеяние медленных частиц, поскольку  $|a_0| \sim \frac{a}{\delta} \gg a$ . Положительное значение  $\delta$ , при котором  $a_0 > 0$ , соответствует наличию слабосвязанного состояния в рассматриваемой потенциальной яме (мелкий уровень), причём энергия связи даётся соотношением  $\varepsilon = -1/Ma_0^2$ . Отрицательное значение  $\delta$  (а значит  $a_0 < 0$ ) соответствует так называемому виртуальному уровню. Напомним, что о наличии виртуального уровня говорят в том случае, когда связанного состояния ещё нет, но небольшое увеличение глубины потенциальной ямы приводит к появлению мелкого уровня. Энергией виртуального уровня по определению называется величина  $\varepsilon = 1/Ma_0^2$ .

При выполнении условия (1.42) и вещественности потенциала сечение (1.41) можно привести к более простому виду:

$$\sigma_{\text{упр}} \propto \frac{\gamma V_0 \sqrt{ME}}{(E + \varepsilon_0)^2 + \gamma E},$$

$$\varepsilon_0 = 2\kappa V_0 \delta, \quad \gamma = 4\kappa^2 V_0, \quad \kappa = \frac{1}{\pi(n + 1/2)}. \quad (1.43)$$

По своей структуре это выражение соответствует формуле Флэттэ [139] для случая одного канала. Заметим, что зависимость сечения от энергии вблизи порога существенно отличается от резонансной формулы Брейта-Вигнера. Это вполне ожидаемо, поскольку для применимости формулы Брейта-Вигнера необходимо, чтобы расстояние до порога было велико по сравнению с шириной резонанса. Легко убедиться, что сечение (1.43) достигает максимума при энергии  $E = |\varepsilon|$  как в случае мелкого уровня, так и в случае виртуального уровня (здесь  $\varepsilon$  — энергия соответствующего уровня). Отметим также, что точная формула для сечения (1.41) имеет большую область применимости, чем формула Флэттэ (1.43), поскольку последняя не должна использоваться вдали от резонансного пика (см. рисунок 1.2).

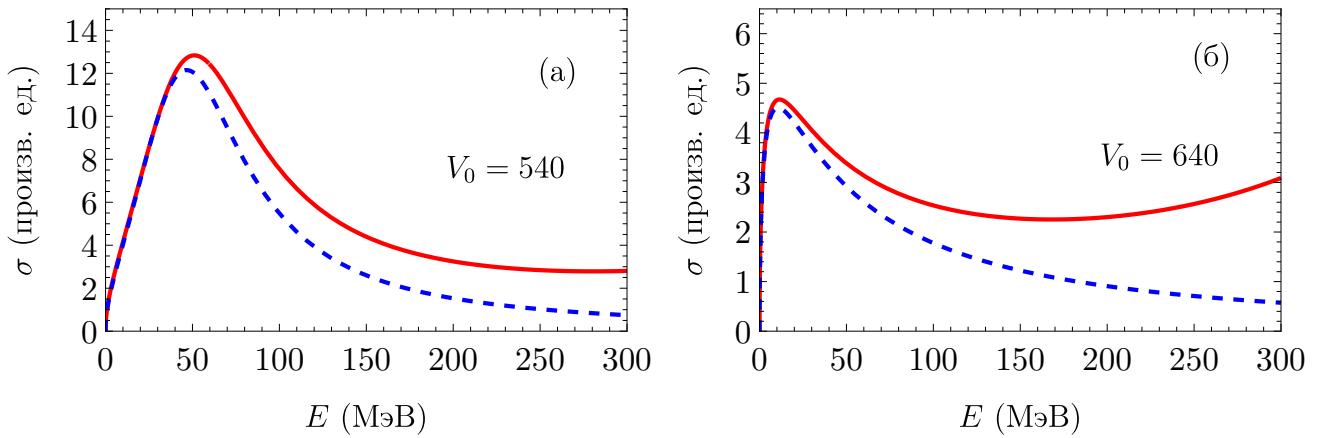


Рисунок 1.2 — Сравнение энергетической зависимости сечений, описываемых точной формулой (1.41) (сплошная линия) и формулой Флаттэ (1.43) (пунктирная линия) для  $M = 1 \text{ ГэВ}$ ,  $a = 2 \text{ фм}$  и различных значений  $V_0$ . График (а) соответствует значению  $\delta = -0,4$ , а график (б) значению  $\delta = 0,25$

Для иллюстрации возможного влияния взаимодействия в конечном состоянии на энергетическую зависимость сечения рождения пары адронов с  $L = 0$  рассмотрим некоторые характерные примеры. На рисунке 1.3 показаны зависимости коэффициента усиления (1.40) и сечения рождения пары адронов (1.41) от энергии для нескольких значений параметров потенциальной ямы. Для массы адронов  $M = 1 \text{ ГэВ}$  и радиуса потенциала  $a = 2 \text{ фм}$  третье связанное состояние в потенциальной яме появляется при глубине  $V_0 = 600 \text{ МэВ}$ . Следовательно, при меньшем значении  $V_0$  имеется виртуальный уровень, и виден выраженный пик в коэффициенте усиления. Чем меньше становится глубина ямы, тем шире и дальше от порога становится этот пик. При  $V_0 = 640 \text{ МэВ}$ , наоборот, под порогом существует связанное состояние с энергией связи  $\varepsilon = -15,4 \text{ МэВ}$ , поэтому коэффициент усиления имеет резкий максимум прямо на пороге.

Сечение рождения пары адронов с  $L = 0$  зануляется на пороге из-за множителя  $k$ , связанного с фазовым объёмом конечного состояния. Поэтому максимум сечения всегда достигается при некоторой положительной энергии. При уменьшении глубины ямы  $V_0$  виртуальный уровень «выталкивается» из потенциальной ямы, что приводит к смещению пика в сечении в область больших

энергий (штриховая и пунктирная линии на рисунке 1.3). При наличии мелкого уровня под порогом пик в сечении становится менее выраженным и прижимается к порогу (штрихпунктирная линия на рисунке 1.3). Наиболее выражен пик в сечении рождения пары адронов в том случае, когда недалеко от порога существует виртуальный уровень (сплошная линия на рисунке 1.3).

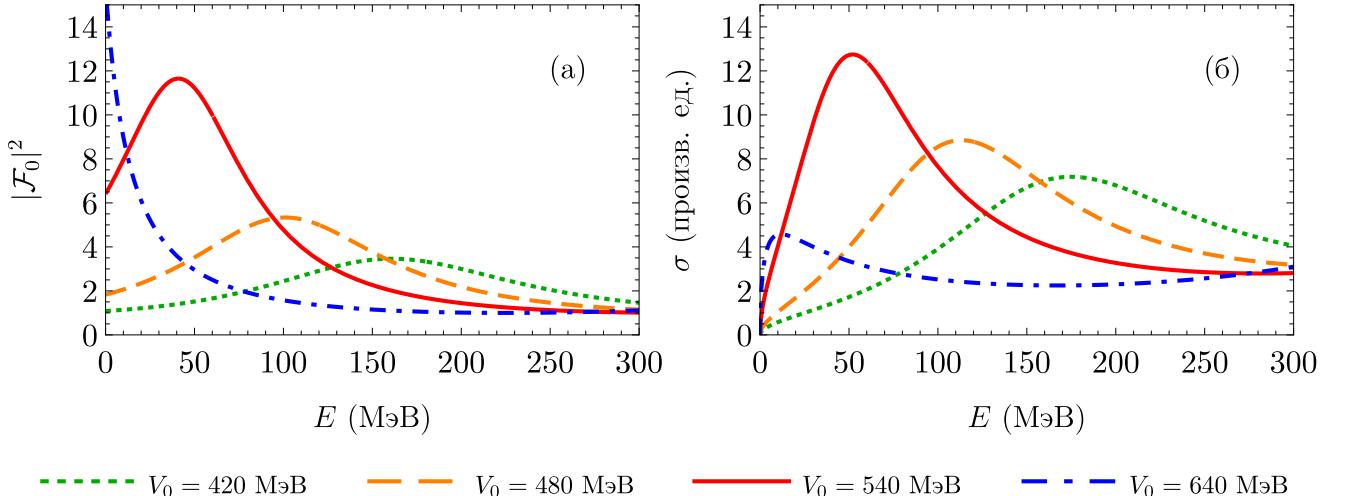


Рисунок 1.3 — Зависимости коэффициента усиления (1.40) (а) и сечения рождения пары адронов (1.41) (б) от энергии для  $L = 0$ ,  $M = 1 \text{ ГэВ}$ ,  $a = 2 \text{ фм}$  и различных значений  $V_0$  (указаны под графиками)

### Упругое сечение для $L = 1$

Теперь рассмотрим рождение пары адронов в состоянии с орбитальным моментом  $L = 1$ , по-прежнему предполагая, что взаимодействие описывается прямоугольной потенциальной ямой. С использованием связи сферических функций Бесселя и Ганкеля с тригонометрическими функциями (см., например, [140]) формула (1.34) для коэффициента усиления амплитуды рождения пары адронов в  $p$ -волне может быть приведена к виду

$$\mathcal{F}_1 = \frac{q^3 a e^{-ika}}{k^2 qa \cos(qa) + (q^2 - k^2) \sin(qa) - ikaq^2 \sin(qa)}. \quad (1.44)$$

Тогда в случае вещественного потенциала взаимодействия (а значит вещественного  $q$ ) коэффициент усиления сечения равен

$$|\mathcal{F}_1|^2 = \frac{q^6 a^2}{k^2 q^4 a^2 \sin^2(qa) + [(q^2 - k^2) \sin(qa) + k^2 qa \cos(qa)]^2}, \quad \text{если } V_0 \in \mathbb{R}. \quad (1.45)$$

Отсюда можно показать, что в случае, когда энергия частиц мала по сравнению с глубиной потенциальной ямы ( $V_0 \gg E$ , а значит  $q \gg k$ ), резонансное усиление сечения будет наблюдаться при условии

$$q_0 a = \pi n + \delta, \quad (1.46)$$

где  $q_0 = \sqrt{MV_0}$ ,  $n$  — натуральное число, а  $|\delta| \ll 1$ .

На рисунке 1.4 показаны зависимости от энергии коэффициента усиления (1.45) и сечения рождения пары адронов

$$\sigma_{\text{упр}} \propto k^3 |\mathcal{F}_1|^2 \quad (1.47)$$

для  $L = 1$  и различных параметров потенциальной ямы. При массе частиц  $M = 1 \text{ ГэВ}$  и радиусе  $a = 2 \text{ фм}$  второе связанное состояние с  $L = 1$  появляется при глубине ямы  $V_0 = 384 \text{ МэВ}$ . При меньших значениях  $V_0$  в сечении рождения пары присутствуют пики, соответствующие виртуальным уровням. Причём, чем ближе к порогу виртуальный уровень, тем сильнее выражен пик в сечении. При глубине  $V_0 = 400 \text{ МэВ}$  в яме имеется мелкий уровень с энергией связи  $\varepsilon = -7,7 \text{ МэВ}$ , и пик в сечении прижат вплотную к порогу. Таким образом, хотя сечение рождения пары адронов в состоянии с орбитальным моментом  $L = 1$  не приводится к простому виду наподобие (1.43), общие закономерности те же, что и для  $L = 0$ .

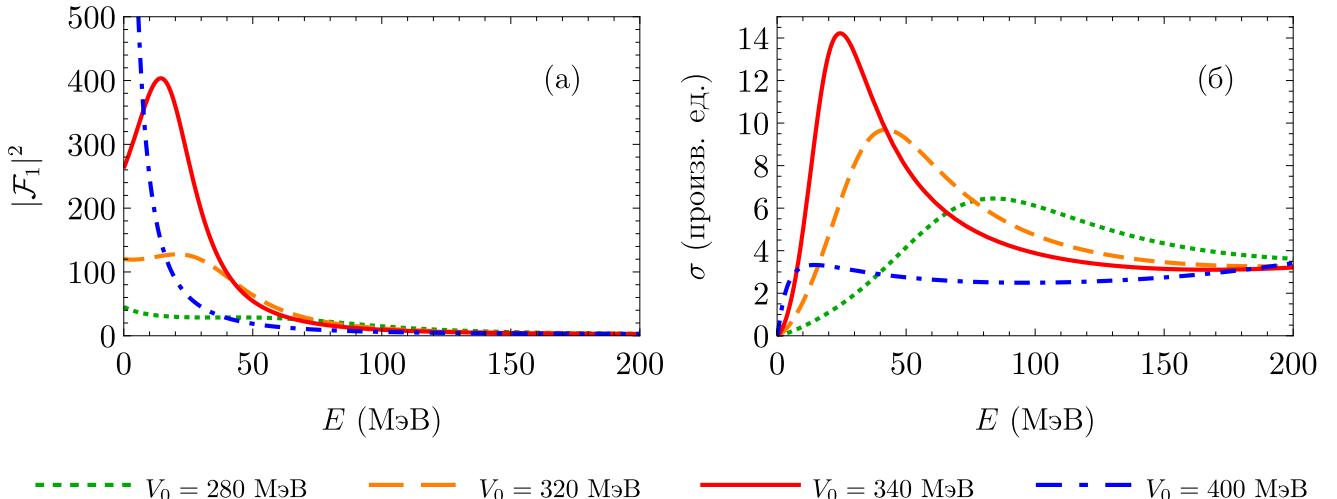


Рисунок 1.4 — Зависимости коэффициента усиления (1.45) (а) и сечения рождения пары адронов (1.47) (б) от энергии для  $L = 1$ ,  $M = 1 \text{ ГэВ}$ ,  $a = 2 \text{ фм}$  и различных значений  $V_0$  (указаны под графиками)

### Неупругие сечения для $L = 0, 1$

При  $L = 0$  общее выражение для полного сечения процесса с рождением пары адронов (1.37) принимает вид

$$\sigma_{\text{полн}} \propto \text{Im} \left[ q \frac{q \sin(qa) + ik \cos(qa)}{q \cos(qa) - ik \sin(qa)} \right]. \quad (1.48)$$

Обратим внимание, что в случае использования оптического потенциала взаимодействия, содержащего минимую часть, величина  $q$  становится комплексной. Напомним также, что упругое сечение для  $L = 0$  даётся формулой (1.41), а  $\sigma_{\text{неупр}} = \sigma_{\text{полн}} - \sigma_{\text{упр}}$ .

На рисунке 1.5 показаны зависимости полного, упругого и неупругого сечений от энергии для разных параметров оптического потенциала. График (а) соответствует потенциальному, содержащему мелкий уровень под порогом, а график (б) отвечает потенциальному, в котором присутствует виртуальный уровень выше порога. В обоих случаях оптический потенциал  $V(r)$  содержит небольшую отрицательную минимую часть, чтобы получить отличное от нуля сечение неупругих процессов. Благодаря этому связанное состояние под порогом имеет конечную, хотя и малую ширину, что выражается в наличии на графике (а)

узкого пика в полном и неупругом сечениях. Ширина пиков на графике (б), отвечающих виртуальному уровню, увеличивается за счёт добавления мнимой части к потенциалу.

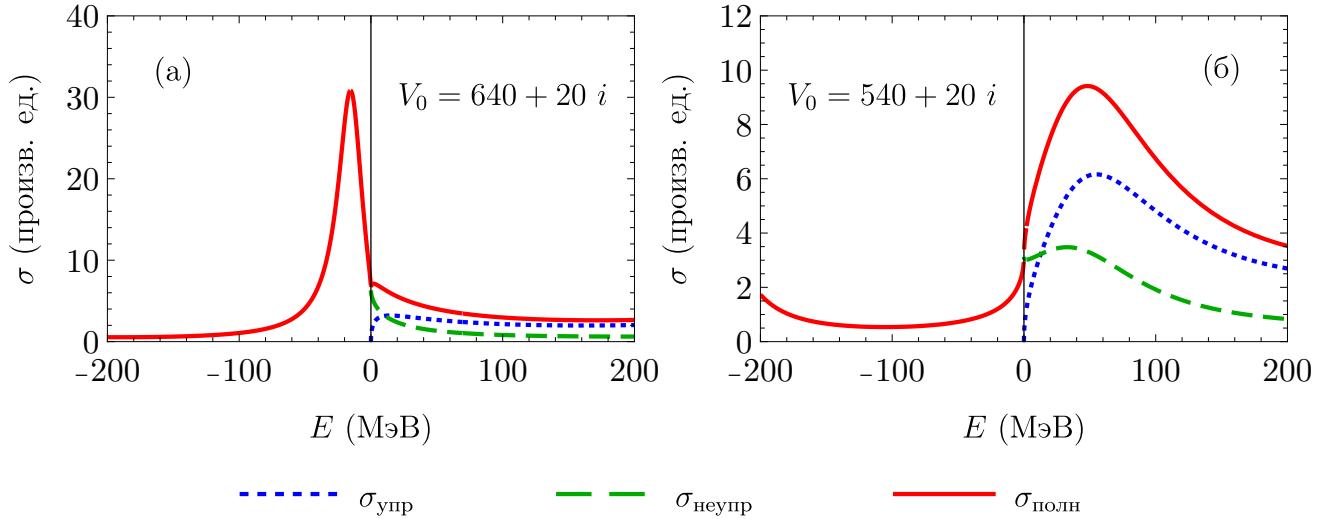


Рисунок 1.5 — Зависимости упругого сечения (1.41), полного сечения (1.48) и неупругого сечения от энергии для  $L = 0$ ,  $M = 1 \text{ ГэВ}$ ,  $a = 2 \text{ фм}$  и различных значений оптического потенциала  $V_0$ . График (а) соответствует потенциалу, содержащему мелкий уровень под порогом, а график (б) отвечает потенциалу, в котором присутствует виртуальный уровень

В случае  $L = 1$  общее выражение для полного сечения процесса с рождением пары адронов (1.37) можно привести к виду

$$\sigma_{\text{полн}} \propto \text{Im} \left[ q^3 \frac{k^2 q a \sin(qa) - (q^2 - k^2 - ikq^2 a) \cos(qa)}{k^2 q a \cos(qa) + (q^2 - k^2 - ikq^2 a) \sin(qa)} \right]. \quad (1.49)$$

При этом упругое сечение рождения пары с  $L = 1$  даётся формулой (1.47), а  $\sigma_{\text{неупр}} = \sigma_{\text{полн}} - \sigma_{\text{упр}}$ . На рисунке 1.6 показаны зависимости полного, упругого и неупругого сечений от энергии для разных параметров оптического потенциала. График (а) соответствует потенциалу, содержащему мелкий уровень, а график (б) отвечает потенциалу с виртуальным уровнем. Общие закономерности поведения сечений те же, что и для орбитального момента  $L = 0$ .

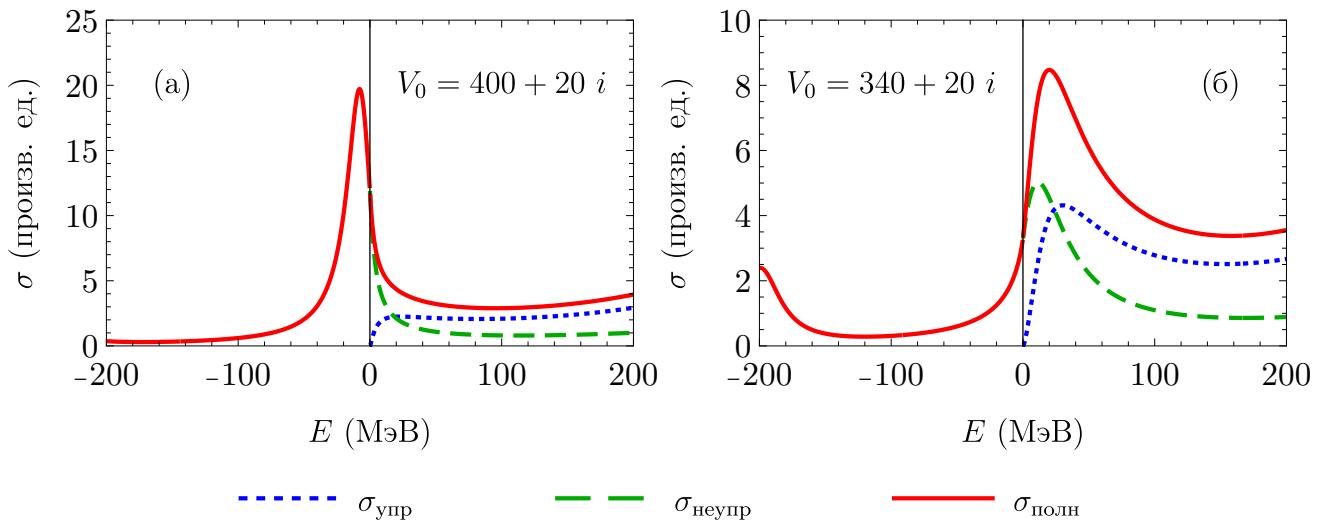


Рисунок 1.6 — Зависимости упругого сечения (1.47), полного сечения (1.49) и неупругого сечения от энергии для  $L = 1$ ,  $M = 1 \text{ ГэВ}$ ,  $a = 2 \text{ фм}$  и различных значений оптического потенциала  $V_0$ . График (а) соответствует потенциалу, содержащему мелкий уровень под порогом, а график (б) отвечает потенциалу, в котором присутствует виртуальный уровень

## 1.4. Случай нескольких каналов реакции

Выше мы рассмотрели влияние взаимодействия между адронами на припороговое поведение сечений процессов в случае, когда пара адронов может рождаться в единственном состоянии. Однако в реальных процессах ситуация зачастую более сложная. Например, часто довольно близко по энергии расположены два (или более) порога, соответствующие рождению пар разных адронов (в дальнейшем мы будем говорить о разных каналах реакции). Если при этом пары различных адронов могут рождаться в состояниях с одинаковыми квантовыми числами  $J^{PC}$ , то взаимодействие между адронами может приводить к переходам между разными каналами. Типичным примером такого рода процессов является рождение пар  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$  в  $e^+e^-$  аннигиляции, где нуклон-антинуклонное взаимодействие в конечном состоянии может приводить к перезарядке  $p\bar{p} \leftrightarrow n\bar{n}$ . Для теоретического описания таких процессов вблизи порогов важ-

но учитывать все доступные каналы реакции и возможные переходы между ними.

Рассмотрим  $n$ -канальную задачу. Пусть в  $e^+e^-$  аннигиляции могут рождаться пары частиц  $n$  различных сортов, имеющие массы  $M_1, \dots, M_n$ , соответственно. Для определённости предположим, что  $M_1 < M_2 < \dots < M_n$ , а пороги рождения этих пар лежат достаточно близко друг к другу, то есть  $\Delta_i = 2(M_i - M_1) \ll M_i$ . Будем считать, что квантовые числа этих частиц таковы, что различные пары адронов могут рождаются в состояниях с относительным орбитальным моментом  $L$ , а также возможны переходы между разными каналами. Тогда затравочные амплитуды рождения пары частиц в канале  $i$  (то есть амплитуды, вычисленные без учёта взаимодействия в конечном состоянии, ср. (1.1)) будут пропорциональны, соответственно,

$$T_{\text{адр}}^{(i)}(\mathbf{k}_i) \propto g_i k_i^L Y_{Lm}(\hat{\mathbf{k}}_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.50)$$

В нерелятивистском приближении импульсы частиц в их системе центра масс равны  $k_i = \sqrt{M(E - \Delta_i)}$ , где  $M$  — некоторая средняя масса, а кинетическая энергия  $E$  отсчитывается от порога рождения пары частиц сорта 1. Коэффициенты  $g_i$  в амплитудах (1.50) связаны с амплитудами вероятности рождения соответствующих пар на малых расстояниях  $r \lesssim 1/\Lambda_{\text{КХД}}$ . Как и раньше, в формуле (1.50) мы для простоты опускаем другие множители, входящие в амплитуды процессов, такие как вектора поляризации участвующих частиц, спиновые множители, и т.д.

Набор волновых функций непрерывного спектра для  $n$ -канальной задачи содержит  $n$  линейно независимых функций  $\Psi_{\mathbf{k}_1}^{(-)}(\mathbf{r}), \dots, \Psi_{\mathbf{k}_n}^{(-)}(\mathbf{r})$  (см., например, монографию [90], глава VIII), определяемые их асимптотическим поведением на больших расстояниях

$$\Psi_{\mathbf{k}_i}^{(-)}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^n f_{ij} \frac{e^{-ik_j r}}{r}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.51)$$

где  $f_{ij}$  — некоторые функции углов и энергии. Разложение этих волновых

функций по парциальным волнам запишем в виде

$$\Psi_{\mathbf{k}_i}^{(-)*}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{m=-L}^L (-i)^L \sum_{j=1}^n \psi_{ij}^{(R)}(r) Y_{Lm}(\hat{\mathbf{k}}_i) Y_{Lm}^*(\hat{\mathbf{r}}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.52)$$

где  $\psi_{ij}^{(R)}(r)$  — регулярные в нуле радиальные волновые функции. Их асимптотика на бесконечности соответствует выражению

$$\psi_{ij}^{(R)}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2ik_j r} \left( S_{ij} e^{i(k_j r - \pi L/2)} - \delta_{ij} e^{-i(k_j r - \pi L/2)} \right), \quad (1.53)$$

где  $S_{ij}$  — некоторые зависящие от энергии коэффициенты, а  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Отметим, что в области энергий, где импульсы становятся мнимыми, нужно считать, что они имеют положительную мнимую часть, то есть  $k_j = i|k_j|$ . При этом второе слагаемое в волновой функции (1.53) формально становится экспоненциально растущим, однако из-за множителя  $\delta_{ij}$  оно не будет входить в выражения для сечений процессов в данной области энергий. Волновые функции в импульсном представлении,  $\Phi_{\mathbf{k}_i}^{(-)}(\mathbf{p})$ , связанные с функциями  $\Psi_{\mathbf{k}_i}^{(-)}(\mathbf{r})$  преобразованиями Фурье (1.3), могут быть разложены по парциальным волнам аналогичным образом:

$$\Phi_{\mathbf{k}_i}^{(-)*}(\mathbf{p}) = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{m=-L}^L (-i)^L \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}^{(R)}(p) Y_{Lm}(\hat{\mathbf{k}}_i) Y_{Lm}^*(\hat{\mathbf{p}}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.54)$$

Здесь функции  $\varphi_{ij}^{(R)}(p)$  выражаются через радиальные волновые функции соотношениями (ср. (1.10))

$$\varphi_{ij}^{(R)}(p) = 4\pi i^L \int dr r^2 \psi_{ij}^{(R)}(r) j_L(pr). \quad (1.55)$$

Взаимодействие между адронами в конечном состоянии приводит к изменению амплитуд рождения пар частиц определённого сорта по сравнению с затравочными амплитудами (1.50). В том числе возможны процессы, в которых родившаяся на малых расстояниях пара частиц сорта  $i$  перерассеивается в пару частиц другого сорта  $j$  на больших расстояниях, и наоборот. Обобщая

выражение (1.5), амплитуды рождения пар адронов с учётом взаимодействия в конечном состоянии можно записать в виде

$$\mathcal{T}_{\text{адр}}^{(i)}(\mathbf{k}_i) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{m=-L}^L (-i)^L Y_{Lm}(\hat{\mathbf{k}}_i) Y_{Lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}^{(R)}(p) T_{\text{адр}}^{(j)}(\mathbf{p}). \quad (1.56)$$

Волновые функции  $\varphi_{ij}^{(R)}(p)$  дают амплитуды вероятности того, что состояние  $j$ , родившееся с импульсом  $\mathbf{p}$  на малых расстояниях, перейдёт в состояние  $i$  на больших расстояниях. Подставляя выражения (1.50) для затравочных амплитуд и интегрируя по импульсам с помощью соотношения (1.12), мы получаем

$$\mathcal{T}_{\text{адр}}^{(i)}(\mathbf{k}_i) \propto \frac{(2L+1)!!}{L!} Y_{Lm}(\hat{\mathbf{k}}_i) \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial^L \psi_{ij}^{(R)}}{\partial r^L}(0). \quad (1.57)$$

Таким образом, амплитуда рождения пары адронов в состоянии с орбитальным моментом  $L$  выражается через  $L$ -ые производные соответствующих радиальных волновых функций.

В свою очередь, сечение рождения пары адронов сорта  $i$  можно записать в виде

$$\sigma^{(i)} \propto \int d\Omega_{\mathbf{k}_i} k_i \left| \mathcal{T}_{\text{адр}}^{(i)}(\mathbf{k}_i) \right|^2 \propto k_i^{2L+1} \left| \sum_{j=1}^n g_j \mathcal{F}_{ij} \right|^2, \quad (1.58)$$

$$\mathcal{F}_{ij} = \frac{(2L+1)!!}{k_i^L L!} \frac{\partial^L \psi_{ij}^{(R)}}{\partial r^L}(0), \quad (1.59)$$

где  $\mathcal{F}_{ij}$  имеют смысл коэффициентов усиления за счёт взаимодействия в конечном состоянии амплитуд, связанных с переходом из состояния  $j$  в состояние  $i$ . В выражении для сечений, как и раньше, мы опускаем некоторые общие множители, не имеющие резкой зависимости от энергии вблизи порогов реакций.

Радиальные волновые функции  $n$ -канальной задачи удовлетворяют системе из  $n$  уравнений Шрёдингера. Удобно записать её в матричном виде, введя вектор-столбец решений  $\Psi(r) = (\psi_1(r), \dots, \psi_n(r))^T$ , где индекс  $T$  обозначает транспонирование. Тогда радиальное уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\left[ \frac{p_r^2}{M} + \mathcal{V}(r) + \frac{L(L+1)}{Mr^2} - \mathbb{E} \right] \Psi(r) = 0, \quad \mathbb{E}_{ij} = (E - \Delta_i) \cdot \delta_{ij}. \quad (1.60)$$

Матрица потенциалов  $\mathcal{V}(r)$  описывает, как взаимодействие частиц определённого сорта между собой, так и переходы между разными каналами. Уравнение (1.60) имеет  $n$  линейно независимых регулярных в нуле решения, компоненты которых определяются асимптотиками (1.53).

### Зависимость сечений от энергии в случае двух каналов

Для того, чтобы проиллюстрировать характерные особенности поведения сечений рождения пар адронов в случае нескольких каналов, рассмотрим некоторые примеры. Основные закономерности зависимости сечений рождения пар адронов определяются несколькими факторами. Во-первых, положением мелких либо виртуальных уровней в каждом канале (в пределе независимых каналов). Во-вторых, амплитудами переходов между разными каналами. В-третьих, соотношением между коэффициентами  $g_i$ , связанными с вероятностями рождения различных состояний на малых расстояниях.

Ниже мы рассмотрим рождение пар адронов с относительным орбитальным моментом  $L = 0$  в случае двух каналов. Матрица потенциалов взаимодействия между адронами в этом случае имеет вид

$$\mathcal{V}(r) = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & V_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Для простоты будем использовать параметризацию потенциалов в виде прямоугольных потенциальных ям, имеющих глубины  $U_{ij}$  и общий радиус  $a$ , то есть

$$V_{ij}(r) = U_{ij} \theta(a - r). \quad (1.62)$$

Сперва рассмотрим случай, когда в обоих каналах присутствует виртуальный уровень немного выше порога. Ориентируясь на рисунок 1.3, выберем  $U_{11} = U_{22} = -540$  МэВ при радиусе потенциала  $a = 2$  фм, средней массе  $M = 1$  ГэВ, а разнице масс  $M_2 - M_1 = 50$  МэВ. Также зафиксируем значения констант  $g_1 = 1$  и  $g_2 = 0,5$ . Зависимости от энергии сечений рождения

пар адронов разного сорта,  $\sigma^{(1)}$  и  $\sigma^{(2)}$ , а также их суммы показаны на рисунке 1.7 для различных значений недиагонального потенциала  $U_{12}$ . При  $U_{12} = 0$ , очевидно, переходы между каналами отсутствуют, и суммарное сечение рождения пар является просто суммой независимых сечений рождения адронов сорта 1 и сорта 2, см. рисунок 1.7(а). При этом в каждом из сечений  $\sigma^{(1)}$  и  $\sigma^{(2)}$  присутствует пик, соответствующий виртуальному уровню. При недиагональном потенциале  $U_{12} = \pm 50$  МэВ, сравнимом с разницей между пороговыми энергиями, зависимость сечений от энергии меняется существенно. В одном случае интерференция между каналами приводит к почти полному подавлению пика во втором канале, см. рисунок 1.7(б). В другом случае, наоборот, интерференция приводит к появлению выраженного провала в суммарном сечении вблизи порога второго канала, см. рисунок 1.7(в). Интересно, что при этом вблизи второго порога наблюдается также подавление сечения рождения пары адронов сорта 1. Дальнейшее увеличение недиагонального потенциала до  $U_{12} = 140$  МэВ приводит к ещё большему подавлению сечения  $\sigma^{(1)}$  и смешению пика в этом сечении ближе к порогу, см. рисунок 1.7(г).

Теперь выберем параметры потенциала  $U_{11} = -540$  МэВ,  $U_{22} = -640$  МэВ,  $a = 2$  фм, при которых присутствует виртуальный уровень в первом канале и мелкий уровень во втором канале. Также зафиксируем значения констант  $g_1 = 1$  и  $g_2 = 0,3$ . Зависимости от энергии сечений  $\sigma^{(1)}$  и  $\sigma^{(2)}$ , а также их суммы показаны на рисунке 1.8 для различных значений недиагонального потенциала  $U_{12}$ . При недиагональном потенциале  $U_{12} = 0$  сечение рождения частиц сорта 2 практически незаметно на фоне сечения  $\sigma^{(1)}$  из-за малого значения  $g_2$ , см. рисунок 1.8(а). Однако при  $U_{12} = \pm 50$  МэВ влияние второго канала уже становится существенным. Особенно заметно проявление смешивания между каналами на рисунке 1.8(в), где на пороге рождения адронов сорта 2 появился резкий пик в сечении рождения адронов сорта 1. Этот эффект можно легко объяснить. Действительно, существующее под порогом связанное состояние адронов сорта 2 не может вылететь на бесконечность в отсутствие переходов

между каналами. Однако смешивание между адронами разного сорта приводит к тому, что это связанное состояние может распасться в пару адронов сорта 1, которые уже имеют энергию выше своего порога и улетают на бесконечность. В результате в сечении  $\sigma^{(1)}$  появляется пик, расположенный близи второго порога. Аналогичная картина наблюдается и для  $U_{12} = 100$  МэВ, см. рисунок 1.8(г).

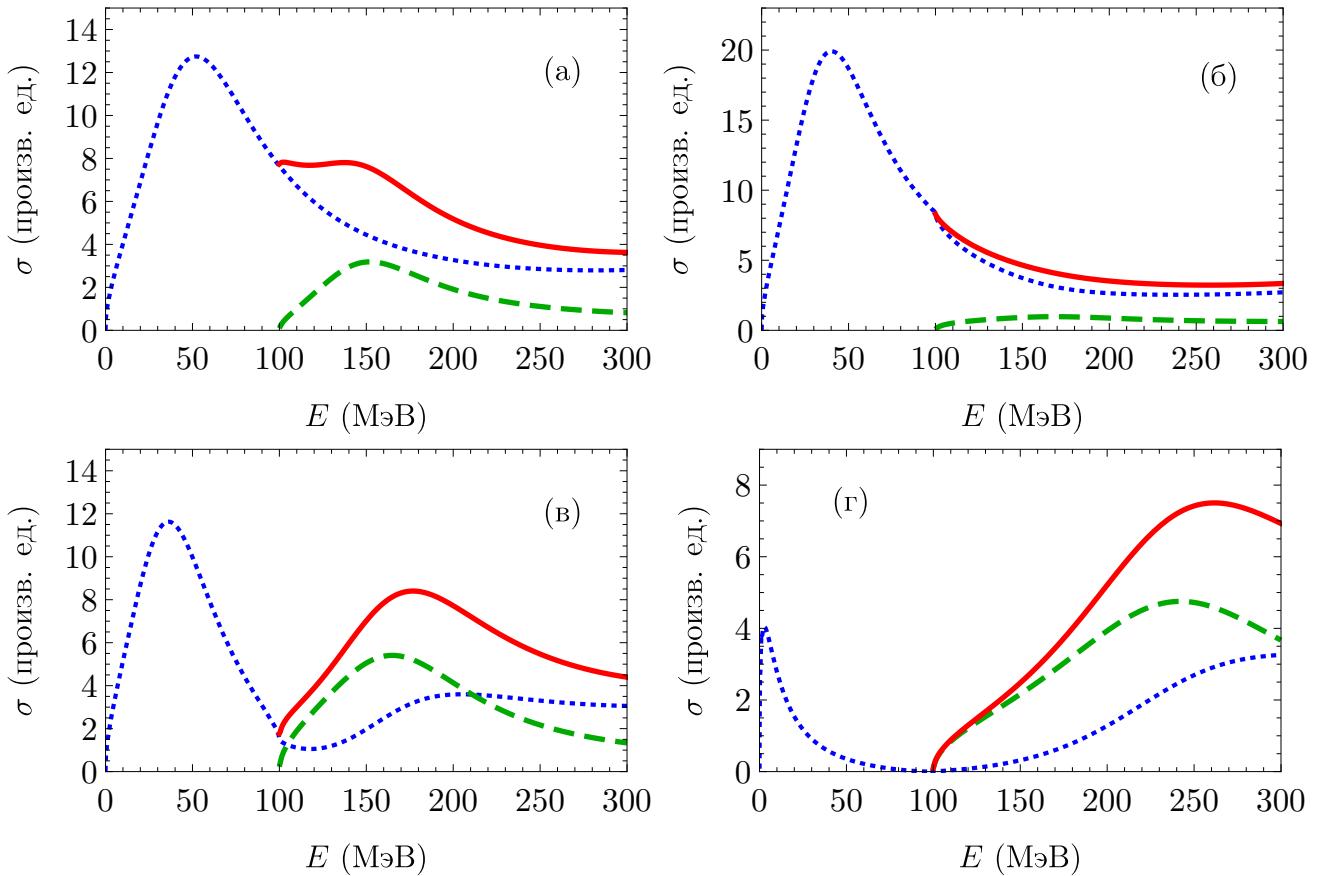


Рисунок 1.7 — Зависимости от энергии сечений  $\sigma^{(1)}$  (пунктирная линия),  $\sigma^{(2)}$  (штриховая линия) и их суммы (сплошная линия), см. (1.58). Используются параметры модели  $M = 1$  ГэВ,  $\Delta_2 = 100$  МэВ,  $a = 2$  фм,  $U_{11} = U_{22} = -540$  МэВ,  $g_1 = 1$ ,  $g_2 = 0,5$ . На графике (а)  $U_{12} = 0$ , на графике (б)  $U_{12} = -50$  МэВ, на графике (в)  $U_{12} = 50$  МэВ, а на графике (г)  $U_{12} = 140$  МэВ

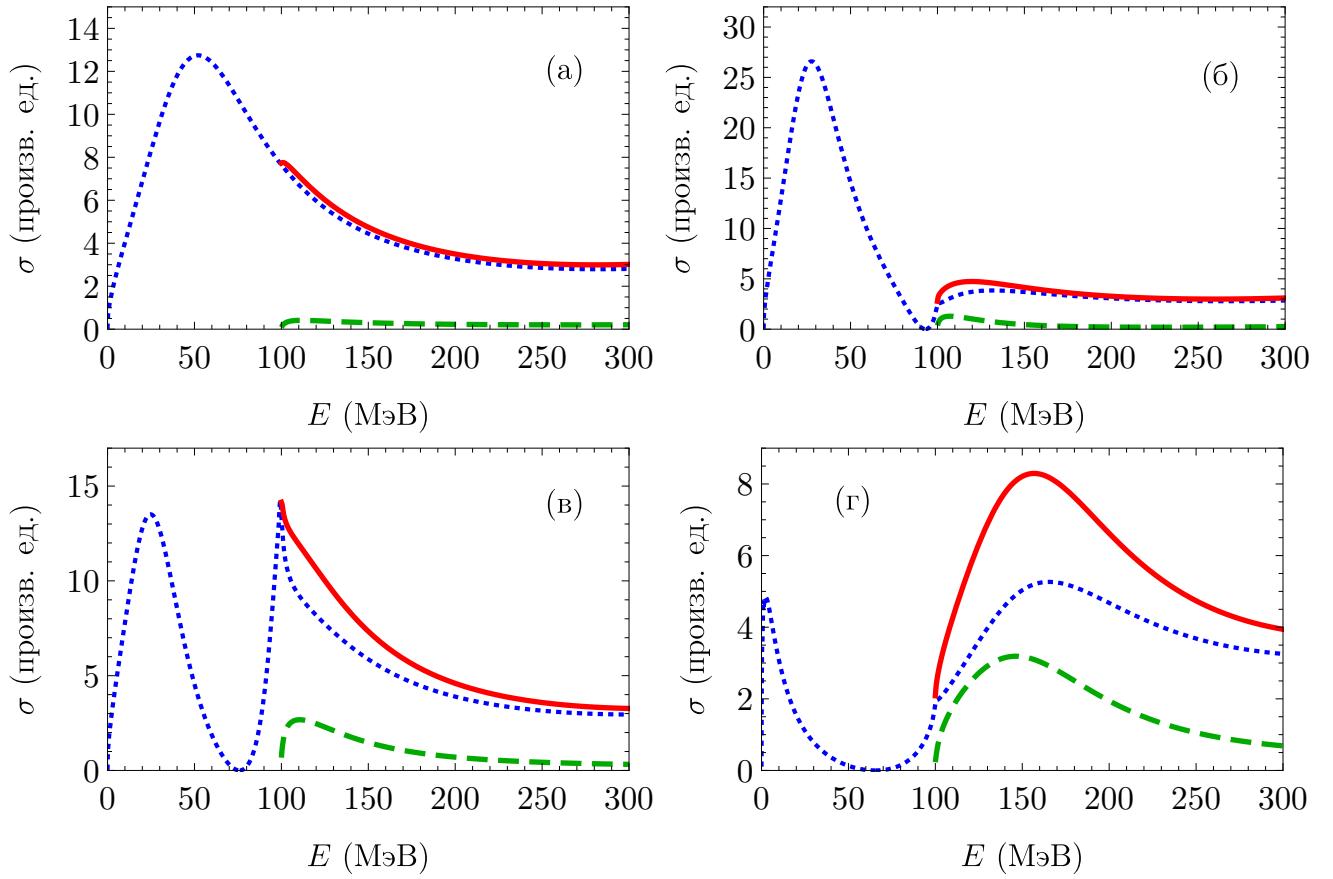


Рисунок 1.8 — Зависимости от энергии сечений  $\sigma^{(1)}$  (пунктирная линия),  $\sigma^{(2)}$  (штриховая линия) и их суммы (сплошная линия), см. (1.58). Используются параметры модели  $M = 1 \text{ ГэВ}$ ,  $\Delta_2 = 100 \text{ МэВ}$ ,  $a = 2 \text{ фм}$ ,  $U_{11} = -540 \text{ МэВ}$ ,  $U_{22} = -640 \text{ МэВ}$ ,  $g_1 = 1$ ,  $g_2 = 0,3$ . На графике (а)  $U_{12} = 0$ , на графике (б)  $U_{12} = -50 \text{ МэВ}$ , на графике (в)  $U_{12} = 50 \text{ МэВ}$ , а на графике (г)  $U_{12} = 100 \text{ МэВ}$

### Зависимость сечений от энергии в случае трёх каналов

Рассмотрим также процесс, в котором в конечном состоянии могут рождаться пары адронов трёх различных сортов с относительным орбитальным моментом  $L = 0$ . Пусть средняя масса  $M = 1 \text{ ГэВ}$ , а разницы масс  $M_2 - M_1 = 50 \text{ МэВ}$  и  $M_3 - M_1 = 100 \text{ МэВ}$ . Матрица потенциалов взаимодействия между адронами в случае трёх каналов имеет вид

$$\mathcal{V}(r) = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{12} & V_{22} & V_{23} \\ V_{13} & V_{23} & V_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

Как и раньше, будем использовать параметризацию потенциалов в виде прямоугольных потенциальных ям, имеющих глубины  $U_{ij}$  и общий радиус  $a = 2$  фм, то есть

$$V_{ij}(r) = U_{ij} \theta(a - r). \quad (1.64)$$

На рисунке 1.9 показаны зависимости сечений рождения пар адронов от энергии для разных значений недиагональных потенциалов в случае, когда в отсутствии смешивания во всех каналах присутствуют виртуальные уровни. На графике (а) недиагональные потенциалы равны нулю и в каждом канале присутствуют резонансные пики. По графикам (б) и (в) видно, что в зависимости от знаков недиагональных потенциалов интерференция между разными вкладами в сечения может привести как к существенному подавлению некоторых резонансных пиков, так и к тому, что пики станут более выражеными. На графике (г) взаимодействие между адронами привело к отсутствию пика во втором канале, а на графике (д) пик в третьем канале стал менее выраженным. На графике (е) показана ситуация, когда пик в первом канале сместился ниже по энергии и соответствует мелкому уровню под порогом.

На рисунке 1.10 представлены зависимости сечений рождения пар адронов от энергии для разных значений недиагональных потенциалов в случае, когда в отсутствии смешивания в первом канале присутствует виртуальный уровень, а во втором и третьем каналах имеется связанное состояние вблизи порога. По графику (в), например, видно, что смешивание между каналами может приводить к появлению резких пиков в сечении. Как уже упоминалось выше, это происходит из-за того, что теперь связанное состояние, например, во втором канале может распадаться в пару адронов сорта 1. В результате в сечении  $\sigma^{(1)}$  появляется выраженный пик ниже порога рождения адронов сорта 2. Похожие эффекты можно видеть и по другим графикам на рисунке 1.10. Взаимодействие между разными каналами может приводить к усилению либо подавлению пиков в сечениях. Причём заметное изменение сечений

наблюдается уже для недиагональных потенциалов, величина которых мала по сравнению характерными диагональными потенциалами, но сопоставима с энергиями мелких либо виртуальных уровней.

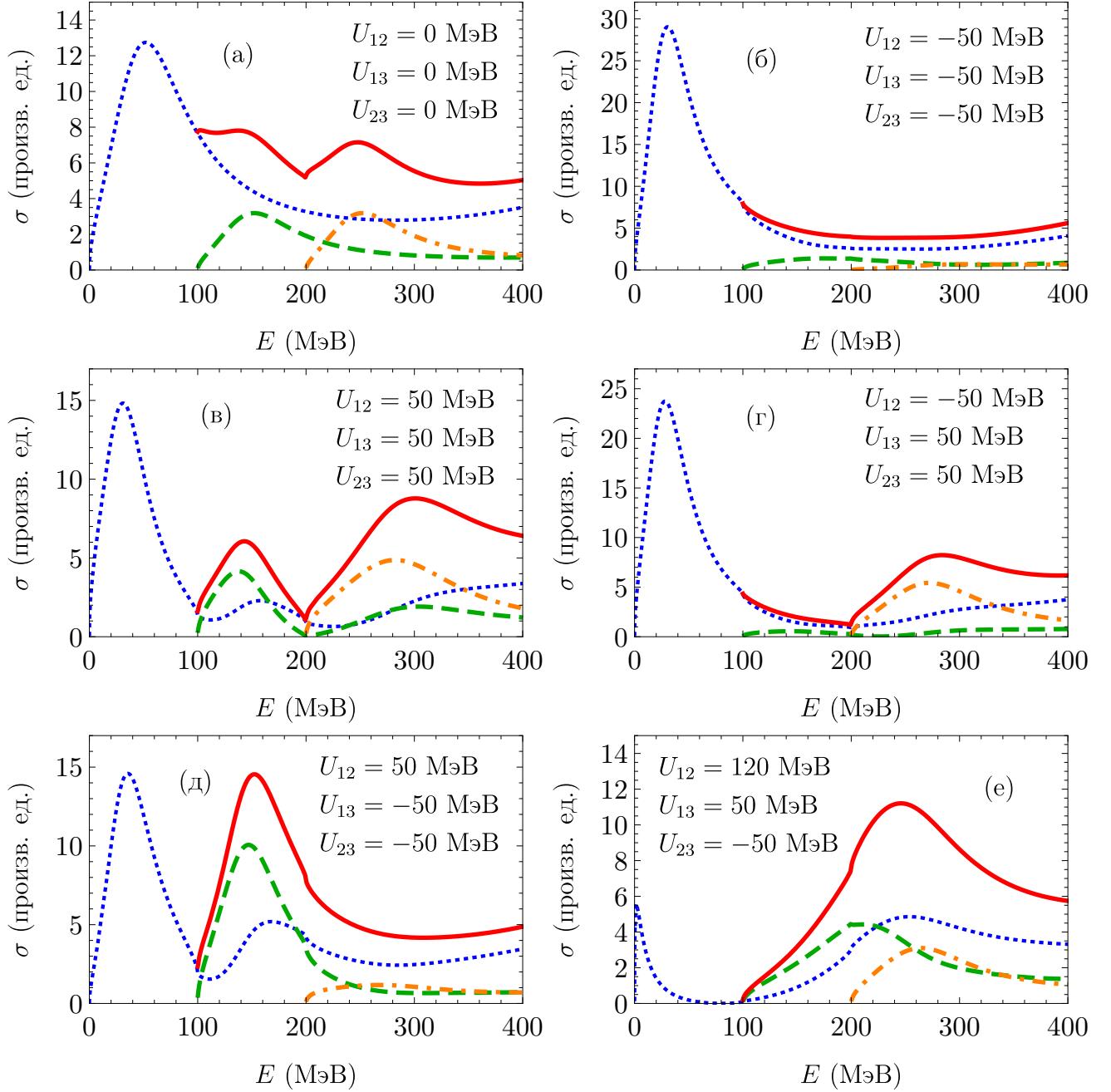


Рисунок 1.9 — Зависимости от энергии сечений  $\sigma^{(1)}$  (пунктирная линия),  $\sigma^{(2)}$  (штриховая линия),  $\sigma^{(3)}$  (штрих-пунктирная линия) и их суммы (сплошная линия), см. (1.58). Используются параметры модели  $M = 1 \text{ ГэВ}$ ,  $\Delta_2 = 100 \text{ МэВ}$ ,  $\Delta_3 = 200 \text{ МэВ}$ ,  $a = 2 \text{ фм}$ ,  $U_{11} = U_{22} = U_{33} = -540 \text{ МэВ}$ ,  $g_1 = 1$ ,  $g_2 = g_3 = 0,5$ . Недиагональные потенциалы  $U_{ij}$  подписаны на графиках

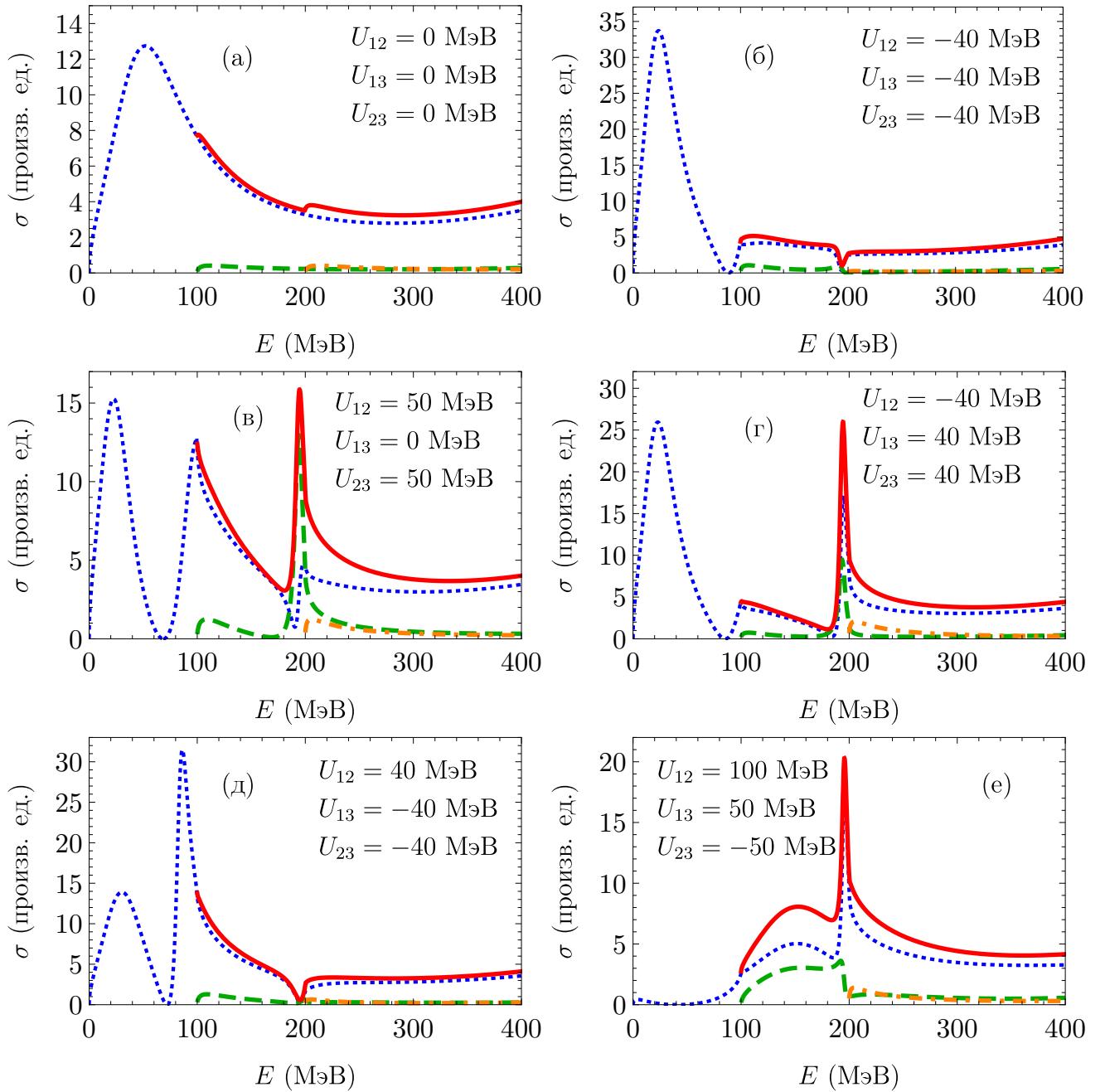


Рисунок 1.10 — Зависимости от энергии сечений  $\sigma^{(1)}$  (пунктирная линия),  $\sigma^{(2)}$  (штриховая линия),  $\sigma^{(3)}$  (штрих-пунктирная линия) и их суммы (сплошная линия), см. (1.58). Используются параметры модели  $M = 1$  ГэВ,  $\Delta_2 = 100$  МэВ,  $\Delta_3 = 200$  МэВ,  $a = 2$  фм,  $U_{11} = -540$  МэВ,  $U_{22} = U_{33} = -640$  МэВ,  $g_1 = 1$ ,  $g_2 = g_3 = 0,3$ . Недиагональные потенциалы  $U_{ij}$  подписаны на графиках

## Глава 2

# Рождение пар $\Lambda\bar{\Lambda}$ и $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$ в $e^+e^-$ аннигиляции

## 2.1. Описание процесса $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$

В этой главе мы приступаем к обсуждению конкретных процессов, в которых проявляются эффекты взаимодействия в конечном состоянии. Сначала рассмотрим процессы  $e^+e^-$  аннигиляции в пару барион-антибарион со спинами  $1/2$ . Возможные квантовые числа образующейся барион-антибарионной пары определяются законами сохранения. Поскольку основной вклад в сечение таких процессов даёт амплитуда с одним виртуальным фотоном в промежуточном состоянии, квантовые числа образовавшейся пары должны быть равны  $J^{PC} = 1^{--}$ . Пространственная и зарядовая чётности системы из бариона и антибариона связаны с орбитальным моментом  $L$  их относительного движения и их суммарным спином  $S$  соотношениями  $P = (-1)^{L+1}$ ,  $C = (-1)^{L+S}$ . Отсюда мы получаем, что  $S = 1$ , а  $L$  может быть равен 0 или 2. Вблизи порога реакции основной вклад в сечение процесса как правило дают состояния с наименьшим орбитальным моментом, то есть  $L = 0$ . Однако, как будет показано в разделе 2.2, состояния с  $L = 2$  в некоторых случаях также могут давать заметный вклад в сечение даже при низких энергиях. Кроме того, смешивание за счёт тензорных сил состояний с  $L = 0$  и  $L = 2$  должно приводить к отличию от единицы отношения электрического,  $G_E$ , и магнитного,  $G_M$ , формфакторов барионов.

Начнём с рассмотрения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ . Сечение этого процесса было измерено в диапазоне инвариантных масс  $M_{\Lambda\bar{\Lambda}}$  от порога (2,231 ГэВ) до 3,08 ГэВ на детекторах DM2 [29], BaBar [64] и BESIII [65–67]. Выяснилось, что сечение процесса в непосредственной близости от порога в несколько раз превышает значение, которое можно было бы ожидать, исходя из зависимости

фазового объёма конечного состояния от энергии. Это является прямым указанием на то, что для правильного теоретического описания энергетической зависимости сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  необходимо учитывать взаимодействие в конечном состоянии. В работах [99; 141] авторы рассматривали взаимодействие между  $\Lambda$  и  $\bar{\Lambda}$  в импульсном представлении, и им удалось получить удовлетворительное описание имевшихся на тот момент экспериментальных данных для сечения процесса. В некоторых работах предлагались и другие подходы к описанию сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ , например, с помощью параметризации, базирующейся на пертурбативной КХД [142], или с использованием параметров резонансов, вычисленных в рамках кварковой модели [143]. Здесь мы рассмотрим применение нашего подхода к описанию сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ .

Процесс  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  является наиболее простым для теоретического описания по нескольким причинам. Во-первых,  $\Lambda$ -гиперон состоит из夸克ов  $uds$ , причём пара  $ud$  находится в состоянии с изоспином  $I = 0$ . Таким образом, изотопический спин  $\Lambda$ -гиперона равен нулю, а значит и пара  $\Lambda\bar{\Lambda}$  может находиться только в состоянии с  $I = 0$ . Во-вторых,  $\Lambda$ -гиперон является электрически нейтральным, поэтому потенциал взаимодействия между  $\Lambda$  и  $\bar{\Lambda}$  определяется только сильным взаимодействием. В-третьих, имеющиеся на данных момент экспериментальные данные говорят о том, что отношение электромагнитных формфакторов  $\Lambda$ -гиперона,  $|G_E/G_M|$ , можно считать равным единице в довольно широком диапазоне энергий вблизи порога. Это отношение было измерено с хорошей точностью в эксперименте BESIII [66] для инвариантной массы  $M_{\Lambda\bar{\Lambda}} = 2,396$  ГэВ, и полученное значение,  $|G_E/G_M| = 0,96 \pm 0,14$ , согласуется с единицей в пределах экспериментальных погрешностей. Отношение  $|G_E/G_M|$  также измерялось в эксперименте BaBar [64], но точность этих измерений оказалась довольно низкой. Недавно на детекторе BESIII было проведено новое исследование свойств  $\Lambda$ -гиперона [144], которое показало, что, хотя абсолютная величина отношения  $G_E/G_M$  близка к единице, фаза отношения формфакто-

ров всё же зависит от энергии. Однако сильная зависимость фазы от энергии наблюдается довольно далеко от порога. Поэтому здесь мы считаем, что вблизи порога все имеющиеся на данный момент экспериментальные данные для процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  могут быть описаны без учёта вклада состояний с  $L = 2$  (это подтверждается результатами наших вычислений).

Таким образом, основной вклад в сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  вблизи порога должен даваться амплитудой рождения пары  $\Lambda\bar{\Lambda}$  в единственном состоянии с квантовыми числами  $L = 0, S = 1, I = 0$ . Тогда радиальная волновая функция  $\psi_0^{(R)}(r)$  пары  $\Lambda\bar{\Lambda}$ , образовавшейся в процессе  $e^+e^-$  аннигиляции, удовлетворяет уравнению Шрёдингера (1.15) с орбитальным моментом  $L = 0$ . Поскольку сечение аннигиляции пары  $\Lambda\bar{\Lambda}$  в лёгкие адроны мало, потенциал взаимодействия  $V(r)$  между  $\Lambda$  и  $\bar{\Lambda}$  можно считать вещественным. Как упоминалось ранее, предсказания, полученные в рамках нашего подхода, не сильно зависят от конкретной параметризации потенциала. Для простоты вычислений мы выбираем потенциал в виде прямоугольной ямы,  $V(r) = -V_0 \cdot \theta(a - r)$ , поскольку такая простая параметризация оказывается достаточной для хорошего описания экспериментальных данных. Глубина ямы  $V_0$  и радиус потенциала  $a$  являются свободными параметрами и должны определяться из сравнения предсказаний модели с экспериментальными данными.

С учётом сказанного выше, к задаче о рождении пары  $\Lambda\bar{\Lambda}$  в  $e^+e^-$  аннигиляции применимы результаты раздела 1.3. В частности, коэффициент усиления сечения за счёт взаимодействия в конечном состоянии равен (см. (1.40))

$$|\mathcal{F}_0|^2 = \frac{q^2}{q^2 \cos^2(qa) + k^2 \sin^2(qa)},$$

$$k = \sqrt{ME}, \quad q = \sqrt{M(E + V_0)}, \quad (2.1)$$

где  $M = 1115,7$  МэВ в этом разделе обозначает массу  $\Lambda$ -гиперона, а  $E$  — кинетическая энергия пары  $\Lambda\bar{\Lambda}$ . Так как основной вклад в сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  определяется переходом через один виртуальный фотон, амплитуда процесса с учётом фактора  $\mathcal{F}_0$ , связанного со взаимодействием в конечном

состоянии, может быть записана в виде

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu} = \frac{4\pi\alpha}{s} g F_D(s) \mathcal{F}_0 \boldsymbol{\epsilon}_\lambda^* \boldsymbol{e}_\mu. \quad (2.2)$$

Здесь  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры,  $s = (2M + E)^2$ ,  $\boldsymbol{e}_\mu$  — вектор поляризации виртуального фотона,  $\boldsymbol{\epsilon}_\lambda$  — спиновая волновая функция пары  $\Lambda\bar{\Lambda}$  (соответствующая спину  $S = 1$ ), индексы  $\mu$  и  $\lambda$  нумеруют возможные поляризации. Множитель  $g$  связан с амплитудой рождения夸克ов на малых расстояниях  $r \sim 1/\sqrt{s}$  и может считаться независящим от энергии. Его значение определяется из сравнения с экспериментальными данными. Для того, чтобы иметь возможность рассматривать больший диапазон энергий, мы ввели в формулу (2.2) дипольный формфактор  $\Lambda$ -гиперона

$$F_D(s) = \frac{1}{(1 - s/s_0)^2}, \quad (2.3)$$

учитывающий сильное взаимодействие на малых расстояниях. Такая эмпирическая параметризация электромагнитных формфакторов часто используется при описании взаимодействия барионов с фотонами (см., например, [145], §22). Параметр  $s_0$  мы выбрали равным  $1 \text{ ГэВ}^2$ , однако зависимость наших предсказаний от величины  $s_0$  довольно слабая.

Дифференциальное сечение процесса в системе центра масс связано с амплитудой (2.2) соотношением

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\lambda\mu} = \frac{\beta s}{64\pi^2} |\mathcal{T}_{\lambda\mu}|^2, \quad (2.4)$$

где  $\beta = k/M$  — скорость  $\Lambda$ -гиперонов. Усреднение по поляризациям виртуального фотона и суммирование по спиновым состояниям пары  $\Lambda\bar{\Lambda}$  можно выполнить с помощью соотношений

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu=1,2} e_\mu^i e_\mu^{*j} = \frac{1}{2} (\delta^{ij} - n^i n^j), \quad \sum_{\lambda=1,2,3} \epsilon_\lambda^i \epsilon_\lambda^{*j} = \delta^{ij}, \quad (2.5)$$

где  $\delta^{ij}$  — символ Кронекера, а  $\boldsymbol{n}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси столкновения пучков. Заметим, что суммирование идёт только по двум

возможным поляризациям виртуального фотона, поскольку аннигиляция ультрарелятивистских электрона и позитрона происходит только в состояниях с проекциями суммарного спина на ось столкновения равными  $\pm 1$ . После суммирования по спиновым состояниям частиц и интегрирования по телесному углу мы получаем сечение процесса

$$\sigma = \frac{\pi \beta \alpha^2}{s} g^2 F_D^2(s) |\mathcal{F}_0|^2, \quad (2.6)$$

где коэффициент усиления даётся выражением (2.1).

Для определения оптимальных значений параметров модели ( $V_0$ ,  $a$  и  $g$ ) мы минимизировали значение  $\chi^2$  (сумма квадратов стандартных отклонений предсказаний теории от экспериментальных значений сечения). Использовались данные, полученные на детекторах DM2 [29], BaBar [64] и BESIII [65–67]. В результате были найдены следующие значения параметров:  $V_0 = 584$  МэВ,  $a = 0,45$  фм,  $g = 2,37$  (эти результаты были представлены в нашей работе [120]). Соответствующее значение  $\chi^2/N_{\text{df}} = 37,6/29 = 1,3$ , где  $N_{\text{df}}$  — число степеней свободы, равное разнице количества экспериментальных точек и количества свободных параметров модели. Сравнение наших результатов для сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  с экспериментальными данными показано на рисунке 2.1(а). На рисунке 2.1(б) показана зависимость от энергии коэффициента усиления сечения за счёт взаимодействия в конечном состоянии. Очевидно, что учёт взаимодействия между  $\Lambda$  и  $\bar{\Lambda}$  является необходимым для правильного описания экспериментальных данных.

В рамках нашей модели предсказывается существование связанного состояния  $\Lambda$  и  $\bar{\Lambda}$  с энергией связи  $E_0 \approx -30$  МэВ. Такое состояние, если оно действительно существует, может проявлять себя и в других процессах, приводя к резкой зависимости сечений от энергии. Заметим, что в экспериментальных данных [88; 89; 146–153] существуют некоторые указания на аномальное поведение сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$ ,  $e^+e^- \rightarrow 2(K^+K^-)$ ,  $e^+e^- \rightarrow \phi K^+K^-$  и других при  $\sqrt{s} = 2.2$  ГэВ, что как раз соответствует энергии  $E \approx -30$  МэВ.

Анализ  $p\bar{\Lambda}$  и  $\Lambda\bar{\Lambda}$  взаимодействий, проведённый в работе [154], также качественно соответствует предположению о существовании связанного состояния  $\Lambda\bar{\Lambda}$ . Предположение о возможном существовании связанного состояния в системе  $\Lambda\bar{\Lambda}$  было высказано и в работе [155] на основе анализа данных для сечения процесса  $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ .

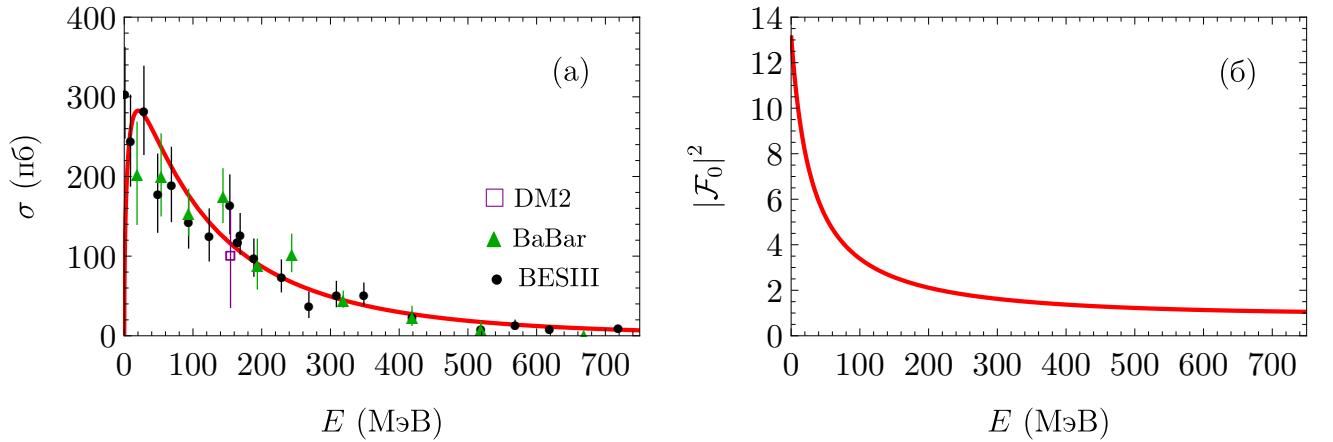


Рисунок 2.1 — Зависимости от энергии сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  (а) и коэффициента усиления сечения (б). Экспериментальные данные взяты из работ [29; 64–67]

## 2.2. Описание процесса $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$

В процессе  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  также наблюдаются эффекты, связанные с взаимодействием в конечном состоянии. В экспериментах Belle [68] и BESIII [69; 70] была измерена зависимость от энергии сечения этого процесса, а также отношения электромагнитных формфакторов  $\Lambda_c$ -бариона. Были также теоретические работы, посвящённые описанию этих экспериментальных данных с использованием разных подходов. Так авторы работы [156] пытались воспроизвести наблюдаемую в экспериментах [68; 69] зависимость сечения от энергии, параметризую резонансный вклад распределением Гаусса. В работах [98; 157] с использованием уравнения Липпмана-Швингера изучалось взаимодействие между  $\Lambda_c$  и  $\bar{\Lambda}_c$  в импульсном представлении, а авторы работ [158; 159] параметризовали

формфакторы  $\Lambda_c$ -бариона с помощью распределений Брейта-Вигнера.

Теоретическое описание процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  в рамках нашего подхода имеет много общего с описанием процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ , рассмотренным в предыдущем разделе, но есть и важные отличия. Первое очевидное отличие связано с тем, что  $\Lambda_c$  имеет заряд  $+1$ , а значит нужно учитывать кулоновское взаимодействие между  $\Lambda_c$  и  $\bar{\Lambda}_c$ . Второе отличие проистекает из того, что в эксперименте BESIII [69; 70] было получено существенное отличие от единицы отношения электромагнитных формфакторов  $\Lambda_c$  вблизи порога. Это говорит о необходимости учитывать не только амплитуду рождения состояний  $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  с орбитальным моментом  $L = 0$ , но и вклад состояний с  $L = 2$ . Поэтому следующий подраздел будет посвящён описанию взаимодействия в конечном состоянии с учётом смешивания состояний с разными орбитальными моментами.

### 2.2.1. Взаимодействие в конечном состоянии при наличии тензорных сил

Как известно из ядерной физики (см., например [1]), потенциал взаимодействия между барионами содержит вклад так называемых тензорных сил,  $V_T(\mathbf{r}) = V_T(r)S_{12}$ . Тензорный оператор  $S_{12}$  определяется соотношениями

$$S_{12} = 3(\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}) - (\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2) = 2 \left( 3(\mathbf{S} \mathbf{n})^2 - \mathbf{S}^2 \right), \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$  — единичный вектор,  $\boldsymbol{\sigma}_1$  и  $\boldsymbol{\sigma}_2$  — матрицы Паули (удвоенные операторы спина) для первой и второй частиц, а  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$  — оператор суммарного спина. Тензорный оператор сохраняет значение суммарного спина системы  $S$  и полного момента  $J$ , но может менять значение орбитального момента  $L$  на величину  $\pm 2$ . Таким образом, состояния системы со спином  $S = 1$ , полным моментом  $J$  и орбитальными моментами  $L = J - 1$  и  $L = J + 1$  смешиваются за счёт действия тензорных сил.

На примере процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  рассмотрим учёт тензорных сил при описании взаимодействия в конечном состоянии. Из законов сохранения, рас-

смотренных в начале этой главы (стр. 53), следует, что пара  $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$ , рождающаяся из виртуального фотона, может иметь следующие квантовые числа: суммарный спин  $S = 1$ , полный момент  $J = 1$ , орбитальный момент  $L = 0, 2$ . Поскольку  $\Lambda_c$ -барион имеет кварковый состав  $udc$ , где пара  $ud$  находится в состоянии с изоспином  $I = 0$ , то пара  $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  также может иметь единственное значение изотопического спина  $I = 0$ . Тогда амплитуда рождения пары  $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  в  $e^+e^-$  аннигиляции через один виртуальный фотон без учёта взаимодействия в конечном состоянии может быть записана в виде (см. аналогичные формулы в работе [111])

$$T_{\lambda\mu}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi\alpha}{s} F_D(s) \epsilon_\lambda^* \left( G_S \mathbf{e}_\mu + G_D \frac{\mathbf{k}^2 \mathbf{e}_\mu - 3\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{e}_\mu)}{6M^2} \right), \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{k}$  — импульс  $\Lambda_c$ -бариона в системе центра масс  $\Lambda_c$  и  $\bar{\Lambda}_c$ ,  $k = \sqrt{ME}$ ,  $s = (2M + E)^2$ ,  $M = 2286,5$  МэВ в этом разделе обозначает массу  $\Lambda_c$ -бариона,  $E$  — кинетическая энергия пары,  $\mathbf{e}_\mu$  — вектор поляризации виртуального фотона, а  $\epsilon_\lambda$  — спиновая волновая функция пары  $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  (с суммарным спином  $S = 1$ ). Константы  $G_S$  и  $G_D$  связаны с «голыми» формфакторами  $\Lambda_c$ -бариона и соответствуют амплитудам рождения на малых расстояниях состояний с орбитальными моментами  $L = 0$  и  $L = 2$ , соответственно. Дипольный формфактор  $F_D(s)$  определён в соответствии с формулой (2.3) с тем же значением параметра  $s_0 = 1$  ГэВ<sup>2</sup>.

По аналогии с формулой (1.5) учёт взаимодействия в конечном состоянии производится интегрированием затравочной амплитуды (2.8) с волновой функцией в импульсном представлении, а именно

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi\alpha}{s} F_D(s) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}\lambda}^{(-)*}(\mathbf{p}) \left( G_S \mathbf{e}_\mu + G_D \frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{e}_\mu - 3\mathbf{p}(\mathbf{p}\mathbf{e}_\mu)}{6M^2} \right). \quad (2.9)$$

Здесь  $\Phi_{\mathbf{k}\lambda}^{(-)}(\mathbf{p})$  — волновая функция пары  $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$ , получающаяся преобразованием Фурье (см. (1.3)) из координатной волновой функции  $\Psi_{\mathbf{k}\lambda}^{(-)}(\mathbf{r})$ , имеющей

асимптотику

$$\Psi_{\mathbf{k}\lambda}^{(-)}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikr} \boldsymbol{\epsilon}_\lambda + \frac{e^{-ikr}}{r} \sum_{\lambda'} f_{\lambda'\lambda} \boldsymbol{\epsilon}_{\lambda'} , \quad (2.10)$$

где  $f_{\lambda'\lambda}$  — некоторые функции энергии.

Координатную волновую функцию можно представить в виде разложения по векторным сферическим гармоникам  $\mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{\mathbf{r}})$ :

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{k}\lambda}^{(-)}(\mathbf{r}) = & \sum_{JM\alpha} D_\lambda^{JM\alpha} \left( u_{J\alpha}^*(r) \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\hat{\mathbf{r}}) + w_{J\alpha}^*(r) \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\hat{\mathbf{r}}) \right) + \\ & + \sum_{JM} D_\lambda^{JM} v_J^*(r) \mathbf{Y}_{JM}^J(\hat{\mathbf{r}}) , \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $D_\lambda^{JM\alpha}$  и  $D_\lambda^{JM}$  — некоторые коэффициенты. В этом разложении радиальные функции  $v_J(r)$  описывают состояния с  $L = J$ , а функции  $u_{J\alpha}(r)$  и  $w_{J\alpha}(r)$  описывают состояния с  $L = J - 1$  и  $L = J + 1$ , соответственно. Эти функции являются решениями системы радиальных уравнений Шрёдингера, явный вид которых зависит от структуры взаимодействия (см. ниже). Поскольку состояния с  $L = J \pm 1$  смешиваются за счёт действия тензорных сил, возможны два линейно независимых набора соответствующих волновых функций  $u_{J\alpha}(r)$  и  $w_{J\alpha}(r)$ . В разложении (2.11) эти наборы нумеруются индексом  $\alpha$ , принимающим значения 1 или 2. Напомним, что векторные сферические гармоники  $\mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{\mathbf{r}})$  являются собственными функциями операторов  $\mathbf{J}^2$ ,  $J_z$ ,  $\mathbf{L}^2$  и  $\mathbf{S}^2$  с собственными значениями  $J(J+1)$ ,  $M$ ,  $L(L+1)$ ,  $S(S+1)$ , соответственно, где  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ , а  $S = 1$ . Векторные сферические гармоники равны

$$\mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_m C_{Lm1,M-m}^{JM} Y_{Lm}(\hat{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\epsilon}_{M-m} , \quad (2.12)$$

где  $C_{Lm1\lambda}^{JM}$  — коэффициенты Клебша-Гордана.

Для определения коэффициентов  $D_\lambda^{JM\alpha}$  и  $D_\lambda^{JM}$  в разложении (2.11) получим асимптотику волновой функции при  $r \rightarrow \infty$ . Асимптотическое поведение

радиальных волновых функций определяется выражениями

$$\begin{aligned} u_{J1}(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} (S_{11}^J \chi_{J-1}^+ - \chi_{J-1}^-), & w_{J1}(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} S_{12}^J \chi_{J+1}^+, \\ u_{J2}(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} S_{21}^J \chi_{J-1}^+, & w_{J2}(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} (S_{22}^J \chi_{J+1}^+ - \chi_{J+1}^-), \\ v_J(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} (S_0^J \chi_J^+ - \chi_J^-), & \chi_l^\pm &= \frac{1}{kr} e^{\pm i(kr - l\pi/2)}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $S_0^J$  и  $S_{ij}^J$  — некоторые зависящие от энергии коэффициенты. С другой стороны, плоскую волну в асимптотике (2.10) можно представить в виде

$$e^{ikr} \boldsymbol{\epsilon}_\lambda = 4\pi \sum_{Lm} i^L j_L(kr) Y_{Lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{Lm}(\hat{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\epsilon}_\lambda. \quad (2.14)$$

Разложим это выражение по векторным сферическим гармоникам. Используя соотношение

$$Y_{Lm}(\hat{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\epsilon}_\lambda = \sum_{JM} C_{Lm1\lambda}^{JM} \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.15)$$

и асимптотику сферических функций Бесселя

$$j_L(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2ikr} \left( e^{i(kr - L\pi/2)} - e^{-i(kr - L\pi/2)} \right), \quad (2.16)$$

в результате получаем асимптотическое разложение плоской волны

$$\begin{aligned} e^{ikr} \boldsymbol{\epsilon}_\lambda &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 4\pi \sum_{JLM} i^L C_{L,M-\lambda,1\lambda}^{JM} Y_{L,M-\lambda}^*(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{\mathbf{r}}) \times \\ &\quad \times \frac{1}{2ikr} \left( e^{i(kr - L\pi/2)} - e^{-i(kr - L\pi/2)} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Сравнивая коэффициенты в этом разложении при расходящейся волне  $e^{ikr}$  с соответствующими коэффициентами в разложении (2.11) с учётом асимптотик (2.13), находим

$$\begin{aligned} D_\lambda^{JM} &= 4\pi i^J C_{J,M-\lambda,1\lambda}^{JM} Y_{J,M-\lambda}^*(\hat{\mathbf{k}}), \\ D_\lambda^{JM1} &= 4\pi i^{J-1} C_{J-1,M-\lambda,1\lambda}^{JM} Y_{J-1,M-\lambda}^*(\hat{\mathbf{k}}), \\ D_\lambda^{JM2} &= 4\pi i^{J+1} C_{J+1,M-\lambda,1\lambda}^{JM} Y_{J+1,M-\lambda}^*(\hat{\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Разложение для волновой функции в импульсном представлении выглядит аналогично (2.11), а именно

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{k}\lambda}^{(-)}(\mathbf{p}) = \sum_{JM\alpha} D_{\lambda}^{JM\alpha} \left( \tilde{u}_{J\alpha}^*(p) \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}(\hat{\mathbf{p}}) + \tilde{w}_{J\alpha}^*(p) \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}(\hat{\mathbf{p}}) \right) + \\ + \sum_{JM} D_{\lambda}^{JM} \tilde{v}_J^*(p) \mathbf{Y}_{JM}^J(\hat{\mathbf{p}}), \quad (2.19) \end{aligned}$$

где знак « $\tilde{\cdot}$ » над функцией обозначает соответствующую волновую функцию в импульсном представлении. Напомним, что преобразование радиальных волновых функций в импульсное представление происходит согласно формуле (1.10).

Теперь вычислим интегралы, входящие в амплитуду (2.9), учитывающую взаимодействие в конечном состоянии. Для первого слагаемого, содержащего коэффициент  $G_S$ , имеем

$$\begin{aligned} G_S \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}\lambda}^{(-)*}(\mathbf{p}) \mathbf{e}_\mu = G_S \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{M\alpha} D_{\lambda}^{1M\alpha*} \tilde{u}_{1\alpha}(p) Y_{00}^*(\hat{\mathbf{p}}) \epsilon_M^* \mathbf{e}_\mu = \\ = G_S \left( u_{11}(0) - \sqrt{4\pi} u_{12}(0) \sum_M C_{2,M-\lambda,1\lambda}^{1M} Y_{2,M-\lambda}(\hat{\mathbf{k}}) \right) \epsilon_\lambda^* \mathbf{e}_\mu = \\ = G_S \left( u_{11}(0) - \sqrt{5} C_{201\lambda}^{1\lambda} u_{12}(0) \right) \epsilon_\lambda^* \mathbf{e}_\mu. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Здесь для простоты ось квантования направлена вдоль вектора  $\mathbf{k}$ , а интегралы по импульсу, в соответствии с формулой (1.11), сводятся к значениям радиальных волновых функций при  $r = 0$ . Второе слагаемое в интеграле (2.9), содержащие коэффициент  $G_D$ , равно (с учётом выбора оси квантования вдоль  $\mathbf{k}$ )

$$\begin{aligned} G_D \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{e}_\mu - 3\mathbf{p}(\mathbf{p} \mathbf{e}_\mu)}{6M^2} \Phi_{\mathbf{k}\lambda}^{(-)*}(\mathbf{p}) = \\ = G_D \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{e}_\mu - 3\mathbf{p}(\mathbf{p} \mathbf{e}_\mu)}{6M^2} \sum_{Mm\alpha} D_{\lambda}^{1M\alpha*} \tilde{w}_{1\alpha}(p) C_{2m1,M-m}^{1M} Y_{2m}^*(\hat{\mathbf{p}}) \epsilon_{M-m}^* = \\ = -G_D \frac{5}{2\sqrt{2}M^2} \left( w_{11}''(0) - \sqrt{5} C_{201\lambda}^{1\lambda} w_{12}''(0) \right) \epsilon_\lambda^* \mathbf{e}_\mu. \quad (2.21) \end{aligned}$$

Здесь штрихи над радиальными функциями обозначают дифференцирование по радиусу.

Заметим, что амплитуда процесса с учётом взаимодействия в конечном состоянии должна иметь ту же структуру, что и затравочная амплитуда (2.8), а именно

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi\alpha}{s} F_D(s) \epsilon_{\lambda}^{*} \left( \mathcal{G}_S \mathbf{e}_{\mu} + \mathcal{G}_D \frac{\mathbf{k}^2 \mathbf{e}_{\mu} - 3\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{e}_{\mu})}{6M^2} \right). \quad (2.22)$$

Здесь коэффициенты  $\mathcal{G}_S$  и  $\mathcal{G}_D$  уже учитывают взаимодействие в конечном состоянии. Сравнивая выражение (2.22) со значениями интегралов, вычисленных в (2.20) и (2.21), мы находим

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_S &= G_S u_{11}(0) - \frac{5}{2\sqrt{2}M^2} G_D w''_{11}(0), \\ \mathcal{G}_D &= -\frac{6M^2}{\sqrt{2}k^2} G_S u_{12}(0) + \frac{15}{2k^2} G_D w''_{12}(0). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Поскольку мы рассматриваем взаимодействие пары адронов в нерелятивистском пределе, масса  $M$  является большим параметром задачи. Поэтому слагаемые в формулах (2.23), содержащие  $G_D$ , будут подавлены по сравнению со слагаемыми, содержащими  $G_S$ . Принимая во внимание также феноменологический характер наших моделей, мы в дальнейшем пренебрегаем вкладом этих малых слагаемых. В результате мы можем записать выражение для амплитуды, учитывающее взаимодействие в конечном состоянии, в виде

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi\alpha}{s} G_S F_D(s) \left\{ u_{11}(0) (\epsilon_{\lambda}^{*} \mathbf{e}_{\mu}) - \frac{u_{12}(0)}{\sqrt{2}} \left[ (\epsilon_{\lambda}^{*} \mathbf{e}_{\mu}) - 3(\hat{\mathbf{k}} \epsilon_{\lambda}^{*})(\hat{\mathbf{k}} \mathbf{e}_{\mu}) \right] \right\}. \quad (2.24)$$

Отличное от нуля значение  $u_{12}(0)$  возникает из-за влияния тензорных сил. Благодаря этому появляется заметный вклад  $D$ -волны в амплитуду процесса даже в таком приближении, когда на малых расстояниях содержится преимущественно  $S$ -волна.

Дифференциальное сечение рождения пары  $\Lambda_c \bar{\Lambda}_c$  в  $e^+e^-$  аннигиляции с учётом правил суммирования по поляризациям (2.5) можно привести к виду

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\beta s}{128\pi^2} \sum_{\lambda\mu} |\mathcal{T}_{\lambda\mu}|^2 = \frac{\beta\alpha^2}{4s} \left( |G_M|^2 (1 + \cos^2\theta) + \frac{4M^2}{s} |G_E|^2 \sin^2\theta \right). \quad (2.25)$$

Здесь  $\theta$  — угол между осью столкновения электрона с позитроном и направлением вылета одного из барионов, а  $G_E$  и  $G_M$  — электрический и магнитный формфакторы  $\Lambda_c$ -бариона, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{2M}{\sqrt{s}} G_E &= \frac{G_S F_D(s)}{\sqrt{2}} \left( u_{11}(0) + \sqrt{2} u_{12}(0) \right), \\ G_M &= \frac{G_S F_D(s)}{\sqrt{2}} \left( u_{11}(0) - \frac{1}{\sqrt{2}} u_{12}(0) \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Проинтегрированное по углам сечение рождения пары  $\Lambda_c \bar{\Lambda}_c$  равно

$$\sigma = \frac{2\pi\beta\alpha^2}{3s} \left( 2|G_M|^2 + \frac{4M^2}{s} |G_E|^2 \right) = \frac{\pi\beta\alpha^2}{s} G_S^2 F_D^2(s) \left( |u_{11}(0)|^2 + |u_{12}(0)|^2 \right). \quad (2.27)$$

Также из выражений (2.26) видно, что в оклопороговой области энергий (то есть  $E \ll 2M$ ) отношение электромагнитных формфакторов имеет вид

$$\frac{G_E}{G_M} = \frac{u_{11}(0) + \sqrt{2} u_{12}(0)}{u_{11}(0) - \frac{1}{\sqrt{2}} u_{12}(0)}. \quad (2.28)$$

Это отношение определяется только свойствами взаимодействия в конечном состоянии и не содержит других нормировочных множителей. Отсюда видно, что отличие отношения  $G_E/G_M$  от единицы вблизи порога возникает исключительно из-за влияния тензорных сил, приводящих к смешиванию состояний с орбитальными моментами  $L = 0$  и  $L = 2$ .

Из вышесказанного следует, что для вычисления значений волновых функций  $u_{11}(0)$  и  $u_{12}(0)$  необходимо найти два линейно независимых решения радиального уравнения Шрёдингера, описывающего взаимодействие  $\Lambda_c$  и  $\bar{\Lambda}_c$  в состояниях с квантовыми числами  $I = 0$ ,  $S = 1$ ,  $J = 1$ ,  $L = 0, 2$ . Это уравнение можно записать в виде

$$\left[ \frac{p_r^2}{M} + \mathcal{V}(r) - E \right] \Psi_{1\alpha}(r) = 0, \quad (2.29)$$

где  $\Psi_{1\alpha}(r) = (u_{1\alpha}(r), w_{1\alpha}(r))^T$  — двухкомпонентный вектор-столбец решений уравнения, а индекс  $\alpha$ , равный 1 или 2, нумерует линейно независимые решения. Верхняя компонента,  $u(r)$ , соответствует орбитальному моменту  $L = 0$ ,

а нижняя компонента,  $w(r)$ , соответствует  $L = 2$ . Эффективный потенциал взаимодействия (с учётом центробежного потенциала) содержит несколько вкладов, а именно

$$\mathcal{V}(r) = -\frac{\alpha}{r} + V_S(r)\delta_{L0} + \left(\frac{6}{Mr^2} + V_D(r)\right)\delta_{L2} + V_T(r)S_{12}. \quad (2.30)$$

Здесь первое слагаемое является вкладом кулоновского потенциала,  $V_S$  — потенциал взаимодействия в состоянии с  $L = 0$ ,  $V_D$  — потенциал взаимодействия в состоянии с  $L = 2$ , а  $V_T$  — тензорный потенциал. При действии на двухкомпонентный вектор  $\Psi_{1\alpha}(r)$  потенциал может быть представлен в виде матрицы

$$\mathcal{V}(r) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{r} + V_S & 2\sqrt{2}V_T \\ 2\sqrt{2}V_T & -\frac{\alpha}{r} + \frac{6}{Mr^2} + V_D - 2V_T \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Решения  $\Psi_{11}(r)$  и  $\Psi_{12}(r)$  определяются асимптотическим поведением их компонент при  $r \rightarrow \infty$  в соответствии с выражениями (2.13) для  $J = 1$ . Важно, однако, учитывать, что дальнодействующий кулоновский потенциал меняет асимптотику волновых функций на больших расстояниях. Поэтому при решении уравнения Шрёдингера в присутствии кулоновского потенциала в асимптотики волновых функций (2.13) должны входить расходящаяся и сходящаяся волны с учётом дополнительной кулоновской фазы, а именно

$$\begin{aligned} \chi_l^\pm &= \frac{1}{kr} \exp [\pm i (kr - l\pi/2 + \eta \ln(2kr) + \sigma_l)], \\ \sigma_l &= \frac{i}{2} \ln \frac{\Gamma(1 + l + i\eta)}{\Gamma(1 + l - i\eta)}, \quad \eta = \frac{M\alpha}{2k}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция Эйлера.

### 2.2.2. Сечение рождения $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$ в $e^+e^-$ аннигиляции

Теперь, когда мы построили теорию взаимодействия в конечном состоянии с учётом тензорных сил, перейдём непосредственно к описанию процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$ . Для описания взаимодействия  $\Lambda_c$  и  $\bar{\Lambda}_c$  в конечном состоянии нужно найти потенциалы  $V_S(r)$ ,  $V_D(r)$  и  $V_T(r)$  (см. формулу (2.30)). Поскольку при малой кинетической энергии частицы не особо чувствительны к

деталям взаимодействия, мы используем простой модельный потенциал  $\Lambda_c \bar{\Lambda}_c$  взаимодействия (соответствующие результаты были представлены в наших работах [117; 121]). Все три потенциала ( $S$ -волновой,  $D$ -волновой и тензорный) были параметризованы в виде прямоугольных ям

$$V_i(r) = U_i \cdot \theta(a_i - r), \quad i = S, D, T. \quad (2.33)$$

Кроме того, для удобства вычислений тензорный потенциал регуляризировался на малых расстояниях умножением на функцию

$$F(r) = \frac{(br)^2}{1 + (br)^2}, \quad (2.34)$$

где выбрано  $b = 10 \text{ фм}^{-1}$ . Такая регуляризация обеспечивает согласованность асимптотик решений уравнения (2.29),  $u(r)$  и  $w(r)$ , на малых расстояниях (а именно  $u(r) \sim \text{const}$ ,  $w(r) \sim r^2$ ). Отметим, что наши результаты практически не зависят от значения параметра  $b$ .

Для определения параметров потенциалов взаимодействия мы использовали экспериментальные данные, полученные на детекторе BESIII [69; 70]. Отметим, что сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c \bar{\Lambda}_c$  также было измерено на детекторе Belle [68], однако данные с этих двух детекторов противоречат друг другу в диапазоне инвариантных масс от 4,6 ГэВ до 4,65 ГэВ. Кроме того, более ранние данные Belle имеют существенно большие экспериментальные погрешности, чем более поздние данные BESIII. Вероятнее всего, опубликованные результаты с детектора Belle являются неверными в этом диапазоне инвариантных масс. Поэтому мы решили ограничиться рассмотрением только экспериментальных данных, полученных на BESIII. Оптимальные параметры потенциалов (2.33) были определены путём минимизации  $\chi^2$ , вычисленного по экспериментальным данным для сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c \bar{\Lambda}_c$ , абсолютной величины магнитного формфактора  $|G_M|$  и отношения  $|G_E/G_M|$ . Свободные параметры нашей модели включают в себя радиусы и глубины потенциальных ям, а также «голый»  $S$ -волновой формфактор  $G_S$ , определяющий общую

нормировку сечения (2.27). Потенциалы взаимодействия можно считать вещественными, поскольку сечение аннигиляции  $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  в лёгкие мезоны мало. Полученные значения параметров указаны в таблице 2.1, а соответствующее значение  $\chi^2/N_{\text{df}} = 46,9/34 = 1,38$ .

Таблица 2.1 — Параметры модели, описывающей взаимодействие  $\Lambda_c$  и  $\bar{\Lambda}_c$

	$V_S$	$V_D$	$V_T$
$U$ (МэВ)	-1180	-170	-64
$a$ (фм)	0,98	1,93	0,75
$G_S$	155,4		

На рисунке 2.2 показано сравнение результатов наших вычислений с экспериментальными данными BESIII. На графике (а) показана зависимость от энергии сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$ . Из-за влияния  $D$ -волны зависимость сечения от энергии имеет более сложный вид, чем, например, для процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  (ср. рисунок 2.1). В области энергий ниже 100 МэВ сечение выходит почти на константу, а при увеличении энергии начинается более резкое падение сечения. На рисунке 2.2(б) показана зависимость от энергии отношения электромагнитных формфакторов  $\Lambda_c$ -бариона во времениподобной области. Даже при энергии около 50 МэВ от порога это отношение существенно отличается от единицы. Как уже упоминалось выше, отличие отношения  $|G_E/G_M|$  от единицы является прямым свидетельством того, что для правильного описания взаимодействия между  $\Lambda_c$  и  $\bar{\Lambda}_c$  необходимо учитывать тензорные силы и вклад  $D$ -волны. В работе [70] авторы акцентируют внимание на осциллирующем характере зависимости  $|G_E/G_M|$  от энергии. Однако наши результаты показывают, что можно получить достаточно хорошее описание этих экспериментальных данных и без выраженных осцилляций. На графиках (в) и (г) показаны зависимости от энергии абсолютных величин магнитного и электрического формфакторов  $\Lambda_c$ -бариона, соответственно. На рисунке 2.2(д)

также показаны наши предсказания для зависимости от энергии фазы отношения электромагнитных формфакторов  $\arg(G_E/G_M)$ .

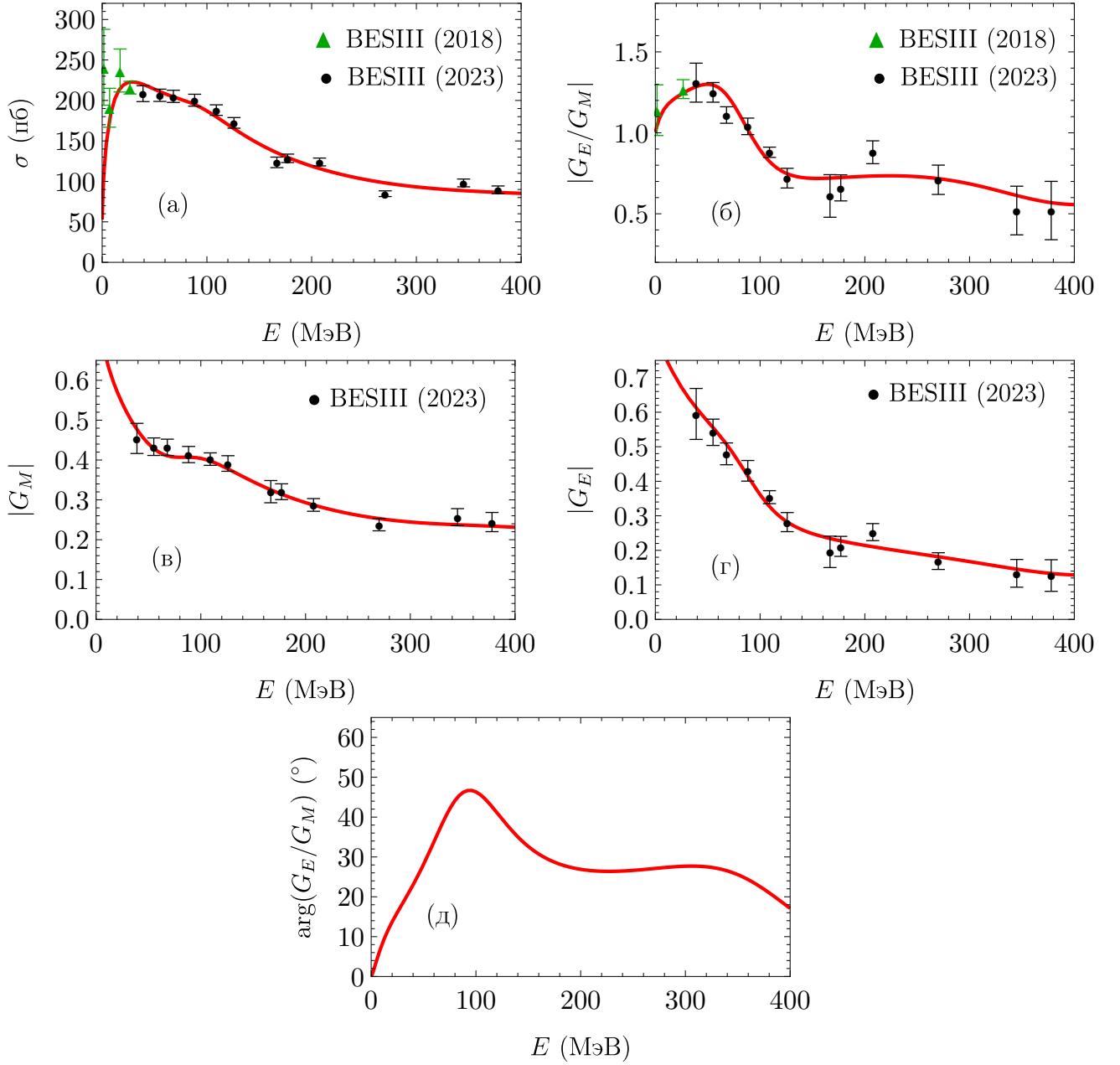


Рисунок 2.2 — Зависимости от энергии сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  (а), отношения электромагнитных формфакторов  $|G_E/G_M|$  (б), абсолютной величины магнитного формфактора  $|G_M|$  (в) и электрического формфактора  $|G_E|$  (г). Экспериментальные данные взяты из работ [69; 70]. На графике (д) показаны наши предсказания для зависимости от энергии фазы отношения электромагнитных формфакторов  $\arg(G_E/G_M)$

Новым эффектом, по сравнению с процессом  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ , рассмотренным в разделе 2.1, является то, что сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  не зануляется на пороге (см. рисунок 2.2(а)). Это связано с влиянием кулоновского взаимодействия между заряженными барионами. Важно отметить, однако, что влияние кулоновского взаимодействия не сводится к умножению сечения, вычисленного без учёта кулоновского притяжения,  $\sigma_0$ , на фактор Гамова-Зоммерфельда-Сахарова [132—135] для  $S$ -волны, равный

$$C = \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}}. \quad (2.35)$$

Действительно, кулоновский потенциал является одним из вкладов в потенциал взаимодействия (2.30) между  $\Lambda_c$  и  $\bar{\Lambda}_c$ , наравне с потенциалом сильного взаимодействия. Именно их совместный учёт даёт правильные предсказания поведения сечения вблизи порога. Сравнение точного сечения  $\sigma$ , вычисленного по формуле (2.27) с потенциалом (2.30), с сечением  $\sigma_0$ , вычисленным без учёта кулоновского потенциала, и сечением  $C\sigma_0$ , вычисленным с использованием фактора Гамова-Зоммерфельда-Сахарова (2.35), показано на рисунке 2.3. Видно, что в некоторых случаях использование фактора  $C$  только увеличивает расхождение с точным сечением.

В рамках нашей модели предсказывается существование связанного состояния  $\Lambda_c$  и  $\bar{\Lambda}_c$  при энергии около 40 МэВ ниже порога, что соответствует  $\sqrt{s} \approx 4530$  МэВ. Такое состояние, если оно действительно существует, может проявлять себя и в других процессах, приводя к резким скачкам сечений вблизи этой энергии.

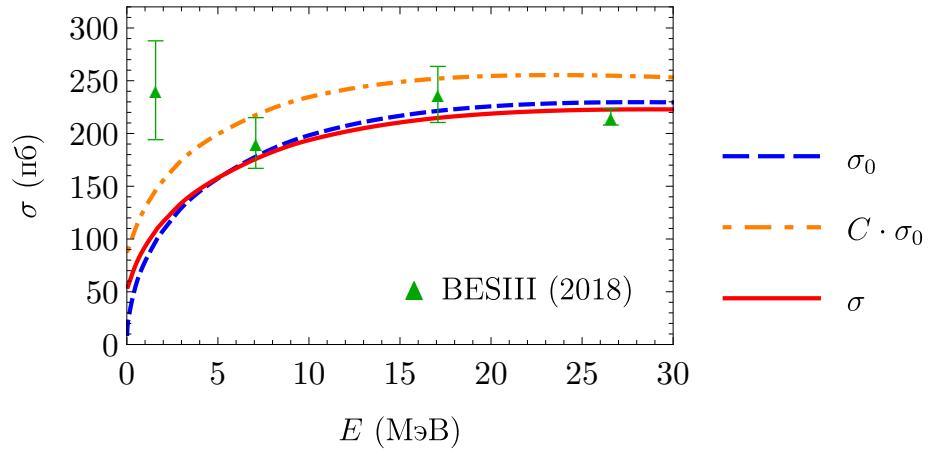


Рисунок 2.3 — Влияние кулоновского взаимодействия на зависимость от энергии сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  вблизи порога. Сплошная линия показывает точное сечение  $\sigma$ , вычисленное по формуле (2.27) с потенциалом (2.30). Штриховая линия показывает сечение  $\sigma_0$ , вычисленное по формуле (2.27), но без кулоновского потенциала. Штрих-пунктирная линия показывает сечение  $\sigma_0$ , умноженное на фактор  $C$  (2.35). Экспериментальные данные взяты из работы [69]

## Глава 3

# Нуклон-антинуклонное взаимодействие

Эта глава посвящена описанию нуклон-антинуклонного взаимодействия в рамках нашего подхода. Безусловно, нуклон-нуклонное и нуклон-антинуклонное взаимодействия являются наиболее изученными из всех адронных взаимодействий. Существует огромное количество экспериментальных данных, как по рассеянию нуклона на нуклоне и антинуклоне, так и по рождению нуклон-антинуклонных пар в различных процессах. Во многих процессах видны эффекты, связанные с нуклон-антинуклонным взаимодействием как в конечном, так и в промежуточном состоянии. К примеру, существенное усиление сечений вблизи порога было обнаружено в процессах  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  [26–37] и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$  [38–42]. Кроме того, в обоих этих процессах наблюдается нетривиальная зависимость от энергии отношений электромагнитных формфакторов нуклонов. Также в некоторых процессах с рождением лёгких мезонов видна резкая зависимость сечения от энергии вблизи порога рождения нуклон-антинуклонных пар [34; 85–89]. Все эти процессы будут рассмотрены в данной главе. Мы покажем, что взаимодействие нуклона с антинуклоном в конечном или промежуточном состоянии хорошо объясняет наблюдаемые эффекты. Сильная зависимость вероятности процесса от инвариантной массы пары  $p\bar{p}$  также наблюдается в распадах  $J/\psi$ - и  $B$ -мезонов на  $p\bar{p}$  и третью частицу ( $\gamma$ ,  $\omega$ ,  $\pi$ ,  $\eta$ ,  $K$ ) [45; 46; 48–50; 53; 55–59], но такие процессы будут рассмотрены в Главе 4.

### 3.1. Описание процессов $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$ и $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$

Как уже упоминалось в Главе 2 на стр. 53, квантовые числа пары барион-антибарион, рождающейся в процессе  $e^+e^-$  аннигиляции из виртуального фотона, могут иметь следующие значения: суммарный спин  $S = 1$ , полный момент  $J = 1$ , орбитальный момент  $L = 0$  или  $L = 2$ . Однако важным отличи-

ем нуклонов от  $\Lambda$ -гиперона или  $\Lambda_c$ -бариона является значение изотопического спина. Как известно, протон и нейтрон имеют изоспин  $I = 1/2$ , причём для протона  $I_z = +1/2$ , а для нейтрона  $I_z = -1/2$ . Поэтому нуклон-антинуклонная пара, рождённая в  $e^+e^-$  аннигиляции, может существовать в двух изоспиновых состояниях, а именно

$$|I = 0, I_z = 0\rangle = \frac{|p\bar{p}\rangle + |n\bar{n}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |I = 1, I_z = 0\rangle = \frac{|p\bar{p}\rangle - |n\bar{n}\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.1)$$

Поскольку изотопический спин не сохраняется в электромагнитных взаимодействиях, при аннигиляции электрон-позитронной пары образуется нуклон-антинуклонная пара, находящаяся в суперпозиции состояний с  $I = 0$  и  $I = 1$ . Также, из-за различия масс протона и нейтрона пороги рождения состояний  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$  отличаются на 2,6 МэВ, что важно учитывать при описании новейших прецизионных экспериментальных данных, полученных вблизи этих порогов. Наконец, чтобы учесть большое сечение аннигиляции состояний  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$  в лёгкие мезоны, нужно использовать оптический потенциал нуклон-антинуклонного взаимодействия, содержащий мнимую часть. Все эти факторы приводят к тому, что теоретическое описание нуклон-антинуклонного взаимодействия устроено значительно сложнее, чем описание взаимодействия  $\Lambda\bar{\Lambda}$  или  $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$ .

В ранних теоретических работах, посвящённых рассмотрению нуклон-антинуклонного взаимодействия в конечном состоянии, использовались простые модели, выражающие сечения процессов через длины рассеяния [103; 131] или использующие параметризацию Брейта-Вигнера [108]. Были и работы, в которых сечения рождения  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$  вычислялись с использованием различных потенциалов нуклон-антинуклонного взаимодействия [97; 100; 101; 107]. Обсуждающаяся ниже теория была представлена в наших работах [111; 112; 115; 119] и более ранних. Основные формулы мы приводим в этой главе без подробного вывода, поскольку их можно получить аналогично формулам из Главы 2.

### 3.1.1. Сечения рождения $p\bar{p}$ и $n\bar{n}$ в $e^+e^-$ аннигиляции

Из-за различия масс протона и нейтрона удобнее использовать не изоспиновый базис (3.1), а базис, содержащий состояния с определённой массой,  $|p\bar{p}\rangle$  и  $|n\bar{n}\rangle$ . Поскольку в  $e^+e^-$  аннигиляции эти состояния могут рождаться как в  $S$ -волне, так и в  $D$ -волне, всего мы имеем четыре возможных базисных состояния. Тогда любое состояние системы  $N\bar{N}$ , образовавшееся в рассматриваемой реакции, можно описать четырёхкомпонентной волновой функцией

$$\Psi(r) = (u_p(r), w_p(r), u_n(r), w_n(r))^T, \quad (3.2)$$

где радиальные функции  $u(r)$  соответствуют состояниям с  $L = 0$ ,  $w(r)$  соответствуют состояниям с  $L = 2$ , нижние индексы  $p$  и  $n$  отвечают состояниям  $|p\bar{p}\rangle$  и  $|n\bar{n}\rangle$ , соответственно, а верхний индекс  $T$  обозначает транспонирование. Четырёхкомпонентная волновая функция должна удовлетворять системе радиальных уравнений Шредингера, которую можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left[ \frac{p_r^2}{M} + \mathcal{V}(r) - \mathbb{E} \right] \Psi(r) &= 0, \\ \mathbb{E} &= \begin{pmatrix} E \cdot \mathbb{I} & 0 \\ 0 & (E - 2\Delta) \cdot \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ M &= \frac{1}{2} (M_p + M_n), \quad \Delta = M_n - M_p. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $M_p = 938,3$  МэВ и  $M_n = 939,6$  МэВ — массы протона и нейтрона, соответственно,  $E$  — кинетическая энергия пары, отсчитываемая от порога рождения  $p\bar{p}$ ,  $\mathbb{E}$  — блочная матрица  $4 \times 4$ ,  $\mathbb{I}$  — единичная матрица  $2 \times 2$ , а  $\mathcal{V}(r)$  — матрица потенциалов.

Потенциал  $\mathcal{V}(r)$  в уравнении (3.3) описывает как нуклон-антинуклонное взаимодействие в состояниях  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$ , так и переходы между этими состояниями. Этот потенциал можно представить в виде блочной матрицы  $4 \times 4$ ,

$$\mathcal{V}(r) = \begin{pmatrix} \mathcal{V}^{pp} & \mathcal{V}^{pn} \\ \mathcal{V}^{pn} & \mathcal{V}^{nn} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

чьи элементы задаются соотношениями

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{pp} &= \frac{1}{2} (\mathcal{U}^0 + \mathcal{U}^1) - \frac{\alpha}{r} \mathbb{I} + \mathcal{U}_{\text{цб}}, \\ \mathcal{V}^{nn} &= \frac{1}{2} (\mathcal{U}^0 + \mathcal{U}^1) + \mathcal{U}_{\text{цб}}, \quad \mathcal{V}^{pn} = \frac{1}{2} (\mathcal{U}^0 - \mathcal{U}^1), \\ \mathcal{U}^I &= \begin{pmatrix} V_S^I & 2\sqrt{2}V_T^I \\ 2\sqrt{2}V_T^I & V_D^I - 2V_T^I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_{\text{цб}} = \frac{6}{Mr^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Здесь  $\mathcal{U}^0$  и  $\mathcal{U}^1$  — потенциалы взаимодействия в состояниях с изоспинами  $I = 0$  и  $I = 1$ , соответственно, а  $\mathcal{U}_{\text{цб}}$  — центробежный потенциал, присутствующий только в  $D$ -волне. Функции  $V_S^I(r)$ ,  $V_D^I(r)$  и  $V_T^I(r)$  являются, соответственно,  $S$ -волновым,  $D$ -волновым, и тензорным вкладами в потенциал взаимодействия с изоспином  $I$  (они определены для каждого значения изоспина аналогично выражению (2.30)).

Уравнение (3.3) имеет четыре линейно независимых, регулярных при  $r = 0$  решения, которые определяются своими асимптотиками на больших расстояниях:

$$\begin{aligned}\Psi_1^{(R)}(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} (S_{11}\chi_{p0}^+ - \chi_{p0}^-, S_{12}\chi_{p2}^+, S_{13}\chi_{n0}^+, S_{14}\chi_{n2}^+)^T, \\ \Psi_2^{(R)}(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} (S_{21}\chi_{p0}^+, S_{22}\chi_{p2}^+ - \chi_{p2}^-, S_{23}\chi_{n0}^+, S_{24}\chi_{n2}^+)^T, \\ \Psi_3^{(R)}(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} (S_{31}\chi_{p0}^+, S_{32}\chi_{p2}^+, S_{33}\chi_{n0}^+ - \chi_{n0}^-, S_{34}\chi_{n2}^+)^T, \\ \Psi_4^{(R)}(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} (S_{41}\chi_{p0}^+, S_{42}\chi_{p2}^+, S_{43}\chi_{n0}^+, S_{44}\chi_{n2}^+ - \chi_{n2}^-)^T.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Здесь  $S_{ij}$  — некоторые функции энергии, а расходящиеся и сходящиеся волны задаются выражениями

$$\begin{aligned}\chi_{pl}^\pm &= \frac{1}{k_p r} \exp \left[ \pm i (k_p r - l\pi/2 + \eta \ln(2k_p r) + \sigma_l) \right], \\ \chi_{nl}^\pm &= \frac{1}{k_n r} \exp \left[ \pm i (k_n r - l\pi/2) \right], \\ \sigma_l &= \frac{i}{2} \ln \frac{\Gamma(1 + l + i\eta)}{\Gamma(1 + l - i\eta)}, \quad \eta = \frac{M\alpha}{2k_p}, \\ k_p &= \sqrt{ME}, \quad k_n = \sqrt{M(E - 2\Delta)}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Для вывода формул для амплитуд рождения  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$  с учётом взаимодействия в конечном состоянии нужно одновременно учесть как наличие двух состояний с разными порогами, так и влияние тензорных сил. По отдельности эти эффекты уже были рассмотрены в разделах 1.4 и 2.2.1. Поэтому здесь мы не будем повторять полный вывод и сразу напишем результат для амплитуд рождения  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$  в  $e^+e^-$  аннигиляции через виртуальный фотон (ср. (1.57) и (2.24)):

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\lambda\mu}^{p\bar{p}} &= \frac{4\pi\alpha}{s} F_D(s) \left\{ \left( g_p u_{p1}^{(R)}(0) + g_n u_{n1}^{(R)}(0) \right) (\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^* \mathbf{e}_\mu) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( g_p u_{p2}^{(R)}(0) + g_n u_{n2}^{(R)}(0) \right) \left[ (\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^* \mathbf{e}_\mu) - 3(\hat{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}_\lambda^*) (\hat{\mathbf{k}} \mathbf{e}_\mu) \right] \right\}, \\ \mathcal{T}_{\lambda\mu}^{n\bar{n}} &= \frac{4\pi\alpha}{s} F_D(s) \left\{ \left( g_p u_{p3}^{(R)}(0) + g_n u_{n3}^{(R)}(0) \right) (\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^* \mathbf{e}_\mu) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( g_p u_{p4}^{(R)}(0) + g_n u_{n4}^{(R)}(0) \right) \left[ (\boldsymbol{\epsilon}_\lambda^* \mathbf{e}_\mu) - 3(\hat{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}_\lambda^*) (\hat{\mathbf{k}} \mathbf{e}_\mu) \right] \right\}. \quad (3.8)\end{aligned}$$

Здесь  $s = (2M_p + E)^2$ ,  $\mathbf{e}_\mu$  — вектор поляризации виртуального фотона,  $\boldsymbol{\epsilon}_\lambda$  — спиновая волновая функция нуклон-антинуклонной пары, соответствующая спину  $S = 1$ , индексы  $\mu$  и  $\lambda$  нумеруют поляризации, а функции  $u_{pj}^{(R)}$  и  $u_{nj}^{(R)}$  являются первой и третьей компонентами соответствующих решений  $\Psi_j^{(R)}$  (см. (3.2) и (3.6)). Множители  $g_p$  и  $g_n$  связаны с амплитудами рождения состояний  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$  на малых расстояниях  $\sim 1/\sqrt{s}$  и вблизи порога могут считаться независящими от энергии комплексными константами. Их значение должно определяться из сравнения предсказаний модели с экспериментальными данными. Для того, чтобы иметь возможность рассматривать больший диапазон энергий, мы также ввели в формулы (3.8) феноменологический дипольный формфактор нуклона

$$F_D(s) = \frac{1}{(1 - s/s_0)^2}, \quad (3.9)$$

где  $s_0 = 0,71 \text{ ГэВ}^2$  (см. [145], §22).

Электрический и магнитный формфакторы протона и нейтрона во временноподобной области связаны со значениями волновых функций в нуле соотно-

шениями (ср. (2.26))

$$\begin{aligned}
 G_E^p &= \frac{\sqrt{s}}{2M} \frac{F_D(s)}{\sqrt{2}} \left\{ g_p u_{p1}^{(R)}(0) + g_n u_{n1}^{(R)}(0) + \sqrt{2} \left( g_p u_{p2}^{(R)}(0) + g_n u_{n2}^{(R)}(0) \right) \right\}, \\
 G_M^p &= \frac{F_D(s)}{\sqrt{2}} \left\{ g_p u_{p1}^{(R)}(0) + g_n u_{n1}^{(R)}(0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( g_p u_{p2}^{(R)}(0) + g_n u_{n2}^{(R)}(0) \right) \right\}, \\
 G_E^n &= \frac{\sqrt{s}}{2M} \frac{F_D(s)}{\sqrt{2}} \left\{ g_p u_{p3}^{(R)}(0) + g_n u_{n3}^{(R)}(0) + \sqrt{2} \left( g_p u_{p4}^{(R)}(0) + g_n u_{n4}^{(R)}(0) \right) \right\}, \\
 G_M^n &= \frac{F_D(s)}{\sqrt{2}} \left\{ g_p u_{p3}^{(R)}(0) + g_n u_{n3}^{(R)}(0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( g_p u_{p4}^{(R)}(0) + g_n u_{n4}^{(R)}(0) \right) \right\}. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Тогда сечения рождения реальных пар  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$  в  $e^+e^-$  аннигиляции (которые мы называем упругими сечениями, см. раздел 1.2 на стр. 29) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{упр}}^p &= \frac{\pi k_p \alpha^2}{M s} F_D^2(s) \left[ \left| g_p u_{p1}^{(R)}(0) + g_n u_{n1}^{(R)}(0) \right|^2 + \left| g_p u_{p2}^{(R)}(0) + g_n u_{n2}^{(R)}(0) \right|^2 \right], \\
 \sigma_{\text{упр}}^n &= \frac{\pi k_n \alpha^2}{M s} F_D^2(s) \left[ \left| g_p u_{p3}^{(R)}(0) + g_n u_{n3}^{(R)}(0) \right|^2 + \left| g_p u_{p4}^{(R)}(0) + g_n u_{n4}^{(R)}(0) \right|^2 \right]. \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

### 3.1.2. Сечения нуклон-антинуклонного рассеяния

Обратим внимание на то, что асимптотики радиальных волновых функций (3.6) совпадают с асимптотиками, используемыми при решении задачи о рассеянии нуклона на антинуклоне. Действительно, эти асимптотики содержат сходящуюся сферическую волну в одной из компонент волновой функции, а также расходящиеся сферические волны. Таким образом, коэффициенты  $S_{ij}$  перед расходящимися сферическими волнами в выражениях (3.6) есть не что иное, как элементы  $S$ -матрицы рассеяния в пространстве рассматриваемых состояний нуклон-антинуклонной системы. Однако эта  $S$ -матрица не является унитарной, поскольку возможно неупругое рассеяние нуклона на антинуклоне с рождением мезонов.

Как известно, парциальные сечения рассеяния связаны с соответствующими элементами  $S$ -матрицы. В нашей задаче встречаются только элементы

$S$ -матрицы нуклон-антинуклонного рассеяния в состоянии с суммарным спином  $S = 1$  и полным моментом  $J = 1$ . Поэтому мы приведём без вывода важные для нас соотношения между этими элементами  $S$ -матрицы и вкладами соответствующих парциальных волн в сечения нуклон-антинуклонного рассеяния. Парциальные вклады в упругое и полное сечения протон-антинуклонного рассеяния, а также в сечения процесса перезарядки ( $p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}$ ) равны

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{упр}}(^3S_1) &= \frac{3\pi}{4k_p^2} |1 - S_{11}|^2, & \sigma_{\text{упр}}(^3D_1) &= \frac{3\pi}{4k_p^2} |1 - S_{22}|^2, \\
 \sigma_{\text{упр}}(^3S_1 \rightarrow ^3D_1) &= \frac{3\pi}{4k_p^2} |S_{12}|^2, & & \\
 \sigma_{\text{полн}}(^3S_1) &= \frac{3\pi}{2k_p^2} \operatorname{Re}(1 - S_{11}), & \sigma_{\text{полн}}(^3D_1) &= \frac{3\pi}{2k_p^2} \operatorname{Re}(1 - S_{22}), \\
 \sigma_{\text{пер}}(^3S_1) &= \frac{3\pi}{4k_p^2} |S_{13}|^2, & \sigma_{\text{пер}}(^3S_1 \rightarrow ^3D_1) &= \frac{3\pi}{4k_p^2} |S_{14}|^2, \\
 \sigma_{\text{пер}}(^3D_1) &= \frac{3\pi}{4k_p^2} |S_{24}|^2, & \sigma_{\text{пер}}(^3D_1 \rightarrow ^3S_1) &= \frac{3\pi}{4k_p^2} |S_{23}|^2. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Здесь элементы  $S$ -матрицы рассеяния  $S_{ij}$  определяются асимптотиками (3.6).

### 3.1.3. Модель $N\bar{N}$ взаимодействия и описание экспериментальных данных

Как уже неоднократно говорилось в предыдущих главах, при описании припорогового поведения сечений процессов и формфакторов адронов можно выбирать различные параметризации потенциала взаимодействия. При подходящем выборе значений параметров потенциалов разные модели будут давать близкие предсказания для экспериментально наблюдаемых величин. Напомним, это связано с тем, что характерный размер волновой функции пары адронов, имеющих малые относительные скорости, велик по сравнению с характерным радиусом взаимодействия. В таком случае детали взаимодействия между адронами не играют определяющей роли. Как оказалось, имеющиеся на данный момент полноценные модели нуклон-антинуклонного взаимодействия (см., например, [12; 14; 19]), применяющиеся при описании  $N\bar{N}$  рассеяния,

по разным причинам плохо подходят для вычисления волновых функций при  $r \rightarrow 0$ . Поэтому в работах [112; 115; 119] мы предложили свою простую модель нуклон-антинуклонного взаимодействия, которая ограничивается описанием состояний со спином  $S = 1$  и полным моментом  $J = 1$ , ведь в процессе  $e^+e^-$  аннигиляции рождаются  $N\bar{N}$  пары только с такими квантовыми числами. Здесь мы кратко опишем нашу модель нуклон-антинуклонного взаимодействия.

Потенциалы взаимодействия  $V_S(r)$ ,  $V_D(r)$  и  $V_T(r)$ , входящие в матрицу (3.5), содержат вклады, связанные с изоскалярным обменом и изовекторным обменом, то есть

$$V_i(r) = \tilde{U}_i^0(r) + (\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2) \tilde{U}_i^1(r), \quad i = S, D, T, \quad (3.13)$$

где  $\boldsymbol{\tau}_1$  и  $\boldsymbol{\tau}_2$  — изоспиновые матрицы Паули. Тогда потенциалы взаимодействия в каналах с изоспинами  $I = 0$  и  $I = 1$ , входящие в формулу (3.5), равны

$$V_i^0(r) = \tilde{U}_i^0(r) - 3 \tilde{U}_i^1(r), \quad V_i^1(r) = \tilde{U}_i^0(r) + \tilde{U}_i^1(r), \quad i = S, D, T. \quad (3.14)$$

Для потенциалов изоскалярного и изовекторного обмена мы используем следующую простую параметризацию:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i^0(r) &= (U_i^0 - i W_i^0) \theta(a_i^0 - r), \\ \tilde{U}_i^1(r) &= (U_i^1 - i W_i^1) \theta(a_i^1 - r) + U_i^\pi(r) \theta(r - a_i^1), \quad i = S, D, T. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь  $U_i^\pi(r)$  — дальнодействующие вклады в потенциалы изовекторного обмена, связанные с обменом пионами, а короткодействующие вклады представляют из себя прямоугольные потенциальные ямы. Обращаем внимание на то, что потенциалы на малых расстояниях содержат мнимую часть, что позволяет феноменологически описывать аннигиляцию нуклон-антинуклонной пары в лёгкие мезоны. Наш анализ показывает, что можно считать радиусы вещественных и мнимых частей потенциальных ям одинаковыми. Кроме того, для удобства вычислений тензорный потенциал регуляризовывался на малых рас-

стояниях умножением на функцию

$$F(r) = \frac{(br)^2}{1 + (br)^2}, \quad (3.16)$$

где выбрано  $b = 10 \text{ фм}^{-1}$ . Вклады обмена пионами в потенциалы нуклон-антинуклонного взаимодействия отличаются знаком от соответствующих вкладов в нуклон-нуклонные потенциалы, что связано с отрицательной  $G$ -чётностью пионов. В результате имеем (см., например, [1])

$$\begin{aligned} U_S^\pi(r) &= U_D^\pi(r) = -f_\pi^2 \frac{e^{-m_\pi r}}{3r}, \\ U_T^\pi(r) &= -f_\pi^2 \left( 1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{(m_\pi r)^2} \right) \frac{e^{-m_\pi r}}{3r}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь  $m_\pi = 135 \text{ МэВ}$  — масса пиона, а константа связи пиона с нуклоном известна из экспериментов по пион-нуклонному и нуклон-нуклонному рассеянию и равна  $f_\pi^2 = 0,075$ . Таким образом, свободными параметрами модели являются величины вещественной,  $U_i^I$ , и мнимой,  $W_i^I$ , частей короткодействующих потенциалов, их радиусы,  $a_i^I$ , а также комплексные коэффициенты  $g_p$  и  $g_n$ , определяющие амплитуды вероятности рождения  $N\bar{N}$  пары на малых расстояниях.

Параметры нашей модели мы подбираем так, чтобы наилучшим образом описывать имеющиеся экспериментальные данные, полученные при изучении нуклон-антинуклонного рассеяния и процессов рождения нуклон-антинуклонных пар в  $e^+e^-$  аннигиляции. Во-первых, мы используем результаты анализа данных по нуклон-антинуклонному рассеянию, проведённого неймегенской группой [14], где определены парциальные сечения протон-антинпротонного рассеяния, а также процесса перезарядки  $p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}$ . Во-вторых, мы учитываем данные для сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$ , полученные в разные годы на детекторах BaBar [31], CMD-3 [33; 34], SND [41], и BESIII [36; 37; 40]. В-третьих, мы описываем имеющиеся экспериментальные данные для электромагнитных формфакторов протона и нейтрона. Для решения задачи оптимизации с большим числом свободных параметров, а также анализа полученных

результатов автором диссертации было разработано специализированное программное обеспечение на языке программирования C++.

Оптимальные параметры нашей модели, полученные путём минимизации  $\chi^2$  (суммы квадратов стандартных отклонений от экспериментальных данных), показаны в таблице 3.1. Для этих значений параметров мы получили величину  $\chi^2/N_{\text{df}} = 105,6/89 = 1,19$ . Отметим, что из-за довольно большого числа свободных параметров модели можно найти несколько существенно отличающихся наборов параметров, дающих близкие значения  $\chi^2$ . Поэтому нет большого смысла говорить о погрешностях определения этих параметров вблизи значений из таблицы 3.1. Как уже упоминалось выше, совершенно различные феноменологические модели могут давать близкое поведение сечений вблизи порога. Параметры, указанные в таблице 3.1, соответствуют одной из таких моделей. При выборе оптимального набора параметров мы руководствовались следующими соображениями. Во-первых, значение  $\chi^2$  должно быть близко к наименьшему возможному. Во-вторых, параметры потенциала должны быть физически разумными, то есть потенциальные ямы не должны быть слишком узкими (или, наоборот, широкими) и не должны иметь слишком большую глубину. В-третьих, полное сечение рождения  $N\bar{N}$  пары, которое рассматривается в разделе 3.2, не должно быть слишком большим.

Таблица 3.1 — Параметры модели нуклон-антинуклонного взаимодействия

	$\tilde{U}_S^0$	$\tilde{U}_D^0$	$\tilde{U}_T^0$	$\tilde{U}_S^1$	$\tilde{U}_D^1$	$\tilde{U}_T^1$	
$U_i$ (МэВ)	-197,8	122,4	-2	-58,3	684,6	18,3	
$W_i$ (МэВ)	179,7	276	-2,1	-17,5	183,9	-20,4	
$a_i$ (фм)	0,664	1,274	2,826	1,237	0,769	1,286	
$g_i$	$g_p = 14,1$			$g_n = 4,4 + 0,9 i$			

На рисунке 3.1 показано сравнение парциальных сечений нуклон-антинуклонного рассеяния, полученных в рамках нашей модели, с результатами анали-

за, проведённого неймегенской группой [14]. Отметим, что в качестве исходных экспериментальных данных в работе [14] использовались дифференциальные и полные сечения рассеяния, а также некоторые другие наблюдаемые величины. По этим данным была построена неймегенская модель нуклон-антинуклонного взаимодействия, а затем вычислены парциальные сечения рассеяния. Однако существуют и другие модели взаимодействия, также хорошо описывающие экспериментальные данные, но предсказывающие несколько другие парциальные сечения (см., например, сравнение разных моделей в работе [160]). Поэтому точность, с которой можно извлечь парциальные сечения из экспериментальных данных, с трудом поддаётся оценке, и погрешности парциальных сечений на графиках 3.1 не приведены. В целом, предложенная здесь модель хорошо воспроизводит неймегенские парциальные сечения, поскольку отличия заметны только в тех парциальных волнах, где сами сечения малы.

На рисунке 3.2 показано сравнение наших результатов для сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$  с экспериментальными данными. Здесь мы не включаем некоторые результаты старых экспериментов, которые явно противоречат новым, более точным данным, либо были заменены ими. Это относится, к примеру, к данным BaBar 2006 года для сечения рождения  $p\bar{p}$  [30], а также к данным для сечения рождения  $n\bar{n}$ , полученным FENICE в 1998 году [38] и SND в 2011–2012 годах [39]. В целом, наша модель хорошо описывает сечения рождения  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$  в рассматриваемом диапазоне энергий. Характерной особенностью зависимости этих сечений от энергии является чрезвычайно быстрый рост вблизи порога с выходом на «полку» и дальнейшим плавным падением сечений. Такую зависимость сечений от энергии, по-видимому, невозможно получить без учёта  $D$ -волновых вкладов. Именно благодаря смешиванию состояний с орбитальными моментами  $L = 0$  и  $L = 2$  из-за действия тензорных сил становится возможным воспроизвести такую нетривиальную зависимость сечений от энергии.

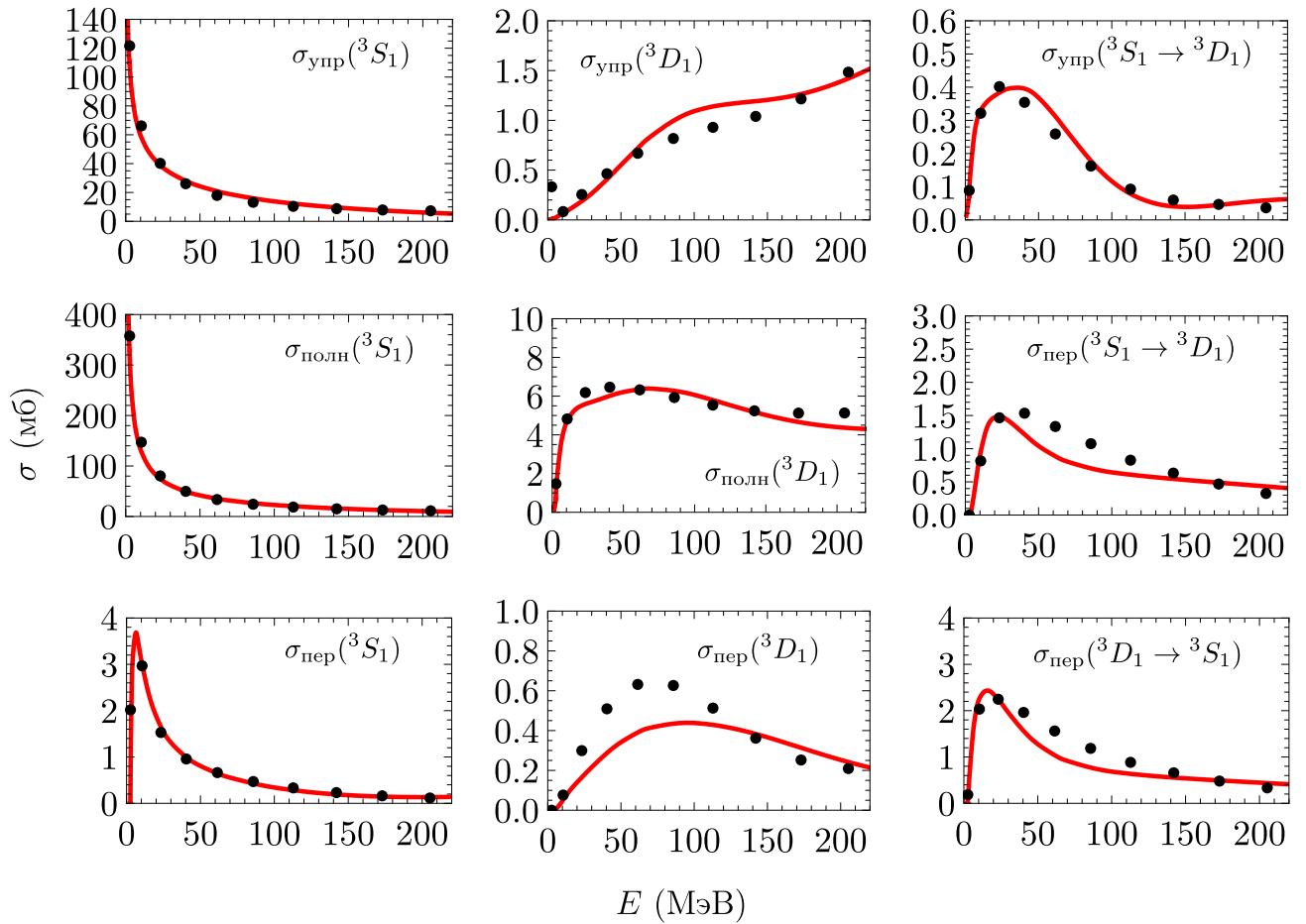


Рисунок 3.1 — Сравнение предсказаний нашей модели для парциальных сечений нуклон-антинуклонного рассеяния, см. (3.12), с результатами анализа, проведённого неймегенской группой [14]

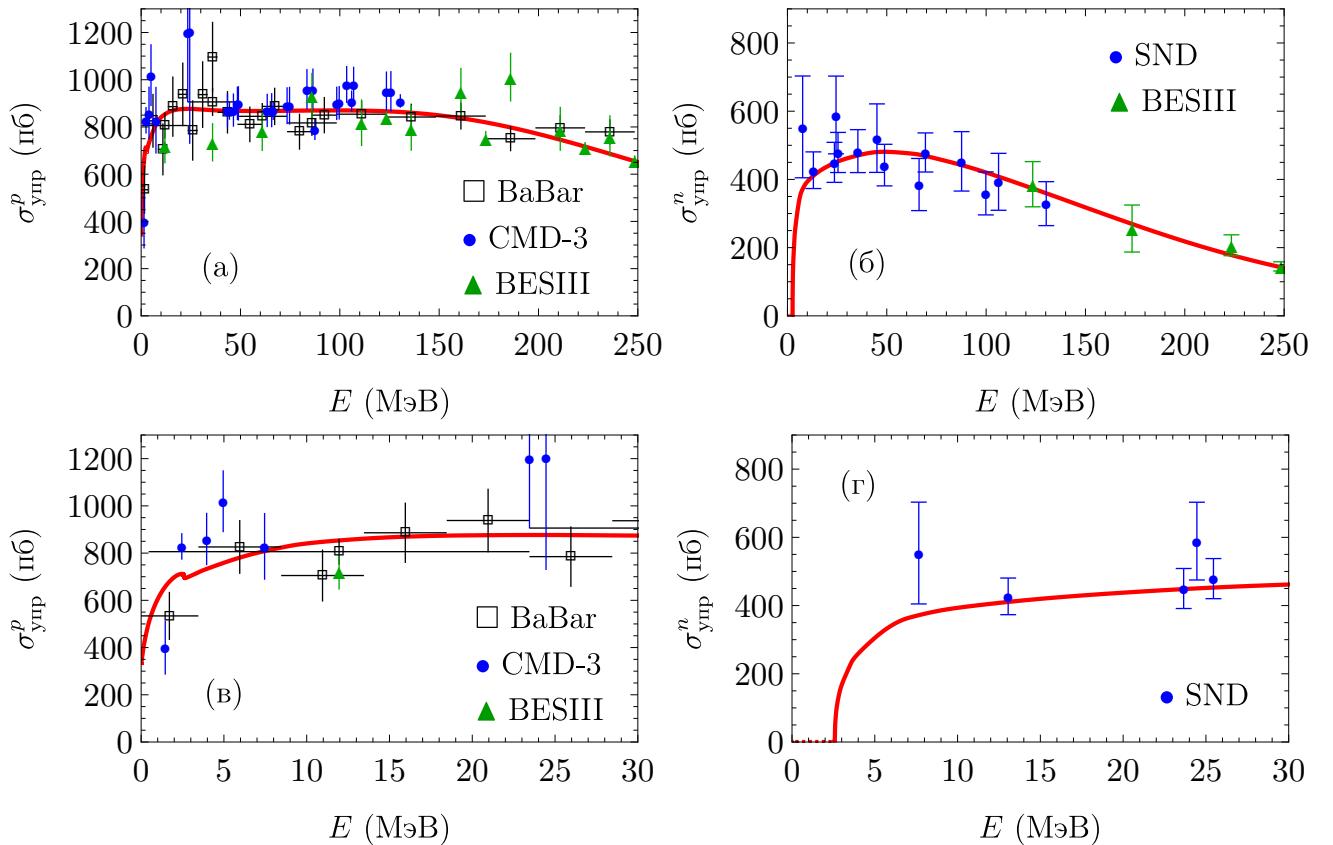


Рисунок 3.2 — Зависимость от энергии сечений рождения  $p\bar{p}$  (а, в) и  $n\bar{n}$  (б, г) в  $e^+e^-$  аннигиляции. В нижнем ряду более подробно показана припороговая область энергий. Экспериментальные данные взяты из работ коллабораций BaBar [31], CMD-3 [33; 34], SND [41], и BESIII [36; 37; 40]

На рисунках 3.3 и 3.4 показано сравнение с экспериментальными данными наших результатов для электромагнитных формфакторов, а также отношений  $|G_E/G_M|$  для для протона и для нейтрона. Здесь также получено хорошее согласие с результатами экспериментов. Ещё раз обращаем внимание на то, что отличие от единицы отношения электромагнитных формфакторов является прямым следствием смешивания  $S$ -волны и  $D$ -волны за счёт действия тензорных сил. На рисунке 3.4 также показаны наши предсказания для зависимости от энергии фаз отношений электромагнитных формфакторов для протона и для нейтрона.

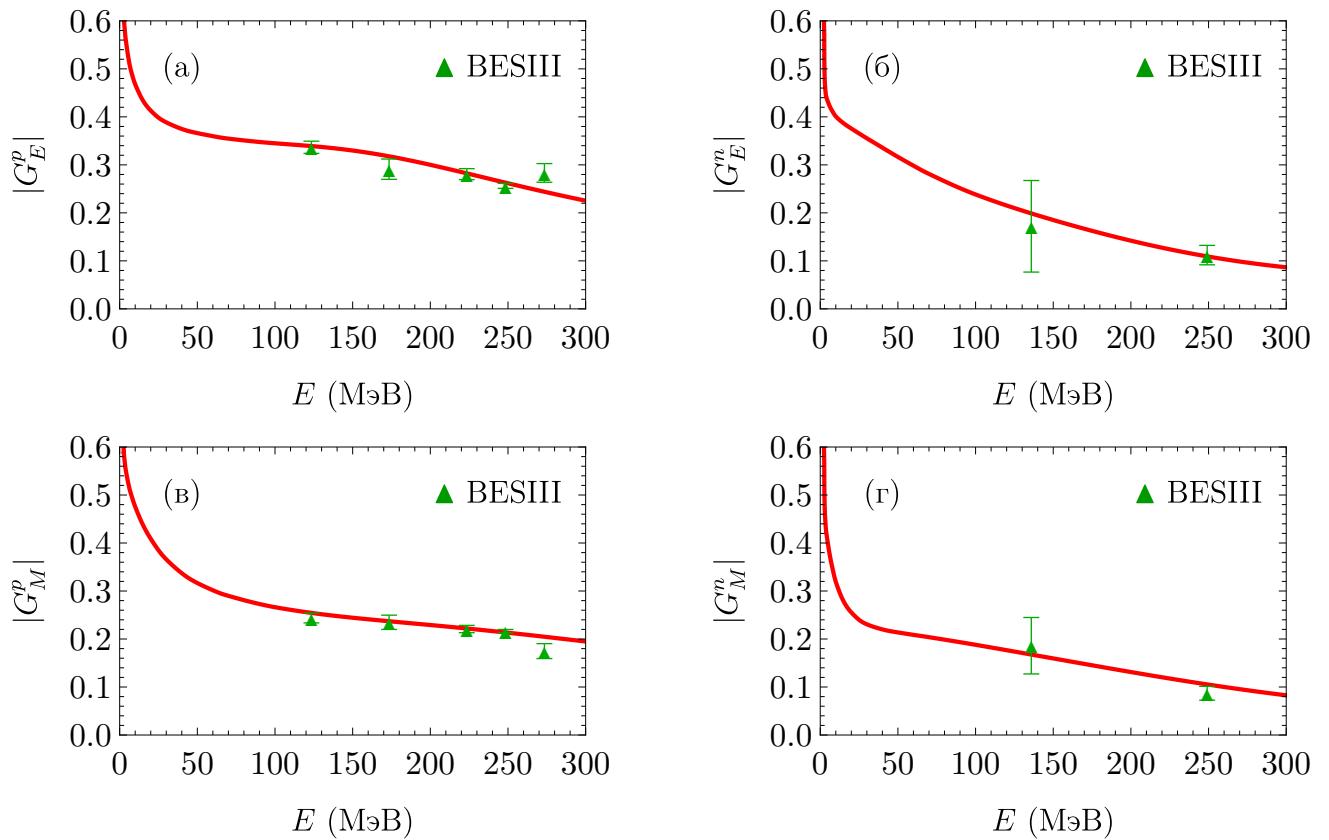


Рисунок 3.3 — Зависимость от энергии электромагнитных формфакторов протона (а, в) и нейтрона (б, г). Экспериментальные данные взяты из работ [36; 42]

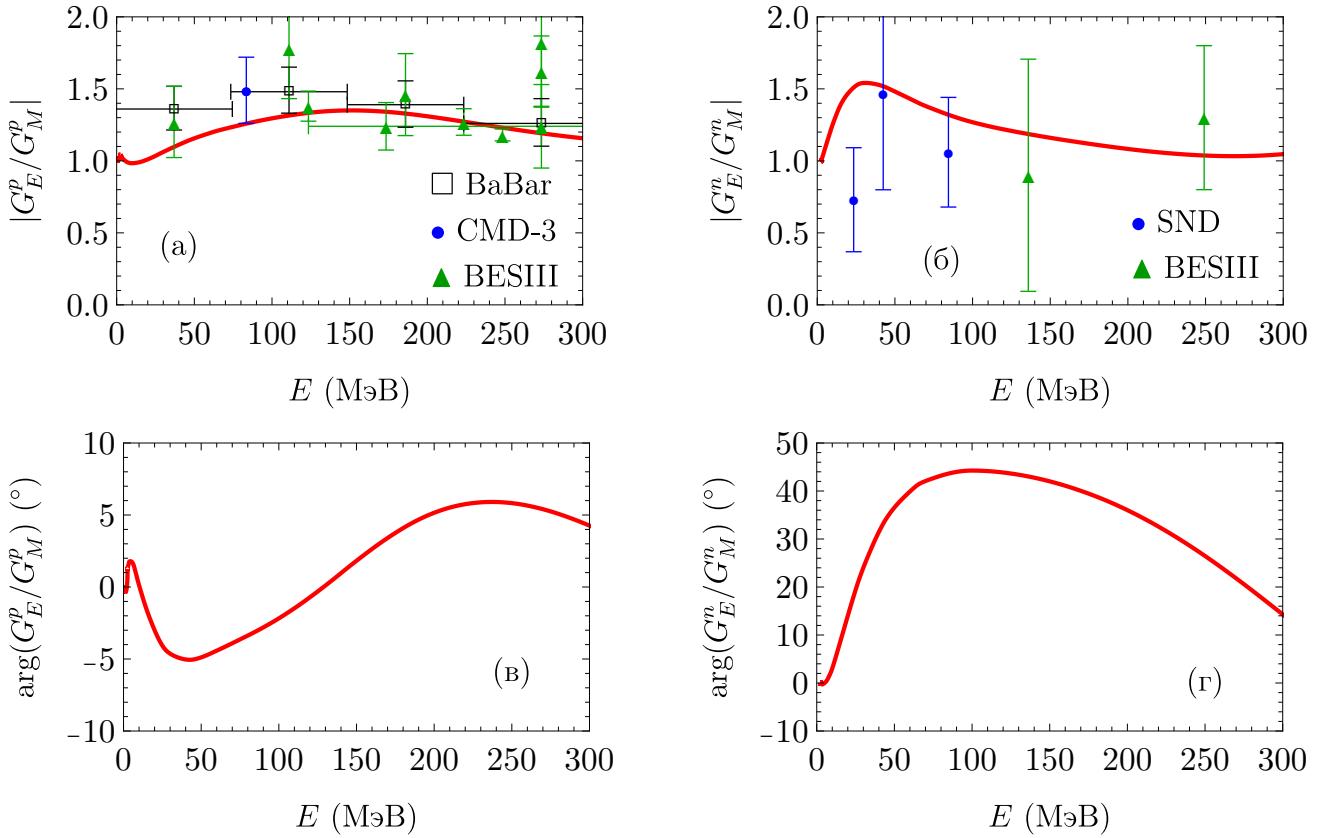


Рисунок 3.4 — Зависимость от энергии отношений  $|G_E^p/G_M^p|$  (а) и  $|G_E^n/G_M^n|$  (б). Экспериментальные данные взяты из работ коллабораций BaBar [31], CMD-3 [33], SND [41], и BESIII [35–37; 42]. Предсказания для зависимости от энергии фаз отношений электромагнитных формфакторов протона (в) и нейтрона (г),  $\arg(G_E^p/G_M^p)$  и  $\arg(G_E^n/G_M^n)$

### 3.2. $N\bar{N}$ взаимодействие в промежуточном состоянии

Эффекты нуклон-антинуклонного взаимодействия проявляются не только в процессах с прямым рождением нуклон-антинуклонных пар, но и в некоторых других процессах. Например, в некоторых процессах с рождением мно-  
гомезонных состояний в электрон-позитронной аннигиляции наблюдалось рез-  
кое падение сечений на пороге рождения нуклон-антинуклонных пар. Есте-  
ственным объяснением таких эффектов является взаимодействие виртуальных  
нуклон-антинуклонных пар в промежуточном состоянии. В работе юлихской  
группы [161] была предпринята попытка описать поведение сечений процес-

сов  $e^+e^- \rightarrow 6\pi$ ,  $e^+e^- \rightarrow 5\pi$  и  $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^+\pi^-\pi^0$  вблизи порога рождения нуклон-антинуклонных пар с использованием киральной модели [18]. Хотя качественно их результаты соответствовали наблюдаемым данным, хорошего количественного согласия им получить не удалось.

В разделе 1.2 мы уже говорили, что в рамках нашего подхода можно описывать процессы, в которых рождается виртуальная пара адронов, которая затем аннигилирует в другие конечные состояния. Взаимодействие виртуальных адронов в промежуточном состоянии может приводить к нетривиальной зависимости от энергии сечений таких процессов. Здесь мы рассмотрим подробнее эффекты взаимодействия в промежуточном состоянии на примере взаимодействия виртуальных нуклон-антинуклонных пар. Напомним, что сечение рождения реальных нуклон-антинуклонных пар в конечном состоянии мы называем упругим сечением, а сечение процессов с рождением виртуальных  $N\bar{N}$  пар в промежуточном состоянии и последующей их аннигиляцией в лёгкие мезоны мы называем неупругим сечением. Полное сечение рождения  $N\bar{N}$  пар является суммой упругого и неупругого сечений.

В соответствии с результатами раздела 1.2, полное сечение рождения пары адронов выражается через их функцию Грина. Функция Грина взаимодействующей нуклон-антинуклонной пары, рождающейся в  $e^+e^-$  аннигиляции, является матрицей  $4 \times 4$  и удовлетворяет системе уравнений

$$\left[ \frac{p_r^2}{M} + \mathcal{V}(r) - \mathbb{E} \right] \mathcal{D}(r, r' | E) = \frac{1}{rr'} \delta(r - r'), \quad (3.18)$$

которая аналогична системе радиальных уравнений Шрёдингера (3.3), но содержит  $\delta$ -функцию в правой части. Как и в случае одного уравнения (см. (1.31)), радиальная функция Грина может быть выражена через регулярные и нерегулярные в нуле решения уравнений Шрёдингера (3.3). Регулярные в нуле решения определяются асимптотиками (3.6), а асимптотическое поведение ком-

понент нерегулярных решений  $\Psi_1^{(N)}, \Psi_2^{(N)}, \Psi_3^{(N)}$  и  $\Psi_4^{(N)}$  имеет вид

$$\begin{aligned} u_{p1}^{(N)}(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \chi_{p0}^+, & w_{p2}^{(N)}(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \chi_{p2}^+, \\ u_{n3}^{(N)}(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \chi_{n0}^+, & w_{n4}^{(N)}(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \chi_{n2}^+. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Все остальные компоненты этих решений удовлетворяют условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r u_i^{(N)}(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r w_i^{(N)}(r) = 0. \quad (3.20)$$

Здесь функции  $u_{pj}^{(N)}$  и  $u_{nj}^{(N)}$  являются первой и третьей компонентами соответствующих решений  $\Psi_j^{(N)}$ , а  $w_{pj}^{(N)}$  и  $w_{nj}^{(N)}$  являются второй и четвёртой компонентами (см. (3.2)). Функция Грина при  $r = r' = 0$  выражается через регулярные и нерегулярные решения следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(0, 0|E) = M k_p &\left[ \Psi_1^{(N)}(0) \left( \Psi_1^{(R)}(0) \right)^T + \Psi_2^{(N)}(0) \left( \Psi_2^{(R)}(0) \right)^T \right] + \\ &+ M k_n \left[ \Psi_3^{(N)}(0) \left( \Psi_3^{(R)}(0) \right)^T + \Psi_4^{(N)}(0) \left( \Psi_4^{(R)}(0) \right)^T \right], \end{aligned} \quad (3.21)$$

где верхний индекс  $T$  означает транспонирование. Полное сечение рождения нуклон-антинуклонной пары в  $e^+e^-$  аннигиляции может быть записано в виде

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{\pi \alpha^2}{M^2 s} F_D^2(s) \text{Im} [\mathcal{G}^\dagger \mathcal{D}(0, 0|E) \mathcal{G}], \quad \mathcal{G} = (g_p, 0, g_n, 0)^T, \quad (3.22)$$

где верхний индекс  $\dagger$  означает эрмитово сопряжение, а коэффициенты  $g_p$  и  $g_n$  те же, что и в упругих сечениях (3.11). Полное сечение содержит в себе как вклады от упругих сечений (3.11), так и неупругий вклад, то есть

$$\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{упр}}^p + \sigma_{\text{упр}}^n + \sigma_{\text{неупр}}. \quad (3.23)$$

Неупругое сечение соответствует суммарному вкладу диаграмм с рождением виртуальных нуклон-антинуклонных пар в промежуточном состоянии в сечения любых процессов  $e^+e^- \rightarrow$  мезоны.

Эффекты, связанные с нуклон-антинуклонным взаимодействием в промежуточном состоянии, наблюдались в некоторых процессах с рождением много-мезонных состояний в  $e^+e^-$  аннигиляции. Поскольку такие состояния имеют

определенное значение изоспина (а не являются смесью состояний с  $I = 0$  и  $I = 1$ ), то для предсказания сечений таких процессов нам нужны вклады в сечения, связанные с нуклон-антинуклонным взаимодействием в определённом изоспиновом состоянии. Пренебрегая слабыми эффектами, нарушающими изоспиновую симметрию, мы можем записать

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{полн}}^0 &= \frac{\pi\alpha^2}{M^2 s} F_D^2(s) \text{Im} \left[ \mathcal{G}_0^\dagger \mathcal{D}(0, 0|E) \mathcal{G}_0 \right], \quad \mathcal{G}_0 = (g_0, 0, g_0, 0)^T, \\ \sigma_{\text{полн}}^1 &= \frac{\pi\alpha^2}{M^2 s} F_D^2(s) \text{Im} \left[ \mathcal{G}_1^\dagger \mathcal{D}(0, 0|E) \mathcal{G}_1 \right], \quad \mathcal{G}_1 = (g_1, 0, -g_1, 0)^T, \\ g_0 &= \frac{g_p + g_n}{2}, \quad g_1 = \frac{g_p - g_n}{2},\end{aligned}\tag{3.24}$$

где коэффициенты  $g_0$  и  $g_1$  имеют смысл амплитуд рождения нуклон-антинуклонной пары в соответствующих изоспиновых состояний на малых расстояниях. С той же точностью мы можем вычислить упругие сечения рождения нуклон-антинуклонных пар с определённым изоспином по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{упр}}^0 &= \frac{\pi k_p \alpha^2}{Ms} F_D^2(s) |g_0|^2 \left[ \left| u_{p1}^{(R)}(0) + u_{n1}^{(R)}(0) \right|^2 + \left| u_{p2}^{(R)}(0) + u_{n2}^{(R)}(0) \right|^2 \right] + \\ &\quad + \frac{\pi k_n \alpha^2}{Ms} F_D^2(s) |g_0|^2 \left[ \left| u_{p3}^{(R)}(0) + u_{n3}^{(R)}(0) \right|^2 + \left| u_{p4}^{(R)}(0) + u_{n4}^{(R)}(0) \right|^2 \right], \\ \sigma_{\text{упр}}^1 &= \frac{\pi k_p \alpha^2}{Ms} F_D^2(s) |g_1|^2 \left[ \left| u_{p1}^{(R)}(0) - u_{n1}^{(R)}(0) \right|^2 + \left| u_{p2}^{(R)}(0) - u_{n2}^{(R)}(0) \right|^2 \right] + \\ &\quad + \frac{\pi k_n \alpha^2}{Ms} F_D^2(s) |g_1|^2 \left[ \left| u_{p3}^{(R)}(0) - u_{n3}^{(R)}(0) \right|^2 + \left| u_{p4}^{(R)}(0) - u_{n4}^{(R)}(0) \right|^2 \right].\end{aligned}\tag{3.25}$$

Соответствующие неупругие вклады в сечения равны

$$\sigma_{\text{неупр}}^0 = \sigma_{\text{полн}}^0 - \sigma_{\text{упр}}^0, \quad \sigma_{\text{неупр}}^1 = \sigma_{\text{полн}}^1 - \sigma_{\text{упр}}^1.\tag{3.26}$$

Наши предсказания для полных, упругих и неупругих вкладов в сечения рождения нуклон-антинуклонных пар с определённым изоспином показаны на рисунке 3.5. Наша модель нуклон-антинуклонного взаимодействия предсказывает заметное падение полного и неупругого сечений под порогом рождения реальной пары  $N\bar{N}$  в канале с  $I = 1$ . Обращаем внимание, что падение полного сечения существенно превосходит по величине упругое сечение рождения

реальной  $N\bar{N}$  пары. Поскольку виртуальная нуклон-антинуклонная пара, находящаяся в изовекторном состоянии, может аннигилировать в различные мезонные состояния, этот скачок сечения может в разной степени проявляться в сечениях разных процессов.

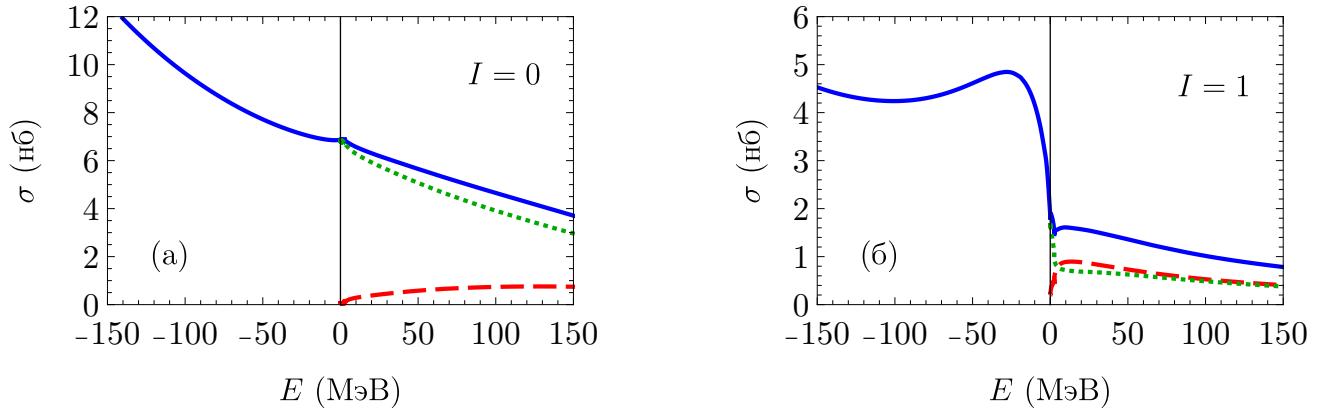


Рисунок 3.5 — Зависимости от энергии упругих (штриховые линии), неупругих (пунктирные линии) и полных (сплошные линии) сечений рождения  $N\bar{N}$  в состояниях с изосpinами  $I = 0$  (а) и  $I = 1$  (б) в  $e^+e^-$  аннигиляции

Рассмотрим теперь несколько конкретных процессов, в которых наблюдались эффекты, связанные с нуклон-антинуклонным взаимодействием в промежуточном состоянии. Наиболее детально изучены процессы  $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$  и  $e^+e^- \rightarrow 2(\pi^+\pi^-\pi^0)$ . Поскольку  $G$ -чётность конечных состояний в этих процессах равна  $+1$ , а  $C$ -чётность равна  $-1$ , они могут образоваться только в процессе аннигиляции виртуальной нуклон-антинуклонной пары с  $I = 1$ . Другие промежуточные состояния, не содержащие  $N\bar{N}$  пары, также дают вклад в сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow 6\pi$ . Однако такие вклады в сечение должны иметь плавную зависимость от энергии в окрестности порога рождения реальных  $N\bar{N}$  пар. Вероятность аннигиляции виртуальной пары  $N\bar{N}$  в  $6\pi$  также является плавной функцией энергии и вблизи порога может считаться константой. Поэтому мы будем описывать зависимость от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow 6\pi$  выражением

$$\sigma_{6\pi}(E) = A \cdot \sigma_{\text{неупр}}^1(E) + B \cdot E + C, \quad (3.27)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — некоторые не зависящие от энергии коэффициенты. Сравнение выражения (3.27) с экспериментальными данными [34; 85–87] для сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow 6\pi$  даёт значения параметров  $A = 0,12$ ,  $B = 3,2 \cdot 10^{-3}$  нб/МэВ,  $C = 0,9$  нб для процесса  $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$  и  $A = 0,5$ ,  $B = 4,8 \cdot 10^{-3}$  нб/МэВ,  $C = 3,6$  нб для процесса  $e^+e^- \rightarrow 2(\pi^+\pi^-\pi^0)$ . Сравнение наших предсказаний с результатами экспериментов показано на рисунке 3.6. В целом, наша модель хорошо воспроизводит резкое падение сечений вблизи порога рождения реальных нуклон-антинуклонных пар. Коэффициент  $A$  по смыслу соответствует вероятности того, что виртуальная нуклон-антинуклонная пара с  $I = 1$  аннигилирует в определённое конечное состояние. Таким образом, мы видим, что суммарная вероятность образования состояния  $6\pi$  из такой  $N\bar{N}$  пары составляет 62%. Действительно, это значение довольно близко к относительной вероятности аннигиляции покоящейся нуклон-антинуклонной пары с  $I = 1$  в шесть пионов, равной около 56%, см. [162].

Другой процесс, в котором также наблюдался заметный скачок сечения на пороге рождения реальной нуклон-антинуклонной пары — это процесс  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$ . Конечное состояние здесь может иметь как  $I = 1$ , так и  $I = 0$ . Однако наша модель предсказывает, что вклад в сечения, связанный с нуклон-антинуклонным взаимодействием в состоянии с  $I = 0$ , не имеет резких скачков вблизи порога рождения реальной  $N\bar{N}$  пары (см. рисунок 3.5). Принимая во внимание также плавную зависимость от энергии вкладов в сечение, связанных с другими промежуточными состояниями, запишем сечение процесса в виде

$$\sigma_{KK\pi\pi}(E) = A \cdot \sigma_{\text{нейпр}}^1(E) + B \cdot E^2 + C \cdot E + D, \quad (3.28)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  — некоторые не зависящие от энергии коэффициенты. Здесь только слагаемое, содержащее  $\sigma_{\text{нейпр}}^1$ , имеет скачок на пороге рождения реальной  $N\bar{N}$  пары, а остальные слагаемые описывают совокупность вкладов в сечение, слабо зависящих от энергии. В результате фитирования эксперимен-

тальных данных [34; 88; 89] мы находим  $A = 0,12$ ,  $B = -6,6 \cdot 10^{-5}$  нб/МэВ $^2$ ,  $C = 2 \cdot 10^{-3}$  нб/МэВ,  $D = 4,2$  нб. Сравнение наших предсказаний для сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$  с результатами экспериментов показано на рисунке 3.6.

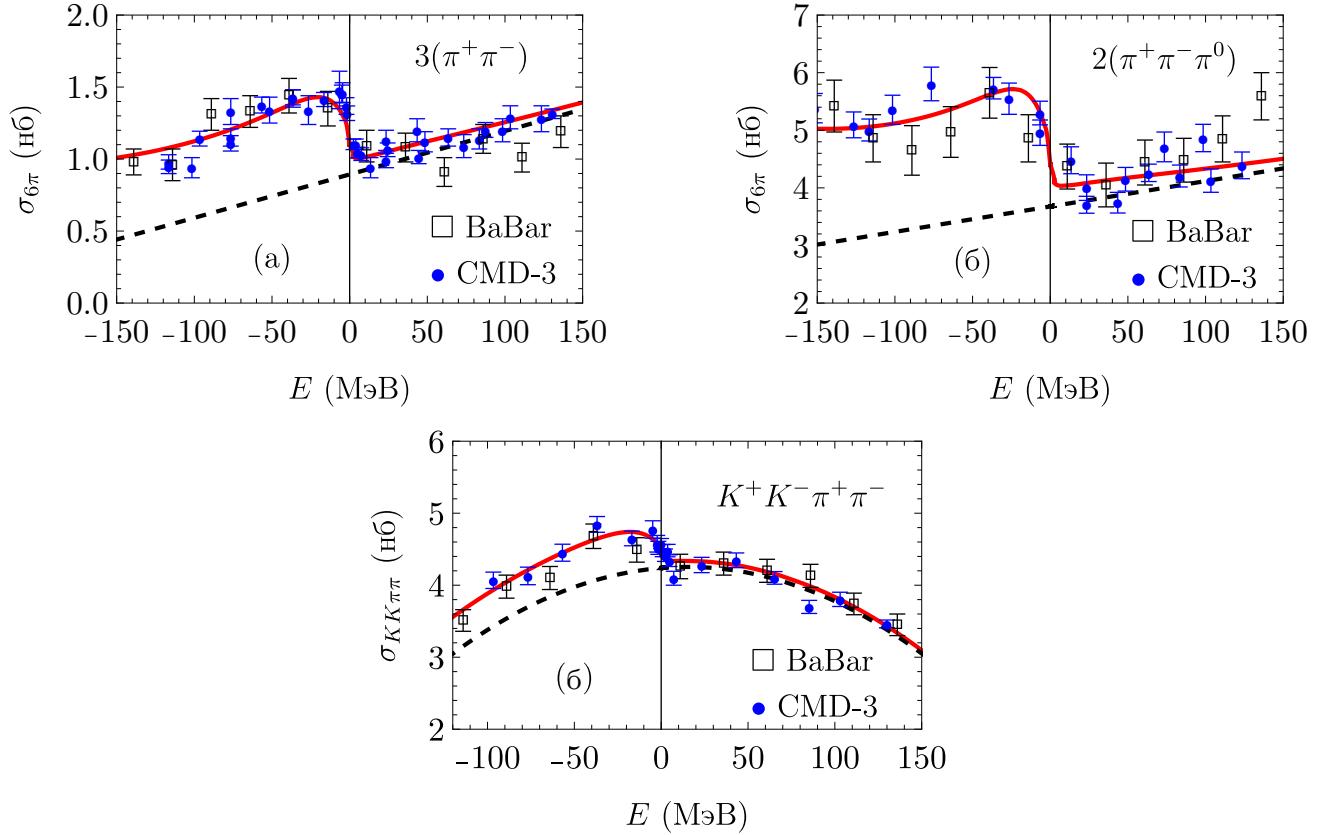


Рисунок 3.6 — Зависимости от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$ ,  $e^+e^- \rightarrow 2(\pi^+\pi^-\pi^0)$  и  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$ . Пунктирными линиями показаны вклады в сечения процессов, не связанные с рождением виртуальной  $N\bar{N}$  пары. Экспериментальные данные взяты из работ [34; 85; 86], [85; 87] и [34; 88; 89], соответственно

Таким образом, в рамках нашей модели нуклон-антинуклонного взаимодействия удаётся описать не только зависимость от энергии сечений рождения реальных пар  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$ , но и получить вклады в сечения других процессов, связанные со взаимодействием виртуальных  $N\bar{N}$  пар. Мы ожидаем, что резкое падение сечений на пороге рождения реальных  $N\bar{N}$  пар может наблюдаться и в других процессах с рождением мезонов в изовекторных состояниях. Правда,

мы не можем заранее предсказать, в каких именно процессах стоит искать проявления нуклон-антинуклонного взаимодействия в промежуточном состоянии. В то же время сечения рождения изоскалярных состояний не должны иметь существенных особенностей в этой области энергий (см. рисунок 3.5).

## Глава 4

# Рождение пары $N\bar{N}$ в распадах $J/\psi$ и $\psi(2S)$

Влияние нуклон-антинуклонного взаимодействия проявляется не только в  $e^+e^-$  аннигиляции, но и, например, в распадах  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  мезонов. А именно, было экспериментально обнаружено усиление вероятностей распадов  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma(\omega, \pi^0, \eta)$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\gamma(\pi^0, \eta)$  в случае, когда инвариантная масса пары  $p\bar{p}$  близка к пороговому значению  $2M_p$ . Поскольку эта область инвариантных масс соответствует малым относительным скоростям протона и антiproтона, естественным объяснением усиления вероятностей распадов является нуклон-антинуклонное взаимодействие в конечном состоянии. Причём скорость третьей родившейся в распаде частицы в этом случае велика, а значит её взаимодействием с парой  $p\bar{p}$  можно пренебречь. Теоретическое объяснение наблюдаемого усиления вероятностей распадов было предложено во многих работах на основе различных моделей нуклон-антинуклонного взаимодействия [163–173]. В этой главе мы рассмотрим применение нашего подхода к описанию распадов  $\psi$ -мезонов. В принципе, аналогичное усиление вероятностей распадов наблюдалось и в распадах  $B$ -мезонов, например,  $B^+ \rightarrow p\bar{p}K^+$ ,  $B^+ \rightarrow p\bar{p}\pi^+$  и других [46; 47; 49–52; 54; 55]. Однако теоретическое описание таких процессов существенно усложнено из-за несохранения  $P$ -чётности и  $C$ -чётности в слабых распадах. Кроме того, на данный момент имеется довольно ограниченный набор экспериментальных данных для инвариантных масс пары  $p\bar{p}$ , близких к пороговому значению. Поэтому здесь мы ограничиваемся обсуждением распадов мезонов  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$ .

Прежде, чем обсуждать эффекты, связанные с нуклон-антинуклонным взаимодействием, рассмотрим кинематику трёхчастичных распадов  $\psi$ -мезонов. Итак, пусть некоторая частица, имеющая массу  $M_\psi$ , распадается на протон-антiproтонную пару с инвариантной массой  $M_{p\bar{p}}$  и некоторую частицу  $X$  с мас-

сой  $m_X$  (в нашем случае частица  $X$  может быть фотоном,  $\pi^0$ ,  $\eta$  или  $\omega$ -мезоном).

Тогда в системе покоя  $\psi$ -мезона полная энергия частицы  $X$  равна

$$\varepsilon_X = \frac{M_\psi^2 + m_X^2 - M_{p\bar{p}}^2}{2M_\psi}, \quad (4.1)$$

а её импульс равен

$$k_X = \sqrt{\varepsilon_X^2 - m_X^2} = \frac{\sqrt{\left(M_\psi^2 - m_X^2 - M_{p\bar{p}}^2\right)^2 - 4M_{p\bar{p}}^2 m_X^2}}{2M_\psi} = \frac{\sqrt{\lambda(M_\psi^2, M_{p\bar{p}}^2, m_X^2)}}{2M_\psi}. \quad (4.2)$$

Здесь введено часто используемое в литературе обозначение для функции Каллена (Källén function, см. [174])

$$\lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz. \quad (4.3)$$

Также введём импульс протона в системе центра масс протон-антипротонной пары, равный  $k_p = \sqrt{\frac{M_{p\bar{p}}^2}{4} - M_p^2}$ , где  $M_p$  — масса протона. Дифференциальная вероятность трёхчастичного распада  $\psi$ -мезона может быть записана в виде (см., например, [175] или [163])

$$\frac{d\Gamma}{dM_{p\bar{p}} d\Omega_p d\Omega_X} = \frac{k_p k_X}{2^9 \pi^5 M_\psi^2} |\mathcal{T}|^2, \quad (4.4)$$

где  $\Omega_X$  — телесный угол вылета частицы  $X$  в системе покоя  $\psi$ -мезона,  $\Omega_p$  — телесный угол вылета протона в системе центра масс протон-антипротонной пары, а  $\mathcal{T}$  — безразмерная амплитуда распада, которую мы подробнее обсудим ниже.

## 4.1. Распады $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma(\omega, \rho)$ и $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\gamma$

Рассмотрим распад  $\psi$ -мезона на протон-антипротонную пару и векторный мезон  $X$  ( $\omega$  или  $\rho$ ). Пусть  $l$  — орбитальный момент мезона  $X$  относительно  $p\bar{p}$  пары,  $L$  — относительный орбитальный момент протона и антипротона в их системе центра масс, а  $S$  — суммарный спин протона и антипротона. Тогда

пространственная чётность конечного состояния равна  $P = (-1)^{L+l}$ , а зарядовая чётность равна  $C = (-1)^{L+S+1}$ . Поскольку квантовые числа  $\psi$ -мезона  $J^{PC} = 1^{--}$ , возможны два набора квантовых чисел конечного состояния (с учётом правил сложения моментов):

- а)  $S = 0$ ,  $L$  — чётное,  $l$  — нечётное, причём  $|L - l| = 1$ ;
- б)  $S = 1$ ,  $L$  — нечётное,  $l$  — чётное, также  $|L - l| = 1$ .

Естественно ожидать, что вблизи порога рождения протон-антипротонной пары основной вклад в амплитуду процесса должно давать состояние с наименьшим значением орбитального момента  $L$ . Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением набора квантовых чисел  $S = 0$ ,  $L = 0$ ,  $l = 1$ .

В интересующей нас области фазового пространства, соответствующей близким к порогу значениям инвариантной массы  $p\bar{p}$  пары, частица  $X$  имеет большую скорость и слабо влияет на взаимодействие между протоном и антипротоном. Поэтому распад  $\psi$ -мезона в  $p\bar{p}X$  можно рассматривать следующим образом: сначала происходит распад на мезон  $X$  и систему из взаимодействующих между собой протона и антипротона, а затем эта система переходит в конечные свободные частицы. Безразмерную амплитуду распада  $\psi$ -мезона на  $p\bar{p}$  пару и векторный мезон  $X$ , соответствующую квантовым числам  $S = 0$ ,  $L = 0$  и  $l = 1$ , можно записать в виде

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu}^I = \frac{g_I}{M_\psi} \mathbf{e}_\mu [\mathbf{k}_X \times \boldsymbol{\epsilon}_\lambda^*] \psi_I^{(R)}(0). \quad (4.5)$$

Здесь  $\mathbf{e}_\mu$  — вектор поляризации  $\psi$ -мезона,  $\boldsymbol{\epsilon}_\lambda$  — вектор поляризации мезона  $X$ , индексы  $\mu$  и  $\lambda$  нумеруют поляризации,  $\mathbf{k}_X$  — импульс мезона  $X$  в системе покоя  $\psi$ -мезона, безразмерная константа  $g_I$  связана с амплитудой рождения трёхчастичного конечного состояния на малых расстояниях, а регулярная волновая функция  $\psi_I^{(R)}(0)$  описывает эффекты нуклон-антинуклонного взаимодействия. Индекс  $I$  соответствует значению изоспина мезона  $X$ , а также нуклон-антинуклонной пары ( $I = 0$  для распада с  $\omega$ -мезоном,  $I = 1$  для распада с  $\rho$ -мезоном). При рассмотрении распада  $\psi$ -мезона в  $p\bar{p}\gamma$  нужно учитывать, что из-за на-

рушения изотопической инвариантности электромагнитным взаимодействием амплитуда распада является суперпозицией амплитуд с разными изоспинами, то есть

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu}^{\gamma} = \frac{1}{M_{\psi}} \mathbf{e}_{\mu} [\mathbf{k}_{\gamma} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}^*] \left( g_0^{\gamma} \psi_0^{(R)}(0) + g_1^{\gamma} \psi_1^{(R)}(0) \right), \quad (4.6)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}$  — вектор поляризации фотона,  $\mathbf{k}_{\gamma}$  — импульс фотона в системе покоя  $\psi$ -мезона, а константы  $g_I^{\gamma}$  связаны с вероятностями рождения фотона из состояний с соответствующими изоспинами.

Для усреднения по поляризациям  $\psi$ -мезона,  $\mathbf{e}_{\mu}$ , и суммирования по поляризациям векторного мезона  $X$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_{\lambda}$ , или фотона,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}$ , мы используем соотношения

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu=1,2} e_{\mu}^i e_{\mu}^{*j} = \frac{1}{2} (\delta^{ij} - n^i n^j), \quad \sum_{\lambda=1,2,3} \epsilon_{\lambda}^i \epsilon_{\lambda}^{*j} = \delta^{ij}, \quad \sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_{\lambda}^i \varepsilon_{\lambda}^{*j} = \delta^{ij} - \frac{k_{\gamma}^i k_{\gamma}^j}{k_{\gamma}^2}, \quad (4.7)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль оси столкновения электрон-позитронных пучков. Отметим, что  $\psi$ -мезон может находиться только в двух спиновых состояниях, поскольку в ускорительных экспериментах он рождается в процессе однофотонной аннигиляции ультраквантитативистских электрона и позитрона, в котором сохраняется спиральность (ср. (2.5)). В результате усреднённая по поляризациям дифференциальная вероятность распада  $\psi$ -мезона в  $p\bar{p}X$  имеет вид

$$\frac{d\Gamma^I}{dM_{p\bar{p}} d\Omega_p d\Omega_X} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\lambda} \frac{k_p k_X}{2^9 \pi^5 M_{\psi}^2} |\mathcal{T}_{\lambda\mu}^I|^2 = \frac{k_p k_X^3 g_I^2}{2^{10} \pi^5 M_{\psi}^4} \left| \psi_I^{(R)}(0) \right|^2 (1 + \cos^2 \theta_X), \quad (4.8)$$

где  $\theta_X$  — угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{k}_X$ . Проинтегрированные по телесным углам  $\Omega_p$  и  $\Omega_X$  вероятности распадов  $\psi$ -мезона с рождением  $\omega$ ,  $\rho$  или фотона равны

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{p\bar{p}\omega}}{dM_{p\bar{p}}} &= \frac{d\Gamma^0}{dM_{p\bar{p}}} = \frac{k_p k_{\omega}^3 g_0^2}{2^4 3 \pi^3 M_{\psi}^4} \left| \psi_0^{(R)}(0) \right|^2, \\ \frac{d\Gamma_{p\bar{p}\rho}}{dM_{p\bar{p}}} &= \frac{d\Gamma^1}{dM_{p\bar{p}}} = \frac{k_p k_{\rho}^3 g_1^2}{2^4 3 \pi^3 M_{\psi}^4} \left| \psi_1^{(R)}(0) \right|^2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{d\Gamma_{p\bar{p}\gamma}}{dM_{p\bar{p}}} = \frac{k_p k_\gamma^3}{2^4 3\pi^3 M_\psi^4} \left| g_0^\gamma \psi_0^{(R)}(0) + g_1^\gamma \psi_1^{(R)}(0) \right|^2. \quad (4.10)$$

В дальнейших вычислениях мы пренебрегаем эффектами, нарушающими изотопическую инвариантность нуклон-антинуклонного взаимодействия, то есть кулоновским потенциалом и различием масс протона и нейтрона. Тогда радиальная волновая функция пары  $N\bar{N}$  в состоянии с квантовыми числами  $L = 0, S = 0$  и некоторым изоспином  $I$  удовлетворяет уравнению Шрёдингера (ср. (1.15))

$$\left[ \frac{p_r^2}{M_p} + V^{(I)}(r) - E \right] \psi_I^{(R)}(r) = 0, \quad (4.11)$$

где  $V^{(I)}(r)$  — оптический потенциал нуклон-антинуклонного взаимодействия в данном изоспиновом состоянии, а суммарная кинетическая энергия пары связана с инвариантной массой соотношением  $E = M_{p\bar{p}} - 2M_p$ . Напомним, здесь  $\psi_I^{(R)}(r)$  обозначает регулярную в нуле волновую функцию, имеющую асимптотическое поведение на больших расстояниях (ср. (1.7))

$$\psi_I^{(R)}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2ik_p r} (S_I e^{ik_p r} - e^{-ik_p r}), \quad (4.12)$$

где  $S_I$  — некоторый коэффициент, зависящий от энергии и совпадающий с элементом  $S$ -матрицы рассеяния.

Как уже говорилось, вблизи порога рождения пары адронов эффекты взаимодействия в конечном состоянии определяются небольшим числом параметров, которые не сильно чувствительны к конкретному виду потенциала взаимодействия. Поэтому для потенциалов нуклон-антинуклонного взаимодействия  $V^{(I)}(r)$  можно использовать различные параметризации. Здесь мы используем, пожалуй, простейшее представление потенциалов взаимодействия в каждом изоспиновом канале в виде прямоугольной ямы:

$$V^{(0)}(r) = (U_0 - iW_0) \theta(a_0 - r), \quad V^{(1)}(r) = (U_1 - iW_1) \theta(a_1 - r), \quad (4.13)$$

где  $U_I$ ,  $W_I$  и  $a_I$  являются свободными параметрами модели. Напомним, что мнимая часть оптического потенциала позволяет феноменологически описать

аннигиляцию нуклон-антинуклонной пары в лёгкие мезоны. Использование параметризации (4.13) позволяет получить аналитические выражения для волновых функций  $\psi_I^{(R)}(r)$ , а значит и для вероятностей распада  $\psi$ -мезона в различные конечные состояния. В результате имеем (ср. (1.38))

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{p\bar{p}\omega}}{dM_{p\bar{p}}} &= \frac{k_p k_\omega^3}{2^4 3\pi^3 M_\psi^4} \left| \frac{g_0 q_0}{q_0 \cos(q_0 a_0) - ik_p \sin(q_0 a_0)} \right|^2, \\ \frac{d\Gamma_{p\bar{p}\rho}}{dM_{p\bar{p}}} &= \frac{k_p k_\rho^3}{2^4 3\pi^3 M_\psi^4} \left| \frac{g_1 q_1}{q_1 \cos(q_1 a_1) - ik_p \sin(q_1 a_1)} \right|^2, \\ \frac{d\Gamma_{p\bar{p}\gamma}}{dM_{p\bar{p}}} &= \frac{k_p k_\gamma^3}{2^4 3\pi^3 M_\psi^4} \left| \frac{g_0^\gamma q_0 e^{-ik_p a_0}}{q_0 \cos(q_0 a_0) - ik_p \sin(q_0 a_0)} + \frac{g_1^\gamma q_1 e^{-ik_p a_1}}{q_1 \cos(q_1 a_1) - ik_p \sin(q_1 a_1)} \right|^2, \\ q_I &= \sqrt{M_p (E - U_I + i W_I)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Обращаем внимание, что величины  $q_I$  здесь являются комплексными. Можно также получить следующие аналитические выражения для вкладов в упругое и полное сечения протон-антипротонного рассеяния, а также сечение перезарядки ( $p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}$ ) в парциальной волне  ${}^1S_0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{упр}}({}^1S_0) &= \frac{\pi}{4k_p^2} |1 - S_{p\bar{p}}|^2, & \sigma_{\text{полн}}({}^1S_0) &= \frac{\pi}{2k_p^2} \text{Re}(1 - S_{p\bar{p}}), \\ \sigma_{\text{пер}}({}^1S_0) &= \frac{\pi}{4k_p^2} |S_{\text{пер}}|^2, \\ S_{p\bar{p}} &= \frac{S_0 + S_1}{2}, & S_{\text{пер}} &= \frac{S_0 - S_1}{2}, \\ S_I &= e^{-2ik_p a_I} \frac{q_I \cos(q_I a_I) + ik_p \sin(q_I a_I)}{q_I \cos(q_I a_I) - ik_p \sin(q_I a_I)}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Для определения оптимальных параметров нашей модели нуклон-антинуклонного взаимодействия в состоянии с квантовыми числами  $L = 0$ ,  $S = 0$  мы минимизируем значение  $\chi^2$  (сумма квадратов стандартных отклонений от экспериментальных точек), вычисленное с учётом имеющихся данных. Во-первых, мы учитываем соответствующие парциальные сечения рассеяния, полученные неймегенской группой [14]. Во-вторых, мы используем распределения по инвариантной массе пары  $p\bar{p}$  для распадов  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma$ ,  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\omega$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\gamma$ . К сожалению, в данный момент отсутствуют эксперименталь-

ные данные для распадов с рождением  $\rho$ -мезона, что ограничивает наши возможности предсказания изовекторного вклада в нуклон-антинуклонное взаимодействие. Для масс частиц мы используем следующие значения:  $M_{J/\psi} = 3096,9$  МэВ,  $M_{\psi(2S)} = 3686,1$  МэВ,  $m_{\omega} = 782,7$  МэВ,  $m_{\rho} = 775,3$  МэВ. Параметры потенциалов взаимодействия, обеспечивающие минимальное значение  $\chi^2$ , перечислены в таблице 4.1, а отношения констант равны  $g_1^{\gamma}/g_0^{\gamma} = -1,16 - 0,38i$  для распада  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma$  и  $g_1^{\gamma}/g_0^{\gamma} = -1,1 - 0,05i$  для распада  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\gamma$  (абсолютные значения констант определяются нормировкой на число событий в конкретных экспериментах и потому не представляют особого интереса). Перечисленные здесь результаты были получены в наших работах [114; 123].

Таблица 4.1 — Параметры потенциалов (4.13) нуклон-антинуклонного взаимодействия в состояниях с  $L = 0$ ,  $S = 0$  и изоспинами  $I = 0, 1$

	$V^{(0)}$	$V^{(1)}$
$U$ (МэВ)	-79,9	-13,2
$W$ (МэВ)	103,7	105,7
$a$ (фм)	1,184	1,064

На рисунке 4.1 показано сравнение парциальных сечений нуклон-антинуклонного рассеяния, полученных в рамках нашей модели (4.15), с результатами анализа, проведённого неймегенской группой [14]. На графиках не показаны погрешности парциальных сечений, поскольку они не приведены в работе [14]. Мы считаем, что наша модель хорошо воспроизводит неймегенские парциальные сечения, так как небольшое расхождение заметно только для сечения пеперезарядки, которое очень малό.

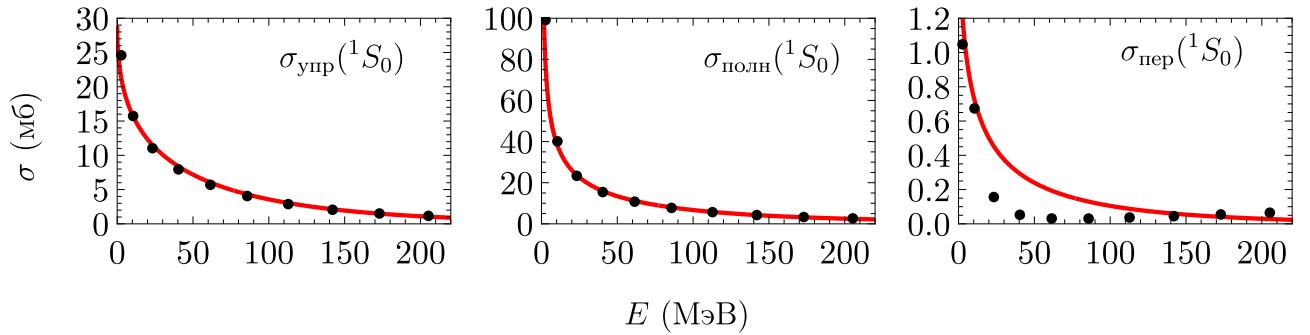


Рисунок 4.1 — Сравнение предсказаний нашей модели для парциальных сечений нуклон-антинуклонного рассеяния, см. (4.15), с результатами анализа, проведённого неймегенской группой [14]

Сравнение с экспериментальными данными наших предсказаний для распределений по инвариантной массе  $p\bar{p}$  в распадах  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma$ ,  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\gamma$  и  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\omega$  показаны на рисунке 4.2. Экспериментальные данные для каждого процесса были приведены к общей нормировке, соответствующей наиболее раннему из экспериментов. В рассматриваемом диапазоне энергий вблизи порога рождения протон-антипротонных пар наша модель хорошо описывает данные. Соответствующее значение  $\chi^2/N_{\text{df}} = 149/140 = 1,06$ . На тех же графиках штриховыми линиями показаны распределения по инвариантной массе  $p\bar{p}$  без учёта взаимодействия в конечном состоянии. Видно, что учёт взаимодействия между протоном и антипротоном необходим для правильного описания распадов  $\psi$ -мезонов. На рисунке 4.2 также показаны наши предсказания для распределения по инвариантной массе  $p\bar{p}$  в распаде  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\rho$ , экспериментальные данные для которого отсутствуют. Интересно, что в рамках нашей модели спектры распадов  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\omega$  и  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\rho$  не имеют выраженного пика вблизи порога, в то время как такой пик присутствует в спектре распада  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma$ . Такое поведение спектра радиационного распада связано с интерференцией изоскалярной и изовекторной амплитуд в формуле (4.14).

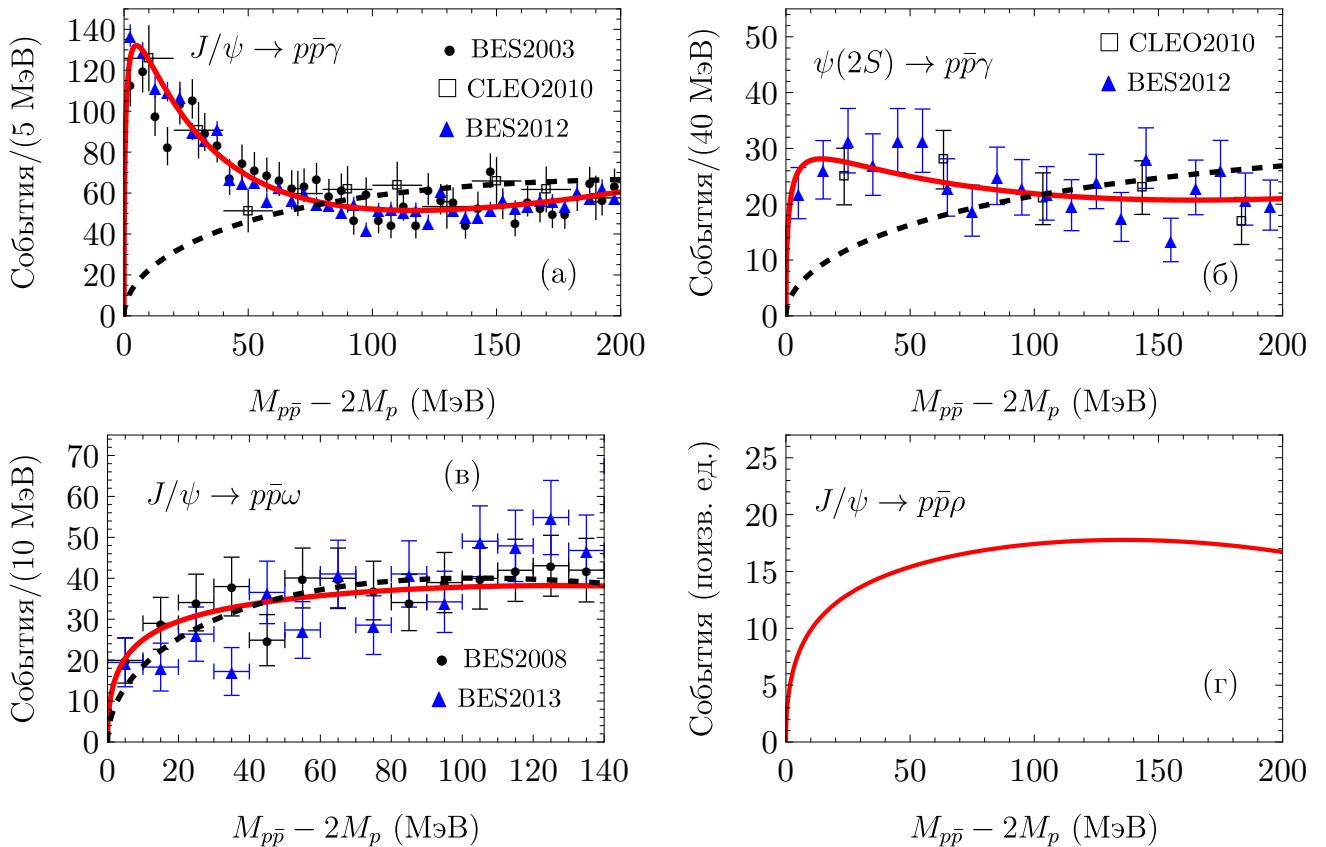


Рисунок 4.2 — Зависимости от энергии вероятностей распадов  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma$ ,  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\gamma$  и  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\omega$  в сравнении с экспериментальными данными [48; 53; 57–59], а также предсказание для распада  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\rho$ . Штриховыми линиями показаны зависимости вероятностей распадов от энергии без учёта взаимодействия в конечном состоянии. Все графики нормированы на количество событий, наблюдавшихся в более ранних экспериментах

## 4.2. Распады $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'\pi^+\pi^-$ и $J/\psi \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)\gamma$

Теперь обсудим некоторые распады  $J/\psi$ -мезона, в которых проявляются эффекты, связанные с нуклон-антинуклонным взаимодействием в промежуточном состоянии. К примеру, в процессе  $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'\pi^+\pi^-$  наблюдается нетривиальное распределение по инвариантной массе системы  $\eta'\pi^+\pi^-$  вблизи порога рождения реальной нуклон-антинуклонной пары,  $M_{\eta'\pi^+\pi^-} = 2M_p$ . Похожие особенности видны и в распределении по инвариантной массе  $3(\pi^+\pi^-)$  в рас-

паде  $J/\psi \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)\gamma$ . В рамках нашего подхода эти распады происходят следующим образом. Сначала  $J/\psi$ -мезон распадается на фотон и виртуальную нуклон-антинуклонную пару, имеющую квантовые числа  $L = 0$  и  $S = 0$ , а затем происходит аннигиляция этой пары в различные мезонные состояния (мы называем такие процессы неупругими, см. раздел 1.2 на стр. 29).

Для вычисления вклада неупругих процессов с рождением нуклон-антинуклонной пары в вероятность распада  $J/\psi$ -мезона нам нужно вычислить функцию Грина радиального уравнения Шрёдингера (4.11). В соответствии с формулой (1.31), функция Грина нуклон-антинуклонной пары в состоянии с изоспином  $I$  имеет вид

$$\mathcal{D}^I(r, r' | E) = M_p k_p \left[ \psi_I^{(R)}(r) \psi_I^{(N)}(r') \theta(r' - r) + \psi_I^{(R)}(r') \psi_I^{(N)}(r) \theta(r - r') \right], \quad (4.16)$$

где регулярные в нуле решения  $\psi_I^{(R)}(r)$  задаются асимптотиками (4.12), а нерегулярные решения  $\psi_I^{(N)}(r)$  уравнения (4.11) определяются асимптотиками

$$\psi_I^{(N)}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{k_p r} e^{i k_p r}. \quad (4.17)$$

Полная вероятность распада  $J/\psi$ -мезона на фотон и нуклон-антинуклонную пару с определённым изоспином (то есть сумма вероятностей, соответствующих упругим и неупругим процессам) связана с мнимой частью функции Грина соотношением (ср. (1.29) и (4.10))

$$\frac{d\Gamma_{\text{полн}}^I}{dM} = \frac{k_\gamma^3 (g_I^\gamma)^2}{2^4 3\pi^3 M_\psi^4 M_p} \text{Im } G^I(0, 0 | E). \quad (4.18)$$

Здесь  $M$  — инвариантная масса системы частиц, появившихся в результате аннигиляции виртуальной пары  $N\bar{N}$ , а импульс фотона равен

$$k_\gamma = \frac{M_\psi^2 - M^2}{2M_\psi}. \quad (4.19)$$

Вклады неупругих процессов с рождением виртуальной нуклон-антинуклонной пары с изоспином  $I$  в вероятности распадов  $J/\psi$ -мезона равны

$$\frac{d\Gamma_{\text{неупр}}^I}{dM} = \frac{d\Gamma_{\text{полн}}^I}{dM} - \frac{d\Gamma_{\text{упр}}^I}{dM}, \quad (4.20)$$

где  $\Gamma_{\text{упр}}^I$  соответствуют вероятностям распада  $\Gamma^I$  в формулах (4.9).

Для параметризации потенциалов нуклон-антинуклонного взаимодействия в виде прямоугольных ям (4.13) можно получить аналитическое выражение для полных вкладов в вероятности распада (ср. (1.48))

$$\frac{d\Gamma_{\text{полн}}^I}{dM} = \frac{k_\gamma^3 (g_I^\gamma)^2}{2^4 3\pi^3 M_\psi^4} \text{Im} \left[ q_I \frac{q_I \sin(q_I a_I) + ik_p \cos(q_I a_I)}{q_I \cos(q_I a_I) - ik_p \sin(q_I a_I)} \right]. \quad (4.21)$$

Для вычислений мы используем те же значения параметров потенциалов, которые приведены в таблице 4.1 предыдущего раздела. Зависимости различных вкладов в вероятность распада  $J/\psi$ -мезона от инвариантной массы показаны на рисунке 4.3. Исходя из этих графиков, можно предположить, что в спектрах распадов с рождением изоскалярного нуклон-антинуклонного состояния может наблюдаться резкий спад на пороге рождения реальной пары  $N\bar{N}$ .

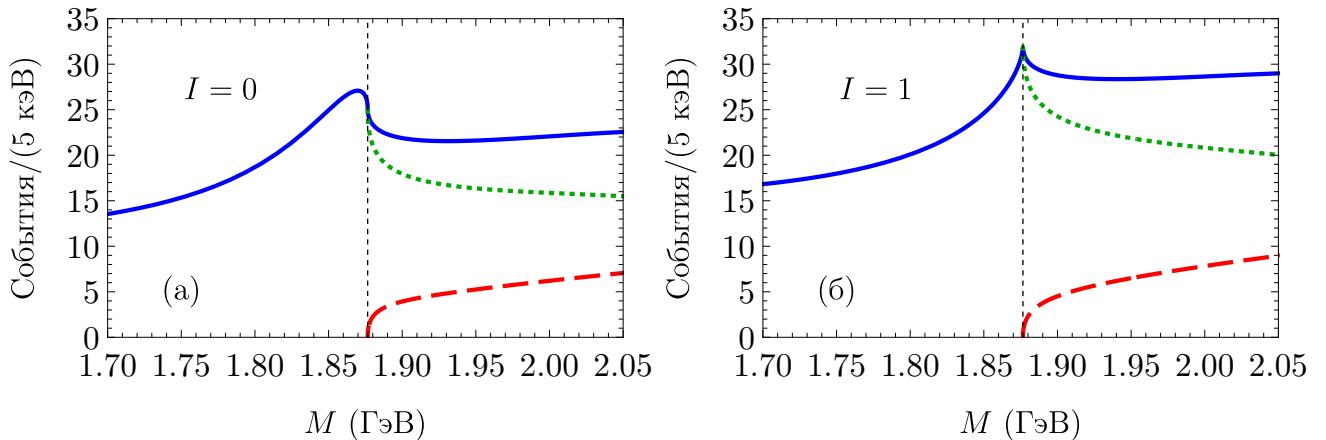


Рисунок 4.3 — Зависимости от инвариантной массы упругих (штриховые линии), неупругих (пунктирные линии) и полных (сплошные линии) вкладов в вероятности распада  $J/\psi$ -мезона на фотон и  $N\bar{N}$  пару в состояниях с изоспинами  $I = 0$  (а) и  $I = 1$  (б). Вертикальные пунктирные линии соответствуют порогу рождения реальной нуклон-антинуклонной пары

Система  $\eta'\pi^+\pi^-$ , образовавшаяся в распаде  $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'\pi^+\pi^-$ , имеет зарядовую чётность  $C = +1$ , а также  $G$ -чётность  $G = +1$ . Значит эта система может образоваться при аннигиляции виртуальной нуклон-антинуклонной пары с изоспином  $I = 0$ . Кроме того, вклад в вероятность данного распада будут

давать и другие промежуточные состояния, не содержащие нуклон-антинуклонную пару. Однако мы ожидаем, что вклад других состояний вблизи порога рождения реальной пары  $N\bar{N}$  плавно зависит от энергии. Поэтому мы будем описывать зависимость вероятности распада  $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'\pi^+\pi^-$  от инвариантной массы  $M_{\eta'\pi^+\pi^-} = 2M_p + E$  выражением

$$\frac{d\Gamma_{\eta'\pi^+\pi^-}}{dM} = A \cdot \frac{d\Gamma_{\text{нейпр}}^0}{dM} + B \cdot E^2 + C \cdot E + D, \quad (4.22)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  — некоторые независящие от энергии коэффициенты, значения которых определяются из сравнения с экспериментальными данными. Коэффициент  $A$  здесь связан с вероятностью аннигиляции виртуальной нуклон-антинуклонной пары в состояние  $\eta'\pi^+\pi^-$  и в узком диапазоне инвариантных масс также может считаться константой. Сравнение наших предсказаний для распределения по инвариантной массе  $\eta'\pi^+\pi^-$  в распаде  $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'\pi^+\pi^-$  с экспериментальными данными BESIII [176] показано на рисунке 4.4(а). При этом значение  $\chi^2/N_{\text{df}} = 15,7/16 = 0,98$ , а подгоночные коэффициенты равны  $A = 0,02$ ,  $B = -8,7 \cdot 10^{-4} \text{ МэВ}^{-3}$ ,  $C = -0,043 \text{ МэВ}^{-2}$ ,  $D = 49,4 \text{ МэВ}^{-1}$ . Заметим, что абсолютные значения этих коэффициентов зависят от особенностей проведения конкретных экспериментов, таких как количество рожденных  $J/\psi$ -мезонов, эффективности регистрации конечных состояний и так далее.

Теперь рассмотрим распад  $J/\psi \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)\gamma$ . Также, как и в предыдущем случае, система частиц  $3(\pi^+\pi^-)$  рождается в состоянии с чётностями  $C = +1$ ,  $G = +1$ . Таким образом, она может образоваться при аннигиляции изоскалярного нуклон-антинуклонного состояния. Предполагая, что вклад в вероятность распада промежуточных состояний, не содержащих пары  $N\bar{N}$ , может быть описан плавной функцией энергии, представим распределение по инвариантной массе  $M_{6\pi} = 2M_p + E$  в виде

$$\frac{d\Gamma_{6\pi}}{dM} = A \cdot \frac{d\Gamma_{\text{нейпр}}^0}{dM} + B \cdot E^2 + C \cdot E + D. \quad (4.23)$$

Определяя значения подгоночных коэффициентов из сравнения с экспери-

ментальными данными, полученными на детекторе BESIII [177], мы находим  $A = 0,09$ ,  $B = 0,015 \text{ МэВ}^{-3}$ ,  $C = 1,61 \text{ МэВ}^{-2}$ ,  $D = 123 \text{ МэВ}^{-1}$ . Соответствующее значение  $\chi^2/N_{\text{df}} = 30,7/26 = 1,18$ , а сравнение наших предсказаний для распределения по инвариантной массе  $3(\pi^+\pi^-)$  в распаде  $J/\psi \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)\gamma$  с экспериментальными данными показано на рисунке 4.4(б). Отметим также, что абсолютные значения коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  зависят от количества рожденных  $J/\psi$ -мезонов, эффективности регистрации конечных состояний и других особенностей проведения конкретных экспериментов.

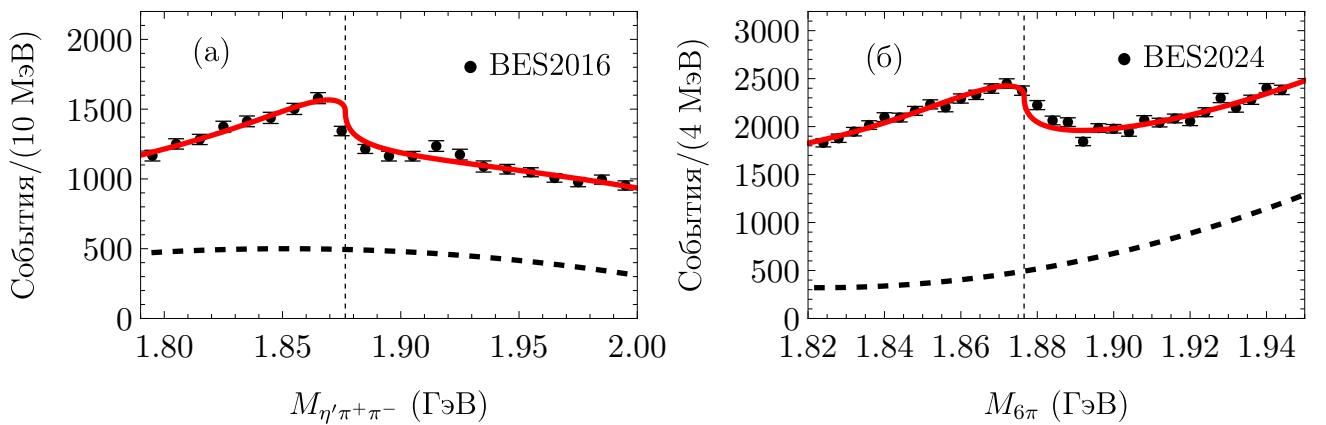


Рисунок 4.4 — Зависимость вероятностей процессов  $J/\psi \rightarrow \gamma \eta' \pi^+ \pi^-$  (а) и  $J/\psi \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)\gamma$  (б) от инвариантных масс  $M_{\eta' \pi^+ \pi^-}$  и  $M_{6\pi}$ , соответственно. Экспериментальные точки взяты из данных работ [176; 177]. Штриховыми линиями показаны вклады в вероятности распадов, не связанные с рождением виртуальной нуклон-антинуклонной пары в промежуточном состоянии. Вертикальные пунктирные линии соответствуют порогу рождения реальной нуклон-антинуклонной пары

Таким образом, представленная здесь простая модель нуклон-антинуклонного взаимодействия в состоянии с квантовыми числами  $S = 0$ ,  $L = 0$  позволяет довольно хорошо описывать как упругие, так и неупругие процессы.

### 4.3. Распады $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$ и $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$

Рассмотрим ещё несколько распадов  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  мезонов, а именно, распады на пару  $p\bar{p}$  и псевдоскалярный мезон. Квантовые числа протон-антипротонной пары в этих распадах будут не такие, как в распадах с рождением векторных мезонов, которые мы рассматривали ранее. Пусть, как и раньше,  $l$  — орбитальный момент псевдоскалярного мезона  $X$  (то есть  $\pi^0$  или  $\eta$ ) относительно пары  $p\bar{p}$ ,  $L$  — относительный орбитальный момент протона и антипротона в их системе центра масс, а  $S$  — суммарный спин протона и антипротона. Тогда пространственная чётность системы  $p\bar{p}X$  равна  $P = (-1)^{L+l}$ , а зарядовая чётность равна  $C = (-1)^{L+S}$  (напомним, что  $C$ -чётность  $\pi^0$  и  $\eta$  равна  $+1$ ). Поскольку квантовые числа  $\psi$ -мезона  $J^{PC} = 1^{--}$ , возможны два набора квантовых чисел конечного состояния (с учётом правил сложения моментов):

- a)  $S = 0$ ,  $L$  — нечётное,  $l$  — чётное, причём  $|L - l| = 1$ ;
- б)  $S = 1$ ,  $L$  — чётное,  $l$  — нечётное, также  $|L - l| = 1$ .

Можно ожидать, что вблизи порога рождения протон-антипротонной пары основной вклад в амплитуду процесса должно давать состояние с наименьшим значением орбитального момента  $L$ . Этому условию удовлетворяют конечные состояния с  $l = 1$ ,  $S = 1$ ,  $L = 0, 2$  (с учётом тензорных сил, смешивающих  $S$ -волну и  $D$ -волну, см. раздел 2.2.1). Потенциал нуклон-антинуклонного взаимодействия в таких состояниях уже был получен нами в разделе 3.1, поэтому можно попробовать предсказать зависимость вероятностей распадов  $\psi$ -мезонов от инвариантной массы пары  $p\bar{p}$ , используя известную модель. Именно такой подход успешно был использован нами в работе [113]. Однако с тех пор появилось много новых экспериментальных данных для сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$  вблизи порогов, а также для электромагнитных формфакторов протона и нейтрона. Причём, некоторые из новых экспериментальных данных существенно отличаются от старых данных и имеют заметно лучшую точность. В результате параметры нашей модели нуклон-антинуклон-

ного взаимодействия, описанной в разделе 3.1, также изменились по сравнению параметрами, использованными в работе [113]. Кроме того, для распределений по инвариантной массе  $p\bar{p}$  в распадах  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\eta$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$  появились новые экспериментальные данные, имеющие малые погрешности. В рамках новой модели нуклон-антинуклонного взаимодействия в состояниях  $^3S_1 - ^3D_1$  нам не удалось получить удовлетворительного описания спектров распадов  $\psi$ -мезонов совместно с сечениями рождения нуклон-антинуклонных пар в  $e^+e^-$  аннигиляции и парциальными сечениями нуклон-антинуклонного рассеяния. Отметим, что спектры распадов  $\psi$ -мезонов на пару  $p\bar{p}$  и псевдоскалярный мезон, предсказанные в работе [168] в рамках киральной модели нуклон-антинуклонного взаимодействия, также не воспроизводят новые экспериментальные данные. Мы предполагаем, что причиной этого является то, что состояния с другими квантовыми числами также могут давать заметный вклад в амплитуды распадов  $\psi$ -мезонов даже довольно близко к порогу по инвариантной массе  $p\bar{p}$ . В этом случае основная поправка должна быть связана со вкладом состояния с  $S = 0, L = 1, l = 0$ . Поэтому здесь мы рассмотрим распады  $\psi$ -мезонов с рождением протон-антипротонной пары как в смешанных состояниях  $^3S_1 - ^3D_1$ , так и в состоянии  $^1P_1$ .

С учётом сказанного выше, амплитуда распада  $\psi$ -мезона на  $p\bar{p}$  пару и псевдоскалярный мезон  $X$  может быть представлена в виде суммы двух вкладов, соответствующих состояниям  $^3S_1 - ^3D_1$  и  $^1P_1$ . Безразмерную амплитуду  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^I$ , соответствующую рождению пары  $p\bar{p}$  в состояниях  $^3S_1 - ^3D_1$  с некоторым изоспином  $I$  и  $l = 1$ , можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\lambda\mu}^I &= \frac{g_I}{M_\psi} F_D(M_{p\bar{p}}) \mathbf{e}_\mu \left[ \mathbf{k}_X \times \boldsymbol{\Psi}_\lambda^{I*} \right], \\ \boldsymbol{\Psi}_\lambda^I &= u_1^I(0) \boldsymbol{\epsilon}_\lambda - \frac{u_2^I(0)}{\sqrt{2}} \left[ \boldsymbol{\epsilon}_\lambda - 3\hat{\mathbf{k}}_p (\hat{\mathbf{k}}_p \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) \right], \end{aligned} \quad (4.24)$$

где  $\boldsymbol{\Psi}_\lambda^I$  — волновая функция протон-антипротонной пары в системе их центра масс (ср. (2.24)), а также включён дипольный формфактор протона  $F_D(M_{p\bar{p}})$ ,

определенный формулой (3.9). В выражениях (4.24)  $\mathbf{e}_\mu$  — вектор поляризации  $\psi$ -мезона,  $\boldsymbol{\epsilon}_\lambda$  — вектор поляризации пары  $p\bar{p}$ , соответствующий спину  $S = 1$ ,  $\mathbf{k}_X$  — импульс мезона  $X$  в системе покоя  $\psi$ -мезона,  $\hat{\mathbf{k}}_p$  — единичный вектор в направлении импульса протона в системе центра масс пары  $p\bar{p}$ , а безразмерная константа  $g_I$  связана с амплитудой рождения трёхчастичного конечного состояния на малых расстояниях. Заметим, что переход в систему покоя  $\psi$ -мезона в соответствии с преобразованиями Лоренца, вообще говоря, приводит к добавлению к вектору  $\boldsymbol{\Psi}_\lambda^I$  компоненты, параллельной импульсу  $\mathbf{k}_X$ , которая, однако, не даёт вклада в амплитуду (4.24). Изоспин образовавшегося нуклон-антинуклонного состояния равен  $I = 0$  в распадах с рождением  $\eta$ -мезона и  $I = 1$  в распадах с рождением  $\pi^0$ -мезона. Волновые функции  $u_1^I(r)$  и  $u_2^I(r)$  являются компонентами решений уравнения Шрёдингера, описывающего нуклон-антинуклонное взаимодействие в состоянии с изоспином  $I$  в приближении сохранения изотопической инвариантности. Эти функции связаны с решениями уравнения (3.3), записанного в базисе состояний  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$ , соотношениями

$$\begin{aligned} u_1^0(r) &= u_{p1}^{(R)}(r) + u_{n1}^{(R)}(r), & u_1^1(r) &= u_{p1}^{(R)}(r) - u_{n1}^{(R)}(r), \\ u_2^0(r) &= u_{p2}^{(R)}(r) + u_{n2}^{(R)}(r), & u_2^1(r) &= u_{p2}^{(R)}(r) - u_{n2}^{(R)}(r). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Безразмерная амплитуда  $\mathcal{F}_\mu^I$ , соответствующая рождению пары  $p\bar{p}$  в состоянии  ${}^1P_1$  с изоспином  $I$  и  $l = 0$ , имеет вид

$$\mathcal{F}_\mu^I = \frac{f_I}{M_\psi} F_D(M_{p\bar{p}}) (\mathbf{e}_\mu \mathbf{k}_p) \frac{3}{k_p} \frac{\partial v_I}{\partial r}(0), \quad (4.26)$$

где безразмерная константа  $f_I$  связана с амплитудой рождения состояния  $p\bar{p}X$  на малых расстояниях, а  $v_I(r)$  — регулярная в нуле волновая функция пары  $p\bar{p}$ . Напомним, что коэффициент усиления амплитуды рождения пары адронов в состоянии с орбитальным моментом  $L = 1$  пропорционален производной соответствующей волновой функции в нуле, см. (1.13). При этом волновая функция  $v_I(r)$  удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$\left[ \frac{p_r^2}{M_p} + V^{(I)}(r) + \frac{2}{M_p r^2} - E \right] v_I(r) = 0, \quad (4.27)$$

где  $V^{(I)}(r)$  — потенциал нуклон-антинуклонного взаимодействия в состоянии  ${}^1P_1$  с изоспином  $I$ . Асимптотика этой волновой функции на больших расстояниях определяется выражением (см. (1.7))

$$v_I(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2ik_p r} \left( S_I e^{i(k_p r - \pi/2)} - e^{-i(k_p r - \pi/2)} \right), \quad (4.28)$$

где  $S_I$  — некоторые коэффициенты, зависящие от энергии и совпадающие с элементами  $S$ -матрицы рассеяния. Упругий и полный вклады в сечение протон-антипротонного рассеяния, а также вклад в сечение перезарядки ( $p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}$ ) в парциальной волне  ${}^1P_1$  связаны с данными элементами  $S$ -матрицы соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{упр}}({}^1P_1) &= \frac{3\pi}{4k_p^2} |1 - S_{p\bar{p}}|^2, & \sigma_{\text{полн}}({}^1P_1) &= \frac{3\pi}{2k_p^2} \operatorname{Re} (1 - S_{p\bar{p}}), \\ \sigma_{\text{пер}}({}^1P_1) &= \frac{3\pi}{4k_p^2} |S_{\text{пер}}|^2, \\ S_{p\bar{p}} &= \frac{S_0 + S_1}{2}, & S_{\text{пер}} &= \frac{S_0 - S_1}{2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Поскольку амплитуды (4.24) и (4.26) соответствуют рождению протон-антипротонной пары в разных спиновых состояниях ( $S = 1$  и  $S = 0$ , соответственно), то они не будут интерферировать друг с другом. Поэтому усреднённая по поляризациям дифференциальная вероятность распада  $\psi$ -мезона имеет вид (ср. (4.4))

$$\frac{d\Gamma^I}{dM_{p\bar{p}} d\Omega_p d\Omega_X} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \frac{k_p k_X}{2^9 \pi^5 M_{\psi}^2} \left( \sum_{\lambda} |\mathcal{T}_{\lambda\mu}^I|^2 + |\mathcal{F}_{\mu}^I|^2 \right). \quad (4.30)$$

Усредняя по поляризациям  $\psi$ -мезона и суммируя по поляризациям пары  $p\bar{p}$  с использованием соотношений (4.7) мы получаем для вклада состояний  ${}^3S_1 - {}^3D_1$

$$\begin{aligned} \sum_{\mu\lambda} |\mathcal{T}_{\lambda\mu}^I|^2 &= \frac{g_I^2 k_X^2}{2M_{\psi}^2} F_D^2(M_{p\bar{p}}) \left\{ \left| u_1^I(0) + \frac{1}{\sqrt{2}} u_2^I(0) \right|^2 + \left| u_1^I(0) - \sqrt{2} u_2^I(0) \right|^2 (\mathbf{n}\hat{\mathbf{k}}_X)^2 + \right. \\ &+ \frac{3}{2} \left[ \left| u_2^I(0) \right|^2 - 2\sqrt{2} \operatorname{Re} (u_1^I(0) u_2^{I*}(0)) \right] \times \\ &\times \left. \left[ (\mathbf{n}\hat{\mathbf{k}}_p)^2 - 2(\mathbf{n}\hat{\mathbf{k}}_X)(\mathbf{n}\hat{\mathbf{k}}_p)(\hat{\mathbf{k}}_p \hat{\mathbf{k}}_X) \right] \right\}, \quad (4.31) \end{aligned}$$

а для вклада состояния  ${}^1P_1$

$$\sum_{\mu} |\mathcal{F}_{\mu}^I|^2 = \frac{9f_I^2}{M_{\psi}^2} F_D^2(M_{p\bar{p}}) \left| \frac{\partial v_I}{\partial r}(0) \right|^2 \left[ 1 - (\mathbf{n} \hat{\mathbf{k}}_p)^2 \right]. \quad (4.32)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{k}}_X = \mathbf{k}_X/k_X$ , а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль оси столкновения электрон-позитронных пучков.

Используя формулы (4.30)–(4.32), можно получить распределения по углам вылета частиц. Интегрирование выражения (4.30) по телесному углу вылета протона  $\Omega_p$  даёт распределение по углу  $\theta_X$  между осью пучков и направлением вылета псевдоскалярного мезона ( $\eta$  или  $\pi^0$ , в зависимости от изоспина  $I$ )

$$\frac{d\Gamma^I}{dM_{p\bar{p}} d\Omega_X} = \frac{k_p k_X}{2^7 \pi^4 M_{\psi}^4} F_D^2(M_{p\bar{p}}) \times \times \left( 3f_I^2 \left| \frac{\partial v_I}{\partial r}(0) \right|^2 + \frac{g_I^2 k_X^2}{4} \left( |u_1^I(0)|^2 + |u_2^I(0)|^2 \right) [1 + \cos^2 \theta_X] \right). \quad (4.33)$$

В свою очередь, интегрирование выражения (4.30) по телесному углу  $\Omega_X$  даёт распределение по углу  $\theta_p$  между направлением вылета протона в системе центра масс  $p\bar{p}$  и осью пучков

$$\frac{d\Gamma^I}{dM_{p\bar{p}} d\Omega_p} = \frac{k_p k_X}{2^7 \pi^4 M_{\psi}^4} F_D^2(M_{p\bar{p}}) \left( 3f_I^2 \left| \frac{\partial v_I}{\partial r}(0) \right|^2 [1 - P_2(\cos \theta_p)] + + \frac{g_I^2 k_X^2}{3} \left( |u_1^I(0)|^2 + |u_2^I(0)|^2 \right) [1 + \gamma^I P_2(\cos \theta_p)] \right), \quad (4.34)$$

Здесь  $P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$  — второй полином Лежандра, а анизотропия углового распределения, связанного с нуклон-антинуклонным взаимодействием в состояниях  ${}^3S_1 - {}^3D_1$ , определяется параметром  $\gamma^I$ , который равен

$$\gamma^I = \frac{1}{4} \frac{|u_2^I(0)|^2 - 2\sqrt{2} \operatorname{Re} (u_1^I(0) u_2^{I*}(0))}{|u_1^I(0)|^2 + |u_2^I(0)|^2}. \quad (4.35)$$

Усредняя выражение (4.30) по направлениям вектора  $\mathbf{n}$ , мы получаем распределение по углу  $\theta_{pX}$  между импульсами протона и псевдоскалярного мезона в

системе центра масс пары  $p\bar{p}$ :

$$\frac{d\Gamma^I}{dM_{p\bar{p}}d\Omega_{pX}} = \frac{k_p k_X}{2^7 \pi^4 M_\psi^4} F_D^2(M_{p\bar{p}}) \times \\ \times \left( 3f_I^2 \left| \frac{\partial v_I}{\partial r}(0) \right|^2 + \frac{g_I^2 k_X^2}{3} \left( |u_1^I(0)|^2 + |u_2^I(0)|^2 \right) [1 - 2\gamma^I P_2(\cos \theta_{pX})] \right). \quad (4.36)$$

Заметим, что анизотропия этого распределения определяется теми же параметрами  $\gamma^I$ . Интегрирование выражения (4.30) по обоим телесным углам даёт распределение по инвариантной массе пары  $p\bar{p}$  в распадах  $\psi$ -мезонов в  $p\bar{p}X$

$$\frac{d\Gamma^I}{dM_{p\bar{p}}} = \frac{k_p k_X}{2^5 \pi^3 M_\psi^4} F_D^2(M_{p\bar{p}}) \left( 3f_I^2 \left| \frac{\partial v_I}{\partial r}(0) \right|^2 + \frac{g_I^2 k_X^2}{3} \left( |u_1^I(0)|^2 + |u_2^I(0)|^2 \right) \right). \quad (4.37)$$

### Сравнение с экспериментальными данными

Для описания эффектов нуклон-антинуклонного взаимодействия в состояниях  ${}^3S_1 - {}^3D_1$  в распадах  $\psi$ -мезонов мы используем ту же модель, что и при описании процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$ , см. раздел 3.1.3. Единственное отличие состоит в том, что здесь мы пренебрегаем кулоновским взаимодействием и различием масс протона и нейтрона и выражаем вероятности распада через волновые функции пары  $N\bar{N}$  в определённом изоспиновом состоянии, см. (4.25).

Нуклон-антинуклонное взаимодействие в канале  ${}^1P_1$  мы до сих пор не рассматривали, поэтому параметры потенциала нам пока не известны. Как и в разделе 3.1.3, будем рассматривать потенциалы  $V^{(I)}(r)$  в уравнении Шрёдингера (4.27) как сумму вкладов, связанных с изоскалярным и изовекторным обменами, то есть

$$V^{(I)}(r) = \tilde{U}^0(r) + (\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2) \tilde{U}^1(r), \quad (4.38)$$

где  $\boldsymbol{\tau}_1$  и  $\boldsymbol{\tau}_2$  — изоспиновые матрицы Паули. Тогда потенциалы взаимодействия в каналах с изоспинами  $I = 0$  и  $I = 1$  равны

$$V^{(0)}(r) = \tilde{U}^0(r) - 3 \tilde{U}^1(r), \quad V^{(1)}(r) = \tilde{U}^0(r) + \tilde{U}^1(r). \quad (4.39)$$

Для потенциалов изоскалярного и изовекторного обмена мы используем следующую простую параметризацию:

$$\begin{aligned}\tilde{U}^0(r) &= (U_0 - i W_0) \theta(a_0 - r), \\ \tilde{U}^1(r) &= (U_1 - i W_1) \theta(a_1 - r) + U^\pi(r) \theta(r - a_1), \quad U^\pi(r) = f_\pi^2 \frac{e^{-m_\pi r}}{r}.\end{aligned}\quad (4.40)$$

где  $U^\pi(r)$  — пионный вклад в потенциал изовекторного обмена в состоянии со спином  $S = 0$  (см., например, [1]), а короткодействующие вклады представляют из себя прямоугольные потенциальные ямы. Здесь  $m_\pi = 135$  МэВ — масса пиона, константа связи пиона с нуклоном известна из экспериментов по пион-нуклонному и нуклон-нуклонному рассеянию и равна  $f_\pi^2 = 0,075$ , а величины  $U_I$ ,  $W_I$  и  $a_I$  являются свободными параметрами модели. Напомним, что вблизи порога характерный размер волновой функции нуклон-антинуклонной системы велик по сравнению с радиусом взаимодействия, поэтому детали взаимодействия не играют большой роли.

Для определения параметров нуклон-антинуклонного взаимодействия в состоянии  ${}^1P_1$  мы используем сечения нуклон-антинуклонного рассеяния в данной парциальной волне, полученные неймегенской группой [14], а также распределения по инвариантной массе  $p\bar{p}$  в распадах  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$  измеренные на детекторах CLEO [57] и BES [45; 48; 56; 60–63]. При этом мы варьируем параметры потенциала взаимодействия в состоянии  ${}^1P_1$ , а также константы  $g_I$  и  $f_I$  в выражении (4.37), однако считаем фиксированными параметры потенциала взаимодействия в состояниях  ${}^3S_1 - {}^3D_1$ . Параметры модели, которые минимизируют значение  $\chi^2$ , вычисленное по всем этим данным, приведены в таблице 4.2. При этом отношения констант равны  $f_0/g_0 = 1,71$  для распада  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\eta$ ,  $f_0/g_0 = 0,59$  для распада  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\eta$ ,  $f_1/g_1 = 20,3$  для распада  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\pi^0$  и  $f_1/g_1 = 34,5$  для распада  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\pi^0$ . Абсолютная величина этих констант определяется нормировкой на число событий, наблюдавшихся в конкретном эксперименте, и поэтому не имеет фундаментального значения.

Таблица 4.2 — Параметры потенциалов (4.40) нуклон-антинуклонного взаимодействия в состоянии  ${}^1P_1$

	$\tilde{U}^{(0)}$	$\tilde{U}^{(1)}$
$U$ (МэВ)	37	332
$W$ (МэВ)	272,8	213,3
$a$ (фм)	1,227	0,536

Сравнение наших результатов для парциальных сечений протон-антинуклонного рассеяния в состоянии  ${}^1P_1$  (4.29) с данными неймегенской модели [14] показаны на рисунке 4.5. В целом наша модель хорошо воспроизводит парциальные сечения, отличия заметны в основном в сечении перезарядки, которое малоб. На рисунке 4.6 показано сравнение предсказаний нашей модели с экспериментальными данными для распределений по инвариантной массе  $p\bar{p}$  в распадах  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\pi^0$ ,  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\eta$ ,  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\pi^0$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\eta$ . Экспериментальные данные для каждого процесса были приведены к общей нормировке, соответствующей наиболее раннему из экспериментов. В рассматриваемом диапазоне энергий вблизи порога рождения протон-антинуклонных пар наша модель хорошо описывает данные. Соответствующее значение  $\chi^2/N_{\text{df}} = 150/123 = 1,22$  с учётом всех четырёх распадов. На графиках также отдельно показаны вклады в вероятности распадов, соответствующие рождению пары  $p\bar{p}$  в состояниях  ${}^3S_1 - {}^3D_1$  и  ${}^1P_1$ . Наш анализ показывает, что для описания спектров обсуждаемых распадов  $\psi$ -мезонов необходимо учесть существенный вклад состояний, соответствующих рождению пары  $p\bar{p}$  с квантовыми числами  $S = 0$ ,  $L = 1$ . Из графиков на рисунке 4.6 видно, что в рамках нашей модели уже при инвариантной массе пары  $p\bar{p}$ , превышающей пороговое значение на 50 МэВ,  $P$ -состояния дают доминирующий вклад в вероятности распадов  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\pi^0$ ,  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\pi^0$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\eta$ .

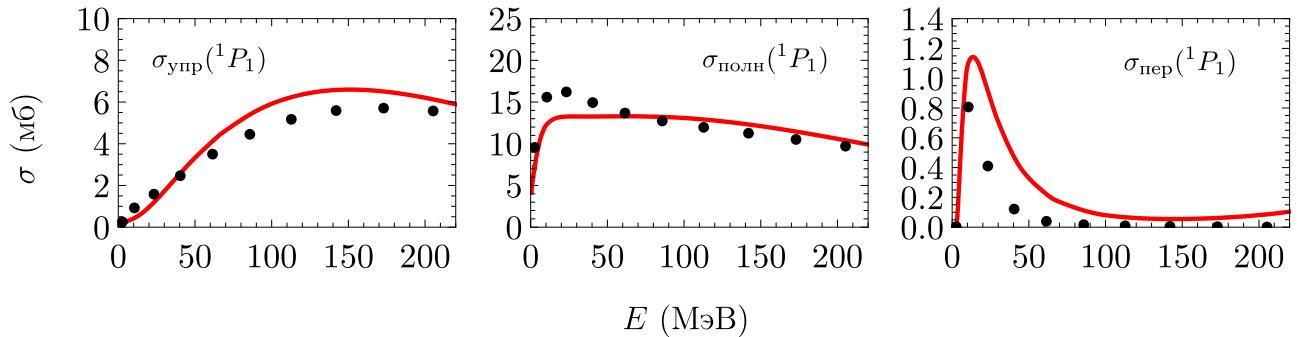


Рисунок 4.5 — Сравнение предсказаний нашей модели для парциальных сечений нуклон-антинуклонного рассеяния, см. (4.29), с результатами анализа, проведённого неймегенской группой [14]

На рисунке 4.7 показаны наши предсказания для зависимости параметров анизотропии угловых распределений (4.35) от инвариантной массы пары  $p\bar{p}$ . Большая анизотропия ожидается в области инвариантных масс  $50 \div 150$  МэВ от порога. Параметр анизотропии  $\gamma^0$  в распадах с рождением  $\eta$ -мезона достигает 0,2, а параметр анизотропии  $\gamma^1$  в распадах с рождением  $\pi^0$ -мезона ожидается в пределах 0,1. Отметим, что в нашей работе [113], где использовались параметры модели нуклон-антинуклонного взаимодействия, основанные на старых экспериментальных данных, предсказания для  $\gamma^I$  были больше по абсолютной величине и отличались знаком от представленных здесь. Таким образом, предсказания для угловых распределений в распадах  $\psi$ -мезонов являются модельно зависимыми. Для получения дополнительной информации о нуклон-антинуклонном взаимодействии в состояниях  $^3S_1 - ^3D_1$  было бы полезно провести экспериментальное измерение анизотропии угловых распределений в распадах  $\psi$ -мезонов при малых инвариантных массах пары  $p\bar{p}$ . К сожалению, на данный момент имеются только экспериментальные данные для угловых распределений, проинтегрированные по всему диапазону инвариантных масс [45; 56]. Также важно отметить, что в рамках нашей модели угловые распределения в распадах  $\psi$ -мезонов определяются не только параметрами анизотропии  $\gamma^I$ , но и соотношением между вкладами в вероятности распадов,

связанными с нуклон-антинуклонным взаимодействием в состояниях  $^3S_1 - ^3D_1$  и  $^1P_1$ , см. (4.34), (4.36). Причём состояние  $^1P_1$  даёт основной вклад в угловые распределения уже при инвариантной массе пары  $p\bar{p}$ , превышающей пороговое значение на  $50 \div 100$  МэВ.

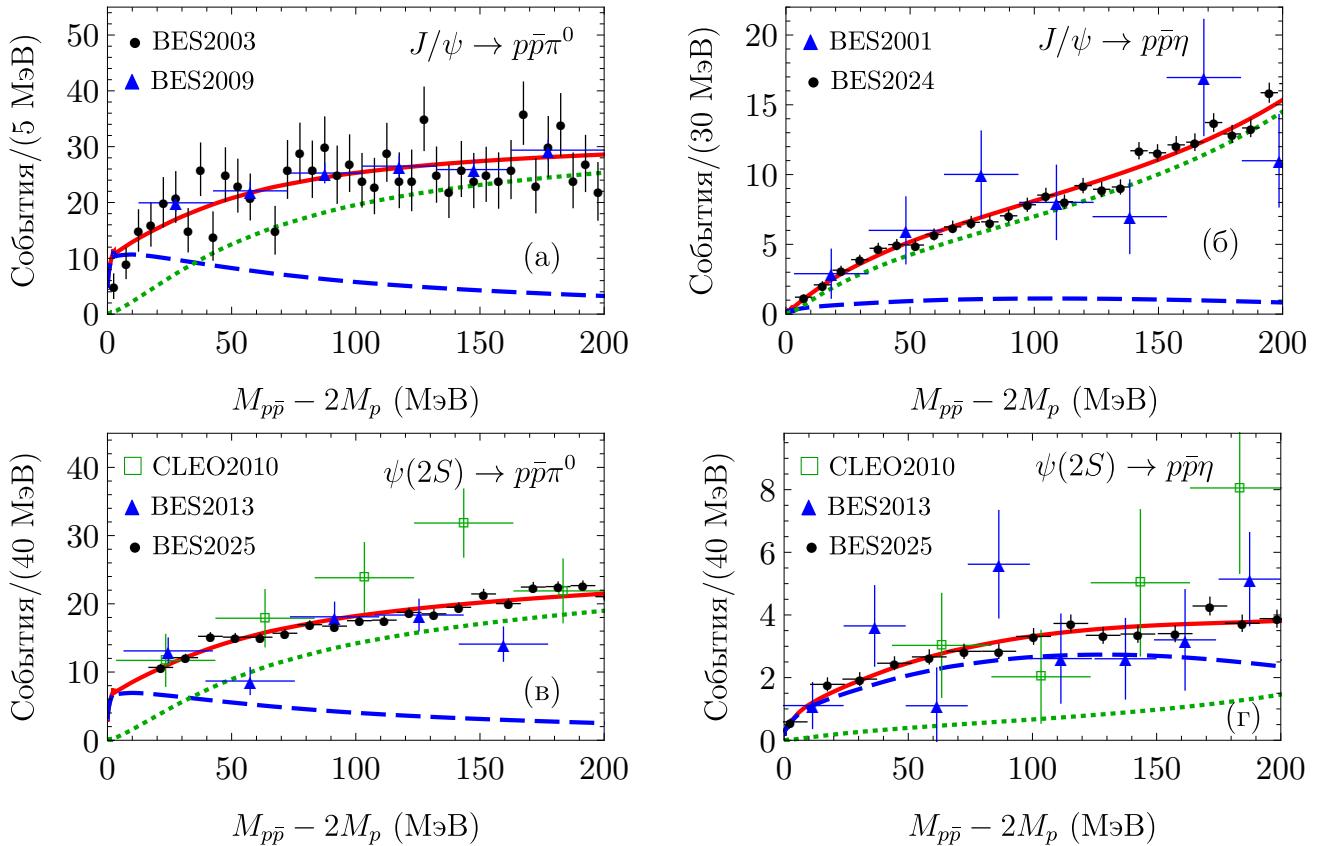


Рисунок 4.6 — Зависимости вероятностей распадов  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\pi^0$ ,  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\eta$ ,  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\pi^0$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\eta$  от инвариантной массы пары  $p\bar{p}$  в сравнении с экспериментальными данными [45; 48; 56; 57; 60–63]. Штриховыми линиями показаны вклады в вероятности, связанные с нуклон-антинуклонным взаимодействием с состояниями  $^3S_1 - ^3D_1$ , пунктирными линиями показаны вклады состояний  $^1P_1$ , а сплошными линиями — суммарные вероятности. Все графики нормированы на количество событий, наблюдавшихся в более ранних экспериментах

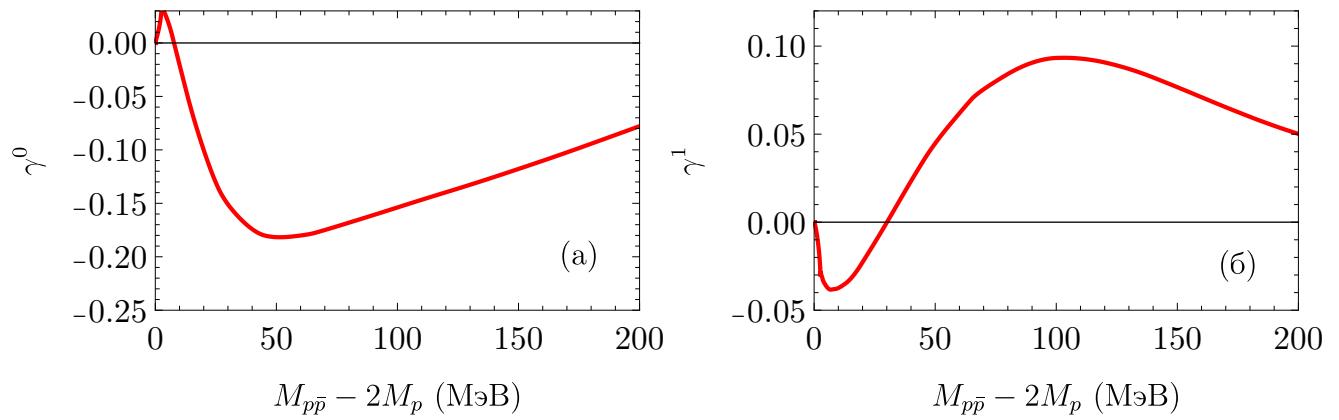


Рисунок 4.7 — Зависимости параметров анизотропии (4.35) угловых распределений распадов  $\psi$ -мезонов, связанных с нуклон-антинуклонным взаимодействием в состояниях  $^3S_1 - ^3D_1$ , от инвариантной массы пары  $p\bar{p}$

## Глава 5

**Взаимодействие мезонов в конечном состоянии**

Нетривиальная зависимость сечений от энергии вблизи порога наблюдается не только в процессах с рождением пары барионов в  $e^+e^-$  аннигиляции, которые мы обсуждали до сих пор, но и в процессах с рождением пары мезонов. К примеру, несколько пиков и провалов сложной формы было обнаружено в энергетической зависимости сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow B\bar{B}$ ,  $e^+e^- \rightarrow B\bar{B}^*$  и  $e^+e^- \rightarrow B^*\bar{B}^*$ , измеренных на детекторах BaBar [82], Belle [83] и Belle II [84]. Наши исследования показывают, что такие особенности поведения сечений могут быть связаны с наличием нескольких близких порогов реакций. Действительно, масса векторного мезона  $B^*$  всего на 45 МэВ превышает массу псевдоскалярного мезона  $B$ . Поэтому порог рождения  $B^*\bar{B}$  лежит на 45 МэВ выше порога  $B\bar{B}$ , а порог рождения  $B^*\bar{B}^*$  лежит на 90 МэВ выше порога  $B\bar{B}$ . Поскольку все три конечных состояния рождаются в  $e^+e^-$  аннигиляции через один виртуальный фотон, то они имеют одинаковые квантовые числа  $J^{PC} = 1^{--}$ . Значит в процессе рождения пар мезонов  $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  возможно смешивание разных конечных состояний и переходы между ними. Именно связи между разными каналами реакции в таких процессах приводят к нетривиальным припороговым эффектам. Сложная зависимость сечений от энергии вблизи порога наблюдалась и в процессах с рождением в  $e^+e^-$  аннигиляции пар  $D$ -мезонов на детекторах BaBar [76], Belle [75; 77; 80], CLEO [78] и BESIII [79; 81]. Разница масс векторных и псевдоскалярных  $D$ -мезонов близка к 140 МэВ, поэтому учёт смешивания состояний  $D\bar{D}$ ,  $D\bar{D}^*$  и  $D^*\bar{D}^*$  оказывается важным для описания энергетической зависимости сечений рождения этих состояний. В данной главе мы рассмотрим взаимодействие в конечном состоянии в случае нескольких каналов реакции с разными пороговыми энергиями и применим полученные результаты к описанию сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$  и  $e^+e^- \rightarrow B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$ .

## 5.1. Рождение $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ в $e^+e^-$ аннигиляции

### 5.1.1. Теория рождения $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ в $e^+e^-$ аннигиляции

В этом разделе мы рассмотрим взаимодействие в конечном состоянии в процессах с рождением пар  $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$  в  $e^+e^-$  аннигиляции. Несколькоими группами были предложены разные подходы к описанию взаимодействия между  $D$ -мезонами [102; 105; 110]. Ниже мы рассмотрим взаимодействие в конечном состоянии в рамках развивающегося нами подхода. В принципе, при тех энергиях, при которых рождаются пары  $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ , может рождаться также пара мезонов  $D_s\bar{D}_s$ . Однако мы ожидаем, что из-за наличия  $s$ -кварков состояние  $D_s\bar{D}_s$  будет слабо смешиваться с состояниями  $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ . Поэтому в нашем анализе мы ограничиваемся рассмотрением процессов с рождением пар  $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ , для которых учёт смешивания между разными каналами реакции играет существенную роль. Поскольку внутренняя чётность как  $D$ -мезонов, так и  $D^*$ -мезонов отрицательна,  $P$ -чётность состояния мезон-антимезон связана с их относительным орбитальным моментом  $L$  соотношением  $P = (-1)^L$ . Таким образом, в процессах  $e^+e^- \rightarrow D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$  из виртуального фотона могут рождаться только пары с нечётным значением  $L$ , а вблизи порогов должен доминировать вклад состояний с  $L = 1$ . В случае рождения пары  $D\bar{D}$  спин конечного состояния равен  $S = 0$ , а  $C$ -чётность равна  $C = (-1)^{L+S} = -1$ .  $C$ -нечётное состояние из псевдоскалярного и векторного мезонов имеет спин  $S = 1$  и соответствует волновой функции  $(D\bar{D}^* + D^*\bar{D})/\sqrt{2}$ . Пара  $D^*\bar{D}^*$  в  $C$ -нечётном состоянии, в принципе, может иметь как спин  $S = 0$ , так и  $S = 2$ . Однако экспериментальные данные, которые позволили бы различить эти спиновые состояния, на сегодняшний день отсутствуют, поэтому в дальнейшем мы будем подразумевать некоторое усреднённое состояние пары  $D^*\bar{D}^*$ .

Рождение пары  $D^{(*)}$ -мезонов в  $e^+e^-$  аннигиляции происходит следующим образом. На малых расстояниях  $r \sim 1/\sqrt{s}$  из виртуального фотона рождается кварк-антикварковая пара  $c\bar{c}$ , имеющая изоспин  $I = 0$ . Затем, по мере разлё-

та  $c$ -кварков происходит адронизация и образуются  $D^{(*)}$ -мезоны. Однако из-за различия масс заряженных и нейтральных  $D^{(*)}$ -мезонов, а также кулоновских сил между заряженными мезонами, взаимодействие в конечном состоянии приводит к нарушению изотопической инвариантности. Таким образом, для полного описания взаимодействия в конечном состоянии в процессах с рождением пар  $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$  нужно рассматривать шесть различных конечных состояний. Введём соответствующие волновые функции в порядке возрастания пороговой энергии:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= D^0 \bar{D}^0, & \psi_2 &= D^+ D^-, \\ \psi_3 &= \frac{D^0 \bar{D}^{*0} + \bar{D}^0 D^{*0}}{\sqrt{2}}, & \psi_4 &= \frac{D^+ D^{*-} + D^- D^{*+}}{\sqrt{2}}, \\ \psi_5 &= D^{*0} \bar{D}^{*0}, & \psi_6 &= D^{*+} D^{*-}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Порог рождения состояния  $\psi_1$  равен 3730 МэВ, а пороги рождения остальных состояний,  $\Delta_i$ , будем отсчитывать от этой величины. Таким образом,  $\Delta_1 = 0$ ,  $\Delta_2 = 9,6$  МэВ,  $\Delta_3 = 142$  МэВ,  $\Delta_4 = 150$  МэВ,  $\Delta_5 = 284$  МэВ и  $\Delta_6 = 291$  МэВ (эти значения соответствуют данным Particle Data Group за 2024 год [178]).

Шестиканальная радиальная волновая функция системы  $D$ -мезонов может быть представлена в виде вектора

$$\Psi(r) = (\psi_1(r), \dots, \psi_6(r))^T.\tag{5.2}$$

Эта волновая функция удовлетворяет системе радиальных уравнений Шрёдингера с орбитальным моментом  $L = 1$

$$\left[ \frac{p_r^2}{M} + \mathcal{V}(r) + \frac{2}{Mr^2} - \mathbb{E} \right] \Psi(r) = 0, \quad \mathbb{E}_{ij} = (E - \Delta_i) \cdot \delta_{ij},\tag{5.3}$$

где  $\mathbb{E}$  — диагональная матрица  $6 \times 6$ ,  $E$  — кинетическая энергия пары  $D$ -мезонов, отсчитанная от порога рождения  $D^0 \bar{D}^0$ , а  $M = 1865$  МэВ — масса  $D^0$ -мезона (в принципе, можно использовать и другое значение средней массы, однако в первом приближении это влияет только на переопределение значений потен-

циалов). Матрица потенциалов  $\mathcal{V}(r)$  имеет размерность  $6 \times 6$  и описывает взаимодействие между мезонами в каждом канале, а также амплитуды перехода между каналами. Представим её в блочном виде

$$\mathcal{V}(r) = \mathcal{V}_C + \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{11} & \mathcal{W}_{12} & \mathcal{W}_{13} \\ \mathcal{W}_{12} & \mathcal{W}_{22} & \mathcal{W}_{23} \\ \mathcal{W}_{13} & \mathcal{W}_{23} & \mathcal{W}_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

где диагональная матрица  $\mathcal{V}_C = \text{diag} \left( 0, -\frac{\alpha}{r}, 0, -\frac{\alpha}{r}, 0, -\frac{\alpha}{r} \right)$  описывает кулоновское взаимодействие между заряженными мезонами. Каждый из потенциалов  $\mathcal{W}_{ij}$  является матрицей  $2 \times 2$ , которую можно представить в виде

$$\mathcal{W}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\mathcal{U}_{ij}^0 + \mathcal{U}_{ij}^1) & \frac{1}{2} (\mathcal{U}_{ij}^0 - \mathcal{U}_{ij}^1) \\ \frac{1}{2} (\mathcal{U}_{ij}^0 - \mathcal{U}_{ij}^1) & \frac{1}{2} (\mathcal{U}_{ij}^0 + \mathcal{U}_{ij}^1) \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

где  $\mathcal{U}_{ij}^I$  — потенциалы взаимодействия в состоянии с изоспином  $I$  (который может принимать значения 0 или 1). Диагональные элементы матриц  $\mathcal{W}_{ij}$  соответствуют переходам без изменения зарядов  $D$ -мезонов, а недиагональные описывают процессы с перезарядкой. Потенциалы  $\mathcal{U}_{ij}^I$  можно выразить через потенциалы изоскалярного и изовекторного обмена,  $U_{ij}^0$  и  $U_{ij}^1$  соответственно, с помощью соотношений (ср. (3.13) и (3.14))

$$\mathcal{U}_{ij}^0(r) = U_{ij}^0(r) - 3U_{ij}^1(r), \quad \mathcal{U}_{ij}^1(r) = U_{ij}^0(r) + U_{ij}^1(r). \quad (5.6)$$

Потенциалы  $U_{ij}^0(r)$  и  $U_{ij}^1(r)$  содержат всю информацию о взаимодействии в системе  $D^{(*)}$ -мезонов.

Как уже неоднократно говорилось выше, учёт взаимодействия в конечном состоянии в процессах с рождением пары адронов вблизи порога может быть сведён к небольшому числу параметров. Детали взаимодействия между адронами в таких случаях не играют определяющей роли. Поэтому можно выбрать наиболее удобную для вычислений параметризацию потенциалов взаимодействия. В качестве простой параметризации потенциалов изоскалярного

и изовекторного обмена  $U_{ij}^I(r)$  мы используем прямоугольные ямы:

$$U_{ij}^I(r) = u_{ij}^I \theta(a_{ij}^I - r). \quad (5.7)$$

Параметры потенциалов  $u_{ij}^I$  и  $a_{ij}^I$  должны находиться из сравнения с экспериментальными данными. Наш анализ показывает, что все потенциалы  $U_{ij}^I(r)$  можно считать вещественными, то есть возможность аннигиляции пар  $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$  в другие состояния не существенна для нашей задачи.

Система уравнений (5.3) имеет шесть линейно независимых регулярных в нуле решений  $\Psi^{(n)}(r)$ :

$$\Psi^{(n)}(r) = \left( \psi_1^{(n)}(r), \dots, \psi_6^{(n)}(r) \right)^T, \quad n = 1, \dots, 6. \quad (5.8)$$

Решения  $\Psi^{(n)}(r)$  имеют такое асимптотическое поведение на больших расстояниях, что сходящаяся сферическая волна присутствует только в  $n$ -той компоненте, а расходящиеся волны есть во всех компонентах. То есть их асимптотики имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi^{(n)}(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \left( S_1^{(n)} \chi_1^+, \dots, S_n^{(n)} \chi_n^+ - \chi_n^-, \dots, S_6^{(n)} \chi_6^+ \right)^T, \\ \chi_i^\pm &= \frac{1}{k_i r} \exp \left[ \pm i (k_i r - \pi/2) \right], \quad i = 1, 3, 5, \\ \chi_i^\pm &= \frac{1}{k_i r} \exp \left[ \pm i (k_i r - \pi/2 + \eta_i \ln(2k_i r) + \sigma_i) \right], \quad i = 2, 4, 6, \\ \sigma_i &= \frac{i}{2} \ln \frac{\Gamma(2 + i\eta_i)}{\Gamma(2 - i\eta_i)}, \quad \eta_i = \frac{M\alpha}{2k_i}, \quad k_i = \sqrt{M(E - \Delta_i)}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где  $S_i^{(n)}$  — некоторые зависящие от энергии коэффициенты. Обращаем внимание, что функции  $\chi_i^\pm$ , соответствующие каналам с заряженными  $D^{(*)}$ -мезонами, дополнительно содержат кулоновскую фазу. Сечения  $\sigma^{(n)}$ , соответствующие рождению состояний  $\psi_n$  (см. определения (5.1)) в  $e^+e^-$  аннигиляции, можно представить в виде (ср. (1.58))

$$\sigma^{(n)} = \frac{\pi k_n \alpha^2}{Ms} \left| \sum_{i=1}^6 g_i \frac{\partial \psi_i^{(n)}}{\partial r}(0) \right|^2, \quad (5.10)$$

где  $s = (2M + E)^2$ , а  $g_i$  — некоторые константы, связанные с амплитудами вероятности рождения соответствующих состояний на малых расстояниях. Как отмечалось ранее, см. (1.58), коэффициенты усиления амплитуд рождения пар адронов в состоянии с орбитальным моментом  $L = 1$  пропорциональны производным соответствующих волновых функций в нуле. Так как на малых расстояниях рождается изоскалярное состояние  $c\bar{c}$ , то константы  $g_i$  связаны между собой соотношениями  $g_1 = g_2$ ,  $g_3 = g_4$  и  $g_5 = g_6$ .

### 5.1.2. Описание экспериментальных данных

Сечения процессов  $e^+e^- \rightarrow D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$  в припороговой области энергий были измерены на детекторах BaBar [76], Belle [77; 80], CLEO [78] и BESIII [79; 81]. Кроме того, необработанные результаты измерений для сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow D\bar{D}$  на BESIII в области резонанса  $\psi(3770)$  были представлены в диссертационной работе [179]. Хотя эти данные не были официально опубликованы в коллаборационной статье, в работе [105] по результатам этих измерений было вычислено борновское сечение (при этом учитывались поправки на поляризацию вакуума и излучение фотона в начальном состоянии). Все перечисленные выше измерения использовались нами для определения параметров потенциалов взаимодействия в системе  $D^{(*)}$ -мезонов.

Нами было вычислено значение  $\chi^2$ , показывающее насколько хорошо наша модель описывает все экспериментальные данные для сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ . Затем были найдены такие параметры потенциалов  $u_{ij}^I$  и  $a_{ij}^I$  (см. (5.7)), а также констант  $g_i$ , чтобы получить наименьшее значение  $\chi^2$ . Для решения задачи оптимизации, а также анализа полученных результатов была разработана программа на языке программирования C++. В результате подгонки получено значение  $\chi^2/N_{\text{df}} = 397/338 = 1,18$  для 367 экспериментальных точек. Найденные параметры потенциалов перечислены в таблице 5.1, а значения констант равны  $g_1 = g_2 = 0,283$  фм,  $g_3 = g_4 = (-0,029 + 0,244i)$  фм,  $g_5 = g_6 = (0,699 - 0,2i)$  фм (эти результаты опубликованы в работе [124]).

Таблица 5.1 — Параметры потенциалов взаимодействия в системе  $D^{(*)}$ -мезонов, определённых выражениями (5.4)–(5.7)

	Изоскалярный обмен		Изовекторный обмен	
	$u^0$ (МэВ)	$a^0$ (фм)	$u^1$ (МэВ)	$a^1$ (фм)
$\mathcal{U}_{11}$	–293	1,394	47,3	1,898
$\mathcal{U}_{22}$	–73,8	1,558	211,1	0,933
$\mathcal{U}_{33}$	–15,9	2,228	135	1,245
$\mathcal{U}_{12}$	108,3	1,669	2,8	2,954
$\mathcal{U}_{13}$	60,9	1,764	–124,1	0,462
$\mathcal{U}_{23}$	–32,2	1,915	–11,2	1,361

Сравнения результатов наших вычислений с экспериментальными данными показаны на рисунке 5.1 для сечений рождения пар нейтральных  $D^{(*)}$ -мезонов и на рисунке 5.2 для сечений рождения пар заряженных  $D^{(*)}$ -мезонов. Наша модель хорошо описывает нетривиальную зависимость от энергии сечений всех этих процессов. В частности, удаётся воспроизвести глубокие провалы в сечениях рождения  $D^0\bar{D}^0$  и  $D^+D^-$  при энергиях около 80 МэВ и около 280 МэВ. Если второй провал попадает как раз на порог рождения пар  $D^*\bar{D}^*$ , то первый провал лежит несколько ниже порога рождения  $D^*\bar{D}$ . Такая сложная зависимость сечений от энергии является следствием взаимодействия между разными каналами реакции и интерференции различных вкладов в сечения (5.10). Одновременный учёт всех вкладов в потенциал взаимодействия (5.4) (как диагональных, так и недиагональных) является важным для описания имеющихся экспериментальных данных. Для отношения сечений  $\sigma(e^+e^- \rightarrow D^+D^-)/\sigma(e^+e^- \rightarrow D^0\bar{D}^0)$  вблизи максимума сечения резонанса  $\psi(3770)$  наши расчёты дают значение 0,8, что также соответствует измерениям детектора CLEO [180].

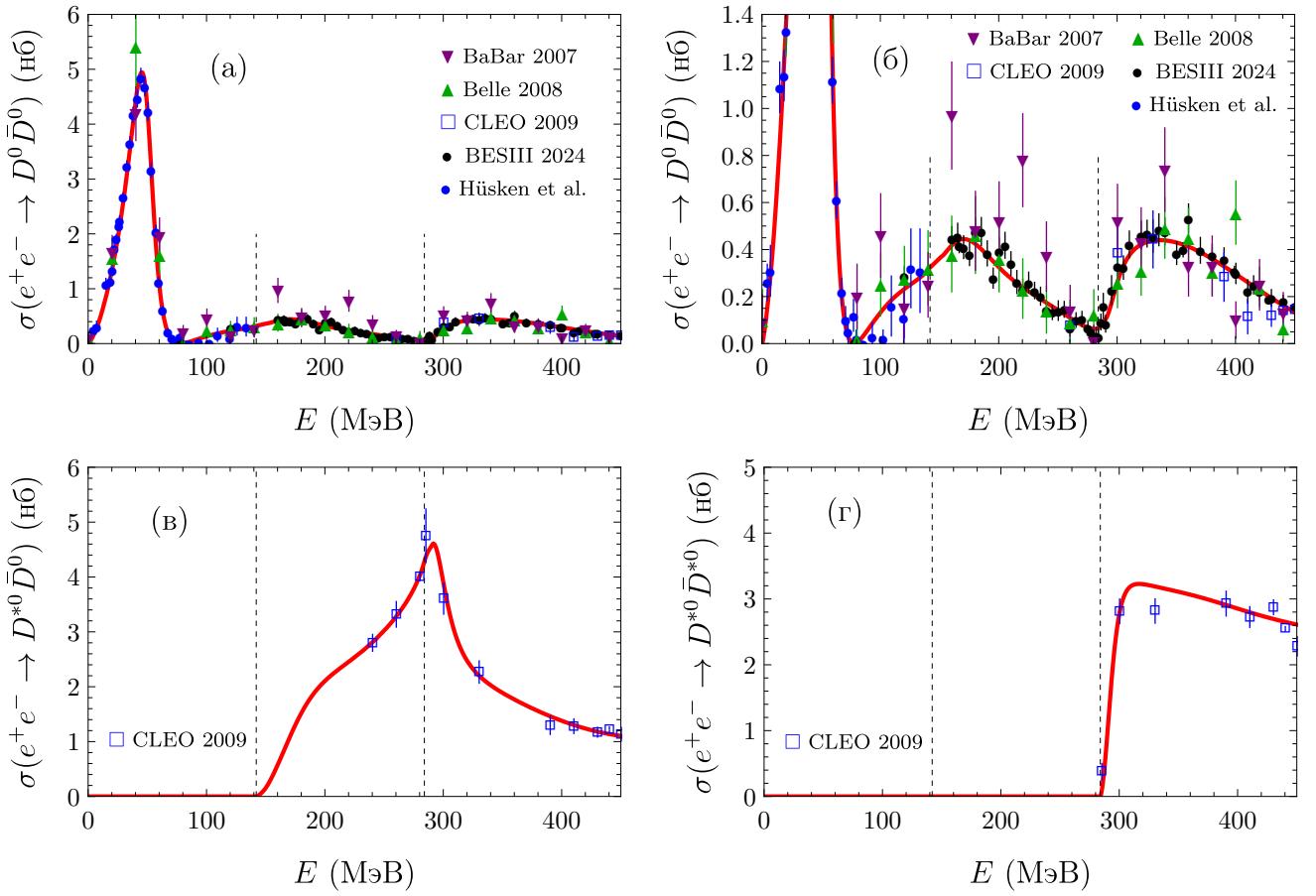


Рисунок 5.1 — Сравнение с экспериментальными данными наших предсказаний для зависимости от энергии сечений рождения пар нейтральных  $D^{(*)}$ -мезонов ( $\sigma^{(1)}$ ,  $\sigma^{(3)}$  и  $\sigma^{(5)}$  в формуле (5.10)). Экспериментальные данные взяты из работ [76–79; 105; 181]. Вертикальными штриховыми линиями показаны пороги рождения  $D^{*0}\bar{D}^0$  и  $D^{*0}\bar{D}^{*0}$

Резонанс  $\psi(3770)$  в сечении рождения  $D\bar{D}$  в нашем подходе возникает из-за наличия виртуального уровня в системе взаимодействующих  $D$ -мезонов в нашей многоканальной задаче. Может показаться, что этот результат противоречит общепринятым представлениям, согласно которым  $\psi(3770)$  представляет собой связанное состояние  $c\bar{c}$ . Однако нужно иметь ввиду, что точная волновая функция  $\psi(3770)$  содержит не только вклад состояния  $c\bar{c}$ , но и другие вклады, связанные с примесями глюонов и лёгких夸克ов. При вычислении матричных элементов разных переходов основной вклад будут давать разные компоненты полной волновой функции  $\psi(3770)$ . В частности, основной вклад в

матричный элемент перехода в конечное состояние  $D\bar{D}$  даёт именно компонента волновой функции  $\psi(3770)$ , содержащая примесь лёгких кварков. Взаимодействие в таком состоянии описывается в рамках нашего подхода введением некоторого эффективного потенциала взаимодействия между  $D$ -мезонами.

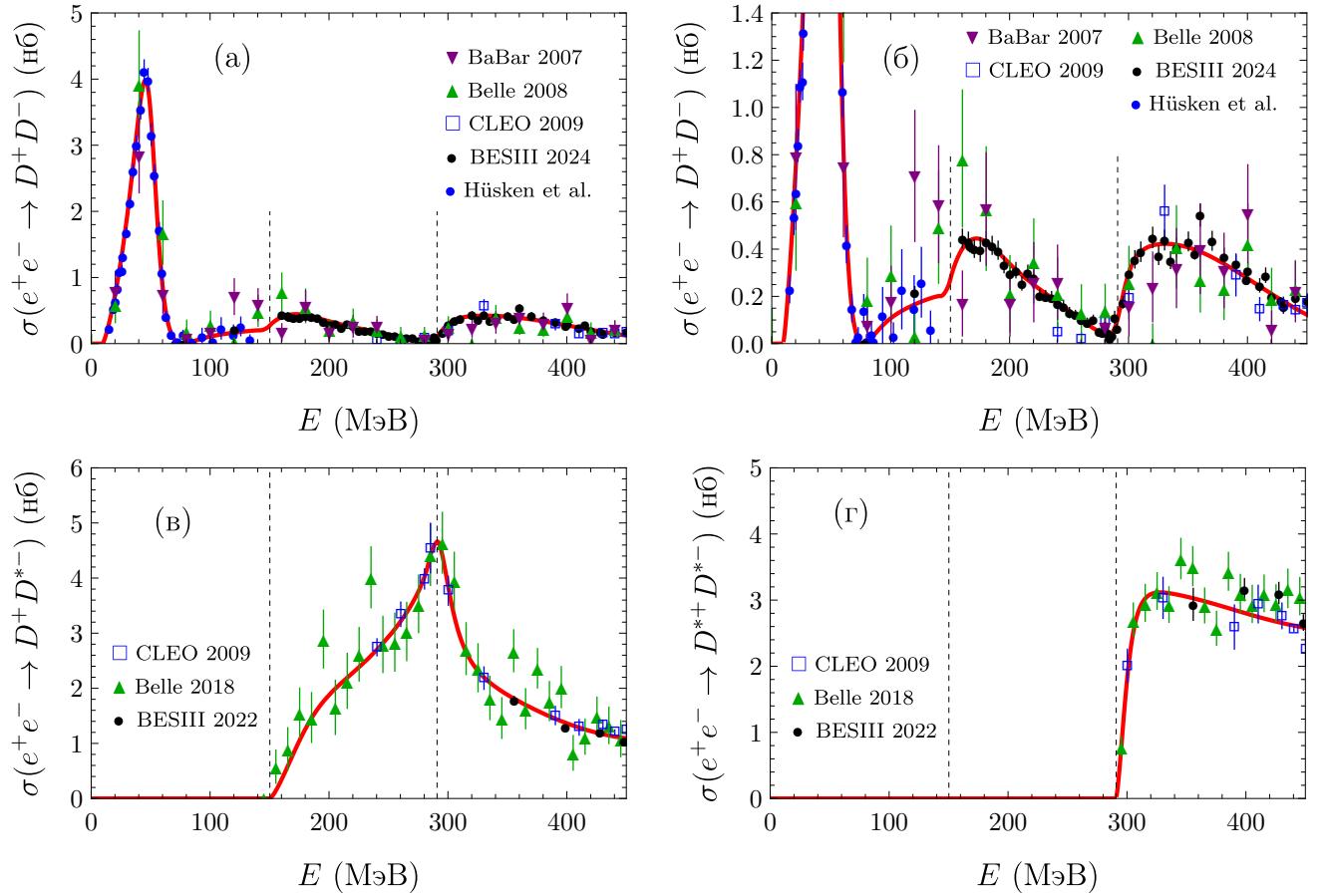


Рисунок 5.2 — Сравнение с экспериментальными данными наших предсказаний для зависимости от энергии сечений рождения пар заряженных  $D^{(*)}$ -мезонов ( $\sigma^{(2)}$ ,  $\sigma^{(4)}$  и  $\sigma^{(6)}$  в формуле (5.10)). Экспериментальные данные взяты из работ [76–81; 105; 181]. Вертикальными штриховыми линиями показаны пороги рождения  $D^+D^{*-}$  и  $D^{*+}D^{*-}$ .

## 5.2. Рождение $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$ в $e^+e^-$ аннигиляции

### 5.2.1. Описание процессов рождения $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$ в $e^+e^-$ аннигиляции

В этом разделе мы рассмотрим сечения процессов  $e^+e^- \rightarrow B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  вблизи порогов. Квантовые числа  $B$  и  $B^*$  мезонов совпадают с квантовыми числами  $D$  и  $D^*$  мезонов, соответственно. Поэтому выражения для сечений (5.10), полученные в предыдущем разделе, также могут быть применены к процессам с рождением пар  $B^{(*)}$ -мезонов. Отметим, однако, что экспериментальных данных для сечений рождения пар  $B^{(*)}$ -мезонов меньше, чем в случае  $D^{(*)}$ -мезонов. На детекторе BaBar было измерено полное сечение рождения состояний, содержащих пару кварков  $b\bar{b}$ , которое в рассматриваемой области энергий соответствует сумме сечений рождения  $B\bar{B}$ ,  $B^*\bar{B}$  и  $B^*\bar{B}^*$  [82]. Кроме того, на детекторах Belle и Belle II были измерены эксклюзивные сечения рождения  $B\bar{B}$ ,  $B^*\bar{B}$  и  $B^*\bar{B}^*$  [83; 84]. Однако во всех этих экспериментах не различались случаи рождения пар заряженных и нейтральных мезонов. Были проведены измерения отношения вероятностей распада  $\Upsilon(4S)$  на пары  $B^+B^-$  и  $B^0\bar{B}^0$  на пике резонанса [182–187], но этих данных недостаточно, чтобы разделить вклады изоскалярного и изовекторного обменов в потенциале  $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  взаимодействия.

Принимая во внимание то, что из имеющихся экспериментальных данных невозможно разделить сечения рождения пар заряженных и нейтральных  $B^{(*)}$ -мезонов, мы используем упрощённую по сравнению с разделом 5.1 модель взаимодействия мезонов. Так как рождающееся на малых расстояниях состояние  $b\bar{b}$  является изоскалярным, а эффекты нарушения изотопической инвариантности довольно слабые, то примесь изовекторного состояния, возникающая в результате взаимодействия  $B^{(*)}$ -мезонов, мала. Это значит, что потенциал взаимодействия в изовекторном канале слабо влияет на сечения рождения пар  $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$ . Поэтому, чтобы уменьшить количество параметров модели, мы считаем потенциалы взаимодействия в изоскалярных и изовекторных каналах равными друг другу. Фактически это означает, что мы пренебрегаем

потенциалами изовекторного обмена и считаем, что матрицы  $\mathcal{W}_{ij}$  в формуле (5.5) имеют вид

$$\mathcal{W}_{ij} = \begin{pmatrix} U_{ij}^0(r) & 0 \\ 0 & U_{ij}^0(r) \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Также, как и в случае  $D$ -мезонов, мы можем пренебречь возможностью аннигиляции пар  $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  в другие состояния и считать потенциалы  $U_{ij}^0(r)$  вещественными.

Возможные состояния системы  $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  обозначим по аналогии с системой  $D^{(*)}$ -мезонов, см. (5.1):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= B^0\bar{B}^0, & \psi_2 &= B^+B^-, \\ \psi_3 &= \frac{B^0\bar{B}^{*0} + \bar{B}^0B^{*0}}{\sqrt{2}}, & \psi_4 &= \frac{B^+B^{*-} + B^-B^{*+}}{\sqrt{2}}, \\ \psi_5 &= B^{*0}\bar{B}^{*0}, & \psi_6 &= B^{*+}B^{*-}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Порог рождения наиболее лёгкого состояния  $\psi_2$  равен 10558,8 МэВ, а пороги рождения остальных состояний,  $\Delta_i$ , будем отсчитывать от этой величины. Тогда  $\Delta_1 = 0,6$  МэВ,  $\Delta_2 = 0$ ,  $\Delta_3 = 46,6$  МэВ,  $\Delta_4 = 45,3$  МэВ,  $\Delta_5 = 92,5$  МэВ и  $\Delta_6 = 90,7$  МэВ (эти значения соответствуют данным Particle Data Group за 2024 год [178]). Сечения рождения всех шести возможных состояний пары  $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  даются формулами (5.10), где  $M = 5279,4$  МэВ соответствует массе  $B^+$ -мезона. Сечения рождения  $B\bar{B}$ ,  $B^*\bar{B}$  и  $B^*\bar{B}^*$ , просуммированные по заряженным и нейтральным каналам, равны

$$\sigma_{B\bar{B}} = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}, \quad \sigma_{B^*\bar{B}} = \sigma^{(3)} + \sigma^{(4)}, \quad \sigma_{B^*\bar{B}^*} = \sigma^{(5)} + \sigma^{(6)}. \quad (5.13)$$

В качестве параметризации потенциалов взаимодействия в системе  $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  мы используем прямоугольные ямы

$$U_{ij}^0(r) = u_{ij}^0 \theta(a_{ij}^0 - r). \quad (5.14)$$

Параметры этих потенциалов,  $u_{ij}^0$  и  $a_{ij}^0$ , а также значения констант  $g_i$  определяются из сравнения сечений рождения пар  $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  (5.13) с экспериментальными

данными. Мы используем результаты измерения сечений рождения  $B\bar{B}$ ,  $B^*\bar{B}$  и  $B^*\bar{B}^*$  в  $e^+e^-$  аннигиляции, полученные на детекторах Belle и Belle II [83; 84]. Кроме того, на детекторах BaBar и Belle было измерено отношение сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow b\bar{b}$  к борновскому сечению процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  [82; 188],

$$R_b = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow b\bar{b})}{\sigma^B(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}, \quad \sigma^B(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \quad (5.15)$$

В работе [189] из результатов этих измерений были извлечены отношения борновского сечения  $\sigma^B(e^+e^- \rightarrow b\bar{b})$ , а также «одетого» сечения  $\sigma^{\text{dre}}(e^+e^- \rightarrow b\bar{b})$  к сечению  $\sigma^B(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ ,  $R_b^B$  и  $R_b^{\text{dre}}$ . Авторы этих работ называют «одетым» сечением борновское сечение процесса с учётом эффектов поляризации вакуума, но без поправок на излучение фотонов в начальном состоянии. Поскольку в работах [83; 84] приведены экспериментальные данные для «одетых» сечений, то мы также вычисляем «одетое» сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow b\bar{b}$ , умножая значения  $R_b^{\text{dre}}$  из работы [189] на борновское сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . В рассматриваемом диапазоне энергий сечение  $\sigma^{\text{dre}}(e^+e^- \rightarrow b\bar{b})$  должно совпадать с суммой сечений рождения  $B\bar{B}$ ,  $B^*\bar{B}$  и  $B^*\bar{B}^*$ , так как пороги рождения  $B_s^{(*)}$ -мезонов лежат выше.

Для определения оптимальных параметров потенциала взаимодействия в системе  $B^{(*)}$ -мезонов мы минимизируем значение  $\chi^2$  (сумма квадратов стандартных отклонений от экспериментальных данных), вычисленное по всем имеющимся экспериментальным данным. Для решения задачи оптимизации использовалась программа на языке C++. Полученные в результате подгонки параметры потенциалов приведены в таблице 5.2, а значения констант, связанных с амплитудами вероятности рождения состояния  $b\bar{b}$  на малых расстояниях, равны  $g_1 = g_2 = 0,057$  фм,  $g_3 = g_4 = (-0,025 + 0,111i)$  фм,  $g_5 = g_6 = (-0,299 + 0,089i)$  фм (эти результаты опубликованы в нашей работе [122]). Итоговое значение  $\chi^2/N_{\text{df}} = 50,2/32 = 1,57$  для 49 экспериментальных точек. Сравнение результатов вычислений с экспериментальными данными показано на рисунке 5.3.

Таблица 5.2 — Параметры потенциалов взаимодействия в системе  $B^{(*)}$ -мезонов, см. (5.4), (5.11) и (5.14)

	$U_{11}^0$	$U_{22}^0$	$U_{33}^0$	$U_{12}^0$	$U_{13}^0$	$U_{23}^0$
$u_{ij}^0$ (МэВ)	-624	-356,1	-595,2	21,2	19,1	77,3
$a_{ij}^0$ (фм)	1,348	1,813	1,802	0,86	2,792	2,212

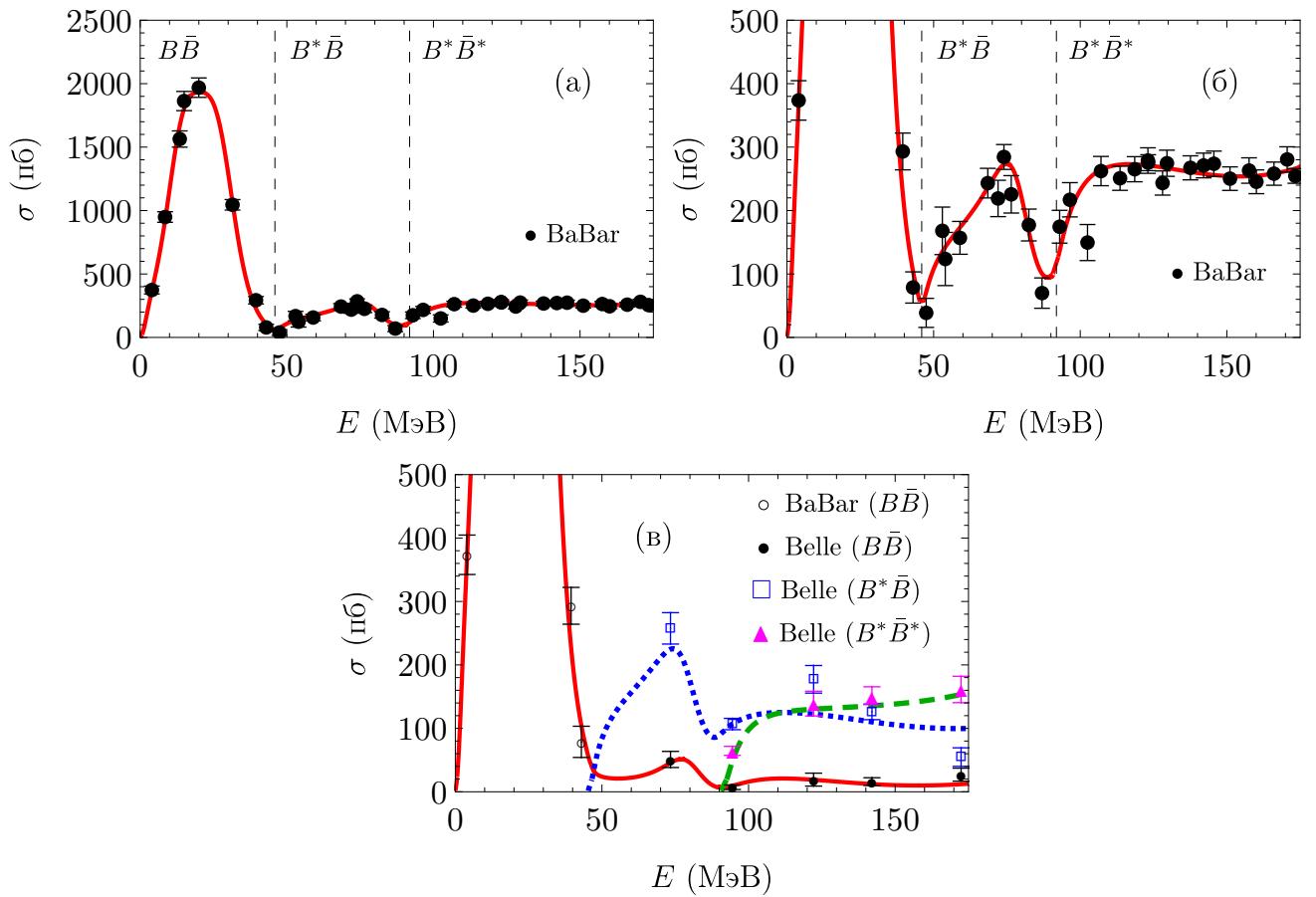


Рисунок 5.3 — Зависимость от энергии наших предсказаний для суммы сечений рождения  $B\bar{B}$ ,  $B^*\bar{B}$  и  $B^*\bar{B}^*$  в  $e^+e^-$  аннигиляции (а, б). Зависимость от энергии наших предсказаний для эксклюзивных сечений (в) для процессов  $e^+e^- \rightarrow B\bar{B}$  (сплошная линия),  $e^+e^- \rightarrow B\bar{B}^*$  (пунктирная линия) и  $e^+e^- \rightarrow B^*\bar{B}^*$  (штриховая линия). Экспериментальные данные для суммарного сечения взяты из работы [189], а для эксклюзивных сечений из работ [83; 84]. Вертикальными штриховыми линиями показаны пороги рождения состояний  $B^*\bar{B}$  и  $B^*\bar{B}^*$

Характерной особенностью поведения суммарного сечения  $e^+e^- \rightarrow b\bar{b}$  является то, что наблюдаются глубокие провалы на порогах рождения  $B^*\bar{B}$  и  $B^*\bar{B}^*$ . Наш анализ показывает, что такие провалы возникают из-за возможности переходов между разными состояниями пары  $B^{(*)}$ -мезонов ( $B\bar{B}$ ,  $B^*\bar{B}$  и  $B^*\bar{B}^*$ ). Благодаря этому в сечениях (5.13) проявляется интерференция нескольких амплитуд, что и приводит к нетривиальной зависимости сечений от энергии. Связь между разными каналами реакции может приводить и к другим интересным эффектам. К примеру, если положить равными нулю недиагональные потенциалы  $U_{12}^0(r)$ ,  $U_{13}^0(r)$  и  $U_{23}^0(r)$ , то в нашей модели существует связанное состояние в системе  $B^*\bar{B}^*$  при энергии 65 МэВ (то есть на 25 МэВ ниже порога). Однако с учётом возможных переходов между каналами это состояние уже не является связанным, так как оно может распадаться на  $B\bar{B}$  или  $B^*\bar{B}$ . Это приводит к тому, что в каналах  $B\bar{B}$  и  $B^*\bar{B}$  появляется пик при энергии около 75 МэВ выше порога рождения  $B\bar{B}$ .

Резонанс  $\Upsilon(4S)$  в сечении рождения  $B\bar{B}$  в нашем подходе возникает из-за наличия виртуального уровня в системе взаимодействующих  $B$ -мезонов в нашей многоканальной задаче. Как уже упоминалось на стр. 125 применительно к  $D$ -мезонам, этот результат не противоречит общепринятым представлениям, согласно которому  $\Upsilon(4S)$  представляет собой связанное состояние  $b\bar{b}$ . Точная волновая функция  $\Upsilon(4S)$ -мезона содержит не только вклад состояния  $b\bar{b}$ , но и другие вклады, связанные с примесями глюонов и лёгких кварков. Например, если в качестве модели взаимодействия между кварками  $b$  и  $\bar{b}$  использовать корнеллский потенциал [190], то оказывается, что размер резонанса  $\Upsilon(4S)$  порядка 1 фм. На таких расстояниях примесь лёгких кварков и глюонов уже должна быть заметной. При вычислении матричных элементов разных переходов основной вклад будут давать разные компоненты полной волновой функции  $\Upsilon(4S)$ . В частности, основной вклад в матричный элемент перехода в конечное состояние  $B\bar{B}$  даёт именно компонента волновой функции  $\Upsilon(4S)$ , содержащая примесь лёгких кварков. Взаимодействие в таком состоянии и

рассматривается в рамках нашего подхода с помощью введения эффективного потенциала взаимодействия между  $B$ -мезонами.

### 5.2.2. Нарушение изотопической инвариантности в рождении пар

$$B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$$

Для определения потенциала взаимодействия в системе  $B^{(*)}$ -мезонов мы использовали экспериментальные данные для сечений рождения  $B\bar{B}$ ,  $B^*\bar{B}$  и  $B^*\bar{B}^*$ , просуммированные по зарядовым состояниям. Однако, поскольку в нашей модели заряженные и нейтральные  $B^{(*)}$ -мезоны рассматривались как разные частицы с отличающимися массами и слегка разными потенциалами взаимодействия (за счёт кулоновских сил), мы можем предсказать некоторые эффекты, связанные с нарушением изотопической инвариантности. Представленные ниже результаты основаны на наших работах [116; 122].

На рисунке 5.4 показаны зависимости от энергии сечений рождения пар заряженных и нейтральных  $B^{(*)}$ -мезонов, то есть сечения  $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(6)}$  (см. (5.10)). Характерной особенностью зависимости этих сечений от энергии является то, что пики в каналах с рождением пар заряженных мезонов смещены на  $2 \div 4$  МэВ ниже по энергии относительно пиков в каналах с рождением пар нейтральных мезонов. Это смещение возникает по двум причинам. Во-первых, массы заряженных  $B^{(*)}$ -мезонов немного меньше, чем массы нейтральных  $B^{(*)}$ -мезонов. Во-вторых, кулоновское притяжение между заряженными  $B^{(*)}$ -мезонами приводит к смещению вниз по энергии (то есть налево на графиках) всех кривых, описывающих энергетическую зависимость сечений. Причём в случае  $B^{(*)}$ -мезонов эффект кулоновского притяжения, как правило, оказывается более существенным, чем влияние разницы масс. Здесь важно отметить, однако, что в нашей модели потенциалы взаимодействия в изоскалярных и изовекторных каналах считаются равными друг другу. Такое упрощение было сделано из-за недостатка экспериментальных данных, позволяющих различить сечения рождения пар заряженных и нейтральных  $B^{(*)}$ -мезонов. Вооб-

щё говоря, учёт разницы между потенциалами взаимодействия в изоскалярных и изовекторных каналах может привести к изменению соотношений между сечениями рождения заряженных и нейтральных  $B^{(*)}$ -мезонов при сохранении суммарных сечений. Однако мы не ожидаем, что эти изменения сечений сильно повлияют на наши выводы. Так или иначе, для более детального установления изотопической структуры потенциалов взаимодействия между  $B^{(*)}$ -мезонами нужны новые экспериментальные данные.

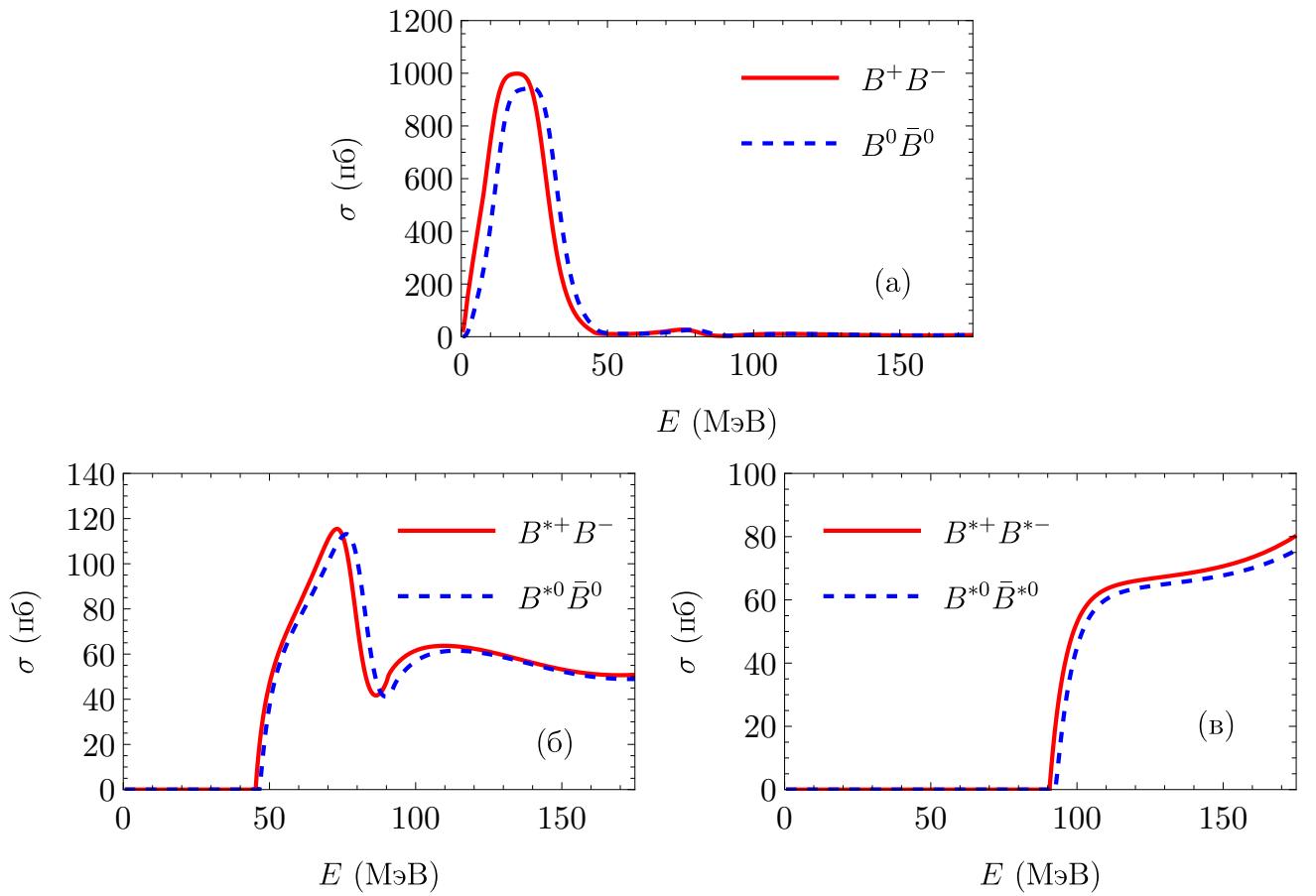


Рисунок 5.4 — Зависимости от энергии наших предсказаний для сечений рождения  $B^+ B^-$ ,  $B^0 \bar{B}^0$ ,  $B^{*+} B^-$ ,  $B^{*0} \bar{B}^0$ ,  $B^{*+} B^{*-}$  и  $B^{*0} \bar{B}^{*0}$  в  $e^+ e^-$  аннигиляции

Ещё одной важной характеристикой нарушения изотопической инвариантности является зависимость от энергии отношения сечений рождения пар заряженных и нейтральных  $B$ -мезонов. Введём величину

$$R = \frac{\sigma(e^+ e^- \rightarrow B^+ B^-)}{\sigma(e^+ e^- \rightarrow B^0 \bar{B}^0)} . \quad (5.16)$$

На рисунке 5.5 показана зависимость отношения  $R$  от энергии в области резонанса  $\Upsilon(4S)$  и производная этого отношения по энергии. В пике суммарного сечения, то есть при энергии  $E = 20,3$  МэВ, отношение  $R$  равно примерно 1,06. Это значение хорошо согласуется с имеющимся в данный момент экспериментальным результатом для отношения вероятностей распада  $\Gamma(\Upsilon(4S) \rightarrow B^+ B^-)/\Gamma(\Upsilon(4S) \rightarrow B^0 \bar{B}^0)$ , равным  $1,058 \pm 0,024$  [178]. Важным эффектом, который может быть проверен на эксперименте, является то, что отношение  $R$  должно возрастать при уменьшении энергии и убывать при её увеличении. В принципе, абсолютная величина этого отношения может измениться при учёте различия между потенциалами взаимодействия в изоскалярных и изовекторных каналах. Однако убывание  $R$  с ростом энергии вблизи резонанса  $\Upsilon(4S)$  по-прежнему будет иметь место.<sup>1</sup>

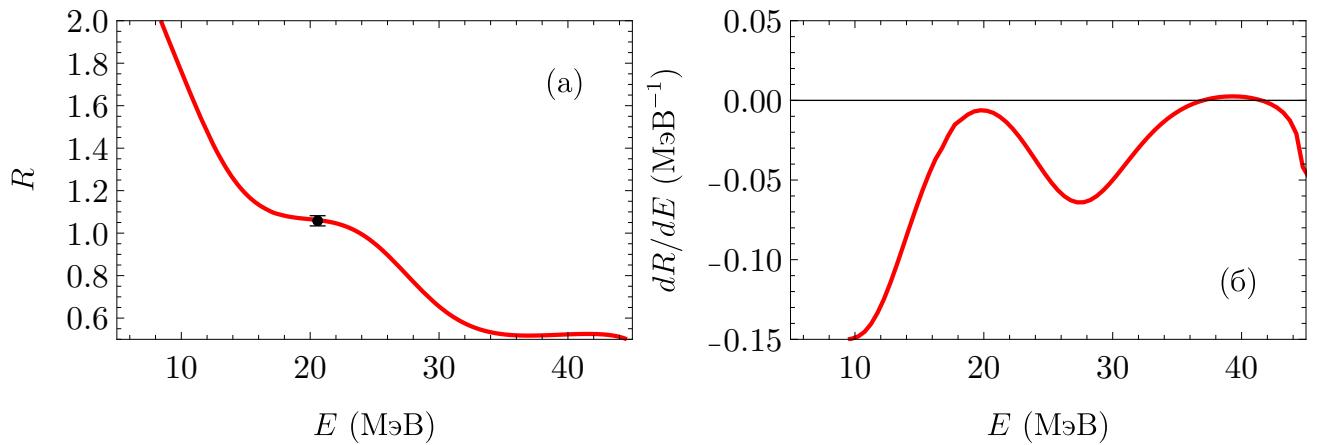


Рисунок 5.5 — Зависимость от энергии отношения  $R$  сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow B^+B^-$  и  $e^+e^- \rightarrow B^0\bar{B}^0$  в области резонанса  $\Upsilon(4S)$  (а) и производная этого отношения по энергии (б). Точка с погрешностями соответствует значению  $R$  в пике резонанса  $\Upsilon(4S)$  по данным Particle Data Group за 2024 год [178]

Разную зависимость от энергии сечений рождения пар заряженных и нейтральных  $B^{(*)}$ -мезонов в  $e^+e^-$  аннигиляции, связанную со взаимодействием в конечном состоянии, важно учитывать при измерении масс этих мезонов.

<sup>1</sup> Действительно, в недавней экспериментальной работе [191] было показано, что обратное отношение  $R^{-1}$  растёт с энергией в окрестности пика  $\Upsilon(4S)$ .

В нашей работе [118] было показано, что систематическая погрешность в измерении разницы масс  $B^+$  и  $B^0$  мезонов может достигать  $\delta M \sim 0,4$  МэВ, если проводить измерения в пике резонанса  $\Upsilon(4S)$  без надлежащего учёта эффектов нарушения изотопической инвариантности. Отметим, что это значение  $\delta M$  превосходит заявленную погрешность самого точного на тот момент измерения разницы масс  $B^+$  и  $B^0$  мезонов, проведённого на детекторе BaBar [192] ( $M_{B^0} - M_{B^+} = 0,33 \pm 0,05 \pm 0,03$  МэВ). При этом в измерении BaBar учитывалось только различие в фазовом объёме конечных состояний для заряженных и нейтральных  $B$ -мезонов.<sup>2</sup> В нашей работе [118] также предсказано, что систематическая погрешность при измерении разницы масс  $B^{*+}$  и  $B^{*0}$  мезонов в пике резонанса  $\Upsilon(5S)$ , связанная с пренебрежением эффектами нарушения изотопической инвариантности, может быть  $\delta M \sim 0,03$  МэВ.

---

<sup>2</sup> В недавнем измерении, проведённом с использованием данных детекторов Belle и Belle II [191] и учитываящем нетривиальную зависимость отношения  $R$  от энергии, получен результат  $M_{B^0} - M_{B^+} = 0,495 \pm 0,024 \pm 0,005$  МэВ. Это подтверждает необходимость учёта взаимодействия в конечном состоянии между  $B$ -мезонами при измерении разницы их масс.

## Заключение

Основными результатами работы являются:

1. Предложен последовательный подход к вычислению эффектов взаимодействия в конечном состоянии в процессах с рождением пары адронов, основанный на решении в координатном представлении уравнения Шрёдингера или системы уравнений Шрёдингера.
2. Развитый подход применён к описанию взаимодействия в конечном состоянии в задачах различной сложности, включая многоканальные задачи, а также системы с наличием тензорных сил и кулоновского взаимодействия.
3. Получена простая аналитическая формула, хорошо описывающая зависимость от энергии сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  с учётом взаимодействия в конечном состоянии.
4. Предложена модель взаимодействия между  $\Lambda_c$  и  $\bar{\Lambda}_c$ , описывающая зависимость от энергии сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$ , а также отношение электромагнитных формфакторов  $\Lambda_c$ -бариона.
5. Предложена модель нуклон-антинуклонного взаимодействия в конечном состоянии, учитывающая разницу масс протона и нейтрона, а также кулоновское взаимодействие между протоном и антiproтоном. Модель хорошо воспроизводит зависимость от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  и  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$  вблизи порогов и отношений электромагнитных формфакторов для протона и для нейтрона.
6. Резкое падение сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$ ,  $e^+e^- \rightarrow 2(\pi^+\pi^-\pi^0)$  и  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$  вблизи порога рождения нуклон-антинуклонных пар объяснено влиянием взаимодействия между виртуальными нуклоном и антинуклоном в промежуточном состоянии.

7. С учётом нуклон-антинуклонного взаимодействия в конечном состоянии описаны зависимости от инвариантной массы  $p\bar{p}$  вероятностей распадов  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma(\pi^0, \eta, \omega)$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\gamma(\pi^0, \eta)$ , а также предсказаны угловые распределения в распадах  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$  и  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$ .

8. Объяснена сложная зависимость от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow B\bar{B}$ ,  $e^+e^- \rightarrow B^*\bar{B}$  и  $e^+e^- \rightarrow B^*\bar{B}^*$  вблизи порогов, связанная с взаимодействием  $B^{(*)}$  и  $\bar{B}^{(*)}$  мезонов и переходами между разными каналами. Предсказана зависимость от энергии отношения сечений рождения заряженных и нейтральных  $B^{(*)}$ -мезонов.

9. Изучено взаимодействие  $D^{(*)}$  и  $\bar{D}^{(*)}$  мезонов в каналах  $D^0\bar{D}^0$ ,  $D^+D^-$ ,  $D^{*0}\bar{D}^0$ ,  $D^{*+}D^-$ ,  $D^{*0}\bar{D}^{*0}$  и  $D^{*+}D^{*-}$ , и дано объяснение нетривиальной зависимости от энергии сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow D\bar{D}$ ,  $e^+e^- \rightarrow D^*\bar{D}$  и  $e^+e^- \rightarrow D^*\bar{D}^*$  вблизи порогов.

В заключение, автор благодарит А. И. Мильштейна и А. Е. Бондаря за многочисленные обсуждения различных научных вопросов и помошь в поиске оптимальных решений разнообразных задач.

## Список литературы

1. Эриксон Т., Вайзе В. Пионы и ядра / под ред. И. С. Шапиро. — М. : Наука, 1991. — 512 с.
2. Nagels M., Rijken T., de Swart J. Low-energy nucleon-nucleon potential from Regge-pole theory // Physical Review D. — 1978. — Vol. 17, no. 3. — P. 768–776. — DOI: [10.1103/PhysRevD.17.768](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.17.768).
3. Construction of high-quality  $NN$  potential models / V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen, J. J. de Swart // Physical Review C. — 1994. — Vol. 49, no. 6. — P. 2950–2962. — DOI: [10.1103/PhysRevC.49.2950](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.49.2950).
4. Parametrization of the paris  $N$ - $N$  potential / M. Lacombe, B. Loiseau, J. M. Richard, [et al.] // Physical Review C. — 1980. — Vol. 21, no. 3. — P. 861. — DOI: [10.1103/PhysRevC.21.861](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.21.861).
5. Machleidt R., Holinde K., Elster Ch. The Bonn meson-exchange model for the nucleon-nucleon interaction // Physics Reports. — 1987. — Vol. 149, no. 1. — P. 1–89. — DOI: [10.1016/S0370-1573\(87\)80002-9](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(87)80002-9).
6. Machleidt R. High-precision, charge-dependent Bonn nucleon-nucleon potential // Physical Review C. — 2001. — Vol. 63, no. 2. — P. 024001. — DOI: [10.1103/PhysRevC.63.024001](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.63.024001).
7. Hofstadter R., McAllister R. W. Electron scattering from the proton // Physical Review. — 1955. — Vol. 98, no. 1. — P. 217–218. — DOI: [10.1103/PhysRev.98.217](https://doi.org/10.1103/PhysRev.98.217).
8. Electromagnetic form factors of the proton / F. Bumiller, M. Croissiaux, E. Dally, R. Hofstadter // Physical Review. — 1961. — Vol. 124, no. 5. — P. 1623–1631. — DOI: [10.1103/PhysRev.124.1623](https://doi.org/10.1103/PhysRev.124.1623).

9. *Rosenbluth M. N.* High energy elastic scattering of electrons on protons // Physical Review. — 1950. — Vol. 79, no. 4. — P. 615–619. — DOI: [10.1103/PhysRev.79.615](https://doi.org/10.1103/PhysRev.79.615).
10. *Entem D. R., Fernández F., Valcarce A.* Chiral quark model of the  $NN$  system within a Lippmann-Schwinger resonating group method // Physical Review C. — 2000. — Vol. 62, no. 3. — P. 034002. — DOI: [10.1103/PhysRevC.62.034002](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.62.034002).
11. Nucleon-antinucleon optical potential / J. Côté, M. Lacombe, B. Loiseau, [et al.] // Physical Review Letters. — 1982. — Vol. 48, no. 19. — P. 1319–1322. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.48.1319](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1319).
12. Paris  $N\bar{N}$  potential constrained by recent antiprotonic-atom data and  $\bar{n}p$  total cross sections / B. El-Bennich, M. Lacombe, B. Loiseau, S. Wycech // Physical Review C. — 2009. — Vol. 79, no. 5. — P. 054001. — DOI: [10.1103/PhysRevC.79.054001](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.79.054001).
13. *Timmermans R., Rijken Th., de Swart J.* Antiproton-proton partial-wave analysis below 925 MeV/c // Physical Review C. — 1994. — Vol. 50, no. 1. — P. 48–73. — DOI: [10.1103/PhysRevC.50.48](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.50.48).
14. *Zhou D., Timmermans R. G. E.* Energy-dependent partial-wave analysis of all antiproton-proton scattering data below 925 MeV/c // Physical Review C. — 2012. — Vol. 86, no. 4. — P. 044003. — DOI: [10.1103/PhysRevC.86.044003](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.86.044003).
15. Meson-baryon dynamics in the nucleon-antinucleon system. I. The nucleon-antinucleon interaction / T. Hippchen, J. Haidenbauer, K. Holinde, V. Mull // Physical Review C. — 1991. — Vol. 44, no. 4. — P. 1323–1336. — DOI: [10.1103/PhysRevC.44.1323](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.44.1323).

16. Meson-baryon dynamics in the nucleon-antinucleon system. II. Annihilation into two mesons / V. Mull, J. Haidenbauer, T. Hippchen, K. Holinde // Physical Review C. — 1991. — Vol. 44, no. 4. — P. 1337–1353. — DOI: [10.1103/PhysRevC.44.1337](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.44.1337).
17. *Mull V., Holinde K.* Combined description of  $\bar{N}N$  scattering and annihilation with a hadronic model // Physical Review C. — 1995. — Vol. 51, no. 5. — P. 2360–2371. — DOI: [10.1103/PhysRevC.51.2360](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.51.2360).
18. *Kang X.-W., Haidenbauer J., Meißner U.-G.* Antinucleon-nucleon interaction in chiral effective field theory // Journal of High Energy Physics. — 2014. — Vol. 2014, no. 2. — P. 113. — DOI: [10.1007/JHEP02\(2014\)113](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2014)113).
19. *Dai L.-Y., Haidenbauer J., Meißner U.-G.* Antinucleon-nucleon interaction at next-to-next-to-next-to-leading order in chiral effective field theory // Journal of High Energy Physics. — 2017. — Vol. 2017, no. 7. — P. 78. — DOI: [10.1007/JHEP07\(2017\)078](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2017)078).
20. *Entem D. R., Fernández F.* The  $N\bar{N}$  interaction in a constituent quark model: Baryonium states and protonium level shifts // Physical Review C. — 2006. — Vol. 73, no. 4. — P. 045214. — DOI: [10.1103/PhysRevC.73.045214](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.73.045214).
21. Revisiting the proton-antiproton scattering using a constituent-quark-model based coupled-channels calculation / P. G. Ortega, D. R. Entem, F. Fernández, J. Segovia // Physics Letters B. — 2025. — Vol. 862. — P. 139281. — DOI: [10.1016/j.physletb.2025.139281](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2025.139281).
22. *Dmitriev V. F., Milstein A. I., Strakhovenko V. M.* Spin effects in  $p\bar{p}$  interaction and their possible use to polarize antiproton beams // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. — 2008. — Vol. 266, no. 7. — P. 1122–1126. — DOI: [10.1016/j.nimb.2008.02.029](https://doi.org/10.1016/j.nimb.2008.02.029).

23. *Dmitriev V. F., Milstein A. I., Salnikov S. G.* Spin-dependent part of  $p\bar{p}$  interaction cross section and Nijmegen potential // Physics Letters B. — 2010. — Vol. 690, no. 4. — P. 427–430. — DOI: [10.1016/j.physletb.2010.05.064](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2010.05.064).
24. *Haidenbauer J.* Spin dependence of the antinucleon-nucleon interaction // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 295 (19th International Spin Physics Symposium (SPIN2010)). — Julich, 2011. — P. 012094. — DOI: [10.1088/1742-6596/295/1/012094](https://doi.org/10.1088/1742-6596/295/1/012094).
25. *Csonka P.* Could we build polarized proton storage rings? // Nuclear Instruments and Methods. — 1968. — Vol. 63, no. 3. — P. 247–252. — DOI: [10.1016/0029-554X\(68\)90575-2](https://doi.org/10.1016/0029-554X(68)90575-2).
26. The reaction  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  at a total energy of 2.1 GeV / M. Castellano, G. Di Giugno, J. W. Humphrey, [et al.] // Il Nuovo Cimento A. — 1973. — Vol. 14, no. 1. — P. 1–20. — DOI: [10.1007/BF02734600](https://doi.org/10.1007/BF02734600).
27. Study of the reaction  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  in the total energy range 1925–2180 MeV / B. Delcourt, I. Derado, J. Bertrand, [et al.] // Physics Letters B. — 1979. — Vol. 86, no. 3/4. — P. 395–398. — DOI: [10.1016/0370-2693\(79\)90864-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(79)90864-5).
28. A measurement of  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  for  $(1975 \leq \sqrt{s} \leq 2250)$  MeV / D. Bisello, S. Limentani, M. Nigro, [et al.] // Nuclear Physics B. — 1983. — Vol. 224, no. 3. — P. 379–395. — DOI: [10.1016/0550-3213\(83\)90381-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(83)90381-4).
29. Baryon pairs production in  $e^+e^-$  annihilation at  $\sqrt{s} = 2.4$  GeV / D. Bisello, G. Busetto, A. Castro, [et al.] // Zeitschrift für Physik C Particles and Fields. — 1990. — Vol. 48, no. 1. — P. 23–28. — DOI: [10.1007/BF01565602](https://doi.org/10.1007/BF01565602).
30. Study of  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  using initial state radiation with BABAR / B. Aubert, R. Barate, D. Boutigny, [et al.] // Physical Review D. — 2006. — Vol. 73. — P. 012005. — DOI: [10.1103/PhysRevD.73.012005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.012005).

31. Study of  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  via initial-state radiation at BABAR / J. P. Lees, V. Poireau, V. Tisserand, [et al.] // Physical Review D. — 2013. — Vol. 87, no. 9. — P. 092005. — DOI: [10.1103/PhysRevD.87.092005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.092005).
32. Measurement of the proton form factor by studying  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  / M. Ablikim, M. N. Achasov, X. C. Ai, [et al.] // Physical Review D. — 2015. — Vol. 91, no. 11. — P. 112004. — DOI: [10.1103/PhysRevD.91.112004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.112004).
33. Study of the process  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  in the c.m. energy range from threshold to 2 GeV with the CMD-3 detector / R. Akhmetshin, A. Amirkhanov, A. Anisenkov, [et al.] // Physics Letters B. — 2016. — Vol. 759. — P. 634–640. — DOI: [10.1016/j.physletb.2016.04.048](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.04.048).
34. Observation of a fine structure in  $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$  production at the nucleon-on-antinucleon threshold / R. Akhmetshin, A. Amirkhanov, A. Anisenkov, [et al.] // Physics Letters B. — 2019. — Vol. 794. — P. 64–68. — DOI: [10.1016/j.physletb.2019.05.032](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.05.032).
35. Study of the process  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  via initial state radiation at BESIII / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review D. — 2019. — Vol. 99, no. 9. — P. 092002. — DOI: [10.1103/PhysRevD.99.092002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.092002).
36. Measurement of proton electromagnetic form factors in  $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$  in the energy region  $2.00 - 3.08\text{GeV}$  / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review Letters. — 2020. — Vol. 124, no. 4. — P. 042001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.124.042001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.042001).
37. Measurement of proton electromagnetic form factors in the time-like region using initial state radiation at BESIII / M. Ablikim, M. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physics Letters B. — 2021. — Vol. 817. — P. 136328. — DOI: [10.1016/j.physletb.2021.136328](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136328).

38. The first measurement of the neutron electromagnetic form factors in the time-like region / A. Antonelli, R. Baldini, P. Benasi, [et al.] // Nuclear Physics B. — 1998. — Vol. 517, no. 1–3. — P. 3–35. — DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00083-2.
39. Study of the process  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$  at the VEPP-2000  $e^+e^-$  collider with the SND detector / M. N. Achasov, A. Y. Barnyakov, K. I. Beloborodov, [et al.] // Physical Review D. — 2014. — Vol. 90. — P. 112007. — DOI: 10.1103/PhysRevD.90.112007.
40. Oscillating features in the electromagnetic structure of the neutron / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Nature Physics. — 2021. — Vol. 17, no. 11. — P. 1200–1204. — DOI: 10.1038/s41567-021-01345-6.
41. Experimental study of the  $e^+e^- \rightarrow n\bar{n}$  process at the VEPP-2000  $e^+e^-$  collider with the SND detector / M. N. Achasov, A. Y. Barnyakov, K. I. Beloborodov, [et al.] // The European Physical Journal C. — 2022. — Vol. 82, no. 8. — P. 761. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10696-0.
42. Measurements of the electric and magnetic form factors of the neutron for timelike momentum transfer / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review Letters. — 2023. — Vol. 130, no. 15. — P. 151905. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.130.151905.
43. Watson K. M. The effect of final state interactions on reaction cross sections // Phys. Rev. — 1952. — Vol. 88, no. 5. — P. 1163–1171. — DOI: 10.1103/PhysRev.88.1163.
44. Мигдал А. Б. Теория ядерных реакций с образованием медленных частиц // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 1955. — Т. 28, № 1. — С. 3–9.

45. Study of  $N^*$  production from  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\eta$  / J. Bai, Y. Ban, J. Bian, [et al.] // Physics Letters B. — 2001. — Vol. 510, no. 1–4. — P. 75–82. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(01\)00605-0](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(01)00605-0).
46. Observation of  $B^\pm \rightarrow p\bar{p}K^\pm$  / K. Abe, K. Abe, R. Abe, [et al.] // Physical Review Letters. — 2002. — Vol. 88, no. 18. — P. 181803. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.88.181803](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.181803).
47. Observation of  $\bar{B}^0 \rightarrow D^{(*)0}p\bar{p}$  / K. Abe, K. Abe, R. Abe, [et al.] // Physical Review Letters. — 2002. — Vol. 89, no. 15. — P. 151802. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.89.151802](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.151802).
48. Observation of a near-threshold enhancement in the  $p\bar{p}$  mass spectrum from radiative  $J/\psi \rightarrow \gamma p\bar{p}$  decays / J. Bai, Y. Ban, J. Bian, [et al.] // Physical Review Letters. — 2003. — Vol. 91, no. 2. — P. 022001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.91.022001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.022001).
49. Observation of  $B^+ \rightarrow p\bar{p}\pi^+$ ,  $B^+ \rightarrow p\bar{p}K^0$ , and  $B^+ \rightarrow p\bar{p}K^{*+}$  / M.-Z. Wang, K. Abe, K. Abe, [et al.] // Physical Review Letters. — 2004. — Vol. 92, no. 13. — P. 131801. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.92.131801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.131801).
50. Measurement of the  $B^+ \rightarrow p\bar{p}K^+$  branching fraction and study of the decay dynamics / B. Aubert, R. Barate, D. Boutigny, [et al.] // Physical Review D. — 2005. — Vol. 72, no. 5. — P. 051101. — DOI: [10.1103/PhysRevD.72.051101](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.72.051101).
51. Measurements of the decays  $B^0 \rightarrow \bar{D}^0p\bar{p}$ ,  $B^0 \rightarrow \bar{D}^{*0}p\bar{p}$ ,  $B^0 \rightarrow D^-p\bar{p}\pi^+$ , and  $B^0 \rightarrow D^{*-}p\bar{p}\pi^+$  / B. Aubert, R. Barate, M. Bona, [et al.] // Physical Review D. — 2006. — Vol. 74, no. 5. — P. 051101. — DOI: [10.1103/PhysRevD.74.051101](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.051101).
52. Evidence for the  $B^0 \rightarrow p\bar{p}K^{*0}$  and  $B^+ \rightarrow \eta_c K^{*+}$  decays and study of the decay dynamics of  $B$  meson decays into  $p\bar{p}h$  final states / B. Aubert, M.

Bona, D. Boutigny, [et al.] // Physical Review D. — 2007. — Vol. 76, no. 9. — P. 092004. — DOI: [10.1103/PhysRevD.76.092004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.092004).

53. Study of  $J/\psi$  decaying into  $\omega p\bar{p}$  / M. Ablikim, J. Bai, Y. Bai, [et al.] // The European Physical Journal C. — 2008. — Vol. 53, no. 1. — P. 15–20. — DOI: [10.1140/epjc/s10052-007-0467-4](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-007-0467-4).

54. Observation of  $B^0 \rightarrow p\bar{p}K^{*0}$  with a large  $K^{*0}$  polarization / J.-H. Chen, M.-Z. Wang, I. Adachi, [et al.] // Physical Review Letters. — 2008. — Vol. 100, no. 25. — P. 251801. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.100.251801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.251801).

55. Study of the decay mechanism for  $B^+ \rightarrow p\bar{p}K^+$  and  $B^+ \rightarrow p\bar{p}\pi^+$  / J.-T. Wei, M.-Z. Wang, I. Adachi, [et al.] // Physics Letters B. — 2008. — Vol. 659, no. 1/2. — P. 80–86. — DOI: [10.1016/j.physletb.2007.11.063](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2007.11.063).

56. Partial wave analysis of  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\pi^0$  / M. Ablikim, J. Bai, Y. Bai, [et al.] // Physical Review D. — 2009. — Vol. 80, no. 5. — P. 052004. — DOI: [10.1103/PhysRevD.80.052004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.052004).

57. Study of  $\psi(2S)$  decays to  $\gamma p\bar{p}$ ,  $\pi^0 p\bar{p}$ , and  $\eta p\bar{p}$ , and search for  $p\bar{p}$  threshold enhancements / J. P. Alexander, D. G. Cassel, S. Das, [et al.] // Physical Review D. — 2010. — Vol. 82, no. 9. — P. 092002. — DOI: [10.1103/PhysRevD.82.092002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.092002).

58. Spin-parity analysis of  $p\bar{p}$  mass threshold structure in  $J/\psi$  and  $\psi(3686)$  radiative decays / M. Ablikim, M. N. Achasov, D. Alberto, [et al.] // Physical Review Letters. — 2012. — Vol. 108, no. 11. — P. 112003. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.108.112003](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.112003).

59. Study of  $J/\psi \rightarrow \omega p\bar{p}$  at BESIII / M. Ablikim, M. N. Achasov, O. Albayrak, [et al.] // Physical Review D. — 2013. — Vol. 87, no. 11. — P. 112004. — DOI: [10.1103/PhysRevD.87.112004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.112004).

60. Partial wave analysis of  $\psi(2S) \rightarrow p\bar{p}\eta$  / M. Ablikim, M. N. Achasov, O. Albayrak, [et al.] // Physical Review D. — 2013. — Vol. 88, no. 3. — P. 032010. — DOI: [10.1103/PhysRevD.88.032010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.032010).
61. Observation of two new  $N^*$  resonances in the decay  $\psi(3686) \rightarrow p\bar{p}\pi^0$  / M. Ablikim, M. N. Achasov, D. J. Ambrose, [et al.] // Physical Review Letters. — 2013. — Vol. 110, no. 2. — P. 022001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.110.022001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.022001).
62. Measurement of the branching fraction of the decay  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\eta$  / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review D. — 2024. — Vol. 110, no. 7. — P. 072021. — DOI: [10.1103/PhysRevD.110.072021](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.110.072021).
63. Partial wave analyses of  $\psi(3686) \rightarrow p\bar{p}\pi^0$  and  $\psi(3686) \rightarrow p\bar{p}\eta$  / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review D. — 2025. — Vol. 111, no. 3. — P. 032011. — DOI: [10.1103/PhysRevD.111.032011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.111.032011).
64. Study of  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}, \Lambda\bar{\Sigma}^0, \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$  using initial state radiation with BABAR / B. Aubert, M. Bona, D. Boutigny, [et al.] // Physical Review D. — 2007. — Vol. 76, no. 9. — P. 092006. — DOI: [10.1103/PhysRevD.76.092006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.092006).
65. Observation of a cross-section enhancement near mass threshold in  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  / M. Ablikim, M. N. Achasov, S. Ahmed, [et al.] // Physical Review D. — 2018. — Vol. 97, no. 3. — P. 032013. — DOI: [10.1103/PhysRevD.97.032013](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.032013).
66. Complete measurement of the  $\Lambda$  electromagnetic form factors / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review Letters. — 2019. — Vol. 123, no. 12. — P. 122003. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.123.122003](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.122003).
67. Measurement of the  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  cross section from threshold to 3.00 GeV using events with initial-state radiation / M. Ablikim, M. N. Achasov, P.

Adlarson, [et al.] // Physical Review D. — 2023. — Vol. 107, no. 7. — P. 072005. — DOI: [10.1103/PhysRevD.107.072005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.107.072005).

68. Observation of a near-threshold enhancement in the  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c^+\Lambda_c^-$  cross section using initial-state radiation / G. Pakhlova, I. Adachi, H. Aihara, [et al.] // Physical Review Letters. — 2008. — Vol. 101, no. 17. — P. 172001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.101.172001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.172001).

69. Precision measurement of the  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c^+\bar{\Lambda}_c^-$  cross section near threshold / M. Ablikim, M. N. Achasov, S. Ahmed, [et al.] // Physical Review Letters. — 2018. — Vol. 120, no. 13. — P. 132001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.120.132001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.132001).

70. Measurement of energy-dependent pair-production cross section and electromagnetic form factors of a charmed baryon / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review Letters. — 2023. — Vol. 131, no. 19. — P. 191901. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.131.191901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.131.191901).

71. Measurements of  $\Sigma^+$  and  $\Sigma^-$  time-like electromagnetic form factors for center-of-mass energies from 2.3864 to 3.0200 GeV / M. Ablikim, M. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physics Letters B. — 2021. — Vol. 814. — P. 136110. — DOI: [10.1016/j.physletb.2021.136110](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136110).

72. Measurement of the  $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$  cross sections at center-of-mass energies from 2.3864 to 3.0200 GeV / M. Ablikim, M. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physics Letters B. — 2022. — Vol. 831. — P. 137187. — DOI: [10.1016/j.physletb.2022.137187](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2022.137187).

73. Study of  $e^+e^- \rightarrow \Sigma^0\bar{\Sigma}^0$  and  $\Sigma^+\bar{\Sigma}^-$  by initial state radiation method at Belle / G. Gong, L. K. Li, Y. Zhang, [et al.] // Physical Review D. — 2023. — Vol. 107, no. 7. — P. 072008. — DOI: [10.1103/PhysRevD.107.072008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.107.072008).

74. Measurements of  $\Sigma$  electromagnetic form factors in the timelike region using the untagged initial-state radiation technique / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review D. — 2024. — Vol. 109, no. 3. — P. 034029. — DOI: [10.1103/PhysRevD.109.034029](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.109.034029).

75. Measurement of the near-threshold  $e^+e^- \rightarrow D^{(*)\pm}\bar{D}^{(*)\mp}$  cross section using initial-state radiation / G. Pakhlova, K. Abe, I. Adachi, [et al.] // Physical Review Letters. — 2007. — Vol. 98, no. 9. — P. 092001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.092001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.092001).

76. Study of the exclusive initial-state-radiation production of the  $D\bar{D}$  system / B. Aubert, M. Bona, D. Boutigny, [et al.] // Physical Review D. — 2007. — Vol. 76, no. 11. — P. 111105. — DOI: [10.1103/PhysRevD.76.111105](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.111105).

77. Measurement of the near-threshold  $e^+e^- \rightarrow D\bar{D}$  cross section using initial-state radiation / G. Pakhlova, I. Adachi, H. Aihara, [et al.] // Physical Review D. — 2008. — Vol. 77, no. 1. — P. 011103. — DOI: [10.1103/PhysRevD.77.011103](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.011103).

78. Measurement of charm production cross sections in  $e^+e^-$  annihilation at energies between 3.97 and 4.26 GeV / D. Cronin-Hennessy, K. Y. Gao, J. Hietala, [et al.] // Physical Review D. — 2009. — Vol. 80, no. 7. — P. 072001. — DOI: [10.1103/PhysRevD.80.072001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.072001).

79. Precise measurement of Born cross sections for  $e^+e^- \rightarrow D\bar{D}$  at  $\sqrt{s} = 3.80 - 4.95$  GeV / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review Letters. — 2024. — Vol. 133, no. 8. — P. 081901. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.133.081901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.133.081901).

80. Angular analysis of the  $e^+e^- \rightarrow D^{(*)\pm}\bar{D}^{*\mp}$  process near the open charm threshold using initial-state radiation / V. Zhukova, G. Pakhlova, P. Pakhlov, [et al.] // Physical Review D. — 2018. — Vol. 97, no. 1. — P. 012002. — DOI: [10.1103/PhysRevD.97.012002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.012002).

81. Cross section measurements of the  $e^+e^- \rightarrow D^{*+}D^{*-}$  and  $e^+e^- \rightarrow D^{*+}D^-$  processes at center-of-mass energies from 4.085 to 4.600 GeV / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Journal of High Energy Physics. — 2022. — Vol. 05, no. 5. — P. 155. — DOI: [10.1007/JHEP05\(2022\)155](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2022)155).
82. Measurement of the  $e^+e^- \rightarrow b\bar{b}$  cross section between  $\sqrt{s} = 10.54$  and 11.20 GeV / B. Aubert, M. Bona, Y. Karyotakis, [et al.] // Physical Review Letters. — 2009. — Vol. 102, no. 1. — P. 012001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.102.012001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.012001).
83. Measurement of the energy dependence of the  $e^+e^- \rightarrow B\bar{B}$ ,  $B\bar{B}^*$  and  $B^*\bar{B}^*$  exclusive cross sections / R. Mizuk, A. Bondar, I. Adachi, [et al.] // Journal of High Energy Physics. — 2021. — Vol. 2021, no. 6. — P. 137. — DOI: [10.1007/JHEP06\(2021\)137](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2021)137).
84. Measurement of the energy dependence of the  $e^+e^- \rightarrow B\bar{B}$ ,  $B\bar{B}^*$ , and  $B^*\bar{B}^*$  cross sections at Belle II / I. Adachi, L. Aggarwal, H. Ahmed, [et al.] // Journal of High Energy Physics. — 2024. — Vol. 2024, no. 10. — P. 114. — DOI: [10.1007/JHEP10\(2024\)114](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2024)114).
85. The  $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$ ,  $2(\pi^+\pi^-\pi^0)$  and  $K^+K^-2(\pi^+\pi^-)$  cross sections at center-of-mass energies from production threshold to 4.5 GeV measured with initial-state radiation / B. Aubert, R. Barate, D. Boutigny, [et al.] // Physical Review D. — 2006. — Vol. 73, no. 5. — P. 052003. — DOI: [10.1103/PhysRevD.73.052003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.052003).
86. Study of the process  $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$  in the c.m. energy range 1.5–2.0 GeV with the CMD-3 detector / R. Akhmetshin, A. Anisenkov, S. Anokhin, [et al.] // Physics Letters B. — 2013. — Vol. 723, no. 1–3. — P. 82–89. — DOI: [10.1016/j.physletb.2013.04.065](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2013.04.065).
87. Investigation of the processes  $e^+e^- \rightarrow 2(\pi^+\pi^-\pi^0)$  and  $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$  with the aid of the CMD-3 detector / P. A. Lukin, A. V. Anisenkov, V. M.

Aulchenko, [et al.] // Physics of Atomic Nuclei. — 2015. — Vol. 78, no. 3. — P. 353–357. — DOI: [10.1134/S1063778815020209](https://doi.org/10.1134/S1063778815020209).

88. The  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ ,  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$ , and  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-K^+K^-$  cross sections at center-of-mass energies  $0.5 - 4.5$  GeV measured with initial-state radiation / B. Aubert, R. Barate, D. Boutigny, [et al.] // Physical Review D. — 2005. — Vol. 71, no. 5. — P. 052001. — DOI: [10.1103/PhysRevD.71.052001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.052001).

89.  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$ ,  $K^+K^-\pi^0\pi^0$  and  $K^+K^-K^+K^-$  cross sections measured with initial-state radiation / B. Aubert, M. Bona, D. Boutigny, [et al.] // Physical Review D. — 2007. — Vol. 76, no. 1. — P. 012008. — DOI: [10.1103/PhysRevD.76.012008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.012008).

90. *Базъ А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. — 2-е изд. — М. : Наука, 1971. — 544 с.

91. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория) : в 10 т. Т. III. — 4-е изд. — М. : Наука, 1989. — 768 с. — (Теоретическая физика: Учебное пособие для вузов).

92. *Wigner E. P.* On the behavior of cross sections near thresholds // Physical Review. — 1948. — Vol. 73, no. 9. — P. 1002–1009. — DOI: [10.1103/PhysRev.73.1002](https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.1002).

93. *Breit G.* Energy dependence of reactions at thresholds // Physical Review. — 1957. — Vol. 107, no. 6. — P. 1612–1615. — DOI: [10.1103/PhysRev.107.1612](https://doi.org/10.1103/PhysRev.107.1612).

94. *Базъ А. И.* Энергетическая зависимость сечения рассеяния вблизи порога реакции // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 1957. — Т. 33, № 4. — С. 923–928.

95. *Базъ А. И.* Резонансные эффекты при рассеянии частиц вблизи порога реакции // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 1959. — Т. 36, № 6. — С. 1762—1770.

96. *Базъ А. И.* Энергетическая зависимость сечений вблизи «порога» рождения нестабильной частицы // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 1961. — Т. 40, № 5. — С. 1511—1515.

97. *Haidenbauer J., Kang X.-W., Meißner U.-G.* The electromagnetic form factors of the proton in the timelike region // Nuclear Physics A. — 2014. — Vol. 929. — P. 102. — DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2014.06.007.

98. *Dai L.-Y., Haidenbauer J., Meißner U.-G.* Re-examining the  $X(4630)$  resonance in the reaction  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c^+\Lambda_c^-$  // Physical Review D. — 2017. — Vol. 96, no. 11. — P. 116001. — DOI: 10.1103/PhysRevD.96.116001.

99. *Haidenbauer J., Meißner U.-G., Dai L.-Y.* Hyperon electromagnetic form factors in the timelike region // Physical Review D. — 2021. — Vol. 103, no. 1. — P. 014028. — DOI: 10.1103/PhysRevD.103.014028.

100. Study of the electromagnetic form factors of the nucleons in the timelike region / Q.-H. Yang, D. Guo, M.-Y. Li, [et al.] // Journal of High Energy Physics. — 2024. — Vol. 2024, no. 8. — P. 208. — DOI: 10.1007/JHEP08(2024)208.

101. Coupled-channel analysis of the near-threshold  $e^+e^- \rightarrow N\bar{N}$  cross sections / Z.-S. Jia, Z.-H. Zhang, F.-K. Guo, G. Li // Physical Review D. — 2025. — Vol. 111, no. 5. — P. 054014. — DOI: 10.1103/PhysRevD.111.054014.

102. Resonance parameters of the vector charmoniumlike state  $G(3900)$  / Q. Ye, Z. Zhang, M.-L. Du, [et al.] // Physical Review D. — 2025. — Vol. 112, no. 1. — P. 016015. — DOI: 10.1103/qq61-ncln.

103. On the strong energy dependence of the  $e^+e^- \leftrightarrow p\bar{p}$  amplitude near threshold / J. Haidenbauer, H.-W. Hammer, U.-G. Meißner, A. Sibirtsev // Physics Letters B. — 2006. — Vol. 643, no. 1. — P. 29–32. — DOI: 10.1016/j.physletb.2006.10.016.
104. *Hüsken N., Mitchell R. E., Swanson E. S.*  $K$ -matrix analysis of  $e^+e^-$  annihilation in the bottomonium region // Physical Review D. — 2022. — Vol. 106, no. 9. — P. 094013. — DOI: 10.1103/PhysRevD.106.094013.
105. Poles and poltergeists in  $e^+e^- \rightarrow D\bar{D}$  data / N. Hüsken, R. F. Lebed, R. E. Mitchell, [et al.] // Physical Review D. — 2024. — Vol. 109, no. 11. — P. 114010. — DOI: 10.1103/PhysRevD.109.114010.
106. *Zhang L., Kang X.-W., Guo X.-H.* Composite nature of  $Z_b$  states from data analysis // The European Physical Journal C. — 2022. — Vol. 82, no. 4. — P. 375. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10332-x.
107. *Van de Wiele J., Ong S.* Final-state interaction correction to the electromagnetic nucleon form factors in the time-like region // The European Physical Journal A. — 2015. — Vol. 51, no. 10. — P. 125. — DOI: 10.1140/epja/i2015-15125-9.
108. *Lichard P.* Common explanation of the behavior of some  $e^+e^-$  annihilation processes around  $\sqrt{s} = 1.9$  GeV // Physical Review D. — 2018. — Vol. 98, no. 11. — P. 113011. — DOI: 10.1103/PhysRevD.98.113011.
109. *Lichard P.* Manifestation of kaonium in the  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-$  process // Physical Review D. — 2020. — Vol. 101, no. 11. — P. 111501. — DOI: 10.1103/PhysRevD.101.111501.
110. *Lichard P., Juráň J.* Subthreshold poles in electron-positron annihilation.  $D_s^+D_s^-$  final state. — 2025. — DOI: 10.48550/arXiv.2507.05181. — URL: <http://arxiv.org/abs/2507.05181> (visited on 11/11/2025). — Pre-published.

111. *Dmitriev V. F., Milstein A. I., Salnikov S. G.* Isoscalar amplitude dominance in  $e^+e^-$  annihilation to  $N\bar{N}$  pair close to the threshold // Ядерная физика. — 2014. — Т. 77, № 9. — С. 1234–1238. — Isoscalar amplitude dominance in  $e^+e^-$  annihilation to  $N\bar{N}$  pair close to the threshold // Physics of Atomic Nuclei. — 2014. — Vol. 77, no. 9. — P. 1173–1177. — DOI: 10.1134/S1063778814080043.

112. *Dmitriev V. F., Milstein A. I., Salnikov S. G.* Real and virtual  $N\bar{N}$  pair production near the threshold // Physical Review D. — 2016. — Vol. 93, no. 3. — P. 034033. — DOI: 10.1103/PhysRevD.93.034033.

113. *Dmitriev V. F., Milstein A. I., Salnikov S. G.* Angular distributions in  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\pi^0(\eta)$  decays // Physics Letters B. — 2016. — Vol. 760. — P. 139–142. — DOI: 10.1016/j.physletb.2016.06.056.

114. *Milstein A. I., Salnikov S. G.* Interaction of real and virtual  $p\bar{p}$  pairs in  $J/\psi \rightarrow p\bar{p}\gamma(\rho, \omega)$  decays // Nuclear Physics A. — 2017. — Vol. 966. — P. 54–63. — DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2017.06.002.

115. *Milstein A. I., Salnikov S. G.* Fine structure of the cross sections of  $e^+e^-$  annihilation near the thresholds of  $p\bar{p}$  and  $n\bar{n}$  production // Nuclear Physics A. — 2018. — Vol. 977. — P. 60–68. — DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2018.06.002.

116. *Milstein A. I., Salnikov S. G.* Coulomb effects in the decays  $\Upsilon(4S) \rightarrow B\bar{B}$  // Physical Review D. — 2021. — Vol. 104, no. 1. — P. 014007. — DOI: 10.1103/PhysRevD.104.014007.

117. *Milstein A. I., Salnikov S. G.* Final-state interaction in the process  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  // Physical Review D. — 2022. — Vol. 105, no. 7. — P. 074002. — DOI: 10.1103/PhysRevD.105.074002.

118. Effects of isospin violation in the  $e^+e^- \rightarrow B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  cross sections / A. E. Bondar, A. I. Milstein, R. V. Mizuk, S. G. Salnikov // Journal of High Energy Physics. — 2022. — Vol. 2022, no. 5. — P. 170. — DOI: 10.1007/JHEP05(2022)170.

119. Milstein A. I., Salnikov S. G.  $N\bar{N}$  production in  $e^+e^-$  annihilation near the threshold revisited // Physical Review D. — 2022. — Vol. 106, no. 7. — P. 074012. — DOI: 10.1103/PhysRevD.106.074012.

120. Мильштейн А. И., Салников С. Г. Естественное объяснение недавних результатов исследования  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  // Письма в Журнал Экспериментальной и теоретической физики. — 2023. — Т. 117, № 12. — С. 901–903. — DOI: 10.31857/S1234567823120054. — Milstein A. I., Salnikov S. G. Natural explanation of recent results on  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  // JETP Letters. — 2023. — Vol. 117, no. 12. — P. 905–907. — DOI: 10.1134/S0021364023601471.

121. Salnikov S. G., Milstein A. I. Near-threshold resonance in  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  process // Physical Review D. — 2023. — Vol. 108, no. 7. — P. L071505. — DOI: 10.1103/PhysRevD.108.L071505.

122. Salnikov S. G., Bondar A. E., Milstein A. I. Coupled channels and production of near-threshold  $B^{(*)}\bar{B}^{(*)}$  resonances in  $e^+e^-$  annihilation // Nuclear Physics A. — 2024. — Vol. 1041. — P. 122764. — DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2023.122764.

123. Salnikov S. G., Milstein A. I. Meson production in  $J/\psi$  decays and  $J/\psi \rightarrow N\bar{N}\gamma$  process // Nuclear Physics B. — 2024. — Vol. 1002. — P. 116539. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2024.116539.

124. Salnikov S. G., Milstein A. I. Production of  $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$  near the thresholds in  $e^+e^-$  annihilation // Physical Review D. — 2024. — Vol. 109, no. 11. — P. 114015. — DOI: 10.1103/PhysRevD.109.114015.

125. *Milstein A. I., Salnikov S. G.* Interaction of real and virtual  $N\bar{N}$  pairs in  $J/\psi$  decays // EPJ Web of Conferences. Vol. 181 (International Conference on Exotic Atoms and Related Topics — EXA2017) / ed. by P. Bühler. — Vienna, 2018. — P. 01020. — DOI: [10.1051/epjconf/201818101020](https://doi.org/10.1051/epjconf/201818101020).

126. *Salnikov S. G.* Physics of near-threshold resonances // International Journal of Modern Physics A. Vol. 39 (The 2024 International Workshop on Future Tau Charm Facilities). — Hefei : World Scientific Publishing Co., 2024. — P. 2442007. — DOI: [10.1142/S0217751X24420077](https://doi.org/10.1142/S0217751X24420077).

127. Charmonium and gluons / V. A. Novikov, L. B. Okun, M. A. Shifman, [et al.] // Physics Reports. — 1978. — Vol. 41, no. 1. — P. 1–133. — DOI: [10.1016/0370-1573\(78\)90120-5](https://doi.org/10.1016/0370-1573(78)90120-5).

128. *Dmitriev V. F., Milstein A. I.* Final state interaction effects in  $N\bar{N}$  production near threshold // Nuclear Physics B - Proceedings Supplements. — 2006. — Vol. 162, February. — P. 53–56. — DOI: [10.1016/j.nuclphysbps.2006.09.063](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysbps.2006.09.063).

129. *Dmitriev V. F., Milstein A. I.* Final state interaction effects in the  $e^+e^- \rightarrow N\bar{N}$  process near threshold // Physics Letters B. — 2007. — Vol. 658, no. 1–3. — P. 13–16. — DOI: [10.1016/j.physletb.2007.06.085](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2007.06.085).

130. *Далькаров О. Д.* Об электромагнитном формфакторе нуклона во времениподобной области // Письма в Журнал Экспериментальной и теоретической физики. — 1978. — Т. 28, № 3. — С. 183–187.

131. *Dalkarov O., Khakhulin P., Voronin A. Yu.* On the electromagnetic form factors of hadrons in the time-like region near threshold // Nuclear Physics A. — 2010. — Vol. 833, no. 1–4. — P. 104–118. — DOI: [10.1016/j.nuclphysa.2009.11.015](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2009.11.015).

132. *Gamow G.* Zur Quantentheorie des Atomkernes // Zeitschrift für Physik. — 1928. — Jg. 51, Nr. 3. — S. 204–212. — DOI: [10.1007/BF01343196](https://doi.org/10.1007/BF01343196).

133. *Gamow G., Houtermans F. G.* Zur Quantenmechanik des radioaktiven Kerns // Zeitschrift für Physik. — 1929. — Jg. 52, Nr. 7. — S. 496–509. — DOI: 10.1007/BF01339450.

134. *Зоммерфельд А.* Строение атома и спектры. Т. II. — М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. — 696 с.

135. *Сахаров А. Д.* Взаимодействие электрона и позитрона при рождении пар // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 1948. — Т. 18, № 7. — С. 631–635.

136. *Goldberger M., Watson K.* Collision theory. — New York : Wiley, 1964. — 920 p.

137. *Feshbach H., Porter C. E., Weisskopf V. F.* Model for nuclear reactions with neutrons // Physical Review. — 1954. — Vol. 96, no. 2. — P. 448–464. — DOI: 10.1103/PhysRev.96.448.

138. *Фадин В. С., Хозе В. А.* О пороговом поведении сечения рождения  $t$ -кварков в  $e^+e^-$ -аннигиляции // Письма в Журнал Экспериментальной и теоретической физики. — 1987. — Т. 46, № 11. — С. 417.

139. *Flatté S.* Coupled-channel analysis of the  $\pi\eta$  and  $K\bar{K}$  systems near  $K\bar{K}$  threshold // Physics Letters B. — 1976. — Vol. 63, no. 2. — P. 224–227. — DOI: 10.1016/0370-2693(76)90654-7.

140. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. В. А. Диткина, Л. Н. Кармазиной. — М. : Наука, 1979. — 832 с.

141. *Haidenbauer J., Meißner U.-G.* The electromagnetic form factors of the  $\Lambda$  in the timelike region // Physics Letters B. — 2016. — Vol. 761. — P. 456–461. — DOI: 10.1016/j.physletb.2016.08.067.

142. Yang Y., Lu Z. The electromagnetic form factors of  $\Lambda$  hyperon in  $e^+e^- \rightarrow \bar{\Lambda}\bar{\Lambda}$  // Modern Physics Letters A. — 2018. — Vol. 33, no. 22. — P. 1850133. — DOI: [10.1142/S021773231850133X](https://doi.org/10.1142/S021773231850133X).

143. A possible explanation of the threshold enhancement in the process  $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$  / L.-Y. Xiao, X.-Z. Weng, X.-H. Zhong, S.-L. Zhu // Chinese Physics C. — 2019. — Vol. 43, no. 11. — P. 113105. — DOI: [10.1088/1674-1137/43/11/113105](https://doi.org/10.1088/1674-1137/43/11/113105).

144. Unraveling the structure of  $\Lambda$  hyperons with polarized  $\Lambda\bar{\Lambda}$  pairs / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review Letters. — 2025. — Vol. 135, no. 19. — P. 191902. — DOI: [10.1103/9f1h-f14k](https://doi.org/10.1103/9f1h-f14k).

145. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами / под ред. В. М. Шехтера ; пер. Д. И. Дьяконова, М. И. Стрикмана. — М. : Мир, 1975.

146. Observation of  $B^0 \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}K^0$  and  $B^0 \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}K^{*0}$  at Belle / Y.-W. Chang, M.-Z. Wang, I. Adachi, [et al.] // Physical Review D. — 2009. — Vol. 79, no. 5. — P. 052006. — DOI: [10.1103/PhysRevD.79.052006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.052006).

147. Cross section measurements of  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-K^+K^-$  and  $\phi K^+K^-$  at center-of-mass energies from 2.10 to 3.08 GeV / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review D. — 2019. — Vol. 100, no. 3. — P. 032009. — DOI: [10.1103/PhysRevD.100.032009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.032009).

148. Measurement of  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-$  cross section at  $\sqrt{s} = 2.00 - 3.08$  GeV / M. Ablikim, M. N. Achasov, S. Ahmed, [et al.] // Physical Review D. — 2019. — Vol. 99, no. 3. — P. 032001. — DOI: [10.1103/PhysRevD.99.032001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.032001).

149. Observation of a resonant structure in  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\pi^0\pi^0$  / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review Letters. — 2020. — Vol. 124, no. 11. — P. 112001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.124.112001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.112001).

150. Observation of a structure in  $e^+e^- \rightarrow \phi\eta'$  at  $\sqrt{s}$  from 2.05 to 3.08 GeV / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review D. — 2020. — Vol. 102, no. 1. — P. 012008. — DOI: [10.1103/PhysRevD.102.012008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.012008).

151. Study of the process  $e^+e^- \rightarrow \phi\eta$  at center-of-mass energies between 2.00 and 3.08 GeV / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review D. — 2021. — Vol. 104, no. 3. — P. 032007. — DOI: [10.1103/PhysRevD.104.032007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.032007).

152. *Xia L.* Study of  $\phi(2170)$  at BESIII // Suplemento de la Revista Mexicana de Física. — 2022. — Vol. 3, no. 3. — P. 1–6. — DOI: [10.31349/SuplRevMexFis.3.0308012](https://doi.org/10.31349/SuplRevMexFis.3.0308012).

153. Measurement of  $e^+e^- \rightarrow \phi\pi^+\pi^-$  cross sections at center-of-mass energies from 2.00 to 3.08 GeV / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review D. — 2023. — Vol. 108, no. 3. — P. 032011. — DOI: [10.1103/PhysRevD.108.032011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.108.032011).

154. *Sarti V. M.* Novel constraints on  $\Lambda - \bar{\Lambda}$  and  $p - \bar{\Lambda}$  interactions using correlation data // The European Physical Journal C. — 2025. — Vol. 85, no. 9. — P. 1068. — DOI: [10.1140/epjc/s10052-025-14764-z](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-025-14764-z).

155. *Carbonell J., Protasov K. V., Dalkarov O. D.* On a possible nearthreshold  $\Lambda\bar{\Lambda}$  state // Physics Letters B. — 1993. — Vol. 306, no. 3. — P. 407–410. — DOI: [10.1016/0370-2693\(93\)90100-V](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90100-V).

156. A fit to the available  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c^+\bar{\Lambda}_c^-$  cross section data nearby production threshold by means of a strong correction to the Coulomb enhancement factor / A. Amoroso, S. Bagnasco, R. Baldini Ferroli, [et al.] // Universe. — 2021. — Vol. 7, no. 11. — P. 436. — DOI: [10.3390/universe7110436](https://doi.org/10.3390/universe7110436).

157. *Guo D., Yang Q.-H., Dai L.-Y.* Study of the timelike electromagnetic form factors of the  $\Lambda_c$  // Physical Review D. — 2024. — Vol. 109, no. 11. — P. 114005. — DOI: [10.1103/PhysRevD.109.114005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.109.114005).

158. *Chen C., Yan B., Xie J.-J.* The  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c^+\bar{\Lambda}_c^-$  cross sections and the  $\Lambda_c^+$  electromagnetic form factors within the extended vector meson dominance model // Chinese Physics Letters. — 2024. — Vol. 41. — P. 021302. — DOI: [10.1088/0256-307X/41/2/021302](https://doi.org/10.1088/0256-307X/41/2/021302).

159. *Chen C., Yan B., Xie J.-J.* The electromagnetic form factors and spin polarization of  $\Lambda_c^+$  in the process  $e^+e^- \rightarrow \Lambda_c^+\bar{\Lambda}_c^-$  // Chinese Physics C. — 2025. — Vol. 49, no. 2. — P. 023102. — DOI: [10.1088/1674-1137/ad9259](https://doi.org/10.1088/1674-1137/ad9259).

160. *Carbonell J., Hupin G., Wycech S.* Comparison of  $\bar{N}N$  optical models // The European Physical Journal A. — 2023. — Vol. 59, no. 11. — P. 259. — DOI: [10.1140/epja/s10050-023-01161-x](https://doi.org/10.1140/epja/s10050-023-01161-x).

161. Origin of the structures observed in  $e^+e^-$  annihilation into multipion states around the  $p\bar{p}$  threshold / J. Haidenbauer, C. Hanhart, X.-W. Kang, U.-G. Meißner // Physical Review D. — 2015. — Vol. 92, no. 5. — P. 054032. — DOI: [10.1103/PhysRevD.92.054032](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.054032).

162. *Klempt E., Batty C., Richard J. M.* The antinucleon-nucleon interaction at low energy: Annihilation dynamics // Physics Reports. — 2005. — Vol. 413, no. 4/5. — P. 197–317. — DOI: [10.1016/j.physrep.2005.03.002](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.03.002).

163. Near threshold enhancement of the  $p\bar{p}$  mass spectrum in  $J/\Psi$  decay / A. Sibirtsev, J. Haidenbauer, S. Krewald, [et al.] // Physical Review D. — 2005. — Vol. 71, no. 5. — P. 054010. — DOI: [10.1103/PhysRevD.71.054010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.054010).

164. *Haidenbauer J., Meißner U.-G., Sibirtsev A.* Near threshold  $p\bar{p}$  enhancement in  $B$  and  $J/\Psi$  decay // Physical Review D. — 2006. — Vol. 74, no. 1. — P. 017501. — DOI: [10.1103/PhysRevD.74.017501](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.017501).

165. *Entem D. R., Fernández F.* Final state interaction effects in near threshold enhancement of the  $p\bar{p}$  mass spectrum in  $B$  and  $J/\psi$  decays // Physical Review D. — 2007. — Vol. 75, no. 1. — P. 014004. — DOI: 10.1103/PhysRevD.75.014004.

166. *Haidenbauer J., Meißner U.-G., Sibirtsev A.* Near threshold  $p\bar{p}$  enhancement in the  $J/\psi \rightarrow \omega p\bar{p}$  decay // Physics Letters B. — 2008. — Vol. 666, no. 4. — P. 352–354. — DOI: 10.1016/j.physletb.2008.07.080.

167. *Haidenbauer J., Meißner U.-G.*  $p\bar{p}$  mass threshold structure in  $\psi(3686)$  radiative decay revisited // Physical Review D. — 2012. — Vol. 86, no. 7. — P. 077503. — DOI: 10.1103/PhysRevD.86.077503.

168. *Kang X.-W., Haidenbauer J., Meißner U.-G.* Near-threshold  $p\bar{p}$  invariant mass spectrum measured in  $J/\psi$  and  $\psi'$  decays // Physical Review D. — 2015. — Vol. 91, no. 7. — P. 074003. — DOI: 10.1103/PhysRevD.91.074003.

169. *Dai L.-Y., Haidenbauer J., Meißner U.-G.*  $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'\pi^+\pi^-$  and the structure observed around the  $p\bar{p}$  threshold // Physical Review D. — 2018. — Vol. 98, no. 1. — P. 014005. — DOI: 10.1103/PhysRevD.98.014005.

170. *Dedonder J.-P., Loiseau B., Wycech S.* Photon or meson formation in  $J/\psi$  decays into  $p\bar{p}$  // Physical Review C. — 2018. — Vol. 97, no. 6. — P. 065206. — DOI: 10.1103/PhysRevC.97.065206.

171. *Yang Q.-h., Guo D., Dai L.-Y.* Structure around  $p\bar{p}$  threshold in  $J/\psi$  radiative decays // Physical Review D. — 2023. — Vol. 107, no. 3. — P. 034030. — DOI: 10.1103/PhysRevD.107.034030.

172. Pole structures of the  $X(1840)$  or  $X(1835)$  and the  $X(1880)$  / P.-Y. Niu, Z.-Y. Zhang, Y.-Y. Li, [et al.] // Physical Review D. — 2024. — Vol. 110, no. 9. — P. 094020. — DOI: 10.1103/PhysRevD.110.094020.

173. *Yang Q.-H., Dai L.-Y., Meißner U.-G.* Quantum numbers of the  $X(1880)$  // Physical Review D. — 2026. — Vol. 113, no. 1. — P. L011501. — DOI: [10.1103/gmyw-cfjf](https://doi.org/10.1103/gmyw-cfjf).

174. *Källén G.* Elementary particle physics / ed. by M. Hamermesh. — Reading, Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, 1964. — 564 p.

175. *Гольданский Б. И., Никитин Ю. П., Розенталь И. Л.* Кинематические методы в физике высоких энергий. — М. : Наука, 1987. — 200 с.

176. Observation of an anomalous line shape of the  $\eta'\pi^+\pi^-$  mass spectrum near the  $p\bar{p}$  mass threshold in  $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'\pi^+\pi^-$  / M. Ablikim, M. N. Achasov, S. Ahmed, [et al.] // Physical Review Letters. — 2016. — Vol. 117, no. 4. — P. 042002. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.117.042002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.042002).

177. Observation of the anomalous shape of  $X(1840)$  in  $J/\psi \rightarrow \gamma 3(\pi^+\pi^-)$  indicating a second resonance near  $p\bar{p}$  threshold / M. Ablikim, M. N. Achasov, P. Adlarson, [et al.] // Physical Review Letters. — 2024. — Vol. 132, no. 15. — P. 151901. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.132.151901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.132.151901).

178. Review of particle physics / S. Navas, C. Amsler, T. Gutsche, [et al.] // Physical Review D. — 2024. — Vol. 110, no. 3. — P. 030001. — DOI: [10.1103/PhysRevD.110.030001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.110.030001).

179. *Julin A. J.* Measurement of  $D\bar{D}$  decays from the  $\psi(3770)$  resonance : PhD thesis / Julin Andy Jarod. — University of Minnesota, 2017. — 192 p.

180. Updated measurements of absolute  $D^+$  and  $D^0$  hadronic branching fractions and  $\sigma(e^+e^- \rightarrow D\bar{D})$  at  $E_{\text{cm}} = 3774$  MeV / G. Bonvicini, D. Cinabro, M. J. Smith, [et al.] // Physical Review D. — 2014. — Vol. 89, no. 7. — P. 072002. — DOI: [10.1103/PhysRevD.89.072002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.072002).

181. *Dong X.-K., Wang L.-L., Yuan C.-Z.* Derived Born cross sections of  $e^+e^-$  annihilation into open charm mesons from CLEO-c measurements // Chinese

Physics C. — 2018. — Vol. 42, no. 4. — P. 043002. — DOI: 10.1088/1674-1137/42/4/043002.

182. Measurement of the relative branching fraction of  $\Upsilon(4S)$  to charged and neutral  $B$ -meson pairs / J. P. Alexander, R. Baker, C. Bebek, [et al.] // Physical Review Letters. — 2001. — Vol. 86, no. 13. — P. 2737–2741. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.2737.
183. Measurement of branching fractions for exclusive  $B$  decays to charmonium final states / B. Aubert, D. Boutigny, J.-M. Gaillard, [et al.] // Physical Review D. — 2002. — Vol. 65, no. 3. — P. 032001. — DOI: 10.1103/PhysRevD.65.032001.
184. Measurement of the ratio of branching fractions of the  $\Upsilon(4S)$  to charged and neutral  $B$  mesons / S. B. Athar, P. Avery, H. Stoeck, [et al.] // Physical Review D. — 2002. — Vol. 66, no. 5. — P. 052003. — DOI: 10.1103/PhysRevD.66.052003.
185. Studies of  $B^0 - \bar{B}^0$  mixing properties with inclusive dilepton events / N. C. Hastings, K. Abe, K. Abe, [et al.] // Physical Review D. — 2003. — Vol. 67, no. 5. — P. 052004. — DOI: 10.1103/PhysRevD.67.052004.
186. Measurement of the  $B^+/B^0$  production ratio from the  $\Upsilon(4S)$  meson using  $B^+ \rightarrow J/\psi K^+$  and  $B^0 \rightarrow J/\psi K_S^0$  decays / B. Aubert, R. Barate, D. Boutigny, [et al.] // Physical Review D. — 2004. — Vol. 69, no. 7. — P. 071101. — DOI: 10.1103/PhysRevD.69.071101.
187. Measurement of the  $B^+/B^0$  production ratio in  $e^+e^-$  collisions at the  $\Upsilon(4S)$  resonance using  $B \rightarrow J/\psi(l\bar{l})K$  decays at Belle / S. Choudhury, S. Sandilya, K. Trabelsi, [et al.] // Physical Review D. — 2023. — Vol. 107, no. 3. — P. L031102. — DOI: 10.1103/PhysRevD.107.L031102.

188. Measurements of the  $\Upsilon(10860)$  and  $\Upsilon(11020)$  resonances via  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \Upsilon(nS)\pi^+\pi^-)$  / D. Santel, K. Kinoshita, P. Chang, [et al.] // Physical Review D. — 2016. — Vol. 93, no. 1. — P. 011101. — DOI: 10.1103/PhysRevD.93.011101.
189. Hadronic cross section of  $e^+e^-$  annihilation at bottomonium energy region / X.-K. Dong, X.-H. Mo, P. Wang, C.-Z. Yuan // Chinese Physics C. — 2020. — Vol. 44, no. 8. — P. 083001. — DOI: 10.1088/1674-1137/44/8/083001.
190. Bottomonium spectroscopy using Coulomb plus linear (Cornell) potential / V. Kher, R. Chaturvedi, N. Devlani, A. K. Rai // The European Physical Journal Plus. — 2022. — Vol. 137, no. 3. — P. 357. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-022-02538-5.
191. Measurements of the mass difference  $m(B^0) - m(B^+)$  and the energy dependence of the cross-section ratio  $\sigma(e^+e^- \rightarrow B^0\bar{B}^0)/\sigma(e^+e^- \rightarrow B^+B^-)$  at Belle and Belle II / M. Abumusabh, I. Adachi, L. Aggarwal, [et al.]. — 2025. — DOI: 10.48550/arXiv.2511.15926. — URL: <http://arxiv.org/abs/2511.15926> (visited on 11/21/2025). — Pre-published.
192. Measurement of the mass difference  $m(B^0) - m(B^+)$  / B. Aubert, M. Bona, Y. Karyotakis, [et al.] // Physical Review D. — 2008. — Vol. 78, no. 1. — P. 011103. — DOI: 10.1103/PhysRevD.78.011103.