

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ ИМ. Г.И. БУДКЕРА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ
НАУК

На правах рукописи

ЧЕРНОШТАНОВ ИВАН СЕРГЕЕВИЧ

**АЛЬФВЕНОВСКАЯ ИОННО-ЦИКЛОТРОННАЯ
НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
В ОТКРЫТЫХ ЛОВУШКАХ С ИНЖЕКЦИЕЙ
ПУЧКОВ БЫСТРЫХ АТОМОВ**

01.04.08 — физика плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Цидулко Юрий Александрович
кандидат физико-математических наук

Новосибирск — 2015

Содержание

Введение	4
Глава 1. Альфвеновская ионно-циклотронная неустойчивость в ловушке с сильно анизотропной би-максвелловской плазмой	10
1.1. Оценки для сильно анизотропной ограниченной плазмы	10
1.2. Оператор диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы	14
1.3. Интегральное уравнение для собственных мод	16
1.4. Аналитическое решение в пределе бесконечно большой анизотропии	20
1.5. Численные результаты	24
Глава 2. Альфвеновская ионно-циклотронная неустойчивость в ловушке с наклонной инжекцией быстрых атомов	28
2.1. Оценки параметров волны	28
2.2. Аппроксимация функции распределения и дисперсионного соотношения	30
2.3. ВКБ-решения	35
2.4. Численные результаты	38
2.5. Поведение полей в периферийной плазме	42
Глава 3. Нелинейное насыщение альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости	46
3.1. Класс точных решений уравнений Власова-Максвелла для альфвеновской волны	46

3.2. Модели плазмы с инжекцией	51
3.2.1. Оценки параметров нелинейного насыщения	51
3.2.2. Кинетическое уравнение для ионов	54
3.2.3. Функция распределения электронов	58
3.2.4. Аналитическое решение для нормальной инжекции без углового разброса	58
3.2.5. Численное решение для инжекции с конечным угловым разбросом	61
Заключение	66
Приложение 1. Выражение для ядра интегрального уравнения	69
Приложение 2. Алгоритм численного решения интегрального уравнения	75
Приложение 3. Средние значения на траектории частицы	77
Приложение 4. Усреднение по распределению ионов	80
Литература	83

Введение

Плазма в системах с магнитным удержанием, как правило, термодинамически неравновесна, что обусловлено способами ее создания и нагрева. Неравновесность распределений частиц по скоростям может приводить к самопроизвольному возбуждению различных колебаний плазмы – кинетическим неустойчивостям. К кинетическим неустойчивостям, способным развиваться в открытых ловушках, относится альфвеновская ионно-циклотронная (АИЦ) неустойчивость, приводящая к генерации электромагнитных волн с частотой порядка ионной циклотронной, распространяющихся приблизительно вдоль силовых линий магнитного поля. АИЦ неустойчивость экспериментально зарегистрирована в открытых ловушках (в концевых пробкотронах установки ТМХ [17], в центральной ячейке ГАММА-10 [31], в центральной ячейке и концевых пробкотронах ГДЛ [37, 40]) и в магнитосфере Земли [33]. Кроме того, есть указания на то, что неустойчивость возникала в центральной ячейке ТМХ-У [23] и что неустойчивость может развиваться в плазме термоядерного реактора из-за раскачки продуктами реакции синтеза [3, 8, 25, 30].

Развитие АИЦ неустойчивости может увеличивать эффективную частоту столкновений, влияя на продольный и поперечный перенос частиц и энергии. Так, в ТМХ неустойчивость ограничивала эффективность амбиполярного запираения центральной ячейки концевыми пробкотронами. В концевых пробкотронах при повышении плотности плазмы развивалась АИЦ неустойчивость, которая нагревала ионы в центральной ячейке, что приводило к их потере через амбиполярные барьеры [15, 16]. Развивающаяся в центральной ячейке установки ГАММА-10 неустойчивость вызывает квазилинейную диффузию ионов и ограничивает анизотропию ионного распреде-

ления [29, 36]. Развитие АИЦ неустойчивости в магнитосфере Земли ограничивает анизотропию функции распределения ионов [33].

В общем случае неоднородной плазмы исследование границы АИЦ неустойчивости требует нахождения спектра собственных частот и собственных мод для электромагнитных полей, описываемых системой уравнений Власова-Максвелла. Аналитическое решение в общем случае отсутствует, а применение численных методов требует значительных вычислительных ресурсов. Для приближенного решения данной системы часто используется предположение о слабой продольной неоднородности плазмы (длина волны возмущения мала по сравнению с характерным размером неоднородности). Такой подход позволяет использовать методы построения ВКБ-решения по продольной координате [2, 14], когда распределение поля представляется в виде суммы бегущих волн с переменным волновым вектором, который определяется из локального дисперсионного соотношения. Спектр частот возмущений определяется из глобального дисперсионного соотношения, следующего из граничных условий и требования однозначности ВКБ-решения.

Необходимые условия развития АИЦ неустойчивости (существование волн с положительной мнимой частью частоты) можно получить из анализа дисперсионного соотношения для АИЦ волн в однородной плазме. В случае когда энергия возмущения может уноситься из области генерации, для оценки границы устойчивости применим критерий Берса-Бриггса абсолютности неустойчивости [12, 18], однако этот критерий также является необходимым, но недостаточным.

Большое число работ по АИЦ неустойчивости посвящено случаю би-максвелловского распределения, когда распределения частиц по скоростям вдоль и поперек внешнего магнитного поля являются максвелловскими с различными температурами. Би-максвелловское распределение обычно исполь-

зается для аппроксимации распределения ионов, возникающего при нормальной инжекции либо ИЦР-нагреве. В работах [1] и [9] исследована АИЦ неустойчивость в однородной би-максвелловской плазме и показано, что за раскачку неустойчивости отвечают ионы со скоростями, удовлетворяющими условию циклотронного резонанса $k_{\parallel}v_{\parallel} = \omega - \Omega_{ci}$, где ω и k_{\parallel} есть частота и продольная компонента волнового вектора возмущения. Раскачка происходит за счет механизма Ландау (аналогично раскачке ленгмюровских колебаний электронным пучком), для чего необходима инверсная заселенность возмущенных траекторий резонансных ионов. В случае би-максвелловской плазмы, как показано в [1, 9], это требование приводит к ограничению на частоту неустойчивого возмущения $\omega < \Omega_{ci}(1 - T_{\parallel}/T_{\perp})$. В работе [29] рассмотрена граница АИЦ неустойчивости в однородной цилиндрической плазме с би-максвелловским распределением ионов при параметрах, близких к параметрам центральной ячейки установки ГАММА-10. Найдена граница устойчивости, в рамках квазилинейной модели рассчитаны частотные спектры неустойчивых возмущений, и показано, что они близки к экспериментальным.

Влияние неоднородности параметров плазмы на АИЦ неустойчивость для случая би-максвелловской плазмы с умеренной анизотропией детально исследовано в работе [14]. Для анализа границы устойчивости использовалось построение ВКБ-решения по продольной координате, поперечная неоднородность плазмы учитывалась с помощью эффективного поперечного волнового вектора. Неоднородность плазмы сильно влияет на границу АИЦ неустойчивости, поскольку область, где резонансные ионы могут отдавать энергию волне, становится конечной; кроме того, энергия возмущения уносится уходящими волнами. В работе исследована граница АИЦ неустойчивости и найдены распределения возмущений полей. Показано, что в центре

ловушки, где плотность плазмы максимальна, образуется область со стоячей волной, за которой распространяется уходящая волна.

Один из способов стабилизации АИЦ неустойчивости (и ряда других неустойчивостей) состоит в переходе от нормальной атомарной инжекции к наклонной [22]. Условия возникновения АИЦ неустойчивости в ловушке с наклонной инжекцией рассмотрены в [19, 20]. Для анализа применялось построение ВКБ-решений по продольной координате (аналогично [14]), при этом использовались модельные функции распределения ионов и пренебрегалось поперечной неоднородностью. В работах продемонстрировано сильное влияние угла инжекции и продольного размера неоднородности магнитного поля на границу устойчивости. Проанализированы результаты экспериментов ТМХ и ТМХ-У, исследованы условия возникновения неустойчивости в проектировавшейся установке МFTF-B. Также в работах рассмотрен вопрос о развитии АИЦ неустойчивости в двухкомпонентной (дейтерий-третиевой) плазме и показано, что инкременты неустойчивости уменьшаются из-за уменьшения доли резонансных ионов.

Большое число работ посвящено исследованию нелинейной стадии АИЦ неустойчивости. Широко применяется квазилинейный подход, когда учитывается влияние возмущений полей на распределение частиц плазмы, но их амплитуды полагаются достаточно малыми для пренебрежения влиянием друг на друга. Так, в работе [9] рассмотрена эволюция энергии колебаний, продольной и поперечной температур для плазмы с би-максвелловским распределением ионов. Показано, что происходит насыщение неустойчивости, когда энергия колебаний и температуры перестают зависеть от времени, при этом анизотропия распределения уменьшается по сравнению с первоначальной. Однако, использованное в работе предположение, что распределение ионов в ходе насыщения неустойчивости остается би-максвелловским,

представляется неприменимым в большинстве случаев. Более точные квазилинейные модели, учитывающие изменение формы распределения частиц, рассмотрены в [7, 13] при изучении эволюции циклотронных волн в плазме. Продемонстрировано, что в случае узкого спектра волн $\Delta k \ll k$, в области резонансных частиц $kv_{\parallel} \approx \omega - \Omega_c$ формируется плато, где производная функции распределения вдоль возмущенной траектории $k_{\parallel}v_{\perp}\partial_{v_{\parallel}}f + \Omega_{ci}\partial_{v_{\perp}}f$ обращается в ноль. Численная модель, основанная на квазилинейном подходе, показывает [29], что развитие АИЦ неустойчивости в бимаксвелловской плазме может ограничивать анизотропию распределения ионов T_{\perp}/T_{\parallel} . Вывод, что развитие АИЦ неустойчивости сдерживает рост анизотропии распределения, был также сделан в работе [33], где с помощью метода частиц в ячейке (PIC) моделировалось адиабатическое сжатие плазмы поперек магнитного поля. В работе [8] на основе квазилинейной модели исследуется АИЦ неустойчивость, возникающая из-за неравновесности распределения продуктов термоядерной реакции. Показано, что квазилинейная диффузия приводит к увеличению радиальных потоков частиц, что может приводить к возникновению заметных электрических полей на границе плазмы.

Данная диссертация посвящена теоретическому изучению линейной стадии АИЦ неустойчивости в открытой ловушке с инжекцией атомарных пучков в случаях нормальной инжекции с малым угловым разбросом и наклонной инжекции в плазму с сильной поперечной неоднородностью, а также изучению нелинейного насыщения АИЦ неустойчивости в ловушке с атомарной инжекцией.

На защиту выносятся следующие положения:

Граница АИЦ неустойчивости и распределения возмущений полей в ловушке с сильно анизотропной ($\mathcal{A} \gg L/\rho_{\perp}$) би-максвелловской плазмой.

Новый скейлинг для границы АИЦ неустойчивости в неоднородной би-максвелловской плазме в пределе бесконечно большой анизотропии.

Граница АИЦ неустойчивости и распределения возмущений полей в аксиально-симметричной ловушке с наклонной инжекцией быстрых атомов в рамках ВКБ-приближения с использованием функции распределения ионов, удовлетворяющей приближенному уравнению Фоккера-Планка, и с учетом продольной и поперечной неоднородности.

Описание поведения возмущения магнитного поля в периферийной плазме. Условия смены направления вращения волны в периферийной плазме.

Модель нелинейного насыщения АИЦ неустойчивости в однородной плазме с инжекцией атомарных пучков, основанная на спирально-симметричных решениях уравнений Власова-Максвелла.

Глава 1

Альфвеновская ионно-циклотронная неустойчивость в ловушке с сильно анизотропной би-максвелловской плазмой

1.1. Оценки для сильно анизотропной ограниченной плазмы

В данной главе рассматривается линейная стадия АИЦ неустойчивости в плазме с би-максвелловским распределением ионов $f_i \sim \exp(-mv_{\perp}^2/2T_{\perp} - m\mathcal{A}v_{\parallel}^2/2T_{\perp})$, помещенной в неоднородное магнитное поле и содержащей добавку холодных изотропных ионов [38].

Для оценки параметров возмущения на границе устойчивости рассмотрим случай однородной плазмы. В простейшем случае с $k_{\perp} = 0$ дисперсионное соотношение для волны с круговой поляризацией принимает вид $k_{\parallel}^2 c^2 = \omega^2 \varepsilon_{\pm}$, причем антиэрмитова часть поперечной диэлектрической проницаемости ε_{-} пропорциональна интегралу

$$\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp}^2 (k_{\parallel} v_{\perp} \partial_{v_{\parallel}} f_i + \Omega_{ci} \partial_{v_{\perp}} f_i) \Big|_{v_{\parallel} = (\omega - \Omega_{ci})/k_{\parallel}} \quad (1)$$

и определяется ионами со скоростями, удовлетворяющими условию циклотронного резонанса $k_{\parallel} v_{\parallel} = \omega - \Omega_{ci}$. Здесь ω и k_{\parallel} есть частота и продольный волновой вектор возмущения, Ω_{ci} и ω_{pi} – ионная циклотронная и плазменная частоты, f_i – функция распределения ионов. На рисунке 1 изображены примеры изолиний функции распределения и траекторий резонансных частиц на плоскости $(v_{\parallel}, v_{\perp})$. В отсутствие возмущения траектории любого иона

на плоскости $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ соответствует одна точка. Возмущение вызывает смещение ионов на плоскости $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ вдоль дуг окружностей, показанных на рисунке 1 жирными черточками. Наклон смещений легко найти из условия сохранения энергии частицы $(v_{\parallel} - \omega/k_{\parallel})^2 + v_{\perp}^2$ в системе отсчета волны, где электрическое поле возмущения обращается в ноль (комбинация производных в скобках выражения (1) есть как раз производная вдоль смещений). Вклад резонансных ионов оказывается дестабилизирующим лишь при инверсной заселенности их траекторий, когда движение в направлении роста энергии частицы $\sim v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$ соответствует увеличению значения невозмущенной функции распределения. В случае би-максвелловского распределения ионов это требование ограничивает частоту неустойчивого возмущения

$$\omega/\Omega_{ci} < 1 - 1/\mathcal{A} \quad (2)$$

Случай $\omega = \Omega_{ci}(1 - 1/\mathcal{A})$, когда резонансные ионы движутся вдоль поверхностей $f_i(v_{\parallel}, v_{\perp}) = const$ и не обмениваются энергией с волной, показан на рисунке 1. Условие (2) и роль резонансных частиц в раскачке неустойчивости также отмечались в работах [1, 9].

Нерезонансные частицы дают основной вклад в эрмитову часть диэлектрической проницаемости, который можно грубо оценить как вклад холодной плазмы, что приводит к ограничению на волновой вектор возмущения $k_{\parallel}^2 c^2 / \omega_{pi}^2 = k_{\parallel}^2 \rho_{\perp}^2 / \beta_{\perp} \sim \omega^2 / (\Omega_{ci}(\Omega_{ci} - \omega)) < \mathcal{A}$, где β_{\perp} есть отношение поперечного давления плазмы к давлению магнитного поля и $\rho_{\perp} = (2T_{\perp}/m)^{1/2} / \Omega_{ci}$ есть средний ларморовский радиус ионов.

Если плазма является неоднородной с характерным продольным размером неоднородности l , то длина волны неустойчивого возмущения ограничена условием $\lambda \lesssim l$. Таким образом, неустойчивость возможна при вы-

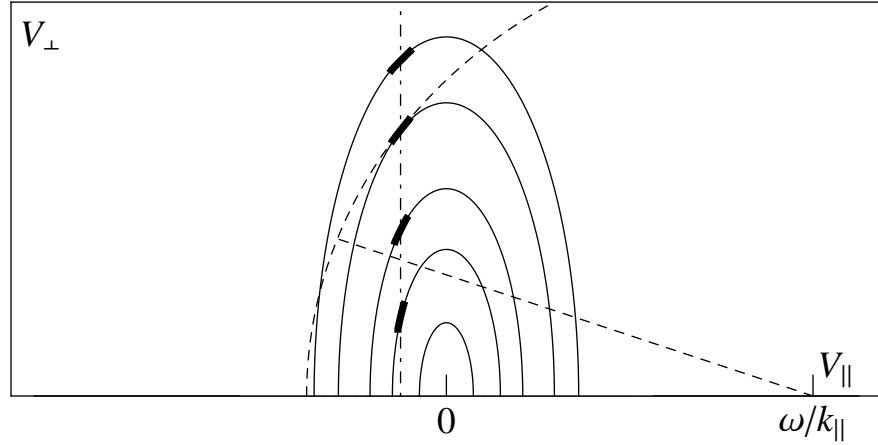


Рис. 1: Пример изолиний функции распределения (сплошные линии) и возмущенных траекторий ионов (жирные черточки). Вертикальная штрих-пунктирная линия соответствует $v_{\parallel} = (\omega - \Omega_{ci})/k_{\parallel}$, пунктирная кривая соответствует $v_{\perp}^2 + (v_{\parallel} - \omega/k_{\parallel})^2 = const.$

полнении условия

$$\beta_{\perp} \mathcal{A} \gtrsim \rho_{\perp}^2 / l^2. \quad (3)$$

Характерный размер би-максвелловской плазмы, помещенной в неоднородное магнитное поле с размером неоднородности L , можно оценить как $l \sim L/\sqrt{\mathcal{A}}$ (см. п. 4.2). Следовательно, критерий устойчивости можно переписать в виде

$$\frac{\omega_{pi} L}{c} \lesssim 1. \quad (4)$$

Возможность стабилизации АИЦ неустойчивости из-за ограничения длины волны неоднородностью плазмы также отмечалась в работе [10].

Сравним (3) с критерием абсолютности неустойчивости $\beta_{\perp} \mathcal{A}^2 > 3.51$ в пределе $\mathcal{A} \gg 1$ [19]. Порогу абсолютности неустойчивости в однородной плазме соответствует длина волны возмущения $\lambda \sim \rho_{\perp} \sqrt{\mathcal{A}}$, которая должна быть меньше длины плазмы. Таким образом, критерий (3) определяет устойчивость при $\mathcal{A} \gg l^2/\rho_{\perp}^2$, что эквивалентно $\mathcal{A} \gg L/\rho_{\perp}$.

Частота баунс-колебаний частицы в неоднородном магнитном поле по

порядку величины равна $\Omega_b \sim v_\perp/L = \Omega_{ci}\rho_\perp/L$. Сравним разность частоты возмущения и циклотронной частоты с баунс-частотой. Частоту неустойчивого возмущения можно оценить как $\omega \sim \Omega_{ci}(1 - 1/\mathcal{A})$, таким образом при $\mathcal{A} \gg L/\rho_\perp$ выполняется неравенство $\omega - \Omega_{ci} \sim \Omega_{ci}/\mathcal{A} \ll \Omega_b$ означающее, что за время сбоя фазы между циклотронным вращением и вращением поля волны частица успевает совершить много баунс-осцилляций. Это приводит к необходимости использования интегральных соотношений при описании неустойчивого возмущения в неоднородной плазме. В обратном предельном случае, $\mathcal{A} \ll L/\rho_\perp$, за время обмена энергией с волной частица перемещается в продольном направлении на расстояние много меньшее размера неоднородности и можно использовать локальное дисперсионное соотношение.

Отметим, что в случае адиабатического и бесстолкновительного движения частиц в неоднородном магнитном поле, в точке с произвольным пробочным отношением R распределение остается би-максвелловским с температурой $T_\perp(R) = T_{\perp 0}R/(1 + \mathcal{A}_0(R - 1))$ и анизотропией $\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}_0R/(1 + \mathcal{A}_0(R - 1))$. При этом знак выражения $\omega - \Omega_{ci}(1 - 1/\mathcal{A}(R))$ не зависит от пробочного отношения. Таким образом, при $k_\perp = 0$ возможен случай, когда обмен энергией между волной и резонансными ионами отсутствует во всех точках плазмы, что упрощает изучение границы устойчивости (пример рассмотрен в пункте 1.4).

Помимо альфвеновской ионно-циклотронной, в анизотропной плазме может развиваться зеркальная (пробкотронная) неустойчивость. Критерий возникновения этой неустойчивости в однородной би-максвелловской плазме при $k_\perp\rho_\perp \ll 1$ имеет вид $\beta_\perp(\mathcal{A}-1) > 1 + (k_\parallel^2/k_\perp^2)(1 + (\beta_\perp - \beta_\parallel)/2)$ [6]. Оценивая $k_\parallel^2/k_\perp^2 \sim (k_\perp l)^{-2}$ и сравнивая с критерием (3), находим, что при $k_\perp\rho_\perp \ll 1$ в би-максвелловской плазме с $\mathcal{A} \gg 1$ граница зеркальной неустойчивости лежит выше границы АИЦ неустойчивости.

1.2. Оператор диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы

Поведение возмущений полей в среде удобно описывать с помощью оператора диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}_{\alpha\beta}$, который связывает возмущения электрической индукции и поля, $\delta D_\alpha = \hat{\epsilon}_{\alpha\beta} \delta E_\beta = \delta E_\alpha + (4\pi i/\omega) \delta j_\alpha$ (здесь и далее по повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование). В неоднородной среде диэлектрическая проницаемость является интегральным оператором. В данном пункте производится построение оператора диэлектрической проницаемости для неоднородной бесстолкновительной плазмы в форме, удобной для дальнейшего изложения.

Возмущение плотности тока есть $\delta j_\alpha = \sum_s q_s \int d^3v v_\alpha \delta f_s(\vec{r}, \vec{v}, t)$, возмущение функции распределения δf_s частиц сорта s удовлетворяет линеаризованному уравнению Власова. Далее будем рассматривать возмущение функции распределения как функцию от координат и обобщенных импульсов, $\delta f_s(\vec{r}, \vec{p}, t) = \left(\delta \tilde{f}_s(\vec{r}, \vec{v}, t) - q_s \delta \vec{A} \cdot \partial_{\vec{v}} \mathcal{F}_s(\vec{r}, \vec{v}, t) / (m_s c) \right) |_{\vec{v}=(\vec{p}-q_s \vec{A}/c)/m_s}$, где $\vec{p} = m_s \vec{v} + q_s \vec{A}/c$, \vec{A} есть векторный потенциал внешнего магнитного поля, $\delta \vec{A} = -ic \delta \vec{E} / \omega$ – его возмущение. Функция δf_s удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\delta f_s}{dt} \equiv \frac{\partial \delta f_s}{\partial t} + \{H_s^{(0)}, \delta f_s\}_{\vec{p}, \vec{r}} = -\{\delta H_s, \mathcal{F}_s\}_{\vec{p}, \vec{r}}, \quad (5)$$

где $\{a, b\}_{\vec{p}, \vec{q}} = \partial_{\vec{p}} a \cdot \partial_{\vec{q}} b - \partial_{\vec{q}} a \cdot \partial_{\vec{p}} b$ – скобка Пуассона величин a и b по переменным \vec{p} и \vec{q} , $H_s^{(0)} = (\vec{p} - q_s \vec{A}/c)^2 / (2m_s)$ – гамильтониан невозмущенного движения, $\mathcal{F}_s(\vec{r}, \vec{p})$ – невозмущенная функция распределения, $\delta H_s = -q_s \vec{v} \cdot \delta \vec{A} / c$ – возмущение гамильтониана.

Решение уравнения (5) в случае $\text{Im}[\omega] > 0$ можно выразить через

интеграл по траектории невозмущенного движения:

$$\delta f_s(t, \vec{r}, \vec{p}) = -i \frac{q_s}{c} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\omega\tau} \{ \delta \vec{E}(\check{\vec{r}}) \cdot \check{\vec{v}}, \mathcal{F}_s \}_{\vec{p}, \vec{r}}, \quad (6)$$

где $\check{\vec{r}} = \check{\vec{r}}(\tau, \vec{r}, \vec{p})$ и $\check{\vec{v}} = \check{\vec{v}}(\tau, \vec{r}, \vec{p})$ есть координата и скорость частицы на невозмущенной траектории, удовлетворяющие начальным условиям $\check{\vec{r}}(0, \vec{r}, \vec{p}) = \vec{r}$, $\check{\vec{v}}(0, \vec{r}, \vec{p}) = \vec{v}$.

Выражая возмущение плотности тока через возмущение функции распределения, можно записать оператор диэлектрической проницаемости в виде

$$\hat{\epsilon}_{\alpha\beta} \delta E_\beta = \delta E_\alpha - \sum_s \left\{ \frac{\omega_{ps}^2(\vec{r})}{\omega^2} \delta E_\alpha + \frac{4\pi q_s^2}{\omega^2 m_s^3} \int d^3 p \cdot v_\alpha \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\omega\tau} \left\{ \mathcal{F}_s, \check{v}_\beta \delta E_\beta(\check{\vec{r}}) \right\}_{\vec{p}, \vec{r}} \right\}, \quad (7)$$

где $\omega_{ps}(\vec{r}) = (4\pi n(\vec{r}) e_s^2 / m_s)^{1/2}$ – плазменные частоты, сумма берется по всем сортам частиц. Переходя к пространственным Фурье-компонентам, получим

$$\hat{\epsilon}_{\alpha\beta} \delta E_\beta(\vec{r}) = \delta E_\alpha(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi^3} \sum_s \int d^3 r' d^3 k d^3 k' e^{i\vec{k}\vec{r} - i\vec{k}'\vec{r}'} G_{\alpha\beta}^{(s)}(\omega, \vec{k}, \vec{k}') \delta E_\beta(\vec{r}'), \quad (8)$$

где

$$G_{\alpha\beta}^{(s)}(\omega, \vec{k}, \vec{k}') = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{8\pi^3 \omega^2} \int d^3 r \omega_{ps}^2(\vec{r}) e^{i(\vec{k}' - \vec{k})\vec{r}} - \frac{q_s^2}{2\pi^2 \omega^2 m_s^3} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\omega\tau} \int d\Gamma \mathcal{F}_s \left\{ \check{v}_\beta e^{i\vec{k}' \cdot \check{\vec{r}}}, v_\alpha e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right\}_{\vec{p}, \vec{r}}, \quad (9)$$

$d\Gamma = d^3 q d^3 p$ – элемент объема фазового пространства. Полученное выражение для оператора диэлектрической проницаемости инвариантно относительно канонических преобразований, что упрощает замену переменных.

1.3. Интегральное уравнение для собственных мод

Поскольку горячие ионы имеют сильно анизотропное распределение и не удаляются от центра ловушки, при описании их движения можно считать невозмущенное магнитное поле параксиальным и слабо (квадратично) меняющимся в продольном направлении. Также при вычислении вклада горячих ионов в диэлектрическую проницаемость пренебрегается кривизной силовых линий и поперечной неоднородностью магнитного поля ловушки. Гамильтониан невозмущенного движения $H_i^{(0)}$ после перехода к магнитному моменту и углу ларморовского вращения можно преобразовать к виду [24]

$$H(\theta, z, \Phi; \mu, p_z, P) = \mu\Omega_{ci0}(1 + z^2/L^2) + \frac{p_z^2}{2m}, \quad (10)$$

где Ω_{ci0} – ионная циклотронная частота в центре ловушки, L – масштаб изменения магнитного поля,

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2\Omega_{ci0}(1 + z^2/L^2)}, \quad \theta = -\arctan(v_y/v_x) \quad (11)$$

есть поперечный адиабатический инвариант и сопряженная с ним фаза, Φ и P есть поток магнитного поля и сопряженный импульс. В качестве интегралов движения удобно выбрать полную и “поперечную” энергии

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2}, \quad \mathcal{E}_{\perp} = \Omega_{ci0}\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2(1 + z^2/L^2)}. \quad (12)$$

В качестве равновесной функции распределения можно выбрать любую функцию от интегралов движения \mathcal{E} и \mathcal{E}_{\perp} . Для горячих ионов предполагаем би-максвелловское распределение

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\perp}) = n_{h0} \sqrt{\frac{m^3 \mathcal{A}}{8\pi^3 T_{\perp}^3}} e^{-(\mathcal{A}\mathcal{E} - (\mathcal{A}-1)\mathcal{E}_{\perp})/T_{\perp}}, \quad (13)$$

где n_{h0} – плотность в центре ловушки, $\mathcal{A} = T_{\perp}/T_{\parallel}$ – анизотропия. Интегрирование функции распределения по скорости дает продольную зависимость

плотности горячих ионов

$$n_h(z) = n_{h0} \frac{1 + z^2/L^2}{1 + \mathcal{A}z^2/L^2} = n_{h0} \frac{1 + z^2/L^2}{1 + z^2/l^2}, \quad (14)$$

где $l = L/\sqrt{\mathcal{A}}$ есть характерный размер изменения плотности плазмы (см. рисунок 2).

Плотность электронов и холодных ионов описывается бoльцмановским распределением, $n_e = n_{e0} e^{e(\varphi(z) - \varphi(0))/T_e}$, $n_c = n_{c0} e^{-e(\varphi(z) - \varphi(0))/T_c}$. Полагая температуры электронов и холодных ионов равными и используя условие квазинейтральности $n_e(z) = n_c(z) + n_h(z)$, найдем распределения плотностей

$$n_c(z) = \frac{1}{2} \sqrt{n_h^2 + 4n_{c0}n_{e0} - \frac{n_h}{2}}, \quad n_e(z) = \frac{1}{2} \sqrt{n_h^2 + 4n_{c0}n_{e0} + \frac{n_h}{2}}. \quad (15)$$

Считаем $T_e = T_c \ll T_{\parallel}$, при этом амбиполярный потенциал не влияет на движение горячих ионов.

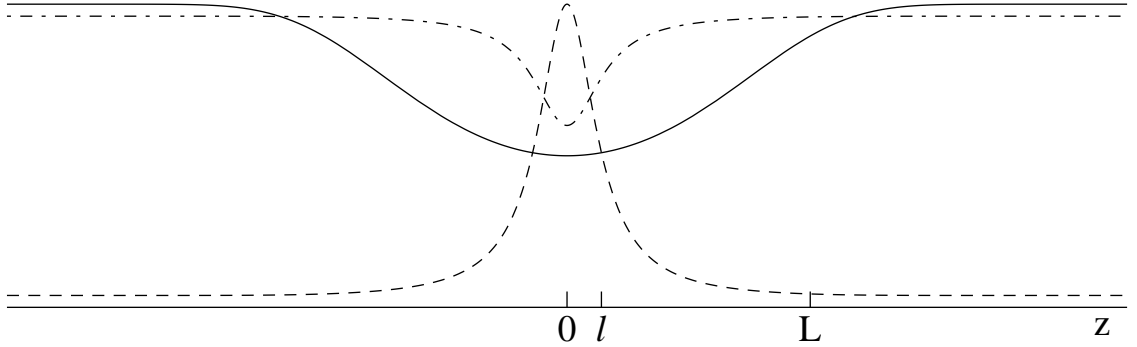


Рис. 2: Пример зависимости величины магнитного поля на оси (сплошная линия), плотности горячей (пунктир) и холодной (штрихпунктир) плазмы от продольной координаты.

Параметры: $\mathcal{A} = 50$. $n_{c0} = 0.6n_{h0}$, пробочное отношение $R_m = 2$.

Перейдем к Фурье-компонентам по продольной координате возмущений полей, $E_\alpha(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp) (2\pi)^{-1/2} \int dk_{\parallel} \exp(ik_{\parallel}z) E_\alpha(k_{\parallel})$, $D_\alpha(k_{\parallel}) = (2\pi)^{-1/2} \int dz \exp(-ik_{\parallel}z) D_\alpha(z)$, где $1/k_\perp$ порядка поперечного размера неоднородности (поскольку энергия колебаний сосредоточена в области порядка

продольного размера неоднородности горячей плазмы, пренебрегается отличием потоковых координат от декартовых). Пренебрегая поперечной неоднородностью магнитного поля ловушки и параметров плазмы, и считая что радиус плазмы значительно превышает ларморовский радиус ионов, $k_{\perp}\rho_{\perp} \ll 1$, можно записать связь индукции и электрического поля в виде

$$D_{\alpha}(k_{\parallel}) = E_{\alpha}(k_{\parallel}) + \int_{-\infty}^{\infty} dk' G_{\alpha\beta}(\omega, k_{\parallel}, k'_{\parallel}) E_{\beta}(k'_{\parallel}). \quad (16)$$

Удобно перейти от декартовых компонент полей к циркулярным, $E_{\pm} = E_x \pm iE_y$, $D_{\pm} = D_x \pm iD_y$. При $Re(\omega) > 0$ компоненты E_{+} и E_{-} соответствуют волнам, вращающимся в сторону ионного и электронного ларморовского вращения. В новом базисе тензор диэлектрической проницаемости становится диагональным:

$$\begin{aligned} D_{\pm}(k) &= E_{\pm}(k) + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\pm}(\omega, k, k') E_{\pm}(k') dk', \\ D_z(k) &= E_z(k) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z(\omega, k, k') E_z(k') dk'. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее предполагается, что плазма сильно анизотропна $\mathcal{A} \gg L/\rho_{\perp}$, частота волны слабо отличается от циклотронной ионной в центре ловушки $\omega/\Omega_{ci0} - 1 \sim 1/\mathcal{A}$ и $\omega \ll c/l$. Подставляя в выражение (9) функцию распределения ионов (13) и переходя к переменным гамильтониана (10), найдем выражение для циркулярных компонент оператора диэлектрической проницаемости (см. Приложение 1) в форме

$$G_{\pm}(\omega, \check{k}, \check{k}') = \frac{\omega_{pi0}^2}{\omega^2} \frac{L}{\sqrt{\mathcal{A}}} g_{\pm}(\omega, \check{k}, \check{k}'), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}
g_{\pm}(\omega, \check{k}, \check{k}') &= \frac{\mathcal{A}}{4}(1 + |\Delta\check{k}|)e^{-|\Delta\check{k}|} - \left(1 - \frac{1}{\mathcal{A}} \pm \frac{\omega}{\Omega_{ci0}}\right) \frac{e^{-|\Delta\check{k}|}}{2} - \frac{\delta(\Delta\check{k})}{\mathcal{A}} + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi l} e^{i\Delta\check{k}u/l} \frac{n_c(u)}{n_{h0}} \frac{\omega^2/\Omega_{ci}^2(u)}{1 \mp \omega/\Omega_{ci}(u)} \mp \frac{\mathcal{A}^{3/2}}{\check{\rho}} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{A}} \mp \frac{\omega}{\Omega_{ci0}}\right) \times \\
&\times \int_0^{\infty} \frac{udu}{(1+u^2)^2 X_1} \left(-\frac{3}{4} J_0(\check{k}u) J_0(\check{k}'u) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}_n(x_r, \check{k}u) \mathcal{J}_n(x_r, \check{k}'u) h(X_n) \right). \quad (19)
\end{aligned}$$

Здесь $\Delta\check{k} = \check{k} - \check{k}'$, ω_{pi0} – ионная плазменная частота в центре ловушки, $\check{k} = kl$ и $\check{\rho} = \rho_{\perp}/l$ – волновой вектор и поперечный ларморовский радиус, нормированные на продольный размер неоднородности горячей плазмы, $h(x) = -2\sqrt{\pi}x^5 e^{-x^2} (\operatorname{erfi}(x) - i) + 2x^4 + 2x^2$, $\operatorname{erfi}(x) = 2\pi^{-1/2} \int_0^x e^{y^2} dy$, $\mathcal{J}_n(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n+2m}(y)$, $J_n(x)$ – функция Бесселя, $X_n = \sqrt{\mathcal{A}} (\omega/\Omega_{ci0} \mp \{1 + u^2/(2\mathcal{A})\}) \sqrt{1 + u^2/(n\check{\rho})}$, $x_r = nu^2/(2\mathcal{A}(\omega/\Omega_{ci0} - 1) - 2u^2)$, $\Omega_{ci}(z)$ есть зависимость ионной циклотронной частоты на оси от продольной координаты. Первые два слагаемых описывают вклад нерезонансных ионов, третье – электронов, четвертое – холодных ионов, последнее – вклад резонансных ионов.

Подставляя диэлектрическую проницаемость в уравнение Максвелла $c^2(\partial_{\alpha}\partial_{\beta} - \delta_{\alpha\beta}\partial_{\gamma}^2)\delta E_{\beta} = \omega^2\hat{\epsilon}_{\alpha\beta}\delta E_{\beta}$, запишем уравнения для циркулярных компонент электрического поля в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{\pm}(\check{k}, \check{k}') E_{\pm}(\check{k}') d\check{k}' = \frac{\check{\rho}^2}{\beta_{\perp}} \left(\left(\check{k}^2 + \frac{\check{k}_{\perp}^2}{2} \right) E_{\pm}(\check{k}) - \frac{\check{k}_{\perp}^2}{2} E_{\mp}(\check{k}) \right). \quad (20)$$

1.4. Аналитическое решение в пределе бесконечно большой анизотропии

В пределе $\mathcal{A} \rightarrow \infty$, $L = \text{Const}$ продольный размер неоднородности плазмы $l = L/\sqrt{\mathcal{A}}$ становится малым по сравнению с радиусом плазмы. В этом случае можно пренебречь поперечной неоднородностью, $\check{k}_\perp = k_\perp l \rightarrow 0$, и уравнения для разных поляризаций расцепляются. Рассмотрим уравнение для компоненты E_+ , соответствующей вращению в одну сторону с ионами. Заметим, что мнимая часть функции g_+ обращается в ноль при $\omega = \Omega_{ci0}(1 - 1/\mathcal{A})$. В первом пункте отмечалось, что для данной частоты возмущения обмен энергией между волной и резонансными частицами отсутствует при произвольном пробочном отношении. Таким образом, данная частота соответствует порогу неустойчивости при $\mathcal{A} \rightarrow \infty$. Решив уравнения (20) при $\omega = \Omega_{ci0}(1 - 1/\mathcal{A})$, можно найти β_\perp на границе устойчивости.

В пределе $\mathcal{A} \rightarrow \infty$, $\omega = \Omega_{ci0}(1 - 1/\mathcal{A})$, $k_\perp = 0$ и $n_c = 0$ уравнение (20) для компоненты E_+ принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \left((1 - 2/\mathcal{A})^2 + |\Delta\check{k}| \right) e^{-|\Delta\check{k}|} - \frac{\delta(\Delta\check{k})}{\mathcal{A}^2} \right) E_+(\check{k}') d\check{k}' = \frac{\check{\rho}_\perp^2}{\beta_\perp \mathcal{A}} \check{k}^2 E_+(\check{k}). \quad (21)$$

С помощью обратного преобразования Фурье можно перейти к уравнению в координатном представлении

$$\frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} + \frac{\beta_\perp \mathcal{A} (1 - 1/\mathcal{A})^2 - 2z^2/L^2 - z^4/L^2}{\rho_\perp^2 (1 + z^2/l^2)^2} E_+(z) = 0. \quad (22)$$

Рассматриваем уравнение в области порядка размера неоднородности плазмы, $z \sim l$. При $\mathcal{A} \gg 1$ размер неоднородности магнитного поля значительно превышает размер неоднородности плазмы, тогда можно считать $z \ll L$, и уравнение (22) примет вид

$$\frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} + \Lambda_h^2 \frac{l^2}{(l^2 + z^2)^2} E_+ = 0, \quad (23)$$

где безразмерный параметр $\Lambda_h^2 \equiv \beta_\perp \mathcal{A} l^2 / \rho_\perp^2 = \beta_\perp L^2 / \rho_\perp^2 = \omega_{pi0}^2 L^2 / c^2$.

Удобно перейти к уравнению для магнитного поля. Из уравнения Максвелла $c \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ следует $\partial_z E_+ = \omega B_+ / c$. Таким образом, возмущение магнитного поля удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} (l^2 + z^2)^2 \frac{\partial B_+}{\partial z} + l^2 \Lambda_h^2 B_+ = 0, \quad (24)$$

граничным условием является обращение поля в ноль на бесконечности.

Уравнение (24) имеет спадающие на бесконечности аналитические решение $B_+[z] = (z \cos[(n+1) \arctan[z/l]] - (n+1)l \sin[(n+1) \arctan[z/l]]) / \sqrt{l^2 + z^2}$ для четных n и $B_+[z] = (l(n+1) \cos[(n+1) \arctan[z/l]] + z \sin[(n+1) \arctan[z/l]]) / \sqrt{l^2 + z^2}$ для нечетных, собственные значения равны $\Lambda_h^2 = n^2 + 2n$. Наименьшему β_\perp отвечает мода с $n = 1$. Таким образом, критерий устойчивости в пределе большой анизотропии зависит только от плазменной частоты в центре ловушки и характерного размера неоднородности магнитного поля,

$$\omega_{pi0}^2 L^2 / c^2 < 3, \quad (25)$$

что соответствует оценке (4). Критерий (25) позволяет оценить снизу критическое β_\perp для плазмы с конечной анизотропией.

Уравнение (23) совпадает с уравнением для волны с круговой поляризацией и частотой $\omega = \Omega_{ci}(1 - 1/\mathcal{A})$ в сильно анизотропной холодной ($T_\perp \rightarrow 0$) би-максвелловской плазме с плотностью (14), помещенной в параксиальное магнитном поле с напряженностью на оси $B = B_0(1 + z^2/L^2)$. Плотность энергии волны в такой системе есть сумма энергии электромагнитного поля и кинетической энергии частиц плазмы,

$$W(z) = \frac{\delta \vec{E}^2 + \delta \vec{B}^2}{8\pi} + \frac{\omega_{pi}^2(z)}{(\Omega_{ci}(z) - \omega)^2} \frac{\delta \vec{E}^2}{8\pi}. \quad (26)$$

Используем (26) в качестве оценки энергии волны в анизотропной би-максвелловской плазме.

Из соотношения $B_+(z) = c\partial_z E_+/\omega$ следует $E_+^2 \sim \Omega_{ci}^2 l^2 B_+^2/c^2 = \Lambda_h^2 (\Omega_{ci}^2/\mathcal{A}\omega_{pi}^2) B_+^2 \ll B_+^2$. Таким образом, электромагнитная энергия возмущения сосредоточена в магнитном поле. При $\omega = \Omega_{ci}(1 - 1/\mathcal{A})$, пренебрегая вкладом электрического поля в энергию, получим

$$W(z) = \frac{1}{8\pi} \frac{c^2}{\Omega_{ci0}^2} \left(\left(\frac{\partial E_+}{\partial z} \right)^2 + \frac{l^4 \Lambda^2}{(l^2 + z^2)^3} E_+^2 \right). \quad (27)$$

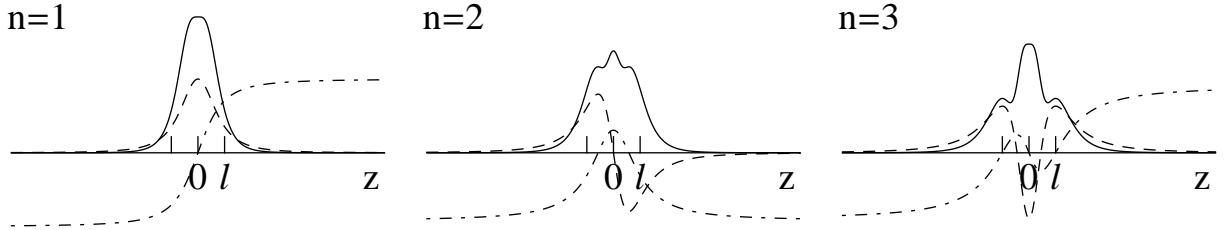


Рис. 3: Зависимость плотности энергии (сплошная кривая), магнитного поля (пунктир) и электрического поля возмущения (штрихпунктир) от продольной координаты.

На рисунке 3 показаны распределения плотности энергии, электрического и магнитного полей для возмущения, описываемого уравнением (23). Хотя электрическое поле не спадает на бесконечности, энергия волны локализована на размере неоднородности плазмы.

Аналитическое решение позволяет найти поправки к частоте возмущения и граничному β_\perp , связанные с добавкой малого количества холодных ионов. Ядро (19) при $\mathcal{A} \gg 1$, $\delta\omega = \omega/\Omega_{ci0} - (1 - 1/\mathcal{A}) \ll 1$ и $\delta n = n_{c0}/n_{h0} \ll 1$ можно представить в виде $g_\pm(\check{k}, \check{k}') = g_0(\check{k}, \check{k}') + \delta\omega g_\omega(\check{k}, \check{k}') + \delta n g_n(\check{k}, \check{k}')$, где $g_0(\check{k}, \check{k}') = \mathcal{A}(1 + |\check{k} - \check{k}'|) \exp(-|\check{k} - \check{k}'|)/4$. Наибольшее собственное значение уравнения $\int g_0(\check{k}, \check{k}') E_+(\check{k}') d\check{k}' = \lambda_0 \check{k}^2 E_+(\check{k})$ есть $\lambda_0 = \mathcal{A}/3$, ему соответствует решение $E_{+0} = 4 \operatorname{sign}(\check{k}) K(|\check{k}|) / \sqrt{3\pi}$ (численный коэффициент выбран из условия нормировки $\int \check{k}^2 E_{+0}^2 d\check{k} = 1$). Подставив в уравнение (20) с $k_\perp = 0$

решение в виде $E_+ = E_{+0} + \delta E_+$, $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$, линеаризовав, умножив на $E_{+0}(\check{k})$ и проинтегрировав по \check{k} , получим $\delta\omega \int g_\omega(\check{k}, \check{k}') E_{+0}(\check{k}) E_{+0}(\check{k}') d\check{k} d\check{k}' + \delta n \int g_n(\check{k}, \check{k}') E_{+0}(\check{k}) E_{+0}(\check{k}') d\check{k} d\check{k}' = \delta\lambda \int \check{k}^2 E_{+0}^2 d\check{k}$ (при интегрировании учтено $\int g_0(\check{k}, \check{k}') \delta E_+(\check{k}') E_{+0}(\check{k}) d\check{k} d\check{k}' = \lambda_0 \int \check{k}'^2 \delta E_0(\check{k}') E_{+0}(\check{k}') d\check{k}'$).

Отметим, что E_{+0} , g_0 , g_n , $\delta\lambda$ и δn вещественны. Поскольку исследуются параметры плазмы на границе устойчивости, $\delta\omega$ также вещественна. Мнимая часть в соотношении может появиться только за счет g_ω (из-за мнимой части функции $h(X/n)$). Приравнявая мнимую часть соотношения к нулю, находим, что в первом порядке частота возмущения не изменяется, $\delta\omega = 0$. Таким образом, поправка к собственному значению равна $\delta\lambda = \delta n \int g_n(\tilde{k}, \tilde{k}') E_{+0}(\tilde{k}) E_{+0}(\tilde{k}') d\tilde{k} d\tilde{k}' / \int \check{k}^2 E_{+0}^2 \check{k}$,

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du d\tilde{k} d\tilde{k}' \cos((\tilde{k} - \tilde{k}')u) n_c(u)}{2\pi} \frac{n_c(u)}{n_h(0)} \frac{(\omega/\Omega_{ci})^2}{1 - \omega/\Omega_{ci}} E_{0+}(\tilde{k}) E_{0+}(\tilde{k}') = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{n_c(u)}{n_h(0)} \frac{(\omega/\Omega_{ci})^2}{1 - \omega/\Omega_{ci}} E_{0+}(u)^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $E_{+0}(u) = \int \sin(\check{k}u) E_{+0} d\check{k} = (4u/\sqrt{3})/\sqrt{1+u^2}$, продольная зависимость плотности холодных ионов в пределе $n_{c0} \ll n_{h0}$ равна $n_c(z) \approx n_{c0} n_{e0}/n_h(z) = n_{c0}(1+z^2/l^2)/(1+z^2/L^2)$. Окончательно, $\delta\lambda = (4\mathcal{A}^{3/2}/3)n_{c0}/n_{h0}$,

$$\frac{\delta\beta_\perp}{\beta_\perp} = -\frac{\delta\lambda}{\lambda_0} = -4\sqrt{\mathcal{A}} \frac{n_{c0}}{n_{h0}}. \quad (29)$$

Малая добавка холодной плазмы дестабилизирует АИЦ неустойчивость, поскольку уменьшает длину волны возмущения и облегчает выполнение условия (25). Большая величина $\sqrt{\mathcal{A}}$ перед n_{c0} связана со структурой электрического поля при $n_{c0} = 0$. Поскольку оно не убывает при $z \rightarrow \pm\infty$, волна испытывает влияние малой добавки холодных ионов на большой длине

$$-\sqrt{\mathcal{A}} \gtrsim z/l \gtrsim \sqrt{\mathcal{A}}.$$

1.5. Численные результаты

Алгоритм численного решения уравнений (20), применявшийся в данной работе, описан в Приложении 2. Ограниченность плазмы приводит к появлению дискретного набора собственных мод. Численное решение позволяет найти при заданных анизотропии, ларморовском радиусе и k_{\perp} для каждой моды распределение возмущений полей, частоту возмущения и соответствующее β_{\perp} . Граница устойчивости определяется модой с наименьшим β_{\perp} .

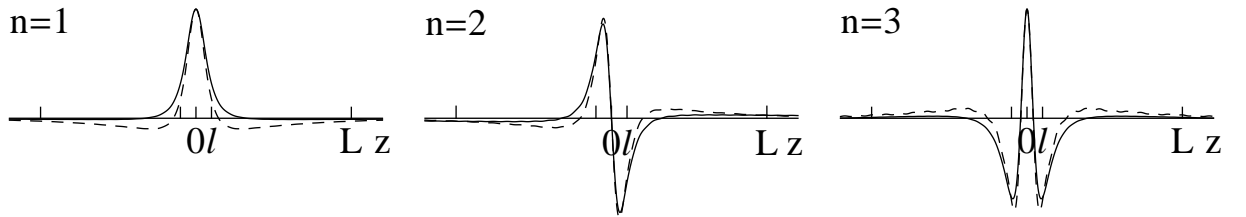


Рис. 4: Пример зависимости магнитного поля на оси для первых трех мод. Сплошная кривая – $k_{\perp} = 0$, пунктирная кривая – $k_{\perp} l = 0.2$. Параметры: $\mathcal{A} = 100$, $l = 3\rho_{\perp}$, пробочное отношение ловушки $R_m = 2$.

На рисунке 4 показаны примеры распределения компоненты $B_{+}(z)$ возмущения магнитного поля (компонента B_{-} не находится в резонансе с ионами и мала) для первых трех мод с наименьшими значениями β_{\perp} (пороговое значение β_{\perp} возрастает с номером моды) при $n_{c0} = 0$. Видно, что магнитное поле возмущений локализовано в области порядка продольного размера неоднородности плазмы. Качественно зависимость магнитного поля от координаты оказывается такой же, как у аналитического решения при $\mathcal{A} \rightarrow \infty$. Граница устойчивости определяется первой модой.

На рисунке 5 показаны примеры распределения компоненты $B_{+}(z)$

при различных значениях безразмерной плотности холодной плазмы $\Lambda_c^2 = \omega_{pic}^2(\infty)L^2/c^2$, пропорционального плотности холодной плазмы на расстояниях $z \gg l$. При добавлении холодной плазмы появляются уходящие волны, уносящие энергию из системы. Кроме того, из-за повышения плотности плазмы уменьшается длина волны возмущения, что приводит к перестройке структуры неустойчивых мод.

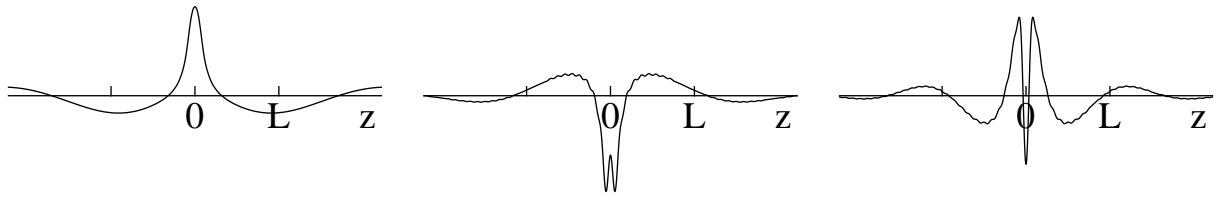


Рис. 5: Пример зависимости компоненты B_+ от продольной координаты на оси. Безразмерная плотность холодной плазмы: $\Lambda_c^2 = 1.64$ (слева), $\Lambda_c^2 = 2.87$ (в центре), $\Lambda_c^2 = 5.87$ (справа). Параметры: $\mathcal{A} = 25$, $L = 18\rho_\perp$, $r_p = 7.4\rho_\perp$.

Добавление холодной плазмы неоднозначно влияет на границу устойчивости. С одной стороны, усиливается унос энергии уходящими волнами, с другой, уменьшение длины волны возмущения ослабляет стабилизирующий эффект продольной неоднородности. Конкуренция этих факторов приводит к немонотонности зависимости граничного β_\perp от Λ_c (рисунок 6). Когда плотность холодной плазмы значительно превышает плотность горячей, начинает выполняться условие применимости ВКБ-приближения $\lambda \ll l$. Результаты ВКБ-расчетов, аналогичных описанным во втором разделе, также приведены на рисунке 6. Видно, что при $\Lambda_c \gg 1$ результаты ВКБ-метода согласуются с решением интегрального уравнения.

Примерные параметры эксперимента в компактном пробкотроне ГДЛ, соответствующие появлению АИЦ неустойчивости, показаны на рисунке 6 кружком.

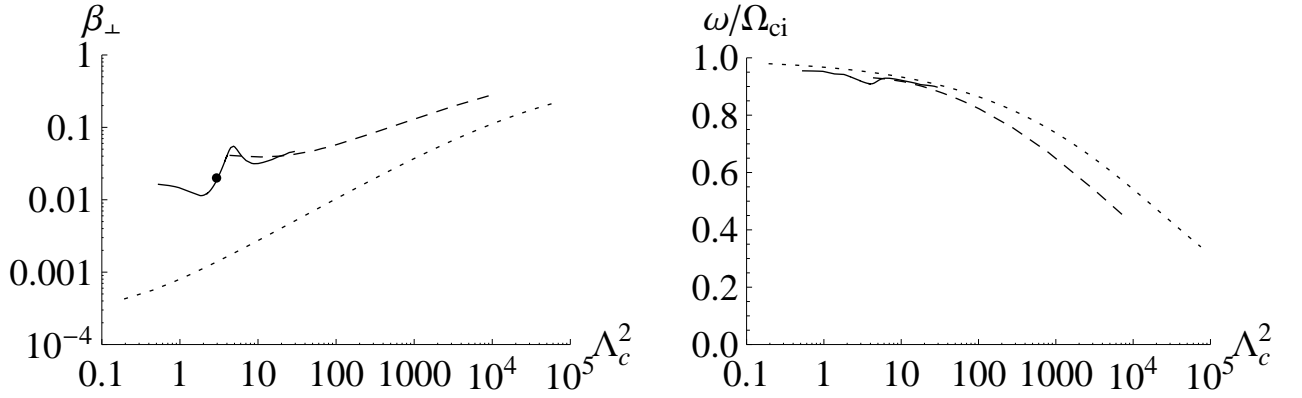


Рис. 6: Зависимость β_{\perp} и частоты на границе устойчивости от плотности холодных ионов. Сплошная кривая – решение интегрального уравнения, пунктир – результаты ВКБ-расчетов, точки – граница абсолютной неустойчивости. Параметры кривых: $\mathcal{A} = 25$,

$$L = 18\rho_{\perp}, r_p = 7.4\rho_{\perp}, \text{ точка: } n_c(\infty) = 10^{13} \text{ cm}^{-3}, \beta_{\perp} = 0.02.$$

На рисунке 7 в логарифмическом масштабе показана зависимость граничного β_{\perp} от анизотропии для би-максвелловской плазмы с радиусом $r_p = 7.4\rho_{\perp}$ в неоднородном магнитном поле с $L = 18\rho_{\perp}$ (параметры приближенно соответствуют компактному пробкотрону ГДЛ). Штрих-пунктирная прямая соответствует асимптотике при $\mathcal{A} \rightarrow \infty$ границы абсолютности неустойчивости для бесконечной однородной плазмы $\beta_{\perp} \mathcal{A}^2 = 3.51 \dots$ [19]. Горизонтальная пунктирная прямая соответствует асимптотике границы устойчивости неоднородной плазмы в пределе $\mathcal{A} \rightarrow \infty$ (см. выражение (25)) при $L = 18\rho_{\perp}$. Сплошные кривые слева – граница устойчивости, посчитанная с применением ВКБ-методов. Тонкие кривые справа соответствуют порогу устойчивости, полученному численным решением интегрального уравнения (20). Область параметров, при которых в компактном пробкотроне ГДЛ наблюдалась АИЦ неустойчивость [37], выделена эллипсом (отличие отношения размеров неоднородности магнитного поля и плазмы $L^2/l^2 = \mathcal{A} \approx 50$ и отношения средней поперечной и продольной энергий $W_{\perp}/(2W_{\parallel}) = \mathcal{A} \approx 25$ не позволяет точно определить анизотропию плазмы в пробкотроне). Отме-

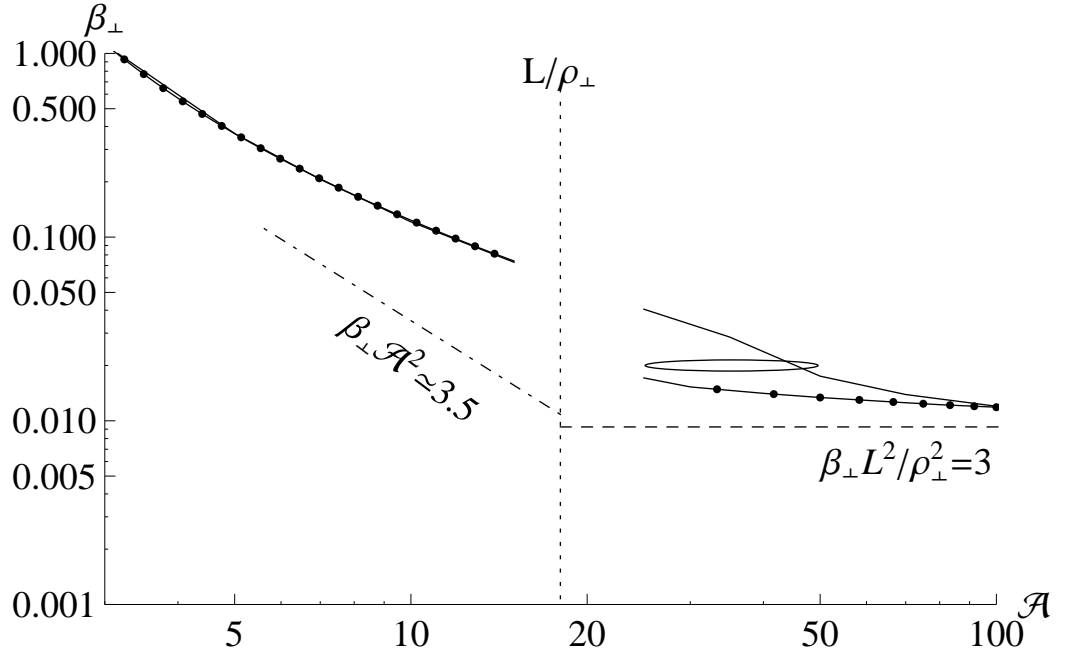


Рис. 7: Граница альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости в бимаксвелловской плазме. Пунктир – асимптотика границы неустойчивости в неоднородной плазме при $\mathcal{A} \rightarrow \infty$, штрихпунктир – асимптотика границы абсолютной неустойчивости при $\mathcal{A} \rightarrow \infty$ [19]. Тонкие кривые справа – граница устойчивости, рассчитанная с помощью интегрального уравнения для $r_p = 7.4\rho_{\perp}$, $L = 18\rho_{\perp}$. Тонкие кривые слева – граница неустойчивости, посчитанная в ВКБ-приближении. Кривые, отмеченные кружками, посчитаны при $\Lambda_c = 0$, немаркированные – при $\Lambda_c = 4$. Эллипс ограничивает область параметров компактного пробкотрона ГДЛ, при которых наблюдалась АИЦ неустойчивость.

тим, что параметры компактного пробкотрона ГДЛ находятся на границе применимости данной теории, поскольку параметр $\mathcal{A}\rho_{\perp}/L$ лежит в пределах 1.4 – 2.8. Тем не менее, результаты численных расчетов согласуются с экспериментальными данными. Кроме того, критерий (23) предсказывает уменьшение пороговой плотности при уменьшении массы ионов плазмы, что наблюдалось в эксперименте при замене водородной плазмы на дейтериевую.

Глава 2

Альфвеновская ионно-циклотронная неустойчивость в ловушке с наклонной инжекцией быстрых атомов

2.1. Оценки параметров волны

В данной главе рассматривается АИЦ неустойчивость в ловушке с наклонной инжекцией быстрых атомов в теплую мишенную плазму [39, 41]. Предполагается, что область генерации неустойчивости находится в центре ловушки в минимуме магнитного поля, где угловая анизотропия функции распределения максимальна и минимальны эффекты, связанные с продольной неоднородностью магнитного поля. Также, отношение давления плазмы к давлению магнитного поля β_{\perp} считается конечным, а движение ионов адиабатичным, $L \gg \rho_{\perp}$.

Характерный пример функции распределения ионов, формирующейся при наклонной инжекции, показан на рисунке 8. Торможение инжектированных ионов на электронах приводит к формированию “хвоста”, который при низких энергиях уширяется из-за ион-ионных столкновений. Развитие АИЦ неустойчивости, как и в случае би-максвелловской плазмы, связано с инверсной заселенностью траекторий резонансных ионов. Примеры траекторий ионов и двух резонансных линий соответствующих двум различным значениям скорости резонансных ионов $(\omega - \Omega_{ci})/k_{\parallel}$ показаны на рисунке 8 вертикальными линиями и жирными черточками. При этом, из четырех показанных траекторий три дестабилизирующих и только верхняя правая стабилизирующая. Интегральный вклад в антиэрмитову часть диэлектриче-

ской проницаемости (1) оказывается стабилизирующим для всех резонансных линий подобных правой вертикальной линии на рисунке 8, поскольку из-за множителя v_{\perp}^2 вклад стабилизирующих траекторий превышает вклад дестабилизирующих. Только для резонансных линий расположенных левее точки инъекции суммарный вклад резонансных частиц оказывается дестабилизирующим (левая резонансная линия на рисунке 8). В этой области $\partial_{v_{\parallel}} f > 0$ для любой поперечной скорости, и поэтому интеграл от первого члена в скобках выражения (1) может превышать всегда отрицательный вклад второго слагаемого. Таким образом, существует простое приближенное соотношение между параметрами волны и инъекции $\omega - \Omega_{ci} \approx k_{\parallel} v_{\parallel inj}$, где $v_{\parallel inj}$ есть продольная скорость инжектируемых частиц. Отметим, что уменьшение питч-угла инъекции уменьшает дестабилизирующий вклад первого слагаемого в (1) (поскольку уменьшает поперечные скорости, при которых функция распределения заметно отлична от нуля) и, таким образом, способствует подавлению АИЦ неустойчивости.

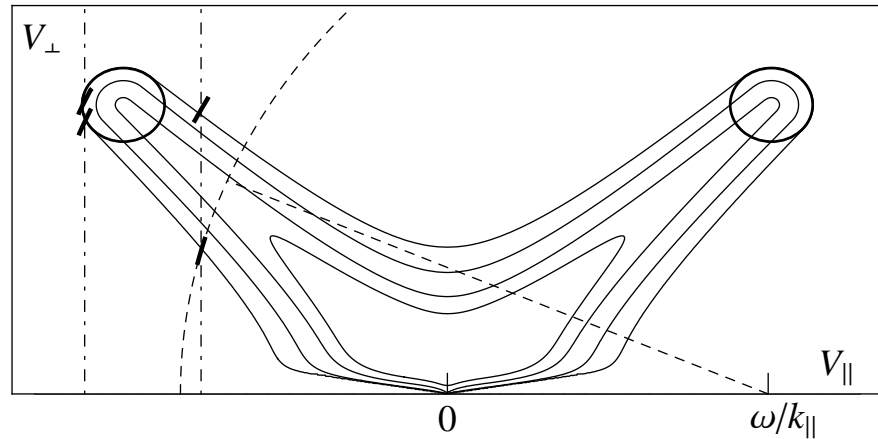


Рис. 8: Пример изолиний функции распределения (сплошные линии) и возмущенных траекторий ионов (жирные черточки). Вертикальные штрих-пунктирные линии соответствуют различным значениям резонансной скорости $(\omega - \Omega_{ci})/k_{\parallel}$, пунктирная кривая – $v_{\perp}^2 + (v_{\parallel} - \omega/k_{\parallel})^2 = const$. Области инъекции условно обозначены кружками.

Нерезонансные частицы дают основной вклад в эрмитову часть диэлек-

трической проницаемости, который можно грубо оценить как вклад холодной плазмы, что приводит к соотношениям $\omega \sim k_{\parallel} v_A$ и $\Omega_{ci}/\omega - 1 \sim \cot \theta \sqrt{\beta_{\perp}}$, где β_{\perp} есть отношение поперечного давления плазмы к давлению магнитного поля, θ – питч-угол инжектируемых частиц и v_A – альфвеновская скорость. Отметим, что при $\Omega_{ci} - \omega \sim \Omega_{ci}$ выполняется условие $|\omega - \Omega_{ci}| \sim \Omega_{ci} \sim \Omega_b L / \rho_{\perp} \gg \Omega_b$, где Ω_b есть баунс-частота ионов. Выполнение этого условия позволяет использовать локальное дисперсионное соотношение и ВКБ-приближение для поиска границы устойчивости. Кроме того, в данной задаче длина волны неустойчивого возмущения $\lambda \sim \rho_{\perp} / \beta_{\perp}$ оказывается малой по сравнению с размером неоднородности L .

Возможность интегральной инверсной заселенности траекторий резонансных ионов – необходимое, но недостаточное условие развития неустойчивости. В случае неоднородной плазмы область генерации волны должна быть больше или порядка длины волны возмущения, а отдаваемая резонансными частицами энергия должна превосходить энергию, уносимую уходящими волнами. Количественному анализу необходимых и достаточных условий возбуждения неустойчивости в рамках ВКБ приближения посвящены следующие разделы.

2.2. Аппроксимация функции распределения и дисперсионного соотношения

В качестве невозмущенной функции распределения быстрых ионов используется стационарное решение приближенного уравнения Фоккера-Планка

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{1}{\tau_d v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 + v_c^3) f_i + \frac{\sin^2(2\theta_0)}{\tau_{\theta}} \frac{\partial^2 f_i}{\partial Y^2} - \frac{f_i}{\tau_{ex}} + S, \quad (30)$$

где $Y = \sin^2 \theta / R$, θ – питч-угол, R – текущее пробочное отношение вдоль баунс траектории, $\tau_d = 3m_i T_e^{3/2} / (4\sqrt{2\pi m_e} \Lambda e^4 n_e)$ – время торможения ионов на электронах, τ_{ex} – время потерь ионов за счет перезарядки на атомарных пучках, $\tau_\theta = m_i^2 v^3 / (2\pi \Lambda e^4 n_e)$ – время углового рассеяния на ионах, $v_c = (9\pi m_e^2 n_c^2 / 16 m_i^2 n_e^2)^{1/6} \sqrt{2T_e / m_e}$ – скорость, при которой время торможения на холодных ионах сравнивается с торможением на электронах, n_e и n_c – плотности электронов и холодных ионов в центре ловушки, S – источник, определяемый инжекцией. Переменные в (30) связаны с интегралами движения ионов: $E_i = m_i v^2 / 2$ и $\mu_i = Y E_i / B_0$. Поэтому решение уравнения (30), выраженное через интегралы движения, дает функцию распределения в любой точке баунс траектории. В отличие от точного уравнения, в уравнении (30) пренебрегается диффузией по энергии и членом с первой производной по углу. Кроме того, вместо коэффициентов торможения и угловой диффузии, усредненных по баунс траектории, используются коэффициенты, не зависящие от Y . Это позволяет найти несложное решение с граничным условием на границе конуса потерь:

$$f_i = F(v^2 / v_{inj}^2, Y),$$

$$F(X, Y) = H(Y - 1/R_m) \left(X^{3/2} + X_c^{3/2} \right)^{\tau_d / 3\tau_{ex} - 1} w(X)^{-1} \times$$

$$\times \left(e^{-(Y - \sin^2 \theta_0)^2 / w^2(X)} - e^{-(2/R_m - Y - \sin^2 \theta_0)^2 / w^2(X)} \right), \quad (31)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, R_m – пробочное отношение ловушки, v_{inj} – скорость, определяемая энергией инжекции, θ_0 и $\delta\theta$ – питч-угол и полуширина углового разброса инжекции, и

$$w(X) = \sin(2\theta_0) \sqrt{\frac{2n_e}{3n_c} \ln \left(\frac{1 + X_c^{3/2} / X^{3/2}}{1 + X_c^{3/2}} \right) + \delta\theta^2} \quad (32)$$

есть эффективная угловая ширина распределения. Решение уравнения (30) с граничными условиями $f_i = 0$ при $v \rightarrow \infty$, $Y = 1/R_m$ и $\partial_Y f_i = 0$ при $Y = 1$ представимо в виде сходящегося ряда, аналогично [26]. (Последнее граничное условие означает отсутствие диффузионных потоков в рамках уравнения (30) через границу с нефизической областью $Y > 1$.) Члены ряда представляют собой функцию G и ее многократные отражения от границ $Y = 1/R_m$ и $Y = 1$, взятые с чередующимися знаками. (Функция $G(v^2/v_{inj}^2, Y)$ удовлетворяет уравнению (30) с источником $\sim \delta(v - v_{inj}) \exp(-(Y - Y_0)^2/(\delta\theta \sin 2\theta_0)^2)$.) Решение (31) представляет собой сумму двух первых членов этого ряда. Оно обращается в нуль на границе конуса потерь и является четной функцией продольной скорости. Отличие (31) от полной суммы ряда экспоненциально мало ($\sim \exp(-\delta\theta^{-2})$) при значениях энергии, сравнимых с энергией инжекции, а при малых значениях энергии является величиной порядка погрешности, возникающей из-за того, что коэффициенты в уравнении считаются не зависящими от Y . Учет большего числа членов ряда приводит к изменению границы устойчивости порядка изменения, вызванного дополнительной добавкой холодных ионов с плотностью меньше 5% от плотности горячих ионов.

Далее, чтобы выразить диэлектрическую проницаемость через аналитические функции комплексных переменных ω , k_{\parallel} , k_{\perp} , z и r , распределение (31) аппроксимируется суммой $\sum_t \eta_t(\tilde{r}) f_{p,q}(\tilde{v}_{\parallel}/w_{\parallel}, \tilde{v}_{\perp}/w_{\perp})/(w_{\parallel}w_{\perp}^2)$ где $\tilde{v}_{\parallel}^2 = v^2 - v_{\perp}^2$, $\tilde{v}_{\perp}^2 = v_{\perp}^2/R$, $f_{p,q}(x, y) = e^{-x^2-y^2} x^{2p}y^{2q}/(\pi\Gamma(q+1)\Gamma(p+1/2))$, \tilde{r} – радиус силовой линии в центральном сечении (то есть $\partial\tilde{r}^2/\partial r^2 = R(z, r)$), p_t и q_t – неотрицательные целые числа, $\sum_t \eta_t(\tilde{r} = 0) = 1$. Функции $f_{p,q}$ отличны от нуля только в окрестности $x = \sqrt{p}$, $y = \sqrt{q}$, и данная аппроксимация пригодна для любой достаточно гладкой неотрицательной функции. Ширины w_{\parallel} и w_{\perp} определяются максимальными значениями логарифмической про-

изводной аппроксимируемой функции $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$, $w\partial_v f < f$. В работе использовалась аппроксимация набором функций с одинаковыми ширинами (только для холодных ионов принимается максвелловское распределение со своей температурой), что позволяет существенно ускорить вычисление компонент диэлектрической проницаемости. В случае равных ширин лучшую аппроксимацию обеспечивают коэффициенты перед функциями $f_{p,q}(v_{\parallel}/w_{\parallel}, v_{\perp}/w_{\perp})$, равные $\eta(\tilde{r} = 0) = f(w_{\parallel}\sqrt{p}, w_{\perp}\sqrt{q})\pi w_{\parallel}w_{\perp}^2\Gamma(p + 1/2)/\Gamma(p + 1)$.

Для численных расчетов используются продольное распределение вакуумного магнитного поля $B_v(z) = B_{v0}(1 + z^2/L^2)$, где L – длина удвоения вакуумного поля, и радиальное распределение плотности плазмы $n(\tilde{r}) = n_0 \exp(-\tilde{r}^2/R_p^2)$, где R_p – эффективный радиус плазмы. В параксиальном приближении пренебрегается поперечной неоднородностью вакуумного поля, но учитывается отличие реального магнитного поля от вакуумного, возникающее из-за конечного давления плазмы. Поэтому текущее пробочное отношение R зависит не только от z , но и от радиуса r .

Использование функций $f_{p,q}$ позволяет аналитически выполнить интегрирование по скоростям в выражениях для тензора диэлектрической проницаемости [11] с соблюдением правил обхода Ландау и аналитически продолжить результат на все комплексные области параметров ω , k_{\parallel} , k_{\perp} , r и z . Полагая магнитное поле равновесия направленным по оси z , определяем циркулярные компоненты возмущения электрического поля $E_{\pm} = E_x \pm iE_y$, и в приближении $\omega_{pe} \gg \Omega_{ci} \geq \omega$ находим уравнение для циркулярных Фурье-компонент:

$$\begin{pmatrix} D^{(ll)} & D^{(lr)} \\ D^{(rl)} & D^{(rr)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix} = 0, \quad (33)$$

$$D^{(\alpha)} = \left(s_{\alpha}^2 \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{2\omega^2} + s_{\alpha} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega \Omega_{ci}} + \sum_t \eta_t \varepsilon_t^{(\alpha)} \right) \Psi^{(\alpha)},$$

где $s_{rr} = -s_{ll} = 1$, $s_{lr} = s_{rl} = 0$, $\Psi_{lr} = \Psi_{rl}^{-1} = (k_x + ik_y)/(k_x - ik_y)$ и $\Psi_{ll} = \Psi_{rr} = 1$, а индекс α пробегает значения rr , rl , lr , ll . Ионный вклад в диэлектрическую проницаемость равен

$$\varepsilon_t^{(\alpha)} = s_\alpha^2 \frac{\omega_{pit}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pit0}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{q_t} \frac{w_{\perp t}^{2m} (R-1)^m C_m^{q_t} C_{p_t}^{p_t+m+1}}{w_{\parallel t}^{2m} R^{m+p_t} C_m^{q_t-1/2}} \times$$

$$\times \left(\frac{n\Omega_{ci}}{k_{\parallel} w_{\parallel t}} Z_{q_t-m}(u_n) \frac{2\partial_{k_{\perp}^2} k_{\perp}^2 I_{p_t+m,n}^{(\alpha)}}{p_t+m+1} - \frac{w_{\perp t}^2}{w_{\parallel t}^2} I_{p_t+m+1,n}^{(\alpha)} Z'_{q_t-m}(u_n) \right), \quad (34)$$

а зависимость плазменной частоты от координат определяется выражением

$$\omega_{pi}^2(R, \tilde{r}) = \sum_t \eta_t(\tilde{r}) \omega_{pit}^2(R),$$

$$\omega_{pit}^2(R) = \omega_{pit0}^2 \sum_{m=0}^{q_t} \frac{((R-1)w_{\perp t}^2/w_{\parallel t}^2)^m R}{(1+(R-1)w_{\perp t}^2/w_{\parallel t}^2)^{p_t+m+1}} \frac{C_m^{q_t} C_{p_t}^{p_t+m}}{C_m^{q_t-1/2}} \quad (35)$$

Здесь C_m^n – биномиальные коэффициенты, $u_n = (\omega - n\Omega_{ci})/(k_{\parallel} w_{\parallel})$, $Z_m(x) = \Gamma(m+1/2)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^{2m} dt/(x-t)$ есть дисперсионные функции плазмы [19]. Поперечные интегралы $I_{m,n}^{(ll)} = I_{m,-n}^{(rr)} = \Gamma(m+1)^{-1} \int_0^{\infty} e^{-\alpha y^2} y^{2m+1} J_{n-1}^2(y\tilde{k}_{\perp}) dy$ и $I_{m,n}^{(lr)} = I_{m,n}^{(rl)} = \Gamma(m+1)^{-1} \int_0^{\infty} e^{-\alpha y^2} y^{2m+1} J_{n-1}(y\tilde{k}_{\perp}) J_{n+1}(y\tilde{k}_{\perp}) dy$ (где $\alpha = 1/R + (1-1/R)w_{\perp}^2/w_{\parallel}^2$ и $\tilde{k}_{\perp} = k_{\perp} w_{\perp}/\Omega_{ci}$) выражаются через обобщенную гипергеометрическую функцию. Не уменьшая общности, полагаем $Re(\omega) > 0$. В этом случае E_+ есть амплитуда волны с полем, вращающемся в сторону ионного циклотронного вращения, а E_- – в сторону электронного вращения. Далее будем пользоваться приближением в котором пренебрегаем слагаемыми $\sim k_{\perp}^4 \rho_{\perp}^4$, где ρ_{\perp} – ларморовский радиус быстрых ионов. В этом приближении из диагональных элементов (33) только $D^{(ll)}$ содержит члены $\sim Z_m(u_1)$, соответствующие резонансам АИЦ неустойчивости $k_{\parallel} v_{\parallel} = \omega - \Omega_{ci}$. Поэтому для интересующего нас решения уравнение (33) сводится к системе $D^{(ll)} E_+ = 0$ и $E_- = -E_+ D^{(rl)}/D^{(rr)}$, которая используется ниже для построения решений в рамках ВКБ-приближения. (В случае отрицательной $Re(\omega)$)

в этой системе нужно поменять E_+ с E_- и индексы l с r .)

2.3. ВКБ-решения

Для применения ВКБ-приближения к трехмерной задаче используется аксиальная симметрия, малость поперечных размеров задачи по сравнению с продольными и приближение Перлстейна-Берка [14] для радиальных зависимостей. Малость радиуса плазмы по сравнению с длиной позволяет использовать адиабатический подход (аналогично п. 8.1 в [32]), когда поперечные распределения полей находятся при фиксированной продольной координате. Используем разложение $D^{(ll)} \approx D_0 + D_{,k_\perp k_\perp} k_\perp^2/2 + D_{,rr} r^2/2$, где $D_0 \equiv D^{(ll)}(\omega, k_\parallel, z, 0, 0)$ и $D_{,k_\perp k_\perp}$, $D_{,rr}$, – вторые производные при $r = 0$ и $k_\perp = 0$. Отметим, что в разложение внесут вклад только гармоники с $|n| \leq 2$. Фиксируя некие комплексные значения ω , k_\parallel и z , переходим к поперечному волновому уравнению $(D_{,k_\perp k_\perp} \nabla_\perp^2 - D_{,rr} r^2 - 2D_0)E_+ = 0$. Уравнение имеет не обращающееся в ноль на оси локализованное решение только при $D_0 = -D_\perp$, где $D_\perp \equiv \text{sign}(\text{Re}(k_0^2))k_0^2 D_{,k_\perp k_\perp}$ и $k_0^2 \equiv \sqrt{D_{,rr}/D_{,k_\perp k_\perp}}$. Решение является аксиально-симметричным. Тот же результат можно получить из квазиклассического рассмотрения, вычисляя при нулевом азимутальном моменте I_ϕ радиальный адиабатический инвариант $I_r \equiv \oint k_\perp dr/(2\pi) = -D_0/(2D_\perp)$, и приравнивая его к минимальному полуцелому положительному числу. Решения с другими значениями квантовых чисел (радиального и/или азимутального) в итоге соответствуют более устойчивым решениям.

Таким образом, получаем одномерную продольную задачу с дисперсионным соотношением $D_\parallel(\omega, k_\parallel, z) \equiv D_0 + D_\perp = 0$, сохраняющую поперечные адиабатические инварианты вдоль продольной координаты. Продолжая идеологию приближения Перлстейна-Берка, варьируя ω и k_\parallel для учета по-

перечной поправки, получаем $\omega \approx \omega_0 + \delta\omega$, где ω_0 – комплексное значение частоты, получаемое из решения задачи с дисперсионным соотношением $D_0 = 0$, и $\delta\omega = \langle D_\perp \rangle / \langle \partial_\omega D_0 \rangle$ – усредненная поправка Перлстейна-Берка. Скобки усреднения означают $\langle f \rangle = \oint f(\partial_{k_\parallel} D_0)^{-1} dz / \oint (\partial_{k_\parallel} D_0)^{-1} dz$ с интегрированием вдоль ВКБ-траектории продольной задачи с $D_0 = 0$.

Для решения продольной задачи (в соответствии с процедурой, описанной, например, в [2, 14]) производится численный поиск комплексных точек z (точек останова волны), удовлетворяющих системе уравнений $D_0(\omega, k_\parallel, z) = 0$, $\partial_{k_\parallel} D(\omega, k_\parallel, z) = 0$ при некотором комплексном значении ω , и строятся линии Стокса. С использованием асимптотик уходящих волн и постоянных Стокса, определяющих значения скачков субдоминантных решений, ВКБ-решение продолжается на всю комплексную плоскость. Наконец, для нахождения ω численно решается фазовое интегральное соотношение, следующее из требования однозначности ВКБ-решения.

При учете только двух точек останова волны z_1 и $-z_1$ (ловушка предполагается симметричной) фазовое интегральное соотношение принимает вид $e^{i\psi_1} + 1 = 0$, где $\psi_1 = \oint k_\parallel dz = \int_{-z_1}^{z_1} (k_A - k_r) dz$, $k_A(z)$ и $k_{res}(z)$ обозначают корни дисперсионного соотношения, которые мы условно назовем альфеновским и резонансным. (Кроме того, в силу симметрии функции распределения по продольной скорости, есть также пара корней $-k_A$ и $-k_{res}$, сливающихся в сопряженных точках $\pm z_1^*$.) На рисунке 9 приведен пример зависимости корней от z на действительной оси. Точка слияния корней в этом примере равна $z_1 = (0.21 - 0.16i)L$. Альфеновский корень приближенно соответствует обычной альфеновской волне в холодной плазме, $k_A^2 c^2 / \omega^2 \approx \omega_{pi}^2(z) / (\Omega_{ci}(z)(\Omega_{ci}(z) - \omega))$. Резонансная волна при любой продольной координате приближенно удовлетворяет условию циклотронного резонанса с инжектированными частицами $k_{res} \approx (\Omega_{ci}(z) - \omega) / V(z)$, где

$V(z) = \sqrt{V_{\parallel inj}^2 - (R(z) - 1)V_{\perp inj}^2}$ – продольная скорость инжектированной частицы в точке с текущим пробочным отношением $R(z)$. Резонансная волна обеспечивает положительную обратную связь, порождающую неустойчивость.

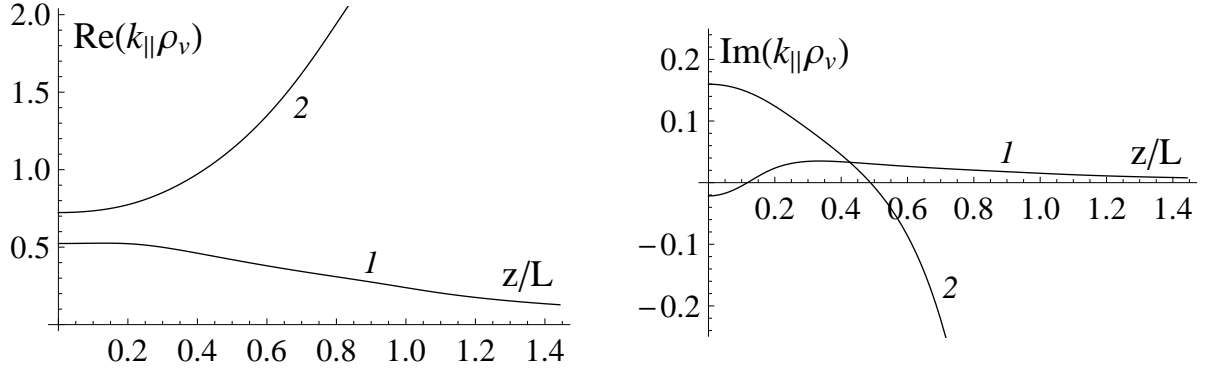


Рис. 9: Пример зависимости продольного волнового вектора от продольной координаты: 1 – альфвеновская волна, 2 – резонансная волна. Мнимая часть волнового вектора альфвеновской волны увеличена в десять раз. Здесь $\rho_v = v_{\perp inj}/\Omega_v$. Дисперсионное соотношение решалось при $\beta_v = 0.11$ и базовых значениях параметров, приведенных в разделе 2.4.

На рисунке 10 показан пример распределения возмущения магнитного поля на оси системы. Между линиями Стокса находится область генерации со стоячей волной, где основной вклад в амплитуду возмущения вносят резонансные волны. На больших расстояниях они экспоненциально затухают и поведение решения определяется уходящими альфвеновскими волнами.

Изменения плотности плазмы и магнитного поля в пробках и в окрестностях точек отражения быстрых ионов приводят к частичному отражению уходящей альфвеновской волны. С точки зрения ВКБ-метода, этот эффект связан с наличием дополнительных точек остановки волны $\pm z_2$ в комплексной плоскости z , где плотность плазмы и продольный волновой вектор обращаются в ноль. Учет дополнительного отражения модифицирует фазовое

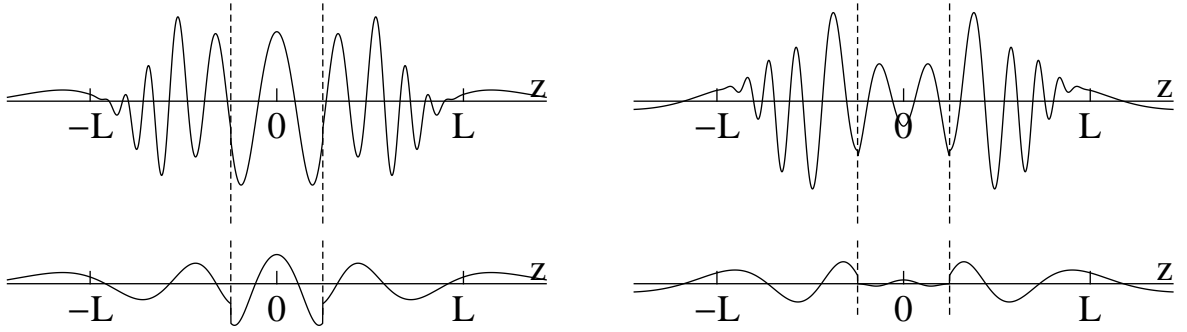


Рис. 10: Верхние графики – продольное распределение азимутальной (слева) и радиальной (справа) компонент возмущения магнитного поля вблизи оси. Нижние графики – вклад альфвеновской волны в возмущение поля. Вертикальный пунктир указывает пересечения линий Стокса с вещественной осью. Параметры те же, что и на рисунке 9.

интегральное условие: $(e^{i\psi_1} + 1)^2 + e^{i\psi_2} = 0$, где $\psi_2 = 2 \int_{-z_2}^{z_2} k_A dz$ и $\pm z_2$ – новые точки слияния корней. В интересующем нас случае $L \gg \rho_\perp$ второе слагаемое слабо влияет на частоту возмущения. Действительно, появление члена $r_{ref} = e^{i\psi_2}$, который по порядку величины есть коэффициент отражения от неоднородности, приводит к малому относительному изменению частоты $\Delta\omega/\omega \sim \sqrt{r_{ref}}\rho_\perp/L$ (для оценки фазового интеграла ψ_1 здесь использовано приближение Перлстейна-Берка [14]). При типичных параметрах изменение порогового β_\perp по порядку величины совпадает с $\Delta\omega/\omega$. Относительно слабо влияя на границу устойчивости, отражение от неоднородности может существенно менять продольную зависимость фазы волны вне области генерации, измеряемую в эксперименте.

2.4. Численные результаты

На рисунках 11-15 приведен ряд графиков, на которых показаны зависимости порогового β_v и соответствующей частоты возмущения от отношения радиуса плазмы к ларморовскому радиусу ρ_v . Используются обозна-

чения $\beta_v = 8\pi P_{\perp 0}/B_{v0}^2$ – отношение поперечного давления плазмы к давлению поля, $\rho_v = V_{\perp inj}/\Omega_v$ – ларморовский радиус инжектируемых ионов и $\Omega_v = e_i B_{v0}/m_i c$ – ионно-циклотронная частота, посчитанные по вакуумному магнитному полю на оси в центральном сечении ловушки. Параметры, не указанные явно в подписи к рисунку, подразумеваются следующими: угол инжекции $\theta_0 = 45^\circ$, полуширина углового разброса инжекции $\delta\theta = 5^\circ$, отношение температуры электронов к энергии инжекции $T_e/E_{inj} = 3.6 \cdot 10^{-3}$, отношение времен перезарядки ионов на атомарных пучках и торможения быстрых ионов на электронах $\tau_{ex}/\tau_d = 4$, плотность холодных ионов $n_c = 0.75n_e$, продольный размер неоднородности вакуумного магнитного поля $L = 30\rho_v$ и пробочное отношение ловушки $R_m = 40$. Такие значения приближенно соответствует параметрам центральной ячейки ГДЛ, при которых наблюдалась АИЦ неустойчивость [40]. При построении ВКБ-решения по продольной координате учитывалась только пара ближайших к центру точек остановки волны. При аппроксимации распределения ионов f_i использовалась сумма из примерно 2500 функций $f_{p,q}$ с $p_{\max} + q_{\max} = 100$, при этом для “базового” набора параметров среднеквадратичное отклонение $\int d^3v (f_i - f_a)^2 / \int d^3v f_i^2$ аппроксимации f_a от f_i равно 2,5%, а увеличение числа слагаемых в сумме в два раза приводит к изменению граничного β_v менее чем на 3%.

Рисунки 11-15 показывают сильное стабилизирующее влияние поперечной неоднородности: пороговое β_v растет при уменьшении R_p/ρ_v вплоть до исчезновения неустойчивости при любом β_v , когда радиус становится меньше некоторого критического сравнимого с ρ_v . Следует заметить, что эта область находится на границе применимости данной теории еще и по тому, что поперечные поправки пропорциональные $(\delta\omega)^2$ становятся сравнимыми с поправками $\sim \delta\omega$. Формальное продолжение кривых рисунков 11-15 в

область больших β_v приводит к развороту кривых вправо и выходу на горизонтальные асимптотики, что формально означает появлению новых зон устойчивости при больших β_v . Подтверждение или опровержение существования таких зон требует дополнительных исследований.

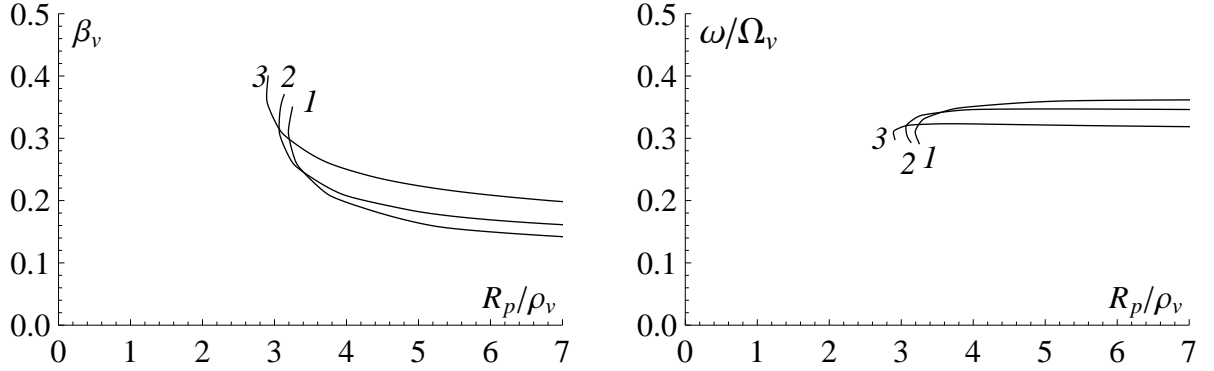


Рис. 11: Пороговое β_v (слева) и соответствующая частота (справа) в зависимости от R_p/ρ_v для различных значений $\delta\theta$: 1 – $\delta\theta = 5^\circ$, 2 – $\delta\theta = 10^\circ$, 3 – $\delta\theta = 15^\circ$.

Уменьшение углового разброса инжекции увеличивает градиенты функции распределения в области резонансных частиц, что облегчает развитие неустойчивости (рисунок 11).

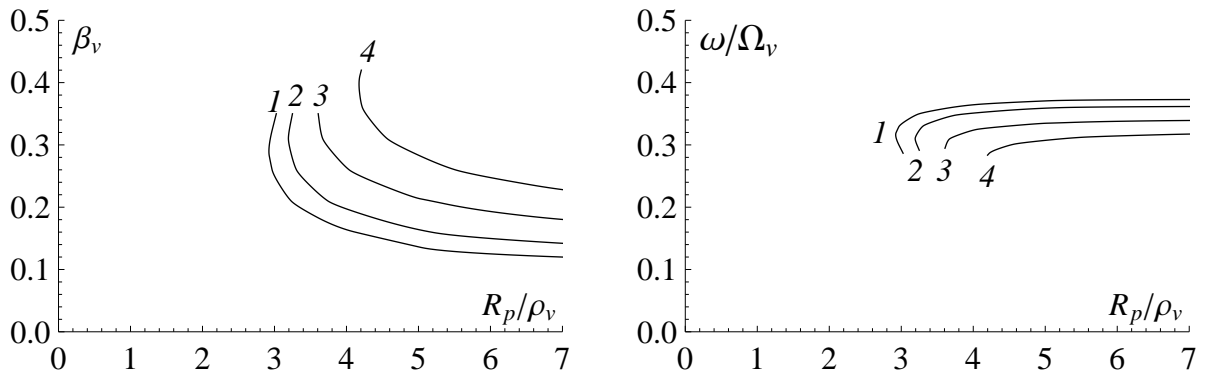


Рис. 12: Пороговое β_v (слева) и соответствующая частота (справа) в зависимости от R_p/ρ_v для различных значений отношения T_e/E_{inj} : 1 – $T_e/E_{inj} = 1.8 \cdot 10^{-3}$, 2 – $T_e/E_{inj} = 3.6 \cdot 10^{-3}$, 3 – $T_e/E_{inj} = 7.2 \cdot 10^{-3}$, 4 – $T_e/E_{inj} = 1.44 \cdot 10^{-2}$.

Увеличение температуры электронов уменьшает скорость торможения

по сравнению со скоростью углового рассеяния, что приводит к уширению функции распределения. Таким образом, увеличение электронной температуры способствует стабилизации АИЦ неустойчивости (рисунок 12).

Добавление холодных ионов уменьшает продольную длину волны возмущения, что ослабляет стабилизирующее влияние продольной неоднородности (рисунок 13). Уменьшение перезарядных потерь действует аналогично добавлению холодной плазмы, так как увеличивается доля ионов с малой энергией.

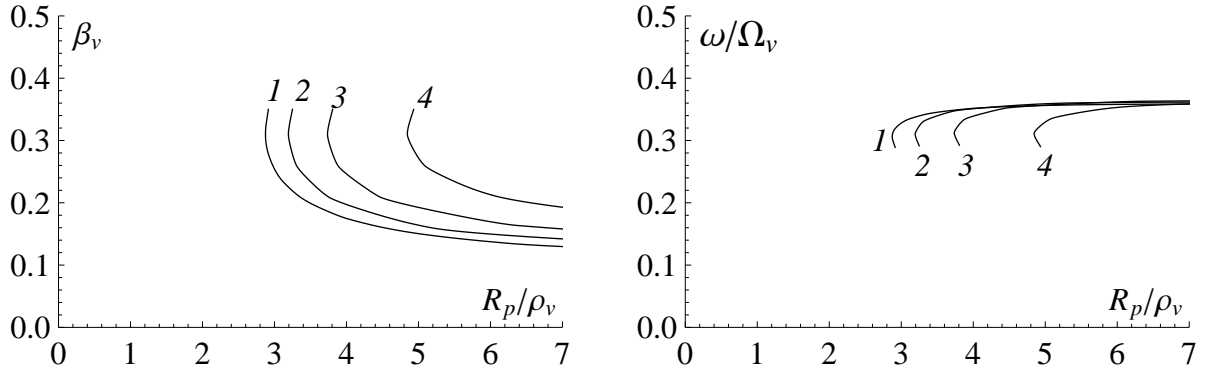


Рис. 13: Пороговое β_v (слева) и соответствующая частота (справа) в зависимости от R_p/ρ_v для различных значений отношения доли холодной плазмы: 1 – $n_c = 0.8n_e$, 2 – $n_c = 0.75n_e$, 3 – $n_c = 0.67n_e$, 4 – $n_c = 0.5n_e$.

Уменьшение угла инжекции, в соответствии с оценками раздела 2.1, увеличивает пороговое β_v и уменьшает частоту неустойчивого возмущения (см. рисунок 14). При уменьшении угла инжекции наблюдается резкий рост граничного β_v , и для данных параметров не найдены неустойчивые решения при $\theta_0 < 40^\circ$. Этот критический угол уменьшается с ростом L/ρ_v . Резкий рост границы устойчивости при уменьшении угла инжекции также отмечался в работе [20].

Увеличение размера неоднородности магнитного поля L уменьшает стабилизирующий эффект продольной неоднородности (рисунок 15).

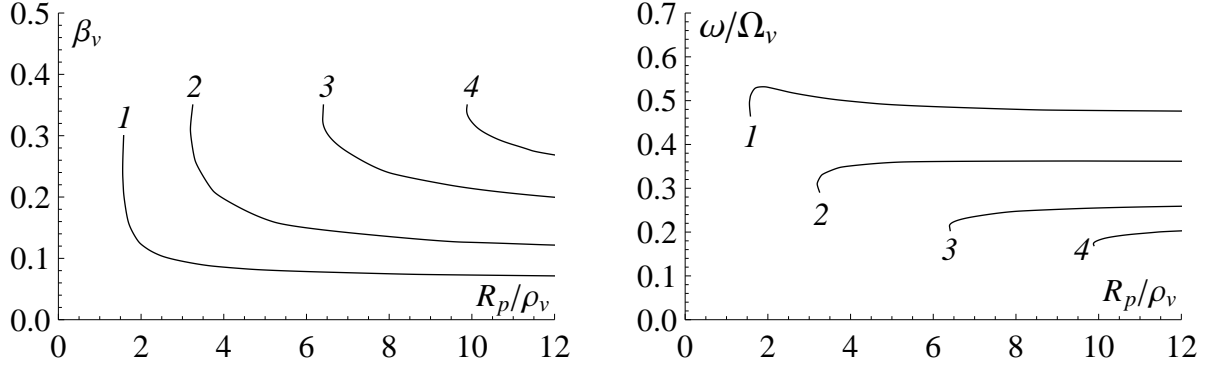


Рис. 14: Пороговое β_v (слева) и соответствующая частота (справа) в зависимости от R_p/ρ_v для различных значений угла инжекции: 1 – $\theta_0 = 50^\circ$, 2 – $\theta_0 = 45^\circ$, 3 – $\theta_0 = 42^\circ$, 4 – $\theta_0 = 41^\circ$.

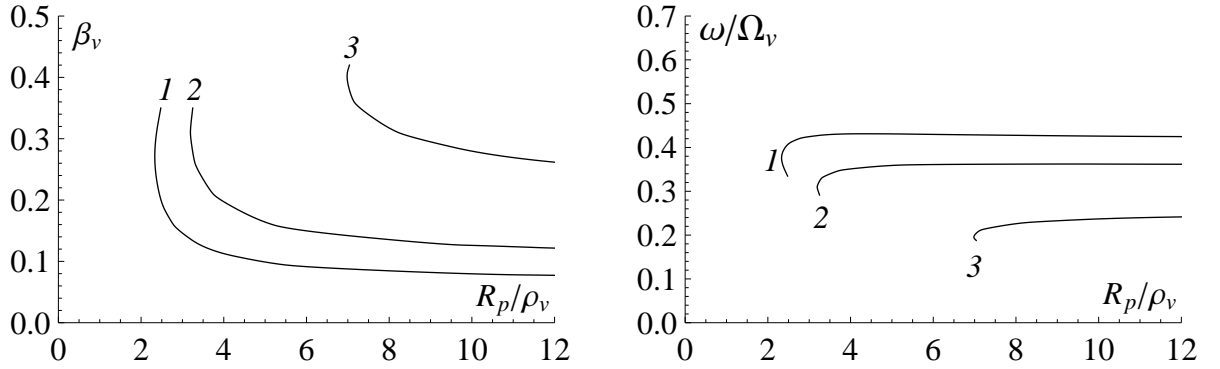


Рис. 15: Пороговое β_v (слева) и соответствующая частота (справа) в зависимости от R_p/ρ_v для различных значений отношения L/ρ_v : 1 – $L = 40\rho_v$, 2 – $L = 30\rho_v$, 3 – $L = 20\rho_v$.

2.5. Поведение полей в периферийной плазме

В эксперименте измерения возмущения полей обычно доступно только в периферийной плазме, поэтому представляет интерес поведение возмущений в этой области. Столб плотной плазмы, окруженный редкой холодной периферийной плазмой, представляет собой волновод для альфвеновских волн, радиально локализованных из-за эффекта полного внутреннего отражения. В случае, когда продольные размеры изменения параметров равновесия много больше поперечных, поле $\sim e^{ik_{\parallel}z + im\theta - i\omega t}$, проникающие в пери-

ферийную холодную плазму, удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} k_{\parallel}^2 E_r + \frac{im}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r E_{\phi} - im E_r \right) &= \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_{\perp} E_r + ig E_{\phi}), \\ k_{\parallel}^2 E_{\phi} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r E_{\phi} - im E_r \right) &= \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_{\perp} E_{\phi} - ig E_r), \end{aligned} \quad (36)$$

где поперечные компоненты тензора диэлектрической проницаемости равны $\varepsilon_{\perp} \omega_{pi}^2 / (\Omega_{ci}^2 - \omega^2)$, $g = \varepsilon_{\perp} \omega / \Omega_{ci}$ (здесь, как и прежде, используется приближение $\omega_{pe} \gg \Omega_{ci} \geq \omega$, поэтому E_{\parallel} выпадает из рассмотрения). Нетрудно оценить асимптотику решения, спадающего на больших расстояниях как $e^{-r/\lambda}$. Подстановка в (36) дает параметр радиального затухания $\lambda \sim 1/|k_{\parallel}|$ и отношение

$$\frac{E_r}{E_{\phi}} \sim \frac{im}{|k_{\parallel}|r} + \frac{ig \omega^2}{k_{\parallel}^2 c^2}, \quad (37)$$

определяющее вращение поляризации. Случай $Im(E_r/E_{\phi}) > 0$, соответствует вращению в сторону циклотронного вращения электронов, а случай $Im(E_r/E_{\phi}) < 0$ – в ионную сторону (магнитное поле направлено в сторону положительного z и мы по-прежнему пользуемся $Re(\omega) > 0$).

С другой стороны, рассмотрим разложение декартовых компонент возмущения поперечного поля (E_x, E_y) по степеням x и y в окрестности оси. После перехода к цилиндрическим координатам нетрудно найти, что цилиндрические компоненты, не обращающиеся в ноль, имеют асимптотику с постоянными E_r , E_{ϕ} и отношением

$$\frac{E_r}{E_{\phi}} = -i \frac{m}{|m|}, \quad (38)$$

где $m = \pm 1$. Это есть представление однородного поля, вращающегося в плоскости (x, y) . Поэтому при развитии АИЦ неустойчивости возбуждается именно вращающаяся в ионную сторону мода $m = -1$, соответствующая

ВКБ решениям предыдущих разделов с учетом $E_{\pm} = (E_r \pm iE_{\theta})e^{\pm i\phi}$. Азимутальные моды с $|m| \neq 1$ обращаются в ноль на оси, где плотность ионов, создающих инверсную заселенность, максимальна. Поэтому такие моды имеют более высокий порог возбуждения.

Сравнение (37) и (38) показывает, что направления вращения поля на оси и на периферии противоположны, когда $g(r)\omega^2/c^2 < k_{\parallel}/r$ при большом r . В противном случае мода не меняет направление вращения. Для иллюстрации на рисунке 16 показаны два примера распределения радиального электрического поля E_r и доли ионно-вращающейся поляризации $P_i = (1 + |E_r - iE_{\phi}|^2/|E_r + iE_{\phi}|^2)^{-1}$, полученные в результате решения уравнений (36). Во втором из этих примеров частота близка к циклотронной, поэтому второй член в (37) остается достаточно большим и направление вращения не меняется.

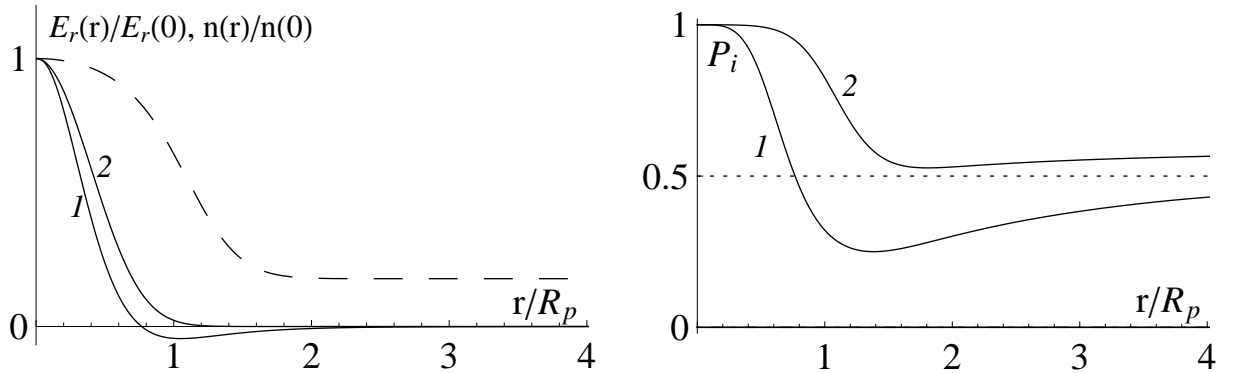


Рис. 16: Примеры радиальной зависимости радиальной компоненты электрического поля (слева) и доли поляризации поля, вращающегося в сторону циклотронного вращения ионов (справа), для двух значений частоты: 1 – $\omega = 0.5\Omega_{ci}$ ($k_{\parallel}c/\omega_{pi0} = 0.597$), 2 – $\omega = 0.9\Omega_{ci}$ ($k_{\parallel}c/\omega_{pi0} = 2.71$). Пунктиром показан профиль плотности. Значения параметров:

$$\omega_{pi0} = 300\Omega_{ci}, R_p\omega_{pi0}/c = 2.5.$$

Экспериментально вращение поля АИЦ неустойчивости в периферийной плазме в ионную сторону наблюдалось в центральной ячейке ТМХ [17]

и компактном пробкотроне ГДЛ [37]. В этих экспериментах инжекция производилась перпендикулярно оси, и поэтому частота неустойчивости была близка к циклотронной. Смена направления вращения наблюдалась в центральной ячейке установки ГАММА-10 [31] и центральной ячейке установки ГДЛ с наклонной инжекцией [40]. Также, обращение направления вращения поля альфвеновской волны отмечалось в экспериментах с цилиндрическим столбом аргоновой плазмы [5].

Глава 3

Нелинейное насыщение альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости

3.1. Класс точных решений уравнений

Власова-Максвелла для альфвеновской волны

Рассмотрим спирально-симметричные решения уравнений Власова-Максвелла [34]. Под спиральной симметрией понимается существование такого постоянного вектора \vec{k} и постоянной ω , что поля и функции распределения частиц не изменяются при одновременном сдвиге в пространстве и по времени на произвольный вектор $\delta\vec{r}$, и промежуток δt , и повороте вокруг \vec{k} на угол $\delta\psi = \vec{k} \cdot \delta\vec{r} - \omega\delta t$. Введем оператор поворота \hat{R} , действующий по правилу $\hat{R}\vec{V} = V_{\parallel}\vec{k}/k + \cos(\delta\psi)\vec{V}_{\perp} + \sin(\delta\psi)\vec{k} \times \vec{V}_{\perp}/k$, где $V_{\parallel} = \vec{V} \cdot \vec{k}/k$, $\vec{V}_{\perp} = \vec{V} - V_{\parallel}\vec{k}/k$. Условие спиральной симметрии векторного поля $\vec{V}(\vec{r}, t)$ можно формально записать в виде $\vec{V}(\vec{r}, t) = \hat{R}\vec{V}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t + \delta t)$. Положив $\delta\vec{r} = -\vec{r}$, $\delta t = -t$, найдем общий вид спирально-симметричного векторного поля $\vec{V}(\vec{r}, t) = V_{0\parallel}\vec{k}/k + \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\vec{V}_{0\perp} - \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\vec{k} \times \vec{V}_{0\perp}/k$, где $\vec{V}_0 = \vec{V}(\vec{r} = 0, t = 0)$, $V_{0\parallel} = \vec{k} \cdot \vec{V}_0/k$, $\vec{V}_{0\perp} = \vec{V}_0 - V_{0\parallel}\vec{k}/k$.

Ограничимся случаем когда электрическое поле ортогонально \vec{k} . Тогда можно выбрать скалярный потенциал равным нулю, а векторный потенциал записать в виде

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + w\vec{A}_w, \quad \vec{A}_0 = \frac{B_0}{2}\vec{r} \times \vec{e}_z, \quad \vec{A}_w = \frac{B_0}{k}(\vec{e}_x \cos \Psi + \vec{e}_z \times \vec{e}_x \sin \Psi), \quad (39)$$

где $\vec{e}_z = \vec{k}/k$, \vec{e}_x есть произвольный единичный вектор, ортогональный \vec{e}_z , $\Psi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$. \vec{A}_0 есть потенциал однородного магнитного поля с напряженно-

стью B_0 , \vec{A}_w описывает поле волны с круговой поляризацией, вращающейся в ионную сторону при $\omega > 0$, w есть относительная амплитуда волны.

Движение заряженных частиц в полях (39) рассматривалось во многих работах, в частности, в [4, 27, 28]. Для удобства дальнейшего изложения ниже приводится описание динамики частицы с массой m_s и зарядом q_s в поле (39) в рамках гамильтонова формализма, близкое к данному в работе [28].

Удобно перейти от переменных \vec{p} , \vec{r} к новым импульсам $P_i = \{\mu, P_y, P_z\}$ и координатам $Q_i = \{\theta, Y, Z\}$, определяемым преобразованием

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{(\vec{p} - q_s \vec{A}_0/c)^2 - (\vec{e}_z \cdot \vec{p})^2}{2m_s \Omega_s}, & \theta &= -\arctan \left(\frac{(\vec{p} - q_s \vec{A}_0/c) \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_x)}{(\vec{p} - q_s \vec{A}_0/c) \cdot \vec{e}_x} \right), \\ P_y &= \left(\vec{p} + \frac{q_s}{c} \vec{A}_0 \right) \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_x), & Y &= -\frac{1}{m_s \Omega_s} \left(\vec{p} + \frac{q_s}{c} \vec{A}_0 \right) \cdot \vec{e}_x, \\ & & P_z &= \vec{e}_z \cdot \vec{p}, & Z &= \vec{e}_z \cdot \vec{r}. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь $\Omega_s = q_s B_0 / (m_s c)$. В однородном магнитном поле преобразование (40) есть просто переход к магнитному моменту, углу ларморовского вращения и координатам центра ларморовской окружности. Легко убедиться, что преобразование (40) удовлетворяет условиям каноничности $\{P_i, P_j\}_{\vec{p}, \vec{r}} = 0$, $\{Q_i, Q_j\}_{\vec{p}, \vec{r}} = 0$ и $\{P_i, Q_j\}_{\vec{p}, \vec{r}} = \delta_{ij}$, где $\{a, b\}_{\vec{p}, \vec{r}} = \partial_{\vec{p}} a \cdot \partial_{\vec{r}} b - \partial_{\vec{r}} a \cdot \partial_{\vec{p}} b$ – скобки Пуассона.

Гамильтониан $H(\vec{p}; \vec{r}) = (\vec{p} - q_s \vec{A}/c)^2 / (2m_s)$ после преобразования (40) приводится к виду

$$H(\mu, P_y, P_z; \theta, Y, Z) = \Omega_s \mu - w \frac{\Omega_s}{k} \sqrt{2\mu m_s \Omega_s} \cos(\theta + kZ - \omega t) + \frac{P_z^2}{2m_s}. \quad (41)$$

Сделаем преобразование с производящей функцией $F(\mathcal{M}, \tilde{P}_y, \alpha; \theta, Y, Z; t) = \tilde{\mathcal{M}}(\theta + kZ - \omega t + \pi) + m_s (\Omega_s/k) (\omega/\Omega_s - 1 - \alpha/2) Z + \tilde{P}_y Y - m_s \Omega_s^2 (\alpha/2 - \omega/\Omega_{ci} + 1)^2 t / (2k^2)$ и обезразмерив $\tilde{\mathcal{M}} = m_s (\Omega_s/k^2) \mathcal{M}$,

$H = m_s(\Omega_s^2/(2k^2))\mathcal{H}$, окончательно запишем гамильтониан в форме

$$\mathcal{H}(\mathcal{M}, \tilde{P}_y, \alpha; \Phi, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \mathcal{M}^2 - \alpha\mathcal{M} + 2w\sqrt{2\mathcal{M}} \cos \Phi, \quad (42)$$

совпадающей со вторым фундаментальным гамильтонианом [28]. Отметим, что в терминах теоремы Нетер сохранение \tilde{P}_y и \tilde{Y} отвечает инвариантности системы по отношению к сдвигам поперек \vec{k} , сохранение $m_s\Omega_s^2\mathcal{H}/k^2 + \omega(\tilde{P}_y^2 + m_s^2\Omega_s^2\tilde{Y}^2)/(2m_s\Omega_s)$ и $m_s\Omega_s\alpha/(2k) - k(\tilde{P}_y^2 + m_s^2\Omega_s^2\tilde{Y}^2)/(2m_s\Omega_s)$ – инвариантности относительно одновременных поворотов вокруг \vec{k} и сдвигов соответственно по времени и вдоль \vec{k} .

Особенности поведения систем, описываемых вторым фундаментальным гамильтонианом, подробно рассмотрены в [28, 32]. В случае $\alpha > 3w^{2/3}$ частицы разделяются на опережающие волну ($\dot{\Phi} > 0$, $\mathcal{M} > \alpha/2$), отстающие от волны ($\dot{\Phi} < 0$, $\mathcal{M} < \alpha/2$) и резонансные (фаза Φ осциллирует, располагаются в области $\mathcal{M} \approx \alpha/2$, что соответствует $kp_{\parallel}/m_s \approx \omega - \Omega_s$). При $\alpha < 3w^{2/3}$ различие между типами частиц пропадает (см. рисунок 17).

В пределе волны малой амплитуды, $w \ll 1$, переменная \mathcal{M} при движении слабо отклоняется от $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(\Phi = \pi) = \alpha/2 \pm \sqrt{\mathcal{H} + \alpha^2/4}$. В этом случае можно пренебречь изменением \mathcal{M} в последнем слагаемом в (42), и гамильтониан сводится к гамильтониану математического маятника, $\mathcal{H} \approx -\alpha^2/4 + (\mathcal{M} - \alpha/2)^2 + 2w\sqrt{2\mathcal{M}_0} \cos \Phi$. Отсюда легко найти область, занятую резонансными частицами: $-2w\sqrt{2\mathcal{M}_0} < \mathcal{H} + \alpha^2/4 < 2w\sqrt{2\mathcal{M}_0}$, что соответствует $(\vec{k}\vec{v} - \omega + \Omega_s)^2 < 2w\Omega_s kv_{\perp}$, где v_{\parallel} и v_{\perp} есть скорости частицы вдоль и поперек вектора \vec{k} . Кроме того, видно, что в случае волны малой амплитуды период движения по резонансной траектории порядка $(\sqrt{w}\Omega_{ci})^{-1}$, по нерезонансной – порядка Ω_{ci}^{-1} .

Таким образом, уравнения движения полностью интегрируются и любая функция от интегралов движения удовлетворяет бесстолкновительному

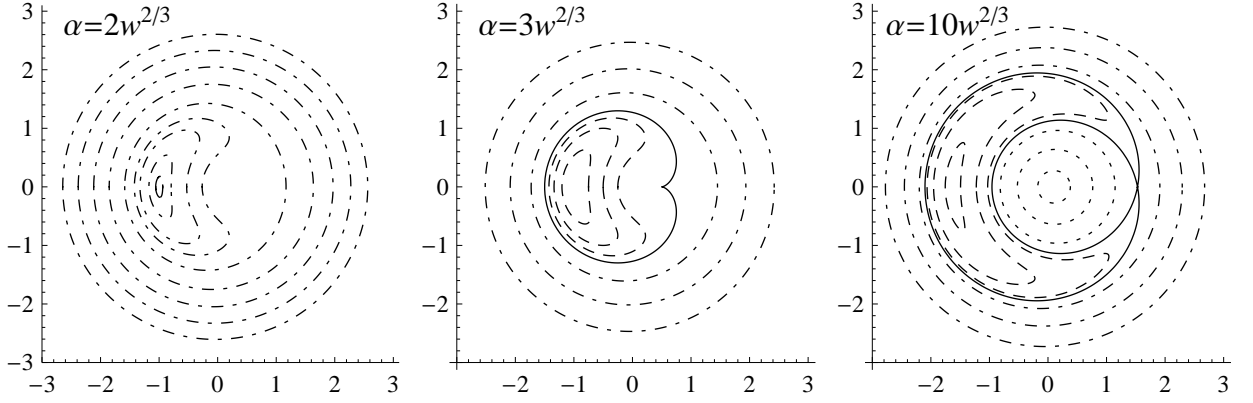


Рис. 17: Фазовые портреты гамильтониана (42). По горизонтали отложены значения $w^{-1/3}\sqrt{\mathcal{M}/2}\cos\Phi$, по вертикали – значения $w^{-1/3}\sqrt{\mathcal{M}/2}\sin\Phi$. Сплошная линия – сепаратриса, пунктир – захваченные частицы, штрихпунктир – опережающие волну, точки – отстающие от волны.

уравнению Власова. С другой стороны, требование спиральной симметричности распределения частиц приводит к соотношению $f(\vec{r}, t, \vec{v}) = f(\vec{r} + \delta\vec{r}, t + \delta t, \hat{R}\vec{v})$, которое должно выполняться для произвольных $\delta\vec{r}$ и δt . Положив $\delta\vec{r} = -\vec{r}$, $\delta t = -t$, можно видеть, что спирально-симметричная функция распределения может зависеть лишь от определенной комбинации скоростей и координат, $f(\vec{r}, t, \vec{v}) = f(\vec{V})$, где $\vec{V} = v_{\parallel}\vec{k}/k + \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\vec{v}_{\perp} - \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\vec{k} \times \vec{v}_{\perp}/k$, $v_{\parallel} = \vec{k} \cdot \vec{v}/k$, $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - v_{\parallel}\vec{k}/k$. \vec{V} есть скорость частицы в системе отсчета, вращающейся вокруг \vec{k} с частотой ω . Спиральные скорости выражаются через переменные гамильтониана (42) посредством соотношения $\vec{V} = \{-(\sqrt{2\mathcal{M}}\cos\Phi + w)\vec{e}_x + \sqrt{2\mathcal{M}}\sin\Phi\vec{e}_z \times \vec{e}_x + (\mathcal{M} - \alpha/2 + \omega/\Omega_s - 1)\vec{e}_z\}\Omega_s/k$, якобиан преобразования $d^3V = (\Omega_s^3/(2k^3))d\alpha d\mathcal{M}d\Phi$.

Два интеграла движения можно выразить только через компоненты \vec{V} , а именно $\alpha = -2(\vec{k} \cdot \vec{V} - \omega + \Omega_s)/\Omega_s + (k\vec{V}_{\perp} + w\Omega_s\vec{e}_x)^2/\Omega_s^2$ и $\mathcal{H} = (k\vec{V}_{\perp} + w\Omega_s\vec{e}_x)^2\{4(\vec{k} \cdot \vec{V} - \omega + \Omega_s)\Omega_s - (k\vec{V}_{\perp} + w\Omega_s\vec{e}_x)^2\}/(4\Omega_s^4) - 2w(k\vec{e}_x \cdot \vec{V}_{\perp} + w\Omega_s)/\Omega_s$. Легко показать, что любой другой спирально-симметричный интеграл движения можно выразить только через \mathcal{H} и α . Действительно, как следует

из связи между \vec{V} и переменными гамильтониана (42), любая комбинация только спиральных скоростей выражается только через переменные \mathcal{M} , Φ и α . Таким образом, любой интеграл движения I зависит только от \mathcal{M} , Φ и α . Поскольку скобка Пуассона I с гамильтонианом равна нулю, $I(\mathcal{M}, \Phi, \alpha)$ удовлетворяет уравнению $(2\mathcal{M} - \alpha + 2w \cos \Phi / \sqrt{2\mathcal{M}}) \partial_\Phi I + 2w \sqrt{2\mathcal{M}} \sin \Phi \partial_{\mathcal{M}} I = 0$ с решением $I = g(\mathcal{M}^2 - \alpha \mathcal{M} + 2w \sqrt{2\mathcal{M}} \cos \Phi, \alpha) = g(\mathcal{H}, \alpha)$, где g – произвольная функция.

Окончательно, найдем условия, при которых токи в плазме порождают поля (39). Подставим поля (39) и функции распределения частиц $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_s, \alpha_s)$ в уравнение Максвелла $c \nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = 4\pi \vec{j} = 4\pi \sum_s q_s n_s \int \vec{v} \mathcal{F}_s d^3v$ (считаем функцию распределения нормированной на единицу, $\int \mathcal{F}_s d^3V = (\Omega_s^3 / (2k^3)) \int \mathcal{F}_s d\alpha d\mathcal{M} d\Phi = 1$), тогда

$$\begin{aligned} & w B_0 (c^2 k^2 - \omega^2) (\cos \Psi \vec{e}_x + \sin \Psi \vec{e}_z \times \vec{e}_x) = \\ & = 4\pi k c \sum_s n_s q_s \int \left(V_{\parallel} \vec{e}_z + \cos \Psi \vec{V}_{\perp} + \sin \Psi \vec{e}_z \times \vec{V}_{\perp} \right) \mathcal{F}_s(\mathcal{H}, \alpha) d^3V, \\ & w(k^2 c^2 - \omega^2) \vec{e}_x = 4\pi k c \sum_s \frac{q_s n_s}{B_0} \int \vec{V} \mathcal{F}_s(\mathcal{H}, \alpha) d^3V = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 k}{\Omega_s} \int \vec{V} \mathcal{F}_s d^3V. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь $\omega_{ps} = (4\pi n_s q_s^2 / m_s)^{1/2}$ – плазменная частота для частиц сорта s .

Возьмем проекции уравнения (43) на вектора \vec{e}_x и \vec{e}_z (поскольку \mathcal{H} и α четным образом зависят от комбинации $(\vec{e}_z \times \vec{e}_x) \cdot \vec{V}$, проекция на $\vec{e}_z \times \vec{e}_x$ даст тождество). Также учтем нейтральность плазмы (поскольку спирально-симметричное электрическое поле бездивергентно) и положим суммарный

продольный импульс частиц плазмы равным нулю. Тогда

$$\begin{aligned}
w(k^2 c^2 - \omega^2) &= - \sum_s \omega_{ps}^2 \left(\langle \sqrt{2\mathcal{M}} \cos \Phi \rangle_s + w \right), \\
\sum_s \omega_{ps}^2 (\langle \mathcal{M} - \alpha/2 \rangle_s + \omega/\Omega_s - 1) &= 0, \\
\sum_s q_s n_s = 0 = \sum_s \omega_{ps}^2 / \Omega_s, \quad \sum_s (\Omega_s \langle \mathcal{M} - \alpha/2 \rangle_s + \omega - \Omega_s) &= 0. \quad (44)
\end{aligned}$$

Угловые скобки означают усреднение по функции распределения \mathcal{F}_s : $\langle G(\Phi, \mathcal{M}, \alpha) \rangle_s = \int G \mathcal{F}_s d\alpha d\mathcal{M} d\Phi / \int \mathcal{F}_s d\alpha d\mathcal{M} d\Phi$.

Считаем плазму состоящей из одного сорта однозарядных ионов и электронов. Тогда соотношения (44) приводятся к виду

$$\omega = \Omega_i (1 - \langle \mathcal{M} - \alpha/2 \rangle_i), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \sum_{s=i,e} \frac{m_i}{m_s} \left(w^{-1} \langle \sqrt{2\mathcal{M}} \cos \Phi \rangle_s + 1 \right) \quad (45)$$

При заданных спирально-симметричных функциях распределения ионов и электронов соотношения (45) задают зависимость частоты и волнового вектора от амплитуды волны. В частном случае $w = 0$ из дисперсионного соотношения для линейных волн отбираются такие ω и k , для которых затухание Ландау на резонансных частицах обращается в нуль.

3.2. Модели плазмы с инъекцией

3.2.1. Оценки параметров нелинейного насыщения

В данном разделе рассматриваются условия, при которых поддерживается стационарное состояние однородной плазмы с инъекцией нейтральных атомов, в которой распространяется волна с круговой поляризацией произвольной амплитуды. Факторы, нарушающие спиральную симметрию (инжекция, перезарядка на нейтральных пучках, торможение на электронах) считаются малыми, так что функция распределения ионов приближен-

но является функцией от интегралов движения гамильтониана (42) \mathcal{H} и α . Учет слабо нарушающих симметрию факторов позволяет определить конкретное заселение поверхностей постоянных интегралов движения и найти параметры волны с помощью выражений (45) [35].

Можно оценить вклады резонансных и нерезонансных ионов в среднее в соотношениях (45) в случае волны малой но конечной амплитуды. Считаем, что основные потери ионов связаны с перезарядкой на атомарных пучках, при этом плотность ионов $n_i \sim \tau_{ex} J_{inj}$, где J_{inj} – мощность инжекции (число ионов, появляющихся в единицу времени в единице объема), τ_{ex} – время перезарядки. Из выражения для второго фундаментального гамильтониана можно оценить границы занятой резонансными частицами области: $(\omega - \Omega_{ci} - kv_{\parallel})^2 < wkv_{\perp}\Omega_{ci}$. Из рисунка 17 можно видеть, что в случае $w \ll 1$ для резонансных ионов среднее по траектории $\overline{\sqrt{2\mathcal{M}} \cos \Phi} \sim \sqrt{\mathcal{M}} \sim kv_{\perp}/\Omega_{ci}$. У электронов и нерезонансных ионов при движении по траектории \mathcal{M} отклоняется от начального значения на величину порядка w , поэтому для них $\overline{\sqrt{2\mathcal{M}} \cos \Phi} \sim w$. Как отмечалось в первых двух главах, развитие неустойчивости связано с обменом энергией между волной и резонансными частицами, поэтому параметры волны должны допускать захват инжектируемых частиц на резонансные траектории, что позволяет оценить частоту волны. В случае нормальной инжекции, когда продольная скорость инжектируемых частиц много меньше поперечной, возможны два случая.

Если угловой разброс инжекции $\Delta v_{\parallel inj}/v_{\perp inj}$ мал по сравнению с шириной резонансной траектории, $\Delta v_{\parallel inj}^2/v_{\perp inj}^2 \ll wkv_{\perp inj}/\Omega_{ci}$, то большинство инжектируемых частиц захватывается волной. При этом можно пренебречь вкладом нерезонансных частиц в среднее от распределения ионов. Тогда $\langle \sqrt{2\mathcal{M}} \cos \Phi \rangle_i \sim kv_{\perp inj}/\Omega_{ci}$, условие захвата на резонансные траекто-

рии инжектируемых частиц с $v_{\parallel inj} = 0$ приводит к ограничению на частоту $(\omega - \Omega_{ci})^2 < wkv_{\perp inj}\Omega_{ci}$. Окончательно, пренебрегая вкладом электронов, из соотношений (45) найдем связь между амплитудой волны и мощностью инжекции $w \sim \beta/(k\rho_{\perp})$, где $\beta = \tau_{ex}J_{inj}(m_i v_{\perp inj}^2/2)/B_0^2$ есть величина порядка отношения давления плазмы к давлению магнитного поля, а $\rho_{\perp} = v_{\perp inj}/\Omega_{ci}$ – ларморовский радиус инжектируемых ионов.

В обратном случае $\Delta v_{\parallel inj}^2/v_{\perp inj}^2 \gg wkv_{\perp inj}/\Omega_{ci}$ резонансные траектории попадают в область инжекции при $(\omega - \Omega_{ci} - k\Delta v_{\parallel inj})^2 < wkv_{\perp inj}\Omega_{ci}$. Долю резонансных ионов можно оценить как отношение ширины резонансной траектории к разбросу инжекции по продольной скорости, $n_{res}/n \sim (wv_{\perp inj}\Omega_{ci}/k)^{1/2}/\Delta v_{\parallel inj}$, при этом их вклад в поперечный ток уменьшается в n_{res}/n раз. Кроме того, этот вклад частично компенсируется вкладом нерезонансных ионов. Таким образом, в случае широкой инжекции амплитуда волны существенно уменьшается по сравнению с узкой.

В реальных ловушках в области генерации возбуждается стоячая волна, которую можно разложить на сумму двух бегущих. Одной из бегущих волн в представленной модели пренебрегается. По-видимому, такое пренебрежение справедливо, пока резонансные области обеих волн $(v_{\parallel} \pm (\omega - \Omega_{ci})/k)^2 < wkv_{\perp}/\Omega_{ci}$ находятся далеко друг от друга, $(\omega/\Omega_{ci} - 1)^2 \gg wkv_{\perp inj}/\Omega_{ci}$. В противном случае движение значительной части ионов может оказаться хаотическим, что связано с перекрытием резонансов. Условие отдаленности резонансов может нарушаться для крайне узкого распределения инжектируемых ионов по углу при нормальной инжекции, и с большим запасом выполняется в случае наклонной инжекции.

3.2.2. Кинетическое уравнение для ионов

Рассмотрим, как влияет нелинейная альфвеновская волна на распределение ионов плазмы. Пусть в однородной плазме с инжекцией быстрых атомов распространяется электромагнитная волна с полем (39). Используются следующее кинетическое уравнение для ионов

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial t} + \left\{ \frac{(\vec{p} - e\vec{A}/c)^2}{2m_i}, f_i \right\}_{\vec{p}, \vec{r}} = \frac{1}{\tau_d} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} (v_\alpha f_i) - \frac{f_i}{\tau_{ex}} - \nu_L(\vec{v}) f_i + \mathcal{S}(\vec{v}), \quad (46)$$

где $\vec{v} = (\vec{p} - e\vec{A}/c)/m_i$, \mathcal{S} есть источник ионов, определяемый инжекцией, $\tau_d = 3m_i T_e^{3/2} / (4\sqrt{2\pi m_e} \Lambda e^4 n_e)$ – время торможения ионов на электронах, τ_{ex} – время потерь ионов за счет перезарядки на атомарных пучках, ν_L отлчно от нуля только в конусе потерь и по порядку величины совпадает с обратным временем пролета иона через ловушку, векторный потенциал \vec{A} удовлетворяет уравнению Максвелла $\partial_t^2 \vec{A}/c^2 - \Delta \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = 4\pi \vec{j}/c = (4\pi/c) \sum_s \int d^3 p \vec{v} f_s$. Предполагается, что время углового рассеяния из-за ионных столкновений велико по сравнению с временем торможения на электронах, поэтому в уравнении (46) пренебрегается слагаемым, описывающим столкновительную диффузию по питч-углу.

В дальнейшем считаем, что характерное время фазового размешивания частиц волной τ_w мало по сравнению с характерными временами остальных процессов (перезарядка, торможение и т.д.). Для нерезонансных частиц $\tau_w \sim 1/\Omega_{ci}$ и данное условие выполняется с большим запасом, для резонансных $\tau_w \sim \sqrt{w}/\Omega_{ci}$, и условие $\tau_w \ll \tau_d, \tau_{ex}, \dots$ выполняется в широком диапазоне амплитуд. Использование такого предположения позволяет рассматривать правую часть уравнения (46) как малую поправку и использовать для решения метод усреднения.

В уравнении (46) можно перейти к переменным гамильтониана (42).

В нулевом приближении, пренебрегая правой частью, получим бесстолкновительное уравнение Власова, которому удовлетворяет произвольная функция от α и \mathcal{H} , при этом векторный потенциал равен $\vec{A} = \vec{A}_0 + w\vec{A}_w$, где \vec{A}_0 и \vec{A}_w определяются выражениями (39), а параметры волны можно найти из условий (45). Учет правой части позволяет определить конкретное распределение ионов по инвариантным торам. Запишем решение и векторный потенциал в виде $f_i = \mathcal{F}_i(\mathcal{H}, \alpha) + \delta f_i(\vec{r}, \vec{v}, t)$ и $\vec{A} = \vec{A}_0 + w\vec{A}_w + \delta\vec{A}$, где $\delta A \sim (\tau_w/\tau_d)(A_0 + wA_w)$, $\delta f_i \sim (\tau_w/\tau_d)\mathcal{F}_i$. Усредним уравнение (46) по траектории движения, тогда в левой части останутся только слагаемые порядка $(\tau_w/\tau_d)^2$. Отбросив квадратичные по τ_w/τ_d слагаемые, получим уравнение на $\mathcal{F}_i(\mathcal{H}, \alpha)$:

$$\frac{1}{\tau_d} \left(\overline{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \alpha} + \overline{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \mathcal{H}} \right) + \left(\frac{3}{\tau_d} - \frac{1}{\tau_{ex}} - \nu_L \right) \mathcal{F}_i + \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{H}, \alpha) = 0, \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}} &= \overline{V_\beta \frac{\partial \alpha}{\partial V_\beta}} = \alpha + \mathcal{H} - 2 \frac{\omega}{\Omega_{ci}} + 2 + (2 + \alpha) \overline{\mathcal{M}} - \overline{\mathcal{M}^2}, \\ \overline{\mathcal{B}} &= \overline{V_\beta \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial V_\beta}} = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \mathcal{H} - \frac{1}{2} \left((2 + \alpha)^2 - 4 \frac{\omega}{\Omega_{ci}} \right) \overline{\mathcal{M}} + \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \overline{\mathcal{M}^2} + 2w^2 \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь черта означает усреднение по траектории частицы при данных α и \mathcal{H} ,

$$\overline{G} = \oint G(\partial \mathcal{H} / \partial \mathcal{M})^{-1} d\Phi / \oint (\partial \mathcal{H} / \partial \mathcal{M})^{-1} d\Phi.$$

Для δ -образного источника $\overline{\mathcal{S}} = S_0 \delta(\mathcal{H} - \mathcal{H}_{inj}) \delta(\alpha - \alpha_{inj})$ и $\nu_L = 0$ решение уравнения (47) можно записать в виде

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{H}, \alpha) = \frac{\tau_d S_0 H(\alpha_{inj} - \alpha) \delta(\mathcal{H} - \hat{h}(\alpha))}{\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_{inj}, \alpha_{inj})} e^{-(3 - \tau_d/\tau_{ex}) \int_{\alpha_{inj}}^{\alpha} da / \overline{\mathcal{A}}(\hat{h}(a), a)}, \quad (49)$$

где функция $\hat{h}(\alpha)$ удовлетворяет уравнению характеристик

$$\frac{d\hat{h}}{da} = \frac{\overline{\mathcal{B}}(\hat{h}, a)}{\overline{\mathcal{A}}(\hat{h}, a)} \quad (50)$$

с начальным условием $\hat{h}(\alpha_{inj}) = \mathcal{H}_{inj}$.

В общем случае функции $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{H}, \alpha)$ и $\overline{\mathcal{M}^2}(\mathcal{H}, \alpha)$ выражаются через эллиптические интегралы от корней уравнения $8w^2\mathcal{M} - (\mathcal{H} + \alpha\mathcal{M} - \mathcal{M}^2)^2 = 0$, и уравнение характеристик (50), по-видимому, не имеет аналитического решения. В практически важном пределе малой амплитуды волны $w \ll 1$, который и реализуется в эксперименте, аналитическое решение может быть найдено. Решение по-разному выглядит в областях резонансных и нерезонансных частиц.

Для нерезонансных частиц можно ограничиться нулевым по w приближением, считая что волна не влияет на их распределение. Тогда можно пренебречь отличием момента \mathcal{M} от $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(\Phi = \pi) = \alpha/2 \pm \sqrt{\mathcal{H} + \alpha^2/4}$, $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_0 + O(w^2)$ и $\overline{\mathcal{M}^2} = \mathcal{M}_0^2 + O(w^2)$. Удобно записать уравнение характеристик (50) в переменных \mathcal{M}_0, α : $d\mathcal{M}_0/d\alpha = (\overline{\mathcal{B}}/\overline{\mathcal{A}} + \mathcal{M}_0)/(2\mathcal{M}_0 - \alpha)$. Его решение $(\mathcal{M}_0 - \alpha/2 + \omega/\Omega_s - 1)/\sqrt{\mathcal{M}_0} = const$ соответствует $V_{\parallel}/V_{\perp} = const$ и отражает тот факт, что из-за пренебрежения столкновительным рассеянием и воздействием волныpitch-угол нерезонансных частиц не меняется. В области незахваченных частиц решение кинетического уравнения (47) с δ -образным источником имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{H}, \alpha, \mathcal{H}_{inj}, \alpha_{inj}) &= \frac{\tau_d S_0 H(\mathcal{M}_{inj} - \mathcal{M}_0)}{2\mathcal{M}_{inj}} (\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_{inj})^{\tau_d/(2\tau_{ex})-3/2} \times \\ &\times \delta \left(\sqrt{\mathcal{M}_{inj}/\mathcal{M}_0} (\alpha - 2(\mathcal{M}_0 + \omega/\Omega_{ci} - 1)) - 2kV_{\parallel}/\Omega_{ci} \right) + O(w^2), \end{aligned} \quad (51)$$

где $V_{\parallel} = (\mathcal{M}_{inj} - \alpha/2 + \omega/\Omega_{ci} - 1)\Omega_{ci}/k$ – продольная скорость инжекции, $\mathcal{M}_{inj} = \alpha_{inj} \pm \sqrt{\mathcal{H}_{inj} + \alpha_{inj}^2/4}$. В процессе торможения на электронах незахваченные частицы не могут попасть в конус потерь и покидают плазму только за счет перезарядки.

Поскольку для резонансных частиц значение гамильтониана при $w \ll 1$

меняется в пределах $-2w\sqrt{\alpha} < \mathcal{H} + \alpha^2/4 < 2w\sqrt{\alpha}$, для описания характеристик удобно ввести новую переменную h согласно $\mathcal{H} = -\alpha^2/4 + 2w\sqrt{\alpha}h$. Среднее по периоду движения от \mathcal{M} и \mathcal{M}^2 равно (см. Приложение 3)

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}} &= \frac{\alpha}{2} + \frac{w}{\sqrt{\alpha}} \left(2 \frac{E(h/2 + 1/2)}{K(h/2 + 1/2)} - 1 \right) + O(w^2), \\ \overline{\mathcal{M}^2} &= \frac{\alpha^2}{4} + w\sqrt{\alpha} \left(6 \frac{E(h/2 + 1/2)}{K(h/2 + 1/2)} + 2h - 3 \right) + O(w^2),\end{aligned}\quad (52)$$

где $K(x)$ и $E(x)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Уравнение характеристик в области резонансных частиц

$$\frac{dh}{d\alpha} = -\frac{1}{2\alpha} \frac{\omega/\Omega_{ci} - 1 + \alpha}{\omega/\Omega_{ci} - 1 - \alpha} \left(2 \frac{E(h/2 + 1/2)}{K(h/2 + 1/2)} + h - 1 \right) \quad (53)$$

имеет решение $G(h)\alpha/(\omega/\Omega_{ci} - 1 - \alpha)^2 = Const$, где $G(x) = \{2E(x/2 + 1/2) - (1 - x)K(x/2 + 1/2)\}^4$. При изменении h от начального значения до значения на сепаратрисе $h = 1$ переменная α (которая для резонансных частиц при $w \ll 1$ пропорциональна поперечной кинетической энергии) может существенно уменьшиться по сравнению с α для инжектированных частиц. Таким образом, при торможении на электронах захваченные ионы теряют значительную часть поперечной энергии, прежде чем выйдут из резонанса с волной. При этом, чем ближе частота волны к ионной циклотронной, тем медленнее ионы выходят из резонанса.

В области резонансных ионов решение с δ -образным источником $S = S_0\delta(\alpha - \alpha_{inj})\delta(h - h_{inj})$ имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h, \alpha, h_{inj}, \alpha_{inj}) &= \frac{\tau_d S_0 H(\alpha_{inj} - \alpha) G'(h_{inj})}{2(\alpha_{inj} - \omega/\Omega_{ci} + 1)} \frac{(\alpha - \omega/\Omega_{ci} + 1)^{\tau_d/(2\tau_{ex}) - 3/2}}{(\alpha_{inj} - \omega/\Omega_{ci} + 1)^{\tau_d/(2\tau_{ex}) - 3/2}} \times \\ &\times \delta \left(G(h)(\alpha/\alpha_{inj})(\omega/\Omega_{ci} - 1 - \alpha_{inj})^2 / (\omega/\Omega_{ci} - 1 - \alpha)^2 - G(h_{inj}) \right) + O(w)\end{aligned}\quad (54)$$

3.2.3. Функция распределения электронов

При распространении волны с $\omega \sim \Omega_{ci} \ll \Omega_{ce}$ подавляющее большинство электронов находится далеко от области циклотронного резонанса. Также, считаем что температура электронов мала по сравнению с энергией инжекции. Вместе с предположением что скорость инжектируемых ионов приближенно удовлетворяет условию циклотронного резонанса это позволяет оценить среднюю скорость электронов $v_e^2 \ll (m_e/m_i)^2(\omega - \Omega_{ci})^2/k^2 \sim \Omega_{ce}^2/k^2$. Таким образом, можно считать, что функция распределения электронов близка к максвелловской $\exp(-v^2/v_T^2) = \exp(-\{\mathcal{H} + (\alpha/2 - \omega/\Omega_{ce} + 1)^2 + 2\mathcal{M}\omega/\Omega_{ce}\}\Omega_{ce}^2/(k^2v_T^2))$. Пренебрегая слагаемым $2\mathcal{M}\omega/\Omega_{ce}$, находим средние от функции распределения $w\langle\sqrt{2\mathcal{M}}\cos\Phi\rangle_e + 1 = \omega/(\omega - \Omega_{ce}) \approx -\omega/\Omega_{ce}$ и $\langle\mathcal{M} - \alpha/2\rangle_e = 1 - \omega/\Omega_{ce}$. Подставляя в замыкающие соотношения (45), получим

$$\omega = \Omega_{ci}(1 - \langle\mathcal{M} - \alpha/2\rangle_i), \quad k^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \left(\omega/\Omega_{ci} - 1 - w^{-1}\langle\sqrt{2\mathcal{M}}\cos\Phi\rangle_i \right). \quad (55)$$

3.2.4. Аналитическое решение для нормальной инжекции без углового разброса

Построим самосогласованное решение для волны малой амплитуды в случае когда продольная скорость инжектируемых частиц равна нулю, а разброс по энергии и углу мал по сравнению с изменением скорости частицы в поле волны. Как отмечалось в пунктах 2.1 и 3.1, развитие АИЦ неустойчивости определяется размещиванием резонансных ионов на возмущенных траекториях, поэтому параметры волны должны допускать захват инжектируемых ионов на резонансные траектории. Из требования к скорости резонансных ионов $(\omega - \Omega_{ci} - k_{\parallel}v_{\parallel})^2 < 2w\Omega_{ci}kv_{\perp}$ следует, что инжектируемые частицы могут захватываться волной лишь если ее частота слабо отличается

от ионной-циклотронной, $(\omega - \Omega_{ci})^2 < 2w\Omega_{ci}kv_{\perp inj}$. Отметим, что пренебрежение бегущей навстречу волной в этом случае становится некорректным, поскольку резонансные области обеих волн перекрываются. Тем не менее, приводимое ниже решение может представлять методологический интерес, поскольку позволяет аналитически найти функцию распределения ионов и связать параметры волны с параметрами инжекции. Кроме того, представленное решение имеет смысл в задаче о равновесии волны с плазмой, когда генерация волны происходит вне рассматриваемой области. Также, решение может использоваться для проверки численных кодов.

Выберем функцию распределения источника в виде $\mathcal{S} = J_{inj}\delta(v_{\parallel})\delta(v_{\perp}^2 - v_{\perp inj}^2)/\pi = J_{inj}\delta(\mathcal{M} - \alpha/2 + \omega/\Omega_{ci} - 1)\delta(\mathcal{H} + \alpha^2/4 - (\mathcal{M} - \alpha/2 - 1)^2 + \alpha + 1 + w^2 - k^2v_{\perp inj}^2/\Omega_{ci}^2)k^3/(\pi\Omega_{ci}^3)$, где J_{inj} есть число инжектируемых частиц в единицу времени в единицу объема, и усредним по траектории резонансного иона:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{S}} &= \frac{1}{T} \int_{\mathcal{M}_{\min}}^{\mathcal{M}_{\max}} \mathcal{S} \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} \right)^{-1} d\mathcal{M} = \frac{2}{T} \int_{\mathcal{M}_{\min}}^{\mathcal{M}_{\max}} \frac{\mathcal{S} d\mathcal{M}}{\sqrt{8w^2\mathcal{M} - (\mathcal{H} - \mathcal{M}^2 + \alpha\mathcal{M})^2}} = \\ &= \frac{J_{inj}}{T} \frac{2k^3}{\pi\Omega_{ci}^3} \frac{\delta(\mathcal{H} + \alpha^2/4 + \alpha + 1 - \omega^2/\Omega_{ci}^2 - k^2v_{\perp inj}^2/\Omega_{ci}^2)}{\sqrt{8w^2(\alpha/2 - \omega/\Omega_{ci} + 1) - (\mathcal{H} + \alpha^2/4 - (\omega/\Omega_{ci} - 1)^2)^2}} \times \\ &\quad \times H(\alpha/2 - \omega/\Omega_{ci} + 1 - \mathcal{M}_{\min})H(\mathcal{M}_{\max} - \alpha/2 + \omega/\Omega_{ci} - 1) \end{aligned} \quad (56)$$

Здесь $H(x)$ есть функция Хевисайда, выражение для периода движения T приведено в приложении 3. Удобно ввести безразмерную скорость инжектируемых частиц $u = kv_{\perp inj}/\Omega_{ci}$ и заменить $\mathcal{H} = -\alpha^2/4 + 2w\sqrt{\alpha}h$, $\omega = \Omega_{ci}(1 - \sqrt{w}\Delta\omega)$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{S}} &= \frac{2J_{inj}k^3}{\pi\Omega_{ci}^3} \frac{\alpha^{1/4}\sqrt{w}}{8K(h/2 + 1/2)} \frac{\delta(2w\sqrt{\alpha}h + \alpha + 2\sqrt{w}\Delta\omega - u^2)}{w\sqrt{4\alpha - (2\sqrt{\alpha}h - \Delta\omega)^2}} \times \\ &\quad \times H(\sqrt{w}\Delta\omega + \sqrt{2w}\alpha^{1/4}\sqrt{1+h})H(-\sqrt{w}\Delta\omega + \sqrt{2w}\alpha^{1/4}\sqrt{1+h}). \end{aligned} \quad (57)$$

Видно, что в области инжекции α отличается от $k^2 v_{\perp inj}^2 / \Omega_{ci}^2$ на малую величину порядка \sqrt{w} . Пренебрегая этим отличием, запишем источник (57) в виде суммы δ -образных источников:

$$\bar{S} = \frac{J_{inj} k^3}{8\pi \sqrt{w} \sqrt{u} \Omega_{ci}^3} \int_{-1}^1 \frac{\delta(h - h_{inj}) \delta(\alpha - u^2)}{K(h_{inj}/2 + 1/2) \sqrt{1 - (h_{inj} - \Delta\omega^2/2u)^2}} dh_{inj}. \quad (58)$$

Средние значения по функции распределения резонансных частиц с δ -образным источником найдены в Приложении 4. Просуммировав их по h_{inj} , найдем плотность частиц в ловушке

$$n_i = \frac{\Omega_{ci}^3}{2k^3} \int \mathcal{F} d\mathcal{M} d\Phi d\alpha = \frac{J_{inj} \tau_{ex}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dh_{inj}}{\sqrt{1 - h_{inj}^2}} = J_{inj} \tau_{ex}, \quad (59)$$

отклонение средней продольной скорости ионов от $1 - \omega / \Omega_{ci}$

$$\frac{\Omega_{ci}^3}{2k^3} \int (\mathcal{M} - \alpha/2) \mathcal{F} d\mathcal{M} d\Phi d\alpha = w J_{inj} \frac{\Omega_{ci}}{k v_{\perp inj}} \tau_d F(\tau_d / \tau_{ex} - 1), \quad (60)$$

и средний поперечный ток ионов

$$\frac{\Omega_{ci}^3}{2k^3} \int \sqrt{2\mathcal{M}} \cos \Phi \mathcal{F} d\mathcal{M} d\Phi d\alpha = -J_{inj} \tau_d \frac{k v_{\perp inj}}{\Omega_{ci}} F(\tau_d / \tau_{ex} + 1). \quad (61)$$

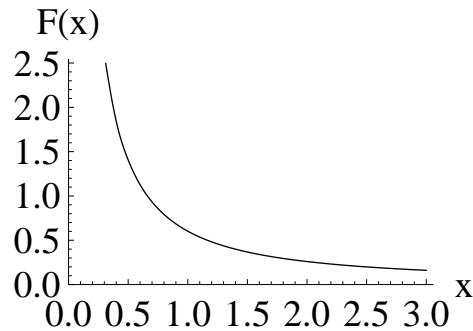
Здесь

$$F(x) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} \int_0^z \frac{dy}{\pi} \frac{2E(y) - K(y)}{E(z) - (1-z)K(z)} \left(\frac{E(y) - (1-y)K(y)}{E(z) - (1-z)K(z)} \right)^{2x-1} \quad (62)$$

Подставляя полученные выражения в (55), найдем частоту и амплитуду волны:

$$\omega = \Omega_{ci} \left(1 - \frac{w}{k \rho_{\perp}} \frac{\tau_d}{\tau_{ex}} F(\tau_d / \tau_{ex} - 1) \right), \quad w = \frac{\tilde{\beta}}{k \rho_{\perp}} F(\tau_d / \tau_{ex} + 1), \quad (63)$$

где $\rho_{\perp} = v_{\perp inj} / \Omega_{ci}$ есть ларморовский радиус инжектируемых ионов, а $\tilde{\beta} = 8\pi \tau_d J_{inj} (m_i v_{\perp inj}^2 / 2) / B_0^2$ по порядку величины равно отношению давления плазмы к давлению магнитного поля.

Рис. 18: График функции $F(x)$.

Отметим, что второе выражение в (63) можно рассматривать как оценку сверху для амплитуды волны. Действительно, при увеличении углового разброса инжекции, как отмечалось в пункте 4.2.1, амплитуда волны уменьшается из-за уменьшения доли резонансных ионов.

Поскольку в данной модели могут существовать волны с любым волновым числом, параметры волны однозначно не определяются. Если искать волну с максимальной амплитудой, то нужно выбирать как можно меньшие k . В данной модели с пространственно неограниченной плазмой волновое число может быть сколь угодно мало, однако реальная плазма ограничена, и максимальная длина волны в ней – порядка размеров плазмы. Этот вывод согласуется с результатами первой главы.

3.2.5. Численное решение для инжекции с конечным угловым разбросом

Уравнения (55) и решение кинетического уравнения (49) дают возможность построить численное решение самосогласованной задачи, позволяющее при заданных отношении τ_d/τ_{ex} и волновом векторе возмущения связать частоту и амплитуду волны с энергией и мощностью инжекции. При этом амплитуда волны и угловой разброс инжекции могут иметь произвольные

значения.

Считаем, что инжекция производится перпендикулярно магнитному полю, и пренебрегаем разбросом инжектируемых ионов по энергии. Для численных расчетов используется источник $\mathcal{S}(v_{\perp}, v_{\parallel}) = J_{inj} H(v_{inj}^2 - \mathcal{A}v_{\parallel}^2) \delta(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 - v_{inj}^2) \sqrt{\mathcal{A}} / (2\pi v_{inj})$ где \mathcal{A} есть анизотропия инжекции. Введем частоту ухода в конус потерь $\nu_L = \nu_l H(v_{\parallel} \tan \theta_l - v_{\perp})$. Считаем параметры волны (амплитуду w , безразмерные частоту ω/Ω_{ci} и волновой вектор $k\rho_{\perp} = kv_{inj}/\Omega_{ci}$) заданными. Это позволяет найти усредненный безразмерный источник $\bar{S}(\mathcal{H}, \alpha) k^3 / (J_{inj} \Omega_{ci}^3)$ и частоту ухода в конус потерь $\bar{\nu}_L(\mathcal{H}, \alpha)$. Приближенно заменим усредненный источник \bar{S} суммой δ -образных источников, тогда с помощью численного решения уравнений характеристик (50) найдем функцию распределения ионов $\mathcal{F}_i(\mathcal{H}, \alpha)$ в виде суммы решений с δ -образными источниками (49). Численное интегрирование функции распределения позволяет найти $\langle \mathcal{M} - \alpha/2 \rangle_i$, $\langle \sqrt{2\mathcal{M}} \cos \Phi \rangle_i$ и связь между плотностью ионов и мощностью инжекции $n_i / (\tau_d J_{inj}) = \int \mathcal{F} d\mathcal{M} d\Phi d\alpha$. Варьированием частоты волны можно удовлетворить первому уравнению в (55), при этом из второго уравнения находим безразмерную мощность инжекции, $\tilde{\beta} \equiv 8\pi\tau_d J_{inj} (m_i v_{inj}^2 / 2) / B_0^2 = k^2 \rho_{\perp}^2 (\int \mathcal{F} d\mathcal{M} d\Phi d\alpha)^{-1} (w^{-1} \langle -\sqrt{2\mathcal{M}} \cos \Phi \rangle_i - \langle \mathcal{M} - \alpha/2 \rangle_i)^{-1}$ нужную для поддержания волны с данной амплитудой.

На рисунке 19 показан пример зависимости мощности инжекции, нужной для поддержания амплитуды волны $w = 10^{-3}$, и частоты волны от отношения τ_d/τ_{ex} , полученной в результате численных расчетов в случае узкой инжекции ($\mathcal{A} \gg w\Omega_{ci}/(kv_{inj})$) и из аналитического решения (63). Видно хорошее совпадение в области, где перезарядка происходит быстро. Расхождение в области $\tau_d \approx \tau_{ex}$ объясняется тем, что в этом случае становится некорректным сделанное в аналитическом решении пренебрежение уходом ионов в конус потерь.

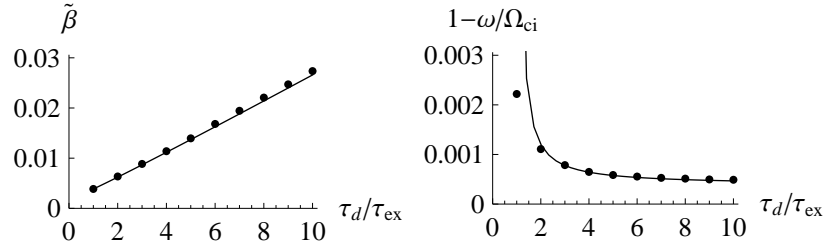


Рис. 19: Частота и $\tilde{\beta}$, соответствующее амплитуде волны $w = 10^{-3}$ и $k\rho_{\perp} = 1$. Сплошные кривые – аналитическое решение, точки – численное.

В случае точечной инжекции анизотропия функции распределения определяется параметрами резонансных траекторий. Линии уровня функции распределения ионов в случае, когда размер области инжекции значительно превышает размер траекторий и анизотропия определяется параметрами инжекции, показаны на рисунке 20 на плоскости V_{\parallel}, V_{\perp} . (От переменных \mathcal{H}, α можно перейти к спиральной скорости \vec{V} ; после усреднения по фазе $\arctan(\vec{V} \cdot \vec{e}_x \times \vec{e}_z / \vec{V} \times \vec{e}_x)$ можно перейти к V_{\parallel}, V_{\perp} .) Также на рисунке 20 изображены линии уровня распределения частиц, находящихся на резонансных траекториях. За исключением области резонансных ионов, линии уровня близки к линиям уровня функции $H(1/\mathcal{A} - v_{\parallel}^2/v_{\perp}^2)H(v_{inj}^2 - v_{\parallel}^2 - v_{\perp}^2)((v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)/v_{inj}^2)^{\tau_d/(2\tau_{ex})-3/2}$, удовлетворяющей уравнению (46) при $w = 0$. В соответствии со сделанными в пункте 4.2.1 оценками амплитуда волны ($w = 10^{-4}$) оказалась мала по сравнению с амплитудой волны в случае точечной инжекции при тех же $\tilde{\beta}$, τ_d/τ_{ex} и $k\rho_{\perp}$ ($w = 8.7 \cdot 10^{-3}$), что связано с уменьшением доли резонансных ионов в случае широкой инжекции.

На рисунке 21 приведен пример зависимости частоты волны и безразмерной мощности инжекции, нужной для поддержания волны с амплитудой $w = 10^{-3}$, от анизотропии инжекции. При уменьшении анизотропии инжекции убывает доля резонансных частиц, из-за чего равновесие волны с плазмой достигается при большей мощности инжекции.

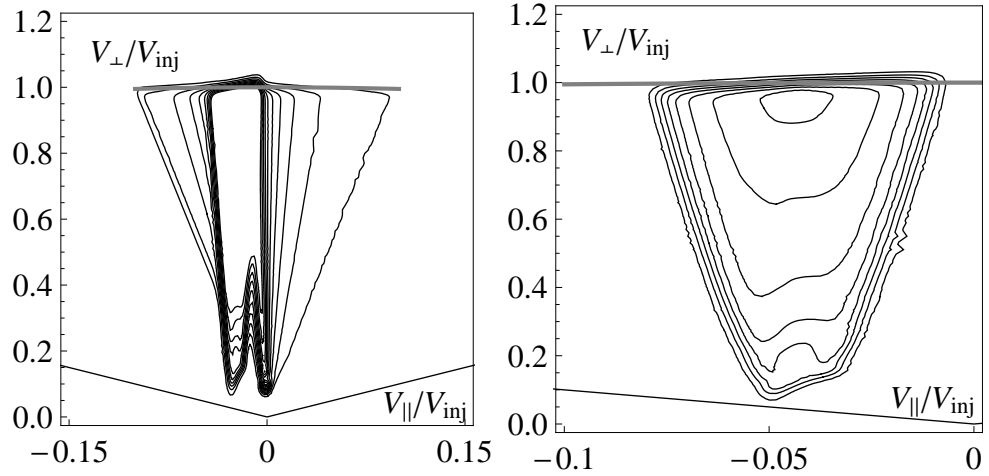


Рис. 20: Пример линий уровня функции распределения в случае конечного углового разброса инъекции. Вклад всех (слева) и резонансных (справа) частиц. Скорости инжектируемых частиц показаны серой кривой, граница конуса потерь – прямыми. Параметры:

$$k\rho_{\perp} = 1, \mathcal{A} = 100, \tilde{\beta} = 0.054, \tau_d = 2\tau_{ex}, \theta_l = \pi/4, w = 10^{-4}, \omega = 0.976\Omega_{ci}.$$

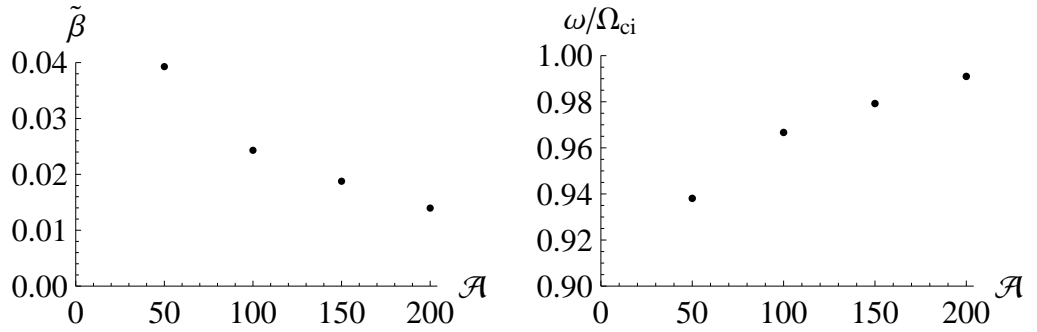


Рис. 21: Пример зависимости безразмерной мощности инъекции и частоты волны от анизотропии инъекции. Параметры: $w = 10^{-3}$, $\tau_d = 2\tau_{ex}$, $\theta_l = \pi/4$, $k\rho_{\perp} = 1$.

На рисунке 22 приведен пример зависимости амплитуды и частоты волны от безразмерной мощности инъекции, полученной с помощью численного решения. Неоднозначность зависимости амплитуды от мощности инъекции позволяет предположить, что в системе происходит жесткое возбуждение неустойчивости [21]. Однако требуется дополнительное исследование для доказательства или опровержения данного предположения.

Развитые в данном разделе методы оставляют произвол в выборе параметров волны, связанный с неоднозначностью выбора волнового вектора,

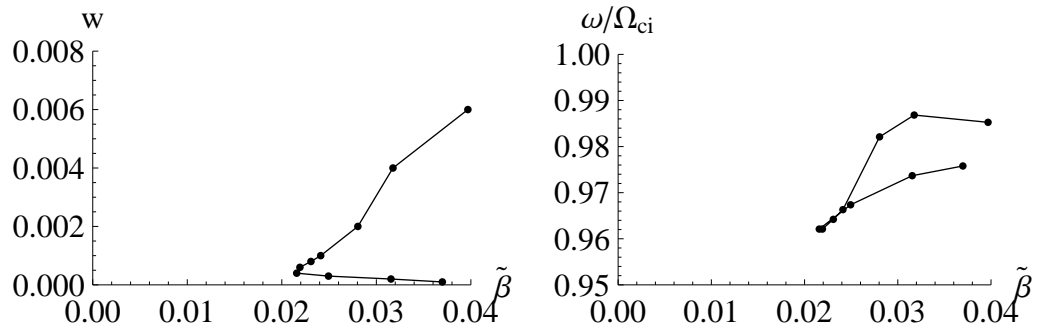


Рис. 22: Пример зависимости амплитуды и частоты волны от $\tilde{\beta}$. Параметры: $\mathcal{A} = 100$, $\tau_d = 2\tau_{ex}$, $\theta_l = \pi/4$, $k\rho_{\perp} = 1$.

вызванной однородностью по продольной координате. Реально длина волны определяется геометрией ловушки (размерами области генерации) и не может превышать длину плазмы. Кроме того, неоднозначность, возможно, снимется при рассмотрении устойчивости найденных нелинейных решений.

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Получено интегральное уравнение, описывающее пространственное распределение возмущений полей в ловушке с сильно анизотропной би-максвелловской плазмой. Создан численный код для его решения. Построена зависимость порогового β_{\perp} и частоты возмущения на границе АИЦ неустойчивости от плотности холодных ионов и анизотропии при параметрах близких к параметрам компактного пробкотрона ГДЛ. В пределе бесконечно большой анизотропии найдено аналитическое решение интегрального уравнения. Получен новый скейлинг границы устойчивости, который предсказывает бóльшую устойчивость по сравнению с традиционными скейлингами. Повышенная устойчивость связана с ограничением длины волны возмущения размером анизотропной плазмы.
2. Показано, что в ловушке с наклонной инжекцией быстрых ионов интегральная инверсная заселенность траекторий ионов, необходимая для развития АИЦ неустойчивости, возникает только на траекториях ионов, имеющих энергию близкую к энергии инжекции. Получены оценки частоты и волнового вектора неустойчивого возмущения. Разработан метод аппроксимации функции распределения ионов, найденной из решения приближенного уравнения Фоккера-Планка, позволяющий выразить тензор диэлектрической проницаемости через аналитические по пространственным координатам и параметрам волны функции. Получено дисперсионное уравнение, учитывающее сохранение поперечных адиабатических инвариантов при изменении продоль-

ных координаты и волнового вектора. Разработан метод учета влияния поперечной неоднородности на границу устойчивости, основанный на усреднении поперечной оценки Перлштейна-Берка по продольной траектории движения волнового пакета. Создан численный код для поиска границы устойчивости и распределений возмущений полей в рамках ВКБ-приближения в плазме с наклонной инжекцией быстрых нейтральных атомов и существенной поперечной неоднородностью. Исследована зависимость границы устойчивости и частоты возмущения от параметров инжекции, мишенной плазмы и магнитного поля в широкой области параметров, охватывающей параметры центральной ячейки ГДЛ.

3. Описан класс точных спирально-симметричных решений бесстолкновительной системы уравнений Власова-Максвелла и предложена новая модель для описания нелинейного насыщения АИЦ неустойчивости. Получено уравнение, позволяющее рассмотреть влияние нелинейной АИЦ волны произвольной амплитуды на функцию распределения ионов в открытой ловушке с инжекцией быстрых атомов в холодную мишенную плазму. Создан численный код для поиска параметров нелинейного насыщения АИЦ неустойчивости при произвольных параметрах инжекции и мишенной плазмы. В пределе волны малой амплитуды найдено аналитическое решение уравнения и получены аналитические выражения, связывающие частоту и амплитуду АИЦ волны с параметрами инжекции и мишенной плазмы.

В заключение я хотел бы выразить благодарность всем, кто помогал мне в работе над диссертацией.

Прежде всего, я благодарю своего научного руководителя Ю.А. Цидулко за его поддержку и терпение.

Благодарю Д.И. Сквородина, К.В. Зайцева и А.С. Аракчеева за регулярные полезные обсуждения. Отдельную благодарность хочу выразить В.В. Приходько, прочитавшему черновик диссертации и высказавшему ряд замечаний, которые помогли ее улучшить.

Благодарю И.А. Котельникова, Д.А. Беклемишева, П.А. Багрянского, А.А. Иванова, А.В. Бурдакова, В.В. Приходько, Д.В. Юрова, С.В. Мураштина, О.А. Коробейникову, А.В. Аникеева, М.С. Коржавину, Е.И. Солдаткину, А.Л. Соломахина, А.В. Судникова, В.В. Поступаева, и всех сотрудников плазменных лабораторий ИЯФ СО РАН, проявивших интерес к моей работе.

Также хочу поблагодарить А.В. Сухарева и персонал сервера Stark за возможность использовать ресурсы данного сервера для численных расчетов.

Благодарю преподавателей Новосибирского государственного университета за полученные от них знания и умения, пригодившиеся при работе над диссертацией: А.И. Черных, К.В. Лотова, А.Д. Беклемишева, Д.А. Шапиро, Е.Г. Образовского, И.В. Тимофеева, А.В. Резниченко, И.Ф. Гинзбурга, В.Г. Черняка, В.Ф. Дмитриева, А.И. Мильштейна, В.А. Александрова, Т.В. Бугуеву.

Приложение 1

Выражение для ядра интегрального уравнения

Вклад ионов в G_{\pm} можно разбить на сумму $G_{\pm}^{(i)} = G_0^{(i)} + G_{1\pm}^{(i)} + G_{c\pm}$, где $G_{c\pm}$ есть вклад холодных ионов,

$$\begin{aligned} G_0^{(i)} &= - \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\omega_{pi}^2(z)}{2\pi\omega^2} e^{i(k'-k)z} = - \frac{\omega_{pih}^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi\mathcal{A}} \left(1 + \frac{\mathcal{A}-1}{1+\mathcal{A}z^2/L^2} \right) e^{i(k'-k)z} = \\ &= - \frac{\omega_{pih}^2}{\omega^2} \frac{1}{2\mathcal{A}^{3/2}} \left(2\delta(\Delta\check{k}) + (\mathcal{A}-1)e^{-|\Delta\check{k}|} \right) \end{aligned} \quad (64)$$

Здесь ω_{pih} есть плазменная частота горячих ионов в центре ловушки, $\Delta\check{k} = (k'-k)L/\sqrt{\mathcal{A}}$. Выражение $G_{1\pm}^{(i)}$ содержит резонансные слагаемые, ответственные за раскачку неустойчивости:

$$\begin{aligned} G_{1\pm}^{(i)} &= \frac{q^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d^3v \{ (v_x \pm iv_y) e^{-ikz}, \mathcal{F} \}_{\vec{r}, \vec{p}} \int_{-\infty}^0 d\tau (\check{v}_x \mp i\check{v}_y) e^{ik'\check{z} - i\omega\tau} = \\ &= \frac{q^2}{\omega^2 T_{\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d^3v \mathcal{F} \{ \mathcal{A}\mathcal{E} - (\mathcal{A}-1)\mathcal{E}_{\perp}, (v_x \pm iv_y) e^{-ikz} \}_{\vec{r}, \vec{p}} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau (\check{v}_x \mp i\check{v}_y) e^{ik'\check{z} - i\omega\tau} = \frac{q^2}{\omega^2 T_{\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d^3v (v_x \pm iv_y) e^{-ikz} \mathcal{F} \times \\ &\quad \times \left(\pm \Omega_{ci} (1 + \mathcal{A}z^2/L^2) - \frac{\mathcal{A}zv_z}{L^2 + z^2} + i\mathcal{A}kv_z \right) \int_{-\infty}^0 d\tau (\check{v}_x \mp i\check{v}_y) e^{ik'\check{z} - i\omega\tau} = \\ &= \frac{i\omega_{pih}^2 m}{4\pi\omega^2 T_{\perp} n_{h0}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d^3v e^{-ikz} (v_x \pm iv_y) \mathcal{F} \times \\ &\quad \times \left(\mathcal{A}kv_z \pm \Omega_{ci} (1 + z^2/L^2) + i \frac{\mathcal{A}zv_z}{L^2 + z^2} \right) \int_{-\infty}^0 d\tau (\check{v}_x \mp i\check{v}_y) e^{ik'\check{z} - i\omega\tau}. \end{aligned} \quad (65)$$

Сделаем замену переменных $v_{\perp} = \Omega_z \sqrt{L^2 + z^2}$, $z = Z \cos \varphi$, $v_z = \Omega_z Z \sin \varphi$, $v_x = v_{\perp} \cos \theta$, $v_y = -v_{\perp} \sin \theta$, где $\Omega_z = (2\mathcal{E}_{\perp}/m_i)^{1/2}/L$ и Z – частота и амплитуда баунс-колебаний. Движение ионов вдоль невозмущенной траектории в этих переменных описывается соотношениями $\check{z} = Z \cos[\varphi - \Omega_z \tau]$, $\check{v}_x = v_x \cos[\Delta\theta[\tau]]$, $\check{v}_y = -v_y \sin[\Delta\theta[\tau]]$, $\Delta\theta = \Omega_{ci0}\tau + (Z^2/L^2)(2\Omega_z\tau + \sin[2(\Omega_z\tau - \varphi)] + \sin[2\varphi])\Omega_{ci0}/(4\Omega_z)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
G_{1\pm}^{(i)} = & \frac{i\omega_{pih}^2 m}{4\omega^2 T_{\perp}} \sqrt{\frac{m^3 \mathcal{A}}{8\pi^3 T_{\perp}^3}} \int_0^{\infty} d\Omega_z^2 \Omega_z^4 \int_0^{\infty} dZ Z \exp\left(-\frac{m}{2T_{\perp}} \Omega_z^2 (L^2 + \mathcal{A}Z^2)\right) \\
& \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ikZ \cos \varphi} \left(\mathcal{A}kZL^2 \sin \varphi \pm \frac{\Omega_{ci0}}{\Omega_z} (L^2 + \mathcal{A}Z^2 \cos^2 \varphi) + \right. \\
& \left. + i \frac{\mathcal{A}Z^2 \sin[2\varphi]}{2(1 + k^2 Z^2 \cos^2 \varphi)} \right) (L^2 + \mathcal{A}Z^2 \cos^2 \varphi)^{3/2} \times \\
& \times \int_{-\infty}^0 d\tau (L^2 + \mathcal{A}Z^2 \cos^2(\phi - \Omega_z \tau))^{1/2} e^{ik'Z \cos[\phi - \Omega_z \tau] - i\omega\tau \pm i\Delta\theta}. \quad (66)
\end{aligned}$$

Перейдем к безразмерным переменным $\check{\rho} = \sqrt{2T_{\perp}/(m\Omega_{ci0}^2)l^2}$, $\check{k} = k/l$, $\check{\omega} = \omega/|\Omega_{ci0}|$, $s_{\Omega} = \pm \text{sign}[\Omega_{ci0}]$, $t = \Omega_z \tau$, $u = Z/l$ ($l = L/\sqrt{\mathcal{A}}$ – размер неоднородности плазмы), $\check{r} = \Omega_z \sqrt{\mathcal{A}} \sqrt{1 + u^2}/(\check{\rho}|\Omega_{ci0}|)$, $a = 1/\sqrt{\mathcal{A}}$ и определим функцию $\xi[\check{r}, u, a, \check{\rho}] = \sqrt{1 + u^2}/(a\check{\rho}\check{r}) = |\Omega_{ci0}|/\Omega_z$ (далее предполагаем, что частота ларморовского вращения значительно превышает частоту баунс-

колебаний, $\xi \gg 1$). В безразмерных обозначениях выражение для $G_{1\pm}^{(i)}$ есть

$$G_{1\pm}^{(i)} = \frac{\omega_{pic}^2}{\omega^2} \frac{L}{\sqrt{\mathcal{A}}} g_1^{(i)}, \quad g_1^{(i)} = \frac{i}{2\pi^{3/2} a^2} \int_0^\infty \frac{u du}{(1+u^2)^{5/2}} \int_0^\infty dr^2 r^3 e^{-r^2} I_\varphi,$$

$$I_\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\check{k}u \sin \varphi + s_\Omega a^2 \xi (1 + u^2 \cos^2 \varphi) + i \frac{a^2 u^2 \sin[2\varphi]}{2(1 + a^2 u^2 \cos^2 \varphi)} \right) \times$$

$$\times (1 + a^2 u^2 \cos^2 \varphi)^{3/2} e^{-i\check{k}u \cos \varphi} \int_{-\infty}^0 dt (1 + a^2 u^2 \cos^2[\varphi - t])^{1/2} \times$$

$$\times e^{i\check{k}'z \cos[\varphi-t] - i\xi\check{\omega}t + i s_\Omega \xi (1 + a^2 u^2/2)t + i s_\Omega a^2 u^2 \xi (\sin[2\varphi] + \sin[2(t-\varphi)])/4}. \quad (67)$$

Данное выражение существенно упрощается в приближении большой анизотропии, $a \equiv \mathcal{A}^{-1/2} \ll 1$, когда внешнее магнитное поле слабо изменяется на размере плазмы. Опуская члены порядка a^2 в предэкспоненциальных множителях, но сохраняя члены порядка $a^2 \xi$, преобразуем внутренний интеграл по φ и t :

$$I_\varphi = -i \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\check{k}u \cos \varphi + i\Psi[\varphi]} \frac{d}{d\varphi} \left(-i\check{k}u \cos \varphi + \Psi[\varphi] \right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^0 dt e^{-i\xi\Delta\omega t + i\check{k}'u \cos[t-\varphi] + i\Psi[t-\varphi]}, \quad (68)$$

где $\Delta\omega = \check{\omega} - s_\Omega(1 - a^2)$, $x = s_\Omega \xi a^2 u^2/4$, $\Psi[\varphi] = 2x(2/u^2 + 1)\varphi + x \sin[2\varphi]$.

Проинтегрировав по частям по φ и t , получим

$$I_\varphi = -2\pi i J_0[(\check{k} - \check{k}')u] +$$

$$+ \xi \Delta\omega \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\check{k}u \cos \varphi + \Psi[\varphi]} \int_{-\infty}^0 dt e^{-i\xi\Delta\omega t + i\check{k}'u \cos[t-\varphi] + i\Psi[t-\varphi]}. \quad (69)$$

Используя разложение $\exp[ix \sin \varphi] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n[x] \exp[in\varphi]$, запишем I_φ в

виде

$$I_\varphi = -2\pi i J_0[(\check{k} - \check{k}')u] + \\ + 2\pi i \xi \Delta\omega \sum_{n, n', m, m' = -\infty}^{\infty} \frac{(-i)^{n-n'} J_n[\check{k}u] J_{n'}[\check{k}'u] J_m[x] J_{m'}[x] \delta_{n+2m, n'+2m'}}{\xi(\omega - s_\Omega(1 - a^2)) - 2x(2/z^2 + 1) - n - 2m}. \quad (70)$$

Введем функцию $\mathcal{J}_n(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n+2m}(y)$, тогда

$$I_\varphi = -2\pi i J_0((\check{k} - \check{k}')u) + \\ + 2\pi i \xi \Delta\omega u^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{J}_n(x, \check{k}u) \mathcal{J}_n(x, \check{k}'u)}{4x\{s_\Omega \Delta\omega/a^2 - (1 + u^2/2)\} - nu^2}. \quad (71)$$

В случае $a \ll \check{\rho} \ll 1$ функция $\xi(\check{r}, u, a\check{\rho})$ удовлетворяет неравенству $a^2\xi \ll 1$, и выражение $x = s_\Omega \xi a^2 u^2/4$ мало “почти всюду”. Следовательно, при вычислении $g_1^{(i)}$ основной вклад в сумме (71) дает слагаемое с $n = 0$, в котором $\mathcal{J}_0(x, \check{k}u)$ можно заменить на $\mathcal{J}_0(0, \check{k}u) = J_0(\check{k}u)$. Остальные слагаемые важны в окрестности резонансных кривых, где $x(\check{r}, u)$ близко к резонансному значению

$$x_r(u) = \frac{1}{4} \frac{nu^2}{s_\Omega \Delta\omega/a^2 - (1 + z^2/2)}, \quad (72)$$

обращающему знаменатель в n -м слагаемом (71) ноль. Поэтому первый ар-

гумент функций $\mathcal{J}_n(x, \check{k}u)$ может быть всюду заменен на x_r . Таким образом,

$$\begin{aligned}
g_1^{(i)} &= \frac{1 + |\check{k} - \check{k}'|}{4\check{\omega}a^2} e^{-|\check{k} - \check{k}'|} - \frac{2\Delta\omega}{\sqrt{\pi}a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{u \mathcal{J}_n(x_r, \check{k}u) J_n(x_r, \check{k}'u) du}{(1 + u^2)^{5/2}} \times \\
&\quad \times \int_0^{\infty} \frac{d\check{r} \check{r}^4 \exp(-\check{r}^2)}{s_{\Omega}(1 + a^2u^2/2) - \check{\omega} - \frac{n a \check{\rho} \check{r}}{\sqrt{1+u^2}}} = \\
&= \frac{1 + |\check{k} - \check{k}'|}{4\check{\omega}a^2} e^{-|\check{k} - \check{k}'|} - \frac{3\Delta\omega}{4a^2} \int_0^{\infty} \frac{u J_0[\check{k}u] J_0[\check{k}'u]}{(1 + u^2)^{5/2} (s_{\Omega}(1 + a^2u^2/2) - \check{\omega})} - \\
&\quad - \frac{4\Delta\omega}{\sqrt{\pi}a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{u \mathcal{J}_n(x_r, \check{k}u) \mathcal{J}_n(x_r, \check{k}'u) du}{(1 + u^2)^{5/2}} \times \\
&\quad \times \int_0^{\infty} d\check{r} \check{r}^4 e^{-\check{r}^2} \frac{s_{\Omega}(1 + a^2u^2/2) - \check{\omega}}{(s_{\Omega}(1 + a^2u^2/2) - \check{\omega})^2 - n^2 a^2 \check{\rho}^2 \check{r}^2 / (1 + u^2)}. \quad (73)
\end{aligned}$$

Введем обозначение $X = \sqrt{1 + u^2}(\check{\omega} - s_{\Omega}\{1 + a^2u^2/2\})/(a\check{\rho})$, тогда

$$\begin{aligned}
g_1^{(i)} &= \frac{1 + |\check{k} - \check{k}'|}{4\check{\omega}a^2} e^{-|\check{k} - \check{k}'|} + \frac{3\Delta\omega}{4a^3\check{\rho}} \int_0^{\infty} \frac{u J_0(\check{k}u) J_0(\check{k}'u)}{(1 + u^2)^2 X} + \frac{\Delta\omega}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 n^2 \check{\rho}^2} \times \\
&\quad \times \int_0^{\infty} \frac{u \mathcal{J}_n(x_r, \check{k}u) \mathcal{J}_n(x_r, \check{k}'u)}{(1 + u^2)^{3/2}} (s_{\Omega}(1 + a^2u^2/2) - \check{\omega}) \left(2 \frac{X^2}{n^2} h[X/n] - 1 \right) = \\
&= \frac{1 + |\check{k} - \check{k}'|}{4\check{\omega}a^2} e^{-|\check{k} - \check{k}'|} + \frac{3\Delta\omega}{4a^3\check{\rho}} \int_0^{\infty} \frac{u J_0[\check{k}u] J_0[\check{k}'u]}{(1 + u^2)^2 X} + \\
&\quad + \frac{\Delta\omega}{a^3\check{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{u \mathcal{J}_n(x_r, \check{k}u) \mathcal{J}_n(x_r, \check{k}'u)}{(1 + u^2)^2 X} h(X/n), \quad (74)
\end{aligned}$$

где $h(x) = -2\sqrt{\pi}x^5 e^{-x^2} (\operatorname{erfi}(x) - i) + 2x^4 + 2x^2$.

При $\omega \sim \Omega_{ci}$ и $\omega_{pi} \gg \Omega_{ci}$ вклад холодной плазмы в диэлектрическую проницаемость равен $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(c)} \approx -\omega_{pi}^2/(\omega^2 - \Omega_{ci}^2)(\delta_{\alpha\beta} - h_{\alpha}h_{\beta}) + \{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2\}h_{\alpha}h_{\beta} + i\{\omega_{pi}^2\omega/((\omega^2 - \Omega_{ci}^2)\Omega_{ci})\}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}h_{\gamma}$, где \vec{h} есть единичный вектор вдоль магнитного

поля. Вклад в электрическую индукцию $D_\alpha^{(c)} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(c)} E_\beta$ равен

$$D_\pm^{(c)}(z) = \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_{ci}(\Omega_{ci} \pm \omega)} E_\pm(z). \quad (75)$$

В Фурье-представлении

$$D_\pm^{(c)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk' du}{2\pi} e^{i(k-k')u} \frac{n_c(u)}{n_{h0}} \frac{\omega_{pi0}^2 / \Omega_{ci}(u)^2}{1 \pm \omega / \Omega_{ci}(u)} E_\pm(k'). \quad (76)$$

Вклад холодных электронов в диэлектрическую проницаемость при $\omega \sim \Omega_{ci}$ равен $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(e)} \approx -(\omega_{pe}^2 / \omega^2) h_\alpha h_\beta - i(\omega_{pe}^2 / (\omega \Omega_{ce})) \epsilon_{\alpha\beta\gamma} h_\gamma$.

Вклад в электрическую индукцию

$$D_\pm^{(e)}(z) = \pm \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \Omega_{ce}} E_\pm(z) = -\frac{\omega_{pic}^2}{\omega |\Omega_{ci}|} \frac{s\Omega}{1 + \mathcal{A}z^2 / L^2} E_\pm(z). \quad (77)$$

Фурье-разложение дает

$$\begin{aligned} D_\pm^{(e)}(k) &= \frac{\omega_{pi0}^2}{\omega |\Omega_{ci}|} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{i(k-k')z} \frac{s\Omega}{1 + \mathcal{A}z^2 / L^2} E_\pm(k') = \\ &= \frac{\omega_{pi0}^2}{\omega^2} \frac{L}{\sqrt{\mathcal{A}}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' g^{(e)} \left(kL / \sqrt{\mathcal{A}}, k'L / \sqrt{\mathcal{A}} \right) E_\pm(k'), \end{aligned} \quad (78)$$

где электронный вклад в диэлектрическую проницаемость $g^{(e)}(\check{k}, \check{k}') = s\Omega \check{\omega} e^{-|\check{k} - \check{k}'|/2}$.

Объединяя вклады электронов и ионов, получим выражение (19).

Приложение 2

Алгоритм численного решения интегрального уравнения

Поскольку рассматриваемая система не изменяется при отражении относительно плоскости $z = 0$, собственные моды можно разделить на симметричные и антисимметричные $E^\pm(-z) = \pm E^\pm(z)$. Аналогично можно классифицировать решения уравнения (20). Таким образом, ядро интегрального уравнения можно разбить на сумму $g_\pm(\check{k}, \check{k}') = g_\mp^s(\check{k}, \check{k}') + g_\pm^a(\check{k}, \check{k}')$, где $g_\pm^s(\check{k}, \check{k}')$ симметрично относительно смены знаков любого из своих аргументов, а $g_\pm^a(\check{k}, \check{k}')$ антисимметрично. Из (19) можно найти четную

$$g_\pm^s[\check{k}, \check{k}'] = -\frac{\delta(\check{k}_-) + \delta(\check{k}_+)}{2\mathcal{A}} - \frac{1 - 1/\mathcal{A} \pm \omega/\Omega_{ci} - \mathcal{A}/2}{4} \left(e^{-|\check{k}_-|} + e^{-|\check{k}_+|} \right) +$$

$$+ \frac{\mathcal{A}}{8} \left(|\check{k}_-| e^{-|\check{k}_-|} + |\check{k}_+| e^{-|\check{k}_+|} \right) - \left(\omega \mp \Omega_{ci} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{A}} \right) \right) \frac{3\mathcal{A}^{3/2}}{4\check{\rho}} \int_0^\infty \frac{u J_0(\check{k}u) J_0(\check{k}'u) du}{(1+u^2)^2 X} +$$

$$+ \left(\omega \mp \Omega_{ci} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{A}} \right) \right) \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathcal{A}^{3/2}}{2n\check{\rho}} \int_0^\infty \frac{u \mathcal{J}_{2n}(x_r, \check{k}u) \mathcal{J}_{2n}(x_r, \check{k}'u) du}{(1+u^2)^2} h\left(\frac{X}{2n}\right),$$

и нечетную

$$g_\pm^a[\check{k}, \check{k}'] = -\frac{\delta[\check{k}_-] - \delta[\check{k}_+]}{2\mathcal{A}} - \frac{1 - 1/\mathcal{A} \pm \omega/\Omega_{ci} - \mathcal{A}/2}{4} \left(e^{-|\check{k}_-|} - e^{-|\check{k}_+|} \right) +$$

$$+ \frac{\mathcal{A}}{8} \left(|\check{k}_-| e^{-|\check{k}_-|} - |\check{k}_+| e^{-|\check{k}_+|} \right) + \left(\omega \mp \Omega_{ci} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{A}} \right) \right) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathcal{A}^{3/2}}{(2n+1)\check{\rho}} \int_0^\infty \frac{u \mathcal{J}_{2n+1}(x_r, \check{k}u) \mathcal{J}_{2n+1}(x_r, \check{k}'u) du}{(1+u^2)^2} h\left(\frac{X}{2n+1}\right)$$

части ядра оператора, здесь $\check{k}_\pm = \check{k} \pm \check{k}'$.

Тогда уравнение (20) приобретает следующий вид для симметричных

и антисимметричных полей $E_{\pm}^s(\check{k})$ и $E_{\pm}^a(\check{k})$:

$$\int_0^{\infty} g_{\pm}^{s,a}(\check{k}, \check{k}') E_{\pm}^{s,a}(\check{k}') d\check{k}' = \frac{\check{\rho}^2}{2\beta_{\perp}} \left(\left(\check{k}^2 + \frac{\check{k}_{\perp}^2}{2} \right) E_{\pm}^{s,a}(\check{k}) - \frac{\check{k}_{\perp}^2}{2} E_{\mp}^{s,a}(\check{k}) \right). \quad (79)$$

Численное решение системы уравнений (79) вместо системы (20) позволяет в четыре раза сократить число точек, в которых вычисляется $g(\check{k}, \check{k}')$ и в два раза уменьшить число обращений к функции Бесселя и функции $\operatorname{erfi}(x)$.

Для численного решения уравнения (79) удобно от $E_{\pm}(\check{k})$ перейти к функциям $Y_{\pm}(\check{k}) = E_{\pm}(\check{k}) \sqrt{\check{k}^2 + \check{k}_{\perp}^2/2}$. Разобьем интервал по \check{k} на n равных промежутков, $\check{k}_i = -\check{k}_{\max} + 2\check{k}_{\max}(i + n - 1)/(2n - 1)$, обозначим $g_{\pm}^{i,j} = g_{\pm}(\check{k}_i, \check{k}_j) / \sqrt{(\check{k}_i^2 + \check{k}_{\perp}^2/2)(\check{k}_j^2 + \check{k}_{\perp}^2/2)}$ и $Y_{\pm}^i = Y_{\pm}(\check{k}_i)$. Приблизительно заменяя интегрирование суммированием, получим

$$\Delta\check{k} \begin{pmatrix} g_+^{i,j} & 0 \\ 0 & g_-^{i,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_+^j \\ Y_-^j \end{pmatrix} = \frac{\check{\rho}^2}{2\beta_{\perp}} \begin{pmatrix} \delta_{ij} & -\frac{\check{k}_{\perp}^2}{2\check{k}_j^2 + \check{k}_{\perp}^2} \delta_{ij} \\ -\frac{\check{k}_{\perp}^2}{2\check{k}_j^2 + \check{k}_{\perp}^2} \delta_{ij} & \delta_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_+^j \\ Y_-^j \end{pmatrix},$$

$$\Delta\check{k} \begin{pmatrix} \frac{(2\check{k}_i^2 + \check{k}_{\perp}^2)^2}{4\check{k}_i^2(\check{k}_i^2 + \check{k}_{\perp}^2)} \delta_{ik} & \frac{2\check{k}_i^2\check{k}_{\perp}^2 + \check{k}_{\perp}^4}{4\check{k}_i^2(\check{k}_i^2 + \check{k}_{\perp}^2)} \delta_{ik} \\ \frac{2\check{k}_i^2\check{k}_{\perp}^2 + \check{k}_{\perp}^4}{4\check{k}_i^2(\check{k}_i^2 + \check{k}_{\perp}^2)} \delta_{ik} & \frac{(2\check{k}_i^2 + \check{k}_{\perp}^2)^2}{4\check{k}_i^2(\check{k}_i^2 + \check{k}_{\perp}^2)} \delta_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_+^{i,j} & 0 \\ 0 & g_-^{i,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_+^j \\ Y_-^j \end{pmatrix} = \frac{\check{\rho}^2}{2\beta_{\perp}} \begin{pmatrix} Y_+^k \\ Y_-^k \end{pmatrix}, \quad (80)$$

где $\Delta\check{k} = 2\check{k}_{\max}/(2n - 1) = \check{k}_{i+1} - \check{k}_i$. Таким образом, численное решение системы (79) сводится к нахождению собственных векторов и собственных значений симметричной комплексной матрицы. Изменяя $\operatorname{Re}[\omega]$, можно найти зависимость собственного значения от частоты при фиксированных анизотропии, поперечном волновом векторе, ларморовском радиусе и инкременте неустойчивости. Обращению мнимой части собственного значения в ноль соответствует появление собственной моды, откуда можно найти ее частоту, β_{\perp} , при котором она существует и распределение возмущений полей. Мода с минимальным β_{\perp} определяет порог неустойчивости.

Приложение 3

Средние значения на траектории частицы

Резонансные частицы располагаются в области $\mathcal{M} \approx \alpha/2$. Из выражения для гамильтониана $\mathcal{H} = (\mathcal{M} - \alpha/2)^2 + 2w\sqrt{2\mathcal{M}_0} \cos \Phi - \alpha^2/4$ видно, что на траектории резонансной частицы \mathcal{M} отклоняется от $\alpha/2$ на величину порядка \sqrt{w} , при этом $\mathcal{H} + \alpha^2/4 < 2w\sqrt{2\mathcal{M}_0} = 2w\sqrt{\alpha}$.

В выражении для периода движения

$$T = 2 \int_{\mathcal{M}_{\min}}^{\mathcal{M}_{\max}} \frac{d\mathcal{M}}{\sqrt{8w^2\mathcal{M} - (\mathcal{H} - \mathcal{M}^2 + \alpha\mathcal{M})^2}} \quad (81)$$

удобно сделать замену переменной интегрирования $\mathcal{M} = \alpha/2 + \sqrt{2w\alpha}^{1/4}y$, и заменить $\mathcal{H} = 2w\sqrt{\alpha}h - \alpha^2/4$, тогда

$$T = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{2}{(2w\sqrt{\alpha})^{-1/2}dy} \sqrt{1 + 2\sqrt{2w\alpha}^{-3/4}y - (h - y^2)^2} \approx$$

$$\approx \int_{y_-}^{y_+} \frac{2(2w\sqrt{\alpha})^{-1/2}dy}{\sqrt{(y - y_-)(y_+ - y)\{2 + (2 + (y_+ + y_-)^2)(1 - 2h) + (2y + y_+ + y_-)^2\}}},$$

где $y_{\pm} = \pm\sqrt{h+1} + \sqrt{w}/(\sqrt{2\alpha}^{3/4}) \mp w(2h+1)/(4\alpha^{3/2}\sqrt{h+1}) + O(w^{3/2})$.

Замена переменной $y = (y_+ + y_-)/2 + z(y_+ - y_-)/2$ позволяет избавиться от зависимости пределов интегрирования от w . Раскладывая подынтегральное выражение по w и интегрируя, получим

$$T = \frac{8}{\alpha^{1/4}\sqrt{w}} \left(K\left(\frac{h+1}{2}\right) - \frac{w}{4\alpha^{3/2}(h^2-1)} \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ 2(4h^2-3)E\left(\frac{h+1}{2}\right) - (4h^2-3-h)K\left(\frac{h+1}{2}\right) \right\} + O(w^2) \right). \quad (82)$$

Здесь $K(x) = \int_0^1 dy/\sqrt{(1-y^2)(1-xy^2)}$ и $E(x) = \int_0^1 dy\sqrt{1-xy^2}/\sqrt{1-y^2}$ — полные эллиптические интегралы второго рода.

После аналогичных вычислений можно найти $\overline{\mathcal{M}}$ и $\overline{\mathcal{M}^2}$ на резонансных траекториях:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}} &= \frac{\alpha}{2} + \frac{w}{\sqrt{\alpha}} \left(2 \frac{E(h/2 + 1/2)}{K(h/2 + 1/2)} - 1 \right) + O(w^2), \\ \overline{\mathcal{M}^2} &= \frac{\alpha^2}{4} + w\sqrt{\alpha} \left(6 \frac{E(h/2 + 1/2)}{K(h/2 + 1/2)} + 2h - 3 \right) + O(w^2).\end{aligned}\quad (83)$$

Используя соотношение $2w\sqrt{2\overline{\mathcal{M}}} \cos \Phi = (\mathcal{H} - \mathcal{M}^2 + \alpha\mathcal{M}) = 2wh\sqrt{\alpha} - (\mathcal{M} - \alpha/2)^2 = 2wh\sqrt{\alpha} - \{\mathcal{M}^2 - \alpha^2/4 - \alpha(\mathcal{M} - \alpha/2)\}$, найдем

$$\sqrt{2\overline{\mathcal{M}}} \cos \Phi = \sqrt{\alpha} \left(1 - 2 \frac{E(h/2 + 1/2)}{K(h/2 + 1/2)} \right) + O(w). \quad (84)$$

При вычислении средних по траектории нерезонансной частицы считаем, что траектория лежит далеко от сепаратрисы, $|2\mathcal{M}_0 - \alpha| \gg w\mathcal{M}_0$. В выражении для периода движения (81) сделаем замену переменной $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + wy$, где \mathcal{M}_0 определяется выражением $\mathcal{H} = \mathcal{M}_0^2 - \alpha\mathcal{M}_0$, тогда

$$\begin{aligned}T &= 2 \int_{y_-}^{y_+} \frac{dy}{\sqrt{8\mathcal{M}_0 + 8wy - y^2(2\mathcal{M}_0 - \alpha + wy)^2}} = \\ &= \int_{y_-}^{y_+} 2dy \{(y_+ - y)(y - y_-) \times \\ &\times (8w^2(\mathcal{M}_0 - 2\alpha)/(2\mathcal{M}_0 - \alpha)^2 + (2\mathcal{M}_0 - \alpha + wy)^2)\}^{-1/2} + O(w^4),\end{aligned}\quad (85)$$

Здесь $y_{\pm} = \pm 2\sqrt{2\mathcal{M}_0} \{1 - w^2(4\mathcal{M}_0^2 - 8\mathcal{M}_0\alpha - \alpha^2)/(\mathcal{M}_0(2\mathcal{M}_0 - \alpha)^5)\} / (2\mathcal{M}_0 - \alpha) - 4w\alpha/(2\mathcal{M}_0 - \alpha)^3 + O(w^3)$. Произведя замену $y = (y_+ - y_-)z/2 + (y_+ + y_-)/2$, получим

$$\begin{aligned}T &= \int_{-1}^1 \frac{2dz}{\sqrt{1 - z^2}} \{8w^2(\mathcal{M}_0 - 2\alpha)/(2\mathcal{M}_0 - \alpha)^2 + \\ &+ (2\mathcal{M}_0 - \alpha + w(y_+ - y_-)z/2 + w(y_+ + y_-)/2)^2\}^{-1/2} + O(w^4).\end{aligned}\quad (86)$$

Разлагая по w , найдем

$$T = \frac{\pi}{|2\mathcal{M}_0 - \alpha|} + \frac{12\pi w^2 \alpha}{|2\mathcal{M}_0 - \alpha|^5} + O(w^4). \quad (87)$$

После аналогичных вычислений получим

$$\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_0 - \frac{4w^2(\alpha + \mathcal{M}_0)}{(2\mathcal{M}_0 - \alpha)^3} + O(w^4), \quad \overline{\mathcal{M}^2} = \mathcal{M}_0^2 - \frac{12w^2 \alpha \mathcal{M}_0}{(2\mathcal{M}_0 - \alpha)^3} + O(w^4). \quad (88)$$

Из соотношения $2w\sqrt{2\overline{\mathcal{M}}}\cos\Phi = (\mathcal{H} + \alpha^2/4) - (\mathcal{M} - \alpha/2)^2 = (\mathcal{M}_0 - \alpha/2)^2 - (\mathcal{M} - \alpha/2)^2$ следует, что на нерезонансной траектории

$$\sqrt{2\overline{\mathcal{M}}}\cos\Phi = \frac{2w\alpha}{(2\mathcal{M}_0 - \alpha)^2} + O(w^3). \quad (89)$$

Приложение 4

Усреднение по распределению ионов

При интегрировании распределения частиц удобно перейти к переменным \mathcal{M} , α , \mathcal{H} . Якобиан преобразования $d\mathcal{M}d\alpha d\Phi = \{8w^2\mathcal{M} - (\mathcal{H} - \mathcal{M}^2 + \alpha\mathcal{M})^2\}^{-1/2}d\mathcal{M}d\alpha d\mathcal{H}$. Таким образом,

$$\int f d\mathcal{M}d\alpha d\Phi = \int T(\mathcal{H}, \alpha) \bar{f} d\mathcal{H}d\alpha, \quad (90)$$

где \bar{f} и T обозначают среднее по траектории и период движения при заданных \mathcal{H} и α .

В пределе $|1 - \omega/\Omega_{ci}| \ll 1$ функция распределения резонансных частиц (54) упрощается:

$$\mathcal{F} = \tau_d S_0 H(h_{inj} - h) \frac{G'(h_{inj})}{2G(h_{inj})} \left(\frac{\alpha}{\alpha_{inj}} \right)^{\tau_d/(2\tau_{ex})-3/2} \delta \left(\alpha \frac{G(h_{inj})}{G(h)} - \alpha_{inj} \right). \quad (91)$$

Плотность частиц (используем соотношение $G'(h) = 2G^{3/4}K(h/2+1/2)$) равна

$$\begin{aligned} \int \mathcal{F} d\mathcal{M}d\Phi d\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-1}^1 dh (2w\sqrt{\alpha}) \frac{8}{\alpha^{1/4}\sqrt{w}} K(h/2 + 1/2) \mathcal{F} = \\ &= 8\tau_d S_0 \sqrt{w} \frac{G'(h_{inj})}{G(h_{inj})} \int_{-1}^{h_{inj}} dh \left(\alpha_{inj} \frac{G(h)}{G(h_{inj})} \right)^{1/4} \frac{G'(h)}{2G^{3/4}} \left(\frac{G(h)}{G(h_{inj})} \right)^{\tau_d/(2\tau_{ex})-1} = \\ &= 4\tau_d S_0 \sqrt{w} \frac{\alpha_{inj}^{1/4} G'(h_{inj})}{G(h_{inj})^{3/4}} \int_{-1}^{h_{inj}} dh \frac{G'(h)}{G(h_{inj})} \left(\frac{G(h)}{G(h_{inj})} \right)^{\tau_d/(2\tau_{ex})-1} = \\ &= 8\tau_{ex} S_0 \sqrt{w} \frac{\alpha_{inj}^{1/4} G'(h_{inj})}{G(h_{inj})^{3/4}} = 16\tau_{ex} \sqrt{w} S_0 \alpha_{inj}^{1/4} K(h_{inj}/2 + 1/2). \end{aligned} \quad (92)$$

Отклонение среднего продольного импульса от $1 - \omega/\Omega_{ci}$

$$\begin{aligned}
& \int (\mathcal{M} - \alpha/2) \mathcal{F} d\mathcal{M} d\Phi d\alpha = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-1}^1 dh \frac{16w^{3/2}}{\alpha^{1/4}} \{2E(h/2 + 1/2) - K(h/2 + 1/2)\} \mathcal{F} = \\
&= 8S_0 w^{3/2} \frac{G'(h_{inj})}{G(h_{inj})} \int_{-1}^{h_{inj}} \left(\frac{\alpha_{inj} G(h)}{G(h_{inj})} \right)^{-1/4} \left(\frac{G(h)}{G(h_{inj})} \right)^{\tau_d/(2\tau_{ex})-1/2} \times \\
& \quad \times \{2E(h/2 + 1/2) - K(h/2 + 1/2)\}. \quad (93)
\end{aligned}$$

Средний поперечный ток равен

$$\begin{aligned}
& \int \sqrt{2\mathcal{M}} \cos \Phi \mathcal{F} d\mathcal{M} d\Phi d\alpha = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-1}^1 dh (16\sqrt{w}\alpha^{3/4}) \{K(h/2 + 1/2) - 2E(h/2 + 1/2)\} \mathcal{F} = \\
&= 8S_0 \sqrt{w} \frac{G'(h_{inj})}{G(h_{inj})} \int_{-1}^{h_{inj}} \left(\frac{\alpha_{inj} G(h)}{G(h_{inj})} \right)^{3/4} \left(\frac{G(h)}{G(h_{inj})} \right)^{\tau_d/(2\tau_{ex})-1/2} \times \\
& \quad \times \{K(h/2 + 1/2) - 2E(h/2 + 1/2)\}. \quad (94)
\end{aligned}$$

При усреднении распределения нерезонансных частиц также удобно перейти к интегрированию по траекториям, $f d\mathcal{M} d\Phi d\alpha = \bar{f} T(\mathcal{H}, \alpha) d\mathcal{H} d\alpha$. При этом удобно сделать замену $\mathcal{H} = \mathcal{M}_0^2 - \alpha \mathcal{M}_0$, $d\mathcal{H} = (2\mathcal{M}_0 - \alpha) d\mathcal{M}_0 = 2\pi T(\mathcal{H}, \alpha)^{-1} d\mathcal{M}_0$.

Средняя плотность нерезонансных частиц для распределения (51) равна

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{F} d\mathcal{M} d\Phi d\alpha &= \frac{\pi S_0}{\mathcal{M}_{inj}} \int_0^{\mathcal{M}_{inj}} \left(\frac{\mathcal{M}_0}{\mathcal{M}_{inj}} \right)^{\tau_d/(2\tau_{ex})-1} d\mathcal{M}_0 + O(w^2) = \\
&= 2\pi S_0 \frac{\tau_{ex}}{\tau_d} + O(w^2), \quad (95)
\end{aligned}$$

Вводя продольную скорость инжекции $V_{\parallel inj} = (\mathcal{M}_{inj} - \alpha_{inj}/2 + \omega/\Omega_{ci} - 1)\Omega_{ci}/k$, найдем среднюю продольную скорость ионов

$$\begin{aligned}
& \int (\mathcal{M} - \alpha/2 + \omega/\Omega_{ci} - 1) \mathcal{F} d\mathcal{M} d\Phi d\alpha = \\
& = \frac{\pi S_0}{\mathcal{M}_{inj}} \frac{kV_{\parallel inj}}{\Omega_{ci}} \int_0^{\mathcal{M}_{inj}} \left(\frac{\mathcal{M}_0}{\mathcal{M}_{inj}} \right)^{\tau_d/(2\tau_{ex})-1/2} d\mathcal{M}_0 + O(w^2) = \\
& = 2\pi S_0 \frac{\tau_{ex}}{\tau_d + \tau_{ex}} \frac{kV_{\parallel inj}}{\Omega_{ci}}. \tag{96}
\end{aligned}$$

Обозначая $u = (\omega - \Omega_{ci})/(kV_{\parallel inj})$, запишем поперечный ток

$$\begin{aligned}
& \int \sqrt{2\mathcal{M}} \cos \Phi \mathcal{F} d\mathcal{M} d\Phi d\alpha = \frac{\pi w S_0}{\mathcal{M}_{inj}} \times \\
& \times \int_0^{\mathcal{M}_{inj}} \frac{2\mathcal{M}_0 - (\sqrt{\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_{inj}} - u)kV_{\parallel inj}/\Omega_{ci}}{(kV_{\parallel inj}/\Omega_{ci})^2 (\sqrt{\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_{inj}} - u)^2} \left(\frac{\mathcal{M}_0}{\mathcal{M}_{inj}} \right)^{\tau_d/(2\tau_{ex})-1} d\mathcal{M}_0 = \\
& 2\pi w S_0 \int_0^1 \frac{\mathcal{M}_{inj} x^2 - (kV_{\parallel inj}/\Omega_{ci})(x - u)}{(kV_{\parallel inj}/\Omega_{ci})^2 (x - u)^2} x^{\tau_d/\tau_{ex}-1} dx = \\
& 2\pi w S_0 \left(\mathcal{M}_{inj} \frac{{}_2F_1(2, \tau_d/\tau_{ex} + 2; \tau_d/\tau_{ex} + 3; 1/u)}{(\omega/\Omega_{ci} - 1)^2 (\tau_d/\tau_{ex} + 2)} - \right. \\
& \left. - \frac{\tau_{ex}}{\tau_d} \frac{{}_2F_1(1, \tau_d/\tau_{ex}; \tau_d/\tau_{ex} + 1; 1/u)}{\omega/\Omega_{ci} - 1} \right). \tag{97}
\end{aligned}$$

Здесь ${}_2F_1(a, b; c; x)$ есть гипергеометрическая функция.

Литература

- [1] Р.З. Сагдеев, В.Д. Шафранов. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле // ЖЭТФ. -1960. -Т. 39. -С. 181-184.
- [2] Дж. Хединг. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965. 239 с.
- [3] В.С. Беликов, Я.И. Колесниченко, В.Н. Ораевский. Устойчивость магнитоактивной плазмы с моноэнергетической компонентой // ЖЭТФ. -1968. -Т. 55. С. 2210-2212.
- [4] P. Palmadesso, G. Schmidt. Collisionless damping of a large amplitude whistler wave // Phys. Fluids. -1971. -V. 14. -P. 1411-1418.
- [5] J.A. Lehane, F.J. Paoloni. The propagation of non-axisymmetric alfvén waves in an argon plasma. Plasma Physics. 1972. V 14, -p. 701-711.
- [6] А.Б. Михайловский. Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы, в сб. Вопросы теории плазмы, под ред. М.А. Леонтовича, выпуск 6, М.: Атомиздат, вып. 6, 1972. 296 с.
- [7] А.А. Галеев, Р.З. Сагдеев. Нелинейная теория плазмы, в сб.: Вопросы теории плазмы, под ред. М.А. Леонтовича, вып. 7, М.: Атомиздат, 1973. 304 с.
- [8] В.С. Беликов, Я.И. Колесниченко, В.Н. Ораевский. Нелинейная теория термоядерной альфвеновской неустойчивости плазмы // ЖЭТФ. -1974. -Т. 66. С. 1686-1692.

- [9] R.C. Davidson, J.M. Ogden. Electromagnetic ion-cyclotron instability driven by ion energy anisotropy in high-beta plasmas // *Phys. Fluids*. - 1975. -V. 18. -P. 1045-1050.
- [10] T. Tajima, K. Mima, J.M. Dawson, Alfvén ion-cyclotron instability: its physical mechanism and observation in computer simulation // *Plasma Review Letters*. -1977. -V 39. -№ 4. P. 201-204.
- [11] А.Ф. Александров, Л.С. Богданкевич, А.А. Рухадзе. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978. 407 с.
- [12] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Теоретическая физика. Т. X. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
- [13] Л.Л. Арцимович, Р.З. Сагдеев. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979. 320 с.
- [14] D.C. Watson. Alfvén ion-cyclotron instability in mirror machines // *Phys. Fluids*. -1980. -V 23. -P. 2485-2492.
- [15] T.D. Rognlien, Y. Matsuda. Tandem mirror confinement in the presence of ion cyclotron fluctuations // *Nucl. Fusion*. -1981. -V 21. № 3. -P. 345-358.
- [16] R.P. Drake, T.A. Casper, J.F. Clauser, et. al. The effects of end-cell stability on the confinement of the central-cell plasma in TMX // *Nucl. Fusion*. -1981. -V 21. -№ 3. -P. 359-364.
- [17] T.A. Casper, G.R. Smith. Observation of Alfvén ion-cyclotron instability in the end-cell plasma in the Tandem mirror experiment // *Phys. Rev. Lett*. -1982. -V 48. -№ 15. -P. 1015-1018.

- [18] A. Bers. Пространственно-временная эволюция абсолютных и конвективных плазменных неустойчивостей, в сб. Основы физики плазмы, т.2, под ред. А.А. Галеева и Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1984. 632 с.
- [19] G.R. Smith. Alfvén ion-cyclotron instability in tandem-mirror plasmas. I // Phys. Fluids. -1984. -V. 27. -P. 1499-1513.
- [20] G.R. Smith, W.M. Nevins, W.M. Sharp. Alfvén ion-cyclotron instability in tandem-mirror plasmas. II // Phys. Fluids. -1984. -V. 27, -P. 2120-2128.
- [21] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [22] R.F. Post. The magnetic mirror approach to fusion // Nucl. Fusion. -1987. -V 27. -P. 1579-1739.
- [23] T.C. Simonen. Summary of TMX-U result, Rep. UCID-17011049 ,Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, CA (USA), 1984.
- [24] Б.В. Чириков. Динамика частиц в магнитных ловушках, в сб. Вопросы теории плазмы, под ред. Б.Б. Кадомцев, вып. 13. М.: Энергоиздат, 1984.
- [25] S.K. Ho, W.M. Nevins, G.R. Smith, G.H. Miley. Alpha loss-cone Alfvén-wave instabilities in a sharp-boundary model of a tandem-mirror central cell // Phys. Fluids. -1988. -V. 31. -P. 1656-1672.
- [26] И.А. Котельников, Д.Д. Рютов, Ю.А. Цидулко, В.В. Катышев, А.В. Комин, В.М. Кривошеев, Математическая модель источника нейтронов на основе газодинамической ловушки // Новосибирск: препринт ИЯФ СО-АН СССР, № 90-105. -1990.

- [27] В.С. Лазько. Движение заряженной частицы во вращающемся электромагнитном поле винтовой конфигурации // Физика плазмы. -1994. -Т. 20, -С. 523-525.
- [28] Д.А. Панов, А.В. Тимофеев. О селективном нагреве ионов многоизотопной плазмы неоднородным ВЧ-полем // Физика плазмы. -1995. -Т 21. -С. 1092-1098.
- [29] А.Н. Ляхов, В.И. Хвесюк. Об условиях стабилизации микронеустойчивостей в ловушке ГАММА-10 // Письма в ЖТФ. -1996. -Т. 22. -Вып. 20. -С. 15-18.
- [30] А.Н. Ляхов, В.И. Хвесюк. Стабилизация кинетических неустойчивостей в амбиполярном реакторе на D-3He // Письма в ЖТФ. -1996. -Т. 22. -Вып. 12. -С. 29-33.
- [31] R. Katsumata, M. Ichimura, M. Inutake, H. Hojo, A. Mase, T. Tamano. Eigenmode excitation of Alfvén ion cyclotron instability // Phys. Plasmas. -1996. -V. 3, -N. 12, -P. 4489.
- [32] А.В. Тимофеев, Резонансные явления в колебаниях плазмы. М.: Физматлит, 2000. 224 с.
- [33] P. Hellinger, P. Trávníček, A. Mangeney, R. Grappin. Hybrid simulations of the magnetosheath compression: Marginal stability path // Geophysical Research Letters. -2003. -V. 30. -P. SSC 13-1 - SSC 13-4.
- [34] Ю.А. Цидулко, И.С. Черноштанов. Нелинейные волны со спиральной симметрией // Новосибирск: Препринт ИЯФ СО РАН, № 2009-003. - 2009.

- [35] Ю.А. Цидулко, И.С. Черноштанов, Нелинейная стадия альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости // Вестник НГУ. Серия: Физика. -2010. -Т. 5(3), -с. 90-94.
- [36] M. Ichimura, Y. Yamaguchi, R. Ikezoe, Y. Imai, T. Murakami, T. Iwai, T. Yokoyama, T. Sato, Y. Ugajin, T. Imai. Radial Transport of High-Energy Ions Caused by Low-Frequency Fluctuations in the GAMMA 10 Tandem Mirror // Fusion Science and Technology. -2011. -V. 59(1T). -P. 98-103.
- [37] A.V. Anikeev, P.A. Bagryansky, I.S. Chernoshtanov, M.S. Korzhavina, V.V. Prikhodko, Yu.A. Tsidulko. Study of microinstabilities in anisotropic plasmoid of thermonuclear ions // Fusion Science and Technology. -2011. -V. 59(1T). -P. 104-107.
- [38] I.S. Chernoshtanov, Yu.A. Tsidulko. Alfvén ion-cyclotron instability in a mirror trap with highly anisotropic plasma // Fusion Science and Technology. -V. 59(1T). -P. 116-119.
- [39] I.S. Chernoshtanov, Yu.A. Tsidulko. Alfvén ion-cyclotron instability in a mirror trap with skew injection of neutral beams // Fusion Science and Technology. -2013. -V. 63(1T). -P. 319-321.
- [40] K.V. Zaytsev, A.V. Anikeev, P.A. Bagryansky, A.S. Donin, O.A. Korobeinikova, M.S. Korzhavina, Yu.V. Kovalenko, A.A. Lizunov, V.V. Maximov, E.I. Pinzhenin. Kinetic instabilities observations in the Gas Dynamic Trap // Phys. Scr. -2014. -V. 2014. -N. T161. -P. 014004.
- [41] Ю.А. Цидулко, И.С. Черноштанов. Альфвеновская ионно-циклотронная неустойчивость в аксиально-симметричной ловушке с наклонной ин-

жекцией быстрых атомов // Физика плазмы. -2014. -Т. 40, № 12, -с. 1074-1083.