

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ ИМ. Г.И. БУДКЕРА  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Богомягков Антон Викторович

**ОДНОЧАСТИЧНЫЕ ЭФФЕКТЫ,  
ОГРАНИЧИВАЮЩИЕ ПАРАМЕТРЫ  
СОВРЕМЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ  
СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И  
ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ  
КОЛЛАЙДЕРОВ**

1.3.18. Физика пучков заряженных частиц и ускорительная техника

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН

Левичев Евгений Борисович

Новосибирск – 2024

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	5
<b>Глава 1 Обзор исследуемых источников нелинейного возмущения</b> . . . . .	22
1.1 Краткое введение в линейную теорию циклических ускорителей	28
1.2 Секступольное возмущение . . . . .	32
1.3 Октупольное возмущение . . . . .	51
1.4 Секступольное и октупольное возмущения . . . . .	54
1.5 Комбинации секступолей . . . . .	55
1.6 Края квадрупольных линз и нарушение параксиальности . . .	66
1.7 Нелинейный хроматизм . . . . .	74
1.8 Выводы . . . . .	83
<b>Глава 2 Источник СИ четвертого поколения ЦКП “СКИФ”</b> .	86
2.1 Масштабные свойства источников СИ с малым эмиттансом . .	88
2.2 Получение малого эмиттанса в накопителе электронов . . . . .	94
<b>Глава 3 Коллайдер Супер <math>c - \tau</math> фабрика</b> . . . . .	114
3.1 Светимость для встречи под углом . . . . .	116
3.2 Сдвиг частоты от встречного пучка для встречи под углом . .	121
3.3 Встреча в схеме крабовой перетяжки . . . . .	126
3.4 Ограничение динамической апертуры краб секступолями . . .	128
3.5 Супер $c - \tau$ фабрика . . . . .	132
<b>Глава 4 Эффекты излучения, ограничивающие параметры электрон-позитронных коллайдеров на сверхвысокую энергию</b>	151
4.1 Организация встречи пучков в FCC-ee . . . . .	153
4.2 Синхротронное излучение в поле встречного сгустка . . . . .	160

4.3	Ограничение динамической апертуры синхротронным излучением в квадрупольных линзах . . . . .	166
<b>Глава 5 Энергия и энергетическое разрешение в системе центра масс . . . . .</b>		
	<b>масс . . . . .</b>	<b>191</b>
5.1	Средневзвешенная по светимости энергия . . . . .	192
5.2	Поправки энергии на FCC-ee в экспериментах на энергии 45 ГэВ и 80 ГэВ . . . . .	196
5.3	Ошибки определения энергии в системе центра масс в эксперименте на $\Upsilon$ - мезоне на ВЭПП-4М . . . . .	201
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>205</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>208</b>
<b>Приложение А Гамильтониан частицы в циклическом ускорителе . . . . .</b>		
		<b>231</b>
<b>Приложение Б Решение уравнений движения методом рядов . . . . .</b>		
	<b>Б.1 Квадруполь . . . . .</b>	<b>242</b>
	<b>Б.2 Секступоль . . . . .</b>	<b>243</b>
	<b>Б.3 Октуполь . . . . .</b>	<b>244</b>
	<b>Б.4 Край квадруполя . . . . .</b>	<b>246</b>
<b>Приложение В Теория возмущений с преобразованиями Ли . . . . .</b>		<b>248</b>
<b>Приложение Г Краевые поля квадруполя . . . . .</b>		
	<b>Г.1 Поле, векторный потенциал и гамильтониан . . . . .</b>	<b>254</b>
<b>Приложение Д Параметрический резонанс . . . . .</b>		
	<b>Д.1 Параметрический резонанс без затухания и с независимой от амплитуды модуляцией . . . . .</b>	<b>259</b>

Д.2	Параметрический резонанс с затуханием и с независимой от амплитуды модуляцией . . . . .	260
Д.3	Параметрический резонанс с затуханием и с зависящей от амплитуды модуляцией . . . . .	261
<b>Приложение Е Гамильтониан движения в поле встречного пучка . . . . .</b>		<b>265</b>

# Введение

## Актуальность темы исследования

Накопители заряженных частиц предназначены для проведения исследований с пучками высокой энергии. К этому классу относятся электрон-позитронные коллайдеры, источники синхротронного излучения (СИ), охладители для подготовки пучков с нужными параметрами для дальнейшего использования и т.п. В XXI веке эксперименты с использованием источников синхротронного излучения (СИ) и электрон-позитронных коллайдеров потребовали вывода этих установок в новые области параметров — высоких яркости, светимости, энергетического разрешения и т.д. При разработке методов дальнейшего повышения характеристик накопителей частиц оказались существенными физические явления, которыми раньше можно было пренебречь. Изучению таких эффектов и поиску способов преодоления вызванных ими ограничений посвящена данная работа.

Диссертация объединяет результаты исследований, проведённых автором в ИЯФ СО РАН за период 2008–2023 гг., в процессе работы над достижением рекордной точности измерения энергии в накопителях электронов и позитронов, проектами современных  $e^+e^-$  коллайдеров с беспрецедентной светимостью и/или энергией, источников синхротронного излучения со сверхмалым (близким к дифракционному пределу) эмиттансом. Несмотря на кажущуюся разноплановость таких исследований, их объединяет предмет — ограничения эффективности экспериментальных возможностей установки на предельно достижимом уровне (светимости для коллайдеров, яркости для источников СИ, точности калибровки энергии пучка для исследований узких состояний и т.д.). Кроме того, все эти исследования требуют углублённого анализа динамики пучков, использования нестандартных методик, применения аналитических и численных вычислений повышенной точности. При этом, работа на пределе достигнутых характеристик (или с их превышением) приводит либо к необ-

ходимости изучения ранее не рассматривавшихся явлений, либо к обнаружению новых эффектов (например, ограничение динамической апертуры из-за синхротронного излучения в коллайдерах сверхвысокой энергии), либо к исследованию уже известных фактов, но с существенным увеличением уровня точности рассмотрения.

### **Степень разработанности темы исследования**

Источник СИ 4-го поколения должен обладать горизонтальным эмиттансом  $\varepsilon_x \lesssim 500$  пм; обсуждаются установки с эмиттансом  $\varepsilon_{x,y} = 10$  пм (что является дифракционным пределом для излучаемых фотонов с энергией 10 кэВ). В настоящее время большинство источников СИ принадлежит к 3-му поколению ( $\varepsilon_x \approx 1 - 10$  нм), для многих из них планируют модернизацию с целью уменьшения эмиттанса и перехода в 4-ое поколение. Работающих установок 4-го поколения на данный момент всего три, и в таблице 1 приведены существующие, строящиеся и проектируемые источники СИ 4-го поколения. Основной проблемой этих установок является деградация динамической и энергетической апертур по мере уменьшения эмиттанса. Динамическая апертура становится такой маленькой, что не позволяет использовать традиционных надёжных и эффективных схем инжекции. Кроме того, малая энергетическая апертура ограничивает время жизни пучка, из-за возросшего влияния эффекта Тушека [16; 17] (однократное внутри сгустковое рассеяние) при малых размерах и большом токе пучка. В Новосибирске создаётся источник СИ четвёртого поколения ЦКП “СКИФ”, уникальностью которого является малый эмиттанс  $\varepsilon_x \approx 75$  пм совместно с достаточно большой динамической апертурой, позволяющей применять стандартную схему инжекции, хорошим временем жизни пучка и относительно небольшим периметром.

Таблица 1 – Сравнение существующих (\*), строящихся и проектируемых источников СИ 4-го поколения

Установка	Страна	$E$ , ГэВ	$P$ , м	$\varepsilon_x$ , пм
ALS-U [1]	США	2	196	70
SLS 2.0 [2]	Швейцария	2.4	288	131
ELETRA 2 [3]	Италия	2.4	259	212
SOLEIL II [4]	Франция	2.75	354	84
СКИФ [5]	Россия	3	476	72
SIRIUS* [6]	Бразилия	3	518	250
MAX IV* [7]	Швеция	3	528	330
DIAMOND II [8]	Англия	3	560	162
ESRF-EBS* [9]	Франция	6	844	133
APS-U [10]	США	6	1104	42
HEPS [11; 12]	Китай	6	1360	60
Spring-8 II [13]	Япония	6	1436	140
PETRA IV [14]	Германия	6	2304	20
СИЛА [15]	Россия	6	1100	72

На рисунке 1 показана достигнутая пиковая светимость в  $e^-e^+$  коллайдерах в зависимости от энергии и года реализации. Возможность дальнейшего

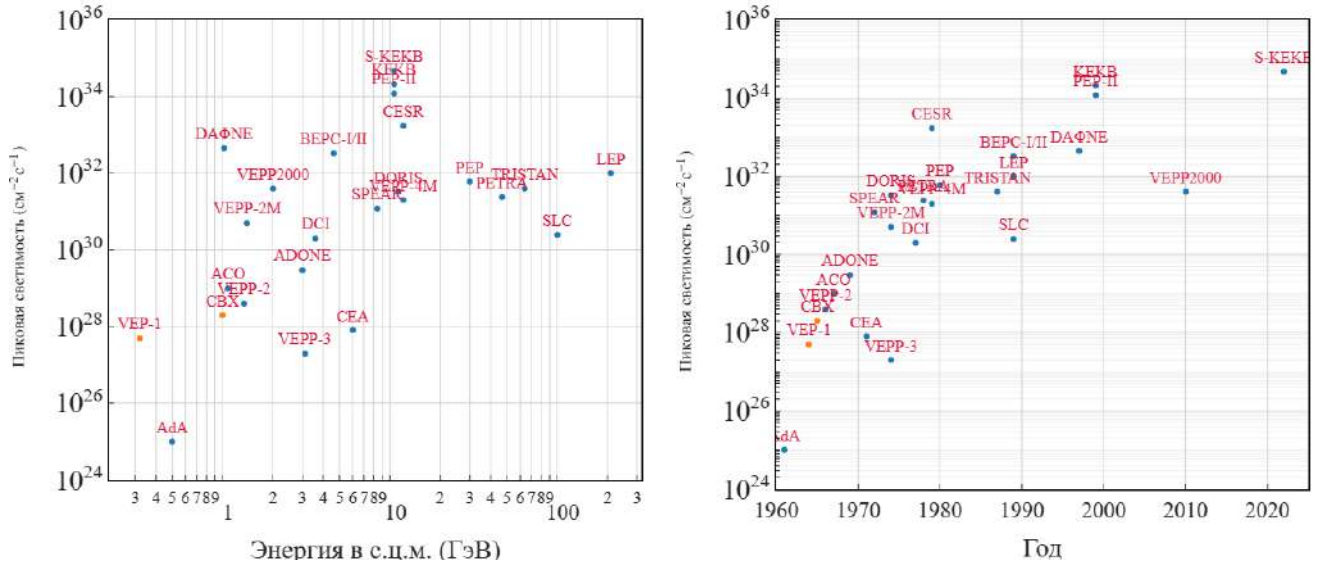


Рисунок 1 – Светимость  $e^-e^+$  коллайдеров в зависимости от энергии в системе центра масс сталкивающихся пучков (слева) и в зависимости от года работы

увеличения светимости в будущих проектах (таблица 2) связывается с использованием новой схемы встречи пучков, названной “крабовой перетяжкой” (по английски Crab Waist) [18].

Таблица 2 – Сравнение существующих (\*) и проектируемых коллайдеров с крабовой перетяжкой

Установка	Страна	$E_{с.ц.м.}$ , ГэВ	$\mathcal{L}$ , $см^{-2}см^{-1}$
DAΦNE* [19]	Италия	1.02	$4.5 \times 10^{32}$
SuperKEKB* [20]	Япония	10.58	$4.71 \times 10^{34}$
SuperB [21]	Италия	10	$1 \times 10^{36}$
FCCee [22]	Швейцария	90 – 365	$230 – 1.6 \times 10^{34}$
CEPC [23]	Китай	90 – 360	$230 – 1 \times 10^{34}$
Супер $c$ - $\tau$ фабрика [24]	Китай	2 – 7	$0.5 – 0.8 \times 10^{35}$
Супер $c$ - $\tau$ фабрика [25]	Россия	3 – 7	$0.29 – 1 \times 10^{35}$

Реализация преимуществ новой схемы пересечения встречается со значитель-



ными трудностями связанными с ограничением динамической апертуры, времени жизни пучка, организацией сложного участка финального фокуса внутри детектора и т.д. Некоторые (но не все) аспекты новой схемы встречи были успешно испытаны в коллайдере DAΦNE [26; 27], что позволило увеличить светимость в три раза. Дальнейшее увеличение светимости ограничивались невозможностью модификации работающей установки с целью реализации полной схемы.

Опыт работы крабовой перетяжки в коллайдере Super-KEKB (работающим в настоящее время) показал увеличение светимости более чем в два раза до  $\mathcal{L} = 4.71 \times 10^{34} \text{ см}^{-2}\text{см}^{-1}$  [20], но непредвиденные (и не всегда понятные) трудности не позволяют в настоящее время достигнуть проектной светимости  $\mathcal{L} = 8 \times 10^{35} \text{ см}^{-2}\text{см}^{-1}$  [28]. Уменьшение динамической апертуры при включении крабового секступоля наблюдается во всех проектах, что приводит к существенному уменьшению времени жизни пучка из-за внутрисгусткового рассеяния (эффект Тушека) [16; 17] в коллайдерах с энергией пучка меньшей 3 ГэВ. Например, в Новосибирском проекте Супер  $s$ - $\tau$  фабрики 2011 года время жизни пучка составляет меньше 30 с на энергии пучка  $E = 1.5$  ГэВ при светимости  $\mathcal{L} = 1 \times 10^{35} \text{ см}^{-2}\text{см}^{-1}$  [25; 29].

В коллайдерах на сверхвысокую энергию с экстремально малой вертикальной бета-функцией в точке встречи (соответственно, очень большие бета-функции в финальных квадрупольных линзах) появилось ограничение динамической апертуры за счёт синхротронного излучения в финальных линзах [30]. Ограничение горизонтальной апертуры было замечено ранее на коллайдере LEP [31], но ограничение вертикальной устойчивой амплитуды движения даже в отсутствие нелинейных элементов было обнаружено впервые с помощью численного моделирования и объясняется ниже.

Измерение массы  $\Upsilon$ -мезона с наилучшей точностью было произведено на ВЭПП-4 с детектором MD-1 и составило  $m_\Upsilon = 9460.40 \pm 0.10$  МэВ [32–34]. В настоящее время на коллайдере ВЭПП-4М с детектором КЕДР [35] заплани-

ровано новое измерение массы  $\Upsilon$ -мезона с точностью лучшей 0.05 МэВ.

Параметры  $Z$  бозона  $m_Z = 91187.5 \pm 2.1$  МэВ,  $\Gamma_Z = 2495.2 \pm 2.2$  МэВ с рекордной точностью были определены на LEP [36], а параметры  $W$  бозона были измерены на Тэватроне  $m_W = 80.379 \pm 0.012$  ГэВ [37; 38]. На коллайдере FCC-ее запланировано улучшить точность измерения масс  $Z$  бозона (энергия пучка  $E_0 = 45.6$  ГэВ) до 100 кэВ ( $\Delta E/E_0 \lesssim 2 \cdot 10^{-6}$ ) и  $W$  бозона (энергия пучка  $E_0 = 80$  ГэВ) до 500 кэВ ( $\Delta E/E_0 \lesssim 6 \cdot 10^{-6}$ ) [22], с использованием метода резонансной деполяризации (РД) [39; 40] для калибровки энергии пучка.

**Целями диссертационной работы** являются:

1. обоснование и создание магнито-оптической структуры источника СИ 4-го поколения ЦКП “СКИФ” с рекордно малым (для такого класса установок) горизонтальным эмиттансом,
2. выбор параметров и построение оптической структуры Супер  $s$ - $\tau$  фабрики для достижения беспрецедентной светимости  $\mathcal{L} = 1 \times 10^{35}$  см<sup>-2</sup>см<sup>-1</sup> и времени жизни пучка по эффекту Тушека больше 300 с,
3. исследование новых эффектов в динамике пучка будущего циклического коллайдера на сверхвысокую энергию FCC-ее, ограничивающих его работу,
4. достижение рекордной точности измерения энергии в системе центра масс в экспериментах на накопителях электронов и позитронов.

Для достижения поставленных целей были решены следующие **задачи**:

1. рассмотрены источники нелинейного возмущения, ограничивающие динамическую апертуру в циклических ускорителях, такие как секступоль, октуполь, комбинации секступолей и октуполей, края квадрупольных линз и нарушение параксиальности,

2. построена теория нелинейного хроматизма оптических функций до 3-го порядка,
3. рассмотрены масштабные свойства источников СИ, определившие фундаментальные подходы к созданию магнитной структуры источника СИ ЦКП “СКИФ”,
4. исследована ячейка с минимальным эмиттансом ТМЕ, на ее основе создана магнитная структура накопителя “СКИФ”,
5. исследовано ограничение динамической апертуры крабовыми секступолями в проекте Супер  $s$ - $\tau$  фабрики,
6. найдена оптическая структура Супер  $s$ - $\tau$  фабрики, позволяющая достигнуть светимости  $\mathcal{L} = 1 \times 10^{35} \text{ см}^{-2}\text{см}^{-1}$  и времени жизни пучка по эффекту Тушека больше 300 с,
7. изучено многократное влияние пучкового излучения на параметры пучка, найдены их равновесные значения, и предложены новые параметры FCC-ee,
8. предложена альтернативная структура промежутка встречи с полноценными секциями коррекции хроматизма для FCC-ee,
9. обнаружено и исследовано новое ограничение динамической апертуры синхротронным излучением в финальных линзах FCC-ee,
10. найдены выражения для средневзвешенной по светимости энергии с учётом хроматизмов оптических функций,
11. рассчитаны поправки и ошибки определения энергии в системе центра масс для экспериментов на ВЭПП-4М по измерению массы  $\Upsilon$ -мезона и на FCC-ee по измерению масс и ширин  $Z$  и  $W^\pm$  бозонов.

## Научная новизна

1. Впервые сделаны аналитические расчёты динамической апертуры для секступольного возмущения не использующие приближения изолированного резонанса для секступольного возмущения (параграф 1.2), совпадающие с результатами численного моделирования и объясняющие пороговое уменьшение горизонтальной апертуры при переходе от одномерного движения к двумерному (при бесконечно малой вертикальной амплитуде).
2. Впервые обнаружена интерференция секступольного и октупольного потенциалов в высоких порядках теории возмущений (параграф 1.4), “Замешивание” секступольных и октупольных членов может накладывать ограничения на коррекцию динамической апертуры октупольными линзами.
3. Впервые найдены варианты комбинаций секступолей без квадратичных aberrаций (параграф 1.5), помимо хорошо известной  $-I$  пары секступолей.
4. Впервые для  $-I$  пары секступолей (параграф 1.5)
  - a) оценено искажение фазовых траекторий, не ограничивающее динамическую апертуру непосредственно, но приводящее к потерям частиц на границе физической апертуры из-за большого биения амплитуды,
  - b) рассчитано влияние толщины секступолей на динамическую апертуру и предложен способ коррекции такого влияния,
  - c) аналитически оценены зависимость частоты от амплитуды и ограничение апертуры,

- d) найдена зависимость динамической апертуры от величины неточности минус-единичного преобразования.
5. Впервые получены выражения для хроматизма оптических функций до третьего порядка (параграф 1.7), позволившие выбрать схему организации секступолей в Супер  $c - \tau$  фабрике для увеличения энергетической апертуры.
  6. Впервые найдены и исследованы четыре решения симметричной ячейки магнитной структуры источника СИ типа ТМЕ, прослежена связь с параметрами накопителя.
  7. На основе полученных результатов создаётся первый в России источник СИ 4-го поколения ЦКП “СКИФ” со сверхмалым (близким к дифракционному пределу) горизонтальным эмиттансом  $\varepsilon_x = 72$  пм при энергии пучка 3 ГэВ.
  8. Впервые получена структура и параметры Супер  $c-\tau$  фабрики со светимостью  $\mathcal{L} = 10^{35} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$  на энергиях пучка 2.5 – 3.5 ГэВ, на энергии 2 ГэВ светимость составила  $\mathcal{L} = 4 \times 10^{34} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$ , на энергии 1.5 ГэВ  $\mathcal{L} = 2.9 \times 10^{34} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$  с током пучка в 3 А и временем жизни пучка за счёт эффекта Тушека  $\geq 300$  с.
  9. Впервые подробно исследован многократный эффект пучкового излучения (beamstrahlung), приводящий к установлению новых равновесных энергетического разброса и продольного размера, оптимизированы параметры коллайдера FCC-ee, увеличившие светимость 1.5–10 раз в разных экспериментальных режимах работы [41].
  10. Впервые для коллайдера на сверхвысокую энергию FCC-ee предложена схема коррекции нелинейного хроматизма дополнительными секступоля-

ми в местах с малой бета функцией, но с большой хроматической производной бета функции второго порядка.

11. Впервые обнаружено и объяснено ограничение вертикальной апертуры излучением частиц в полях финальных квадруполей для коллайдеров на сверхвысокие энергии FCC-ee и CEPC.
12. Впервые проведён анализ неточностей определения энергии в системе центра масс для экспериментов по изучению  $\Upsilon$  мезона на ВЭПП-4М (энергия пучка  $E = 4.75$  ГэВ) и для экспериментов на FCC-ee (с энергиями пучка  $E = 45$  ГэВ и  $E = 80$  ГэВ).

### **Теоретическая и практическая значимость**

Проведённые в работе аналитические и численные расчёты различных источников нелинейного возмущения и нелинейного хроматизма позволили

1. получить аналитические выражения для динамической апертуры секступольного возмущения не пользуясь приближением изолированного резонанса и показать принципиальное отличие ограничения области устойчивого движения для двумерной и одномерной нелинейной системы,
2. найти простейшие наборы секступолей без квадратичных aberrаций, помимо  $-I$  пары секступолей,
3. для  $-I$  пары секступолей
  - а) показать искажение фазовых траекторий, не ограничивающее ДА, но приводящее к потерям частиц на границе физической апертуры,
  - б) рассчитать влияние толщины секступолей на ДА и предложить способ коррекции такого влияния,
  - с) найти зависимость частоты от амплитуды,

- d) найти динамическую апертуру и её зависимость от величины фазовой ошибки,
4. получить аналитические выражения хроматизма оптических функций до 3-его порядка,
  5. создать оптическую структуру источника 4-го поколения СИ “СКИФ” со сверхмалым (близким к дифракционному пределу) горизонтальным эмиттансом,
  6. создать оптическую структуру и параметры Супер  $s$ - $\tau$  фабрики с беспрецедентной светимостью,
  7. получить алгоритм нахождения равновесных параметров пучка с учётом пучкового излучения в установках на сверхвысокие энергии,
  8. предложить новые параметры для коллайдера FCC-ee с большей светимостью,
  9. объяснить ограничение динамической апертуры синхротронным излучением в финальных линзах установок на сверхвысокие энергии,
  10. сосчитать ошибки и неточности измерения энергии в системе центра масс на установках ВЭПП-4М и FCC-ee.

### **Методология и методы исследования**

В работе используются аналитические и численные методы расчётов динамики пучка в циклических ускорителях. Результаты аналитических расчётов сравниваются с данными компьютерного моделирования. В свою очередь, результаты работы современных и используемых ниже моделирующих программ неоднократно проверялись экспериментально демонстрируя хорошее согласие.

## Основные положения, выносимые на защиту

1. Результаты аналитического расчёта динамической апертуры без использования приближения уединённого резонанса для секступольного возмущения совпадают в первом порядке теории возмущений с результатами численного моделирования для FODO ячейки и для Супер  $c-\tau$  фабрики, объясняют пороговое уменьшение горизонтальной апертуры при переходе от одномерного движения к двумерному (даже для бесконечно малого вертикального возмущения) для Супер  $c-\tau$  фабрики.
2. Аналитические расчёты ДА и нелинейных параметров для  $-I$  пары секступолей с учётом их толщины позволяют оценить влияние “компенсированной” пары секступолей на ДА.
3. Полученные аналитические выражения для хроматизма оптических функций до третьего порядка, позволяют выбрать распределение секступолей, увеличивающее энергетическую апертуру в проекте в Супер  $c-\tau$  фабрики.
4. Рассчитанная оптическая структура источника 4-го поколения СИ ЦКП “СКИФ” со сверхмалым (близким к дифракционному пределу) горизонтальным эмиттансом  $\varepsilon_x = 72$  пм имеет достаточно большие динамическую и энергетическую апертуры для применения стандартной схемы инжекции электронов.
5. Предложенная оптическая структура и параметры Супер  $c-\tau$  фабрики позволяют получить светимость до  $\mathcal{L} = 10^{35}$  см<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup> на энергиях пучка 2.5 – 3.5 ГэВ, на энергии 2 ГэВ  $\mathcal{L} = 4 \times 10^{34}$  см<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>, на энергии 1.5 ГэВ  $\mathcal{L} = 2.9 \times 10^{34}$  см<sup>-2</sup>с<sup>-1</sup>.
6. Квантовые флуктуации излучения в поле встречного пучка (beamstrahlung), увеличивают равновесный энергетический разброс и длину сгуст-



ка.

7. Предложенные параметры коллайдера FCC-ee, позволяют увеличить светимость 1.5–10 раз в разных экспериментальных режимах работы.
8. Для коллайдеров на сверхвысокие энергии (например, FCC-ee и CEPC) вертикальная динамическая апертура ограничена излучением частиц в полях квадрупольных финального фокуса.
9. Систематическая ошибка определения энергии в системе центра масс для экспериментов по изучению  $\Upsilon$  мезона на ВЭПП-4М (на энергии пучка  $E = 4.75$  ГэВ) и для экспериментов на FCC-ee (энергии пучка  $E = 45$  ГэВ и  $E = 80$  ГэВ) может быть уменьшена до 50 кэВ (на энергии пучка  $E_0 = 4.75$  ГэВ), до 100 кэВ (на энергии пучка  $E_0 = 45.6$  ГэВ) и до 500 кэВ (энергия пучка  $E_0 = 80$  ГэВ).

### **Степень достоверности и апробация результатов**

Достоверность работы подтверждается согласованностью теоретических и численных результатов. Опубликованные результаты исследований, представленные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на 10 ведущих международных научных конференциях:

1. The 2022 International Workshop on the High Energy Circular Electron Positron Collider, 2022;
2. XXVII Russian Particle Accelerator Conference, 2021;
3. IAS Program on High Energy Physics (HEP 2021), 2021;
4. 29th European Synchrotron Light Source (ESLS) Workshop, 2021;
5. 28th European Synchrotron Light Source (ESLS) Workshop, 2020;
6. 10th International Particle Accelerator Conference (IPAC19), 2019;

7. FCC week 2018;
8. 38th International Conference on High Energy Physics, 2016;
9. 6th International Particle Accelerator Conference (IPAC15), 2015;
10. 5th International Particle Accelerator Conference , 2014;

и опубликованы в виде 4 статей в сборниках трудов конференций и 7 тезисов докладов.

### **Публикации.**

Основные результаты диссертационного исследования получены в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте ядерной физики им. Г.И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук в 2008-2023 годах. Материалы диссертации опубликованы в 23 печатных работах, из них 12 статей в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК, 4 статей в сборниках трудов конференций и 7 тезисов докладов. **В рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России:**

1. *Bogomyagkov A., Levichev E., Sinyatkin S.* Touschek lifetime and luminosity optimization for Russian Super Charm Tau factory // JINST. 2024. Т. 19, № 02. P02018. DOI: 10.1088/1748-0221/19/02/P02018
2. Lattice optimization of a fourth-generation synchrotron radiation light source in Novosibirsk / G. Baranov [и др.] // Physical Review Accelerators and Beams. 2021. Т. 24, № 12. С. 120704. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.24.120704
3. Dynamic aperture limitation in  $e^+e^-$  colliders due to synchrotron radiation in quadrupoles / A. Bogomyagkov [и др.] // Physical Review Accelerators and Beams. 2019. Т. 22, № 2. С. 021001. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.22.021001. arXiv: 1811.04554 [physics.acc-ph]

4. Dynamic Aperture of the NICA Collider Optimized with a Genetic Algorithm / A. V. Bogomyagkov [и др.] // Phys. Part. Nucl. Lett. 2019. Т. 16, № 1. С. 21—29. DOI: 10.1134/S1547477119010060
5. Beam optics and dynamics in electron storage rings with ultralow emittance / G. N. Baranov [и др.] // Phys. Part. Nucl. Lett. 2016. Т. 13, № 7. С. 884—889. DOI: 10.1134/S1547477116070086
6. *Bogomyagkov A., Levichev E., Piminov P.* Final focus designs for crab waist colliders // Physical Review Accelerators and Beams. 2016. Т. 19, № 12. С. 121005. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.19.121005
7. Projects for ultra-high-energy circular colliders at CERN / A. Bogomyagkov [и др.] // Physics of Particles and Nuclei Letters. 2016. Т. 13, № 7. С. 870—875. DOI: 10.1134/S154747711607013X
8. *Bogomyagkov A. V., Karyukina K. Y., Levichev E. B.* Reduction of the beam emittance in the charged-particle storage rings with the help of periodic magnetic wigglers // Tech. Phys. 2016. Т. 61, № 1. С. 119—124. DOI: 10.1134/S1063784216010060
9. Final analysis of KEDR data on  $J/\psi$  and  $\psi(2S)$  masses / V. Anashin [и др.] // Phys. Lett. B. 2015. Т. 749. С. 50—56. DOI: 10.1016/j.physletb.2015.07.057
10. Use of the methods of accelerator physics in precision measurements of particle masses at the VEPP-4 complex with the KEDR detector / O. V. Anchugov, V. E. Blinov, A. V. Bogomyagkov [и др.] // Instruments and Experimental Techniques. 2010. Т. 53, № 1. С. 15—28. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0020441210010021>
11. Experiments on the physics of charged particle beams at the VEPP-4M electron-positron collider / O. V. Anchugov, V. E. Blinov, A. V. Bogomyagkov

[и др.] // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2009. Т. 109, № 4. С. 590—601. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063776109100057>

12. Review of beam energy measurements at VEPP-4M collider:

KEDR/VEPP-4M / V. E. Blinov [и др.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2009. Т. 598. С. 23—30. DOI: 10.1016/j.nima.2008.08.078

**Личный вклад автора** в получении результатов, выносимых на защиту, является определяющим. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Список публикаций, рекомендованных ВАК, приведённый в конце автореферата, содержит 12 работ. Авторский вклад соискателя заключается:

в статье 1 — в расчёте и анализе источников нелинейного возмущения, в выборе параметров, проектировании и оптимизации оптической структуры Супер  $s$ - $\tau$  фабрики с новым расположением крабовых секступолей, в расчётах динамической и энергетической апертур, времени жизни пучка по эффекту Тушека;

в статье 2 — в аналитическом и численном расчёте базовой ячейки ТМЕ, аналитическом и численном сравнении ячеек  $m$ ТМЕ и ТМЕ, базовой ячейки и использованной в структуре источника СИ ЦКП “СКИФ”, в расчёте локальной энергетической апертуры и яркости источника СИ ЦКП “СКИФ”, в аналитическом расчёте источника СИ с энергией пучка 6 ГэВ;

в статье 3 — в проведении численного моделирования и аналитическом анализе нелинейного движения частиц, в аналитическом решении шестимерных уравнений движения, построении теории ограничения динамической апертуры синхротронным излучением в финальных линзах, в сравнении результатов аналитических и численных расчётов;

в статье 4 — в аналитической анализе и расчёте нелинейного влияния краевых полей квадрупольных линз;

в статье 5 — в аналитическом расчёте и компьютерном моделировании при сравнении ячеек TME и SM-TME, построении численной модели источника СИ на этих ячейках;

в статье 6 — в аналитическом анализе нелинейных свойств промежутка встречи коллайдеров DAΦNE, SuperKEKB, SuperB, Супер  $c$ - $\tau$ , FCC-ee, в построении нескольких численных моделей промежутка финального фокуса для коллайдера с крабовой перетяжкой, в аналитическом расчёте преобразования координат до третьего порядка и в численном сравнении расчётов для существующих и будущих коллайдеров с крабовой перетяжкой;

в статье 7 — в разработке оптической структуры промежутка встречи коллайдера FCC-ee с организацией столкновения пучков по схеме крабовой перетяжки;

в статье 8 — в аналитическом расчёте влияния виглеров на равновесные параметры пучков, в аналитическом расчёте свойств ячейки FODO;

в статьях 9, 10, 11, 12 — в аналитическом и численном анализе ошибок и неточностей определения энергии в системе центра масс в экспериментах по измерению масс  $J/\psi$ -  $\psi(2s)$  мезонов и массы  $\tau$  лептона на коллайдере ВЭПП-4М.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка литературы и приложений. Общий объем диссертации 267 страниц, включая 95 рисунков и 31 таблицу. Библиография включает 187 наименований на 23 страницах.

## Глава 1

# Обзор исследуемых источников нелинейного возмущения

Одна из самых сложных задач, которую приходится решать при разработке и создании накопителей заряженных частиц следующих поколений связана с увеличением роли нелинейных сил в движении частиц и, соответственно, с преодолением негативных последствий такой “нелиinearизации” движения.

Нелинейные эффекты в циклических ускорителях изучались, начиная с раннего периода их развития, как теоретически [62—66], так и экспериментально [67—79]. В оценках вначале преобладали различные методы теории возмущений, и обычно, ввиду большого объёма вычислений, ограничивались первым порядком малости. По мере развития компьютеров и численных методов существенную роль стало играть математическое моделирование. После появления программ символьной математики появилась возможность аналитических вычислений с использованием алгоритмов теории возмущений в более высоких порядках, однако получающиеся многостраничные формулы, хотя и можно использовать, весьма затруднительно интерпретировать. Применение таких методов мало чем отличается от “обычного” численного решения уравнений движения — о функциональной зависимости различных параметров приходится догадываться исходя из результатов.

Между тем, по мере роста нелинейных сил роль высоких порядков вычисления становится все более важной в понимании как общих свойств и особенностей динамики частиц, так и при практических оценках. Поэтому ниже при таких символьных вычислениях я использую простые модели ускорителя, которые позволяют свернуть конечные выражения и проследить фундаментальные зависимости входящих величин. Как правило, это ячейка FODO, для которой поведение структурных функций и других параметров (натурального

хроматизма, эмиттанса, бетатронных частот и т.д.) хорошо известно и изучено. Другим вариантом является «точечная» (описываемая дельта-функцией) нелинейность и последующее линейное матричное преобразование. Конечно, реальные магнитные структуры накопителей и ускорителей существенно отличаются от таких моделей, однако основные закономерности нелинейного движения при таком упрощении отражаются качественно верно.

В последние 2-3 десятилетия роль нелинейных явлений применительно к некоторым классам ускорителей и накопителей заряженных частиц неуклонно растет, и зачастую именно нелинейности определяют эффективность и производительность таких установок. Кратко рассмотрю классы таких ускорителей и причины, по которым происходит рост значимости нелинейных эффектов.

В первую очередь — это источники синхротронного излучения (СИ). Это самый распространенный тип накопителей электронов ультрарелятивистских энергий; в настоящее время в мире насчитывается более 50 таких установок. Одной из основных потребительских характеристик источника СИ является яркость — плотность потока фотонов в поперечном фазовом пространстве источника. Уменьшение поперечного фазового объема (эмиттанса) электронного пучка — основное направление совершенствования источников СИ. Как будет подробно показано в главе 2, минимизация эмиттанса источника СИ связана с применением очень сильной фокусировки, неизбежно приводящей к высоким значениям линейного натурального хроматизма, который корректируется сильными секступольными линзами, ограничивающими поперечную область устойчивого движения настолько, что «традиционная» (надежная и простая) инжекция частиц в поперечном фазовом пространстве становится невозможной, а время жизни пучка уменьшается до неприемлемых значений. Последнее усугубляется тем, что рост плотности частиц, из-за уменьшения фазового объема, приводит к интенсивному внутрисгустковому рассеянию, которое, при большом нелинейном хроматизме оптических функций (из-за сильных хроматических секступолей) и ограниченной продольной (энергетической) апертуре

сильно уменьшает тушековское время жизни. При этом оказывается недостаточно учитывать среднее по кольцу ограничение энергетической апертуры, необходимо ее знание и учёт локально по азимуту (local momentum aperture). Подробнее об этом говорится в главе 3.

Всё сказанное выше про источники СИ с ультрамалым эмиттансом относится и к накопителям-охладителям для линейных электрон-позитронных коллайдеров, где также требуется предельно малый эмиттанс для получения требуемой светимости. Требования на энергетическую апертуру накопителя-охладителя, однако, не такие жесткие из-за меньшей интенсивности отдельного сгустка.

Еще к одному классу накопителей заряженных частиц, для которых нелинейная динамика определяет предельные параметры, относятся современные электрон-позитронные коллайдеры, использующие метод встречи с «крабовой перетяжкой» (КП), или, по-английски Crab Waist (CW), а к таковым относятся все проекты  $e^+e^-$  коллайдеров будущего [21; 22; 29; 80]. Составляющими этого метода являются малый эмиттанс накопительного кольца с неизбежными сильными хроматическими секступолями, а также специальные секступольные магниты («крабовые» секступоли), обрамляющие место встречи, для организации поворота «перетяжки» пучков в точке пересечения. Подробнее об этом говорится в главе 3. Большая светимость таких коллайдеров достигается за счет очень маленькой (миллиметр и меньше) вертикальной бетатронной функции в точке взаимодействия пучков. С одной стороны, это приводит к тому, что в области встречи поперечный импульс частицы не мал, параксиальное приближение оказывается недостаточным и в уравнении движения необходимо учитывать нелинейные по поперечному импульсу члены. С другой стороны, малая в точке встречи вертикальная бетатронная функция растет до километровых значений в ближайших линзах финального фокуса, что вынуждает отказаться от кусочно-постоянного представления поля в этих магнитах и учитывать нелинейности краевого спада градиента финальных квадрупольей.



Тщательный учёт краевых нелинейностей линз финального фокуса необходим и в ионных коллайдерах, но не из-за бетатронных функций, а из-за большого эмиттанса таких пучков, приводящих к тому, что частицы в краевых полях линз движутся с большой амплитудой (коллайдер NICA[81]).

Для коллайдеров с КП-встречей получение большой энергетической апертуры является краеугольным камнем. С одной стороны, большой ток сгустка, необходимый для достижения предельных значений светимости, в сочетании с малым эмиттансом пучка, приводит к интенсивному эффекту Тушека. С другой — крабовые секступоли, компенсирующие друг-друга при равновесной энергии, для («тушековских») электронов с отклоненной энергией становятся сильным возмущающим фактором, резко уменьшающим динамическую апертуру и время жизни.

Круг явлений, вносимых нелинейным характером движения в динамику частиц с одной стороны, весьма широк, а с другой — достаточно хорошо изучен в связи с исследованиями нелинейного и стохастического движения динамических систем в общем. К таким явлениям, имеющим значение для динамики частиц в циклических ускорителях, можно отнести искажение фазовых траекторий, появление большого числа нелинейных резонансов, зависимость частот бетатронных колебаний от амплитуды, появление, наряду с регулярными траекториями, областей случайного (стохастического) движения и т.п. Однако с практической точки зрения самое большое значение, по-видимому, имеет динамическая апертура (ДА). Именно она, как будет показано, определяет производительность и современных источников СИ, и коллайдеров с методом встречи КП.

Исследованию динамической апертуры посвящено много работ, где даются разные — более или менее строгие — определения этого феномена. В общем виде можно сказать, что динамическая апертура — это область таких начальных условий в фазовом пространстве динамической системы, при которых её движение ограничено в течение заданного промежутка времени. Фазовое про-

странство частицы в ускорителе заряженных частиц шестимерно. Изучать, оптимизировать, наблюдать шестимерное движение практически невозможно. Поэтому для практических целей, как правило, исследуются проекции шестимерной ДА на плоскости, представляющие интерес для решения конкретной задачи. При этом другие степени свободы могут использоваться, как параметр. Например, если ставится задача исследовать эффективность захвата инжектируемого в накопитель пучка в зависимости от энергии частицы, то, очевидно, нужно оптимизировать апертуру  $(x, y)$  на азимуте инъекции, используя отклонение энергии частицы от равновесной в качестве параметра (рисунок 1.1).

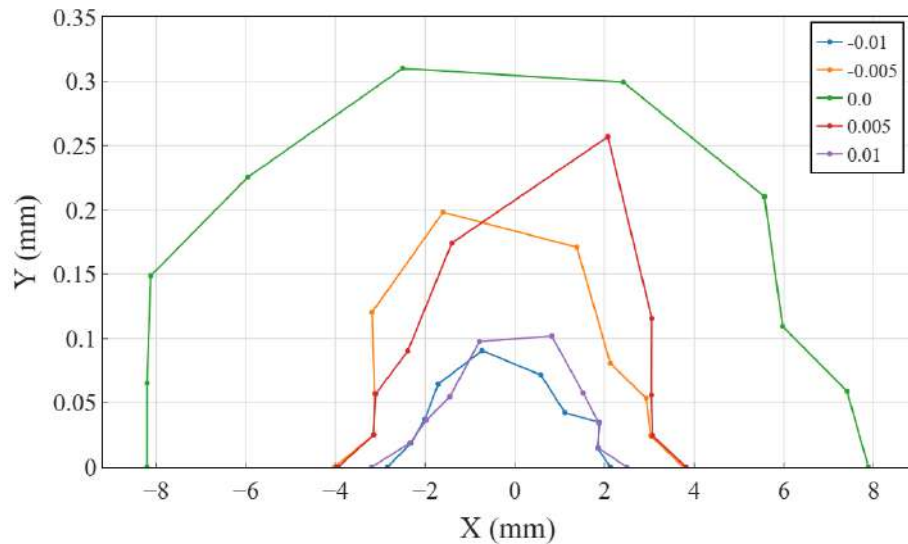


Рисунок 1.1 – Проекция шестимерной динамической апертуры Супер  $c - \tau$  фабрики на плоскость  $(x, y)$  для различных начальных отклонений энергии ( $\sigma_x = 3.98 \times 10^{-4}$  м,  $\sigma_y = 8.68 \times 10^{-6}$  м,  $\sigma_e = 1.04 \times 10^{-3}$ ),  $E_0 = 1.5$  ГэВ

Именно такую, редуцированную динамическую апертуру буду рассматривать далее. Подобный подход является общепринятым и, оставаясь в его рамках, легко сравнивать, обобщать или анализировать результаты, полученные для разных проектов.

Аналитически рассчитать ДА в общем случае с требуемой практически соображениями точностью невозможно. Вблизи резонансов низкого порядка устойчивое и неустойчивое движение при определенных условиях разделяет

сепаратриса (которую можно вычислить), однако таких резонансов избегают, поскольку там апертура мала по определению. Как правило, ДА ограничена комбинационным влиянием сильных резонансов низких порядков (создающих глобальную границу устойчивости) и слабых резонансов высоких порядков (формирующих стохастический слой ниже глобальной границы). Попадание частиц на границу такой апертуры и темп их потерь зависит от мощности резонансов и скорости изменения частоты колебаний от амплитуды. Поэтому, зависимость частоты от амплитуды и мощность резонансов, хотя и не говорят напрямую об устойчивости, являются удобными индикаторами степени нелинейности системы: их достаточно просто рассчитать (по крайней мере, для первых порядков теории возмущений) или получить численно. Кроме того, это можно делать для разных источников нелинейного возмущения по отдельности и, тем самым, сравнивать степень их влияния.

Частица, движущаяся в циклическом ускорителе, представляет собой нелинейный осциллятор с тремя степенями свободы: двумя поперечными (бетатронные колебания) и продольной (синхротронные колебания). Пользуясь тем, что частота синхротронных колебаний на два-три порядка меньше, чем частоты бетатронных колебаний, поперечные и продольную моды колебаний в большинстве случаев можно рассматривать отдельно. Для строгости замечу, что это несправедливо для узких, но, тем не менее, имеющих место резонансов связи различных мод. Например, именно связью продольной и поперечной мод объясняется новый и необычный механизм неустойчивости, обнаруженный автором и описанный в главе 3.

Зависимость параметров бетатронного движения от энергии частицы — хроматизм — играет важную роль в ограничении продольной апертуры. Нелинейный хроматизм частот бетатронных колебаний — это, фактически, “зависимость частоты (бетатронных колебаний) от амплитуды синхротронных колебаний”.

В этой главе я рассмотрю некоторые источники нелинейного возмущения

движения частицы во внешнем заданном и не меняющемся во времени (коллективные эффекты не учитываются) электромагнитном поле. Выбор рассматриваемых нелинейностей определяется их существенным влиянием на эффективность накопителей заряженных частиц, о которых шла речь выше – перспективных источников синхротронного излучения и коллайдеров. К таковым относятся секstupольные линзы (корректирующие хроматизм и “крабовые”) и их комбинации, октупольные линзы (которые применяют для увеличения апертуры, уменьшенной секstupольными линзами), краевые поля магнитов и высшие члены в параксиальном приближении уравнений движения.

В следующих главах на примере конкретных установок показано, как рассматриваемые здесь нелинейности влияют на динамику пучка, ограничивают достижение предельных параметров и какие меры приходится принимать для уменьшения их влияния.

Обсуждение различных источников нелинейного возмущения делается по одному сценарию: исходя из соответствующего потенциала возмущения в гамильтониане с помощью методов теории возмущений вычисляются основные резонансы, зависимость частоты колебаний от амплитуды, ограничение области устойчивого движения. Известные или полученные ранее выражения даются кратко с соответствующими ссылками, новые эффекты, обнаруженные автором (например, появление перекрестных членов секstupольного и октупольного возмущений в высоких порядках) — более подробно.

## **1.1 Краткое введение в линейную теорию циклических ускорителей**

В этом параграфе объясняются основные понятия, обозначения и определения, используемые далее. Подробное изложение линейной и нелинейной теории доступно в многочисленных работах и учебниках [62; 64; 67; 82].

В ускорительной физике используется гамильтониан частицы во внеш-

них электромагнитных полях, записанный в криволинейной (сопутствующей) системе координат, связанной с замкнутой орбитой [62; 67]. Полный вывод такого гамильтониана приведён в приложении А близко к работе [64]. В системе координат  $\{x, s, y\}$ , показанной на рисунке 1.2, квадратичная функция Гамиль-

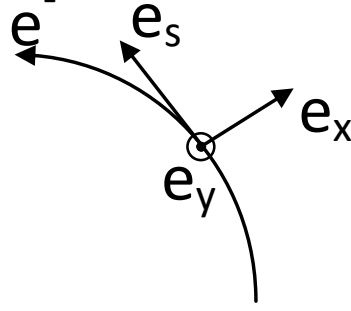


Рисунок 1.2 – Криволинейная система координат

тона (ультрарелятивистское приближение) записывается как (А.15)

$$H(x, \sigma, y, p_x, p_\sigma, p_y; s) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + K_0^2 \frac{x^2}{2} + K_1 \frac{x^2 - y^2}{2} - K_0 x p_\sigma + \left( -\frac{eV_0}{p_0 c} \right) \frac{\lambda_{RF}}{2\pi} \cos \left( \phi_s + \frac{2\pi\sigma}{\lambda_{RF}} \right) \delta(s - s_0), \quad (1.1)$$

где  $\{x, p_x, y, p_y, \sigma, p_\sigma\}$  — канонические переменные координат и импульсов,  $K_0 = B_y/B\rho$  — кривизна орбиты в диполе,  $K_1 = G/B\rho$  — нормализованная сила квадруполь с градиентом  $G = \partial B_y/\partial x$ ,  $B\rho = |e|/p_0 c$  — жёсткость частицы с импульсом  $p_0$  и зарядом  $e$ ,  $c$  — скорость света, роль времени играет переменная  $s$  — длина пути вдоль базисной орбиты,  $V_0$ ,  $\lambda_{RF}$  и  $\phi_s$  — амплитуда напряжения, длина волны и фаза ВЧ поля в резонаторе,  $s_0$  — координата нахождения точечного ВЧ резонатора,  $p_\sigma = (E - E_0)/p_0 c = \Delta E/p_0 c$  и  $\sigma = s - ct$  — продольные импульс и координата частицы, описывающие её относительной отклонение энергии и запаздывание относительно равновесной.

### 1.1.1 Бетатронные колебания

Квадратичная функция Гамильтона (1.1) описывает связанные шестимерные колебания, связь между продольными и горизонтальными колебаниями

создаётся членом  $K_0 x p_\sigma$ . Обычно продольно-поперечная связь и частота продольных колебаний малы, что позволяет рассматривать поперечное движение отдельно от продольного. Случай, в котором это приближение неверно, и шестимерное движение значительно ограничивает поперечное движение описан в параграфе 4.3.

Пренебрегая продольно-поперечной связью и рассматривая только четырёхмерное поперечное движение, гамильтониан (1.1) порождает линейные уравнения движения, описывающие бетатронные колебания:

$$x' = p_x, \quad p_x' = -(K_0^2 + K_1)x, \quad y' = p_y, \quad p_y' = K_1 y, \quad (1.2)$$

где используется обозначение  $' = d/ds$ . Решение этих уравнений и их исследование на устойчивость были даны в знаменитой работе [62]

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2j_x \beta_x(s)} \cos[\phi_x(s)], & p_x &= -\sqrt{\frac{2j_x}{\beta_x(s)}} (\sin[\phi_x(s)] + \alpha_x(s) \cos[\phi_x(s)]), \\ y &= \sqrt{2j_y \beta_y(s)} \cos[\phi_y(s)], & p_y &= -\sqrt{\frac{2j_y}{\beta_y(s)}} (\sin[\phi_y(s)] + \alpha_y(s) \cos[\phi_y(s)]), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\beta_{x,y}(s)$ ,  $\alpha_{x,y}(s) = -\beta'_{x,y}(s)/2$ ,  $\gamma_{x,y}(s) = (1 + \alpha_{x,y}^2(s))/\beta_{x,y}(s)$  – параметры Твисса и называются бета, альфа и гамма функциями, набег бетатронной фазы составляет

$$\phi_{x,y}(s) = \int_0^s \frac{d\tau}{\beta_{x,y}(\tau)} + \phi_{x,y}(0), \quad (1.4)$$

$j_{x,y}$  и  $\phi_{x,y}(0)$  – константы, зависящие от начальных условий и определяющие амплитуды и фазы бетатронных колебаний. Безразмерной частотой бетатронных колебаний (бетатронная частота) называют количество бетатронных колебаний за оборот

$$\nu_{x,y} = \frac{\phi_{x,y}(\Pi) - \phi_{x,y}(0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\Pi \frac{d\tau}{\beta_{x,y}(\tau)}, \quad (1.5)$$

где  $\Pi$  – периметр ускорителя. Решения (1.3) описывают эллипс в фазовом пространстве, площадь которого сохраняется и пропорциональна инварианту Куронта-Снайдера, который для горизонтальной пары канонических координат

записывается как

$$2j_x = \gamma_x x^2 + 2\alpha_x x p_x + \beta_x p_x^2, \quad (1.6)$$

для вертикальной пары – координаты  $\{x, p_x\}$  необходимо заменить на  $\{y, p_y\}$ .

Гамильтониан (1.1) возможно упростить переходом к переменным действия-фазы, что облегчает дальнейший анализ нелинейностей. С помощью производящей функции

$$F_1(x, \phi_x, y, \phi_y; s) = -\frac{x^2}{2\beta_x(s)} (\alpha_x(s) + \tan[\phi_x]) - \frac{y^2}{2\beta_y(s)} (\alpha_y(s) + \tan[\phi_y]) \quad (1.7)$$

переходят к новым переменным  $\{\phi_{x,y}, j_{x,y}\}$ , получившим название фазы и действия. Гамильтониан в новых переменных не зависит от переменных фазы:

$$H_0(\phi_x, \phi_y, j_x, j_y; s) = \frac{j_x}{\beta_x(s)} + \frac{j_y}{\beta_y(s)}, \quad (1.8)$$

а старые переменные связаны с новыми соотношениями (1.3). Уравнения движения

$$\frac{d\phi_{x,y}}{ds} = \frac{\partial H_0}{\partial j_{x,y}} = \frac{1}{\beta_{x,y}(s)}, \quad \frac{dj_{x,y}}{ds} = -\frac{\partial H_0}{\partial \phi_{x,y}} = 0 \quad (1.9)$$

дают решение для фазы (1.4) и  $j_{x,y} = const$ .

Гамильтониан (1.8) зависит от времени  $s$ , и для дальнейшего упрощения переходят к новому времени  $\theta = s/R$ , где  $R = \Pi/2\pi$  – средний радиус ускорителя с периметром  $\Pi$  и выбирают другую переменную фазы  $\psi_{x,y}$ , связанную с  $\phi_{x,y}$  из (1.3), (1.4) соотношением

$$\phi_{x,y} = \psi_{x,y} + \varphi_{x,y}(\theta) - \nu_{x,y}\theta, \quad \varphi_{x,y}(\theta) = \int_0^\theta \frac{R d\tau}{\beta_{x,y}(\tau)}. \quad (1.10)$$

Этот переход сделан в приложении А и получен новый автономный (не зависящий от времени) линейный гамильтониан (А.26)

$$H_0(\psi_x, \psi_y, j_x, j_y; \theta) = \nu_x j_x + \nu_y j_y. \quad (1.11)$$

Решение уравнений движения этого гамильтониана записывается особенно просто: действие постоянно, а фаза линейно растёт со временем

$$j_{x,y} = const = j_{0,x,y}, \quad \psi_{x,y} = \psi_{0,x,y} + \nu_{x,y}\theta, \quad (1.12)$$

где  $j_{0,x,y}, \psi_{0,x,y}$  – начальные условия. Действие является адиабатическим инвариантом, что является основой для построения теории возмущений [83–87], описанной в следующем параграфе.

## 1.2 Секступольное возмущение

Секступоли, компенсирующие высокий хроматизм новых установок: коллайдеров с большой светимостью, источников СИ с малым эмиттансом – являются первыми значительными источниками нелинейного возмущения, ограничивающими динамическую апертуру. В гамильтониане (1.1) члены высших порядков (нелинейные) были опущены, добавление секступольного члена (следующего порядка) приносит гамильтониан

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + (K_0^2 + K_1) \frac{x^2}{2} - K_1 \frac{y^2}{2} + K_2 \frac{x^3 - 3xy^2}{6}, \quad (1.13)$$

где  $K_2 = S/B\rho$  – нормализованная сила секступоля с градиентом  $S = \partial^2 B_y / \partial x^2$ .

Соответствующие нелинейные уравнения движения

$$x' = p_x, \quad p'_x = -(K_0^2 + K_1)x - K_2 \frac{(x^2 - y^2)}{2} \quad (1.14)$$

$$y' = p_y, \quad p'_y = K_1 y + K_2 xy, \quad (1.15)$$

не имеют известного общего решения, следовательно их решение возможно только приближённо, хотя и с желаемой точностью, с помощью рядов Линдштедта [88], степенных рядов алгебры Ли [89–91](приложение Б), и функций возмущения [92].

Метод степенных рядов удобен для нахождения траектории в одном элементе, позволяя аналитически рассчитать абберрации и найти мультипольные магниты для их коррекции. Для замкнутого ускорителя, состоящего из сотен и тысяч элементов, такой способ решения возможен лишь численно, так называемый трекинг. Численные методы совместно с мощными компьютерами позволяют оптимизировать, например, динамическую апертуру, но не дают



понимания, как сделать ускоритель, чтобы он изначально обладал большой динамической апертурой при малом наборе нелинейных элементов. Здесь на помощь приходит теория возмущений, в которой ищется приближённое решение. Поэтому приведу расчёты до третьего порядка теории возмущения с помощью рядов Депри (приложение В) для гамильтониана секступольного возмущения (1.13). При переходе к переменным действия-фазы функция Гамильтона разделяется на линейную часть и возмущение

$$H = H_0(\psi_x, \psi_y, j_x, j_y; \theta) + H_1(\psi_x, \psi_y, j_x, j_y; \theta) \quad (1.16)$$

$$H_0 = \nu_x j_x + \nu_y j_y \quad (1.17)$$

$$H_1 = \frac{RK_2}{6\sqrt{2}} j_x^{\frac{3}{2}} \beta_x^{\frac{3}{2}} \left( 3 \cos[\phi_x] + \cos[3\phi_x] \right) - \frac{RK_2}{2\sqrt{2}} j_y \beta_y j_x^{\frac{1}{2}} \beta_x^{\frac{1}{2}} \left( 2 \cos[\phi_x] + \cos[\phi_x - 2\phi_y] + \cos[\phi_x + 2\phi_y] \right) \quad (1.18)$$

где переменные фазы даются соотношениями (1.10). Целью теории возмущения является нахождение преобразования к новым переменным действия фазы  $\{J_{x,y}, \Psi_{x,y}\}$  в которых гамильтониан является функцией только переменных действия. Найденные переменные действия постоянны во времени и позволяют найти области устойчивости – динамическую апертуру в старых переменных действия фазы.

Эволюция во времени старых переменных действия фазы для линейного гамильтониана (1.17) дана в (1.12). Добавка первого порядка к гамильтониану оказывается равной нулю (В.29)

$$\mathcal{K}_1 = \iint_0^{2\pi} H_1 \frac{d\psi_x}{2\pi} \frac{d\psi_y}{2\pi} = 0, \quad (1.19)$$

и тогда новый гамильтониан в первом порядке есть

$$K = \nu_x J_{1,x} + \nu_y J_{1,y}. \quad (1.20)$$

Новое действие  $J_{1,x,y}$  постоянно, новая фаза  $\Psi_{1,x,y}$  меняется линейно со временем

$$J_{1,x,y} = const = J_{0,x,y} \quad \Psi_{1,x,y} = \Psi_{0,x,y} + \nu_{x,y} \theta, \quad (1.21)$$

где  $J_{0,x,y}, \Psi_{0,x,y}$  – начальные условия. Производящая функция находится с помощью (В.33) и (В.34)

$$\begin{aligned}
W_1 = & j_x^{\frac{3}{2}} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\tau \frac{RK_2(\tau)\beta_x^{\frac{3}{2}}(\tau)}{12\sqrt{2}} \left( -\frac{3 \sin[\Phi(1, 0)]}{\sin[\pi\nu_x]} - \frac{\sin[\Phi(3, 0)]}{\sin[3\pi\nu_x]} \right) \\
& + j_y j_x^{\frac{1}{2}} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\tau \frac{RK_2(\tau)\beta_x^{\frac{1}{2}}(\tau)\beta_y(\tau)}{4\sqrt{2}} \left( \frac{2 \sin[\Phi(1, 0)]}{\sin[\pi\nu_x]} \right. \\
& \left. + \frac{\sin[\Phi(1, 2)]}{\sin[\pi(\nu_x + 2\nu_y)]} + \frac{\sin[\Phi(1, -2)]}{\sin[\pi(\nu_x - 2\nu_y)]} \right), \quad (1.22)
\end{aligned}$$

$$\Phi(n, m) = n(\psi_x + \varphi_x(\tau) - \pi\nu_x - \nu_x\theta) + m(\psi_y + \varphi_y(\tau) - \pi\nu_y - \nu_y\theta), \quad (1.23)$$

и позволяет найти зависимость новых координат от старых

$$\begin{aligned}
J_{1,x} = & j_x + j_x^{\frac{3}{2}} \left( B_1(\theta) \cos[\phi_x(\theta)] - A_1(\theta) \sin[\phi_x(\theta)] \right. \\
& \left. + B_3(\theta) \cos[3\phi_x(\theta)] - A_3(\theta) \sin[3\phi_x(\theta)] \right) \\
& - j_y j_x^{\frac{1}{2}} \left( 2B_2(\theta) \cos[\phi_x(\theta)] - 2A_2(\theta) \sin[\phi_x(\theta)] \right. \\
& + B_+(\theta) \cos[\phi_x(\theta) + 2\phi_y(\theta)] - A_+(\theta) \sin[\phi_x(\theta) + 2\phi_y(\theta)] \\
& \left. + B_-(\theta) \cos[\phi_x(\theta) - 2\phi_y(\theta)] - A_-(\theta) \sin[\phi_x(\theta) - 2\phi_y(\theta)] \right), \quad (1.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{1,y} = & j_y - j_y j_x^{\frac{1}{2}} \left( \right. \\
& + 2B_+(\theta) \cos[\phi_x(\theta) + 2\phi_y(\theta)] - 2A_+(\theta) \sin[\phi_x(\theta) + 2\phi_y(\theta)] \\
& \left. - 2B_-(\theta) \cos[\phi_x(\theta) - 2\phi_y(\theta)] + 2A_-(\theta) \sin[\phi_x(\theta) - 2\phi_y(\theta)] \right), \quad (1.25)
\end{aligned}$$

где, вспоминая (1.10) и (1.12),  $\phi_{x,y}(\theta) = \psi_{0,x,y} + \varphi_{x,y}(\theta)$ ,  $A_{1,3,2,+,-}(\theta)$  и  $B_{1,3,2,+,-}(\theta)$  — периодические по  $\theta$  функции возмущения, имеющие вид ( $i$  — мнимая единица) [92–94]

$$\begin{aligned}
B_1(\theta) + i A_1(\theta) = & \\
= & \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{RK_2(\tau)\beta_x(\tau)^{3/2} \exp[i(\varphi_x(\tau) - \varphi_x(\theta) - \pi\nu_x)]}{2\sqrt{2} \cdot 2 \sin(\pi\nu_x)} d\tau, \quad (1.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3(\theta) + i A_3(\theta) = & \\
= & \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{RK_2(\tau)\beta_x(\tau)^{3/2} \exp[3i(\varphi_x(\tau) - \varphi_x(\theta) - \pi\nu_x)]}{2\sqrt{2} \cdot 2 \sin(3\pi\nu_x)} d\tau, \quad (1.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2(\theta) + i A_2(\theta) &= \\
&= \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{RK_2(\tau)\beta_y(\tau)\beta_x(\tau)^{1/2} \exp[i(\varphi_x(\tau) - \varphi_x(\theta) - \pi\nu_x)]}{2\sqrt{2} \cdot 2 \sin(\pi\nu_x)} d\tau, \tag{1.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_+(\theta) + i A_+(\theta) &= \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{RK_2(\tau)\beta_y(\tau)\beta_x(\tau)^{1/2}}{2\sqrt{2}} \\
&\times \frac{\exp[i(\varphi_x(\tau) - \varphi_x(\theta) - \pi\nu_x + 2(\varphi_y(\tau) - \varphi_y(\theta) - \pi\nu_y))]}{2 \sin(\pi\nu_x + 2\pi\nu_y)} d\tau, \tag{1.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_-(\theta) + i A_-(\theta) &= \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{RK_2(\tau)\beta_y(\tau)\beta_x(\tau)^{1/2}}{2\sqrt{2}} \\
&\times \frac{\exp[i(\varphi_x(\tau) - \varphi_x(\theta) - \pi\nu_x - 2(\varphi_y(\tau) - \varphi_y(\theta) - \pi\nu_y))]}{2 \sin(\pi\nu_x - 2\pi\nu_y)} d\tau. \tag{1.30}
\end{aligned}$$

Так как новые действия являются инвариантами движения, то формулы (1.24), (1.25) есть неявные уравнения кривых фазовых траекторий и, самая интересная, последняя устойчивая траектория даёт границу динамической апертуры. Построение фазовых траекторий и нахождения динамической апертуры подробно рассмотрены в параграфах 1.2.2, 1.5.

Полученные в первом порядке  $W_1$ ,  $\mathcal{K}_1 = 0$ ,  $H_1$ ,  $H_2 = 0$  позволяют с помо-

щью уравнения (B.26) и (B.35) найти члены гамильтониана второго порядка:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_0^{2\pi} \left( H_2 + \frac{1}{2} L_1 (\mathcal{K}_1 + H_1) \right) d\psi_x d\psi_y \\
&= -\frac{R^2}{64} \int_\theta^{\theta+2\pi} d\tau K_2(\theta) K_2(\tau) \beta_x^{\frac{1}{2}}(\theta) \beta_x^{\frac{1}{2}}(\tau) \left\{ \right. \\
&\quad J_{2,x}^2 \beta_x(\theta) \beta_x(\tau) \left( \frac{3 \cos[\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x]}{\sin[\pi\nu_x]} + \frac{\cos[3\varphi_x(\theta, \tau) + 3\pi\nu_x]}{\sin[3\pi\nu_x]} \right) \\
&\quad + J_{2,y}^2 \beta_y(\theta) \beta_y(\tau) \left( \frac{4 \cos[\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x]}{\sin[\pi\nu_x]} \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{\cos[\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x - 2\varphi_y(\theta, \tau) - 2\pi\nu_y]}{\sin[\pi\nu_x - 2\pi\nu_y]} \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{\cos[\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x + 2\varphi_y(\theta, \tau) + 2\pi\nu_y]}{\sin[\pi\nu_x + 2\pi\nu_y]} \right) \\
&\quad - 4J_{2,x} J_{2,y} \beta_y(\theta) \beta_y(\tau) \left( \frac{\cos[\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x - 2\varphi_y(\theta, \tau) - 2\pi\nu_y]}{\sin[\pi\nu_x - 2\pi\nu_y]} \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{\cos[\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x + 2\varphi_y(\theta, \tau) + 2\pi\nu_y]}{\sin[\pi\nu_x + 2\pi\nu_y]} \right) \\
&\quad \left. - 4J_{2,x} J_{2,y} \left( \beta_x(\tau) \beta_y(\theta) + \beta_x(\theta) \beta_y(\tau) \right) \left( \frac{\cos[\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x]}{\sin[\pi\nu_x]} \right) \right\}, \tag{1.31}
\end{aligned}$$

где  $\varphi_{x,y}(\theta, \tau) = \varphi_{x,y}(\theta) - \varphi_{x,y}(\tau)$ . Итоговый гамильтониан второго порядка позволяет найти зависимость частоты от действия [82; 95]:

$$\begin{aligned}
\nu_{2,x} - \nu_x &= \alpha_{xx} J_{2,x} + \alpha_{xy} J_{2,y}, \\
\nu_{2,y} - \nu_y &= \alpha_{yx} J_{2,x} + \alpha_{yy} J_{2,y},
\end{aligned} \tag{1.32}$$

где коэффициенты  $\alpha$  составляют ( $\alpha_{yx} = \alpha_{xy}$ )

$$\begin{aligned}
\alpha_{xx} &= -\frac{R^2}{64\pi} \iint d\theta d\tau K_2(\theta) K_2(\tau) \beta_x^{\frac{3}{2}}(\theta) \beta_x^{\frac{3}{2}}(\tau) \\
&\quad \times \left( \frac{3 \cos[\pi\nu_x - |\varphi_x(\theta, \tau)|]}{\sin[\pi\nu_x]} + \frac{\cos[3\pi\nu_x - 3|\varphi_x(\theta, \tau)|]}{\sin[3\pi\nu_x]} \right), \tag{1.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{xy} = & \frac{R^2}{32\pi} \iint d\theta d\tau K_2(\theta) K_2(\tau) \beta_x^{\frac{1}{2}}(\theta) \beta_x^{\frac{1}{2}}(\tau) \left( \beta_x(\tau) \beta_y(\theta) + \beta_x(\theta) \beta_y(\tau) \right) \\
& \times \frac{\cos[\pi\nu_x - |\varphi_x(\theta, \tau)|]}{\sin[\pi\nu_x]} \\
& + \frac{R^2}{32\pi} \iint d\theta d\tau K_2(\theta) K_2(\tau) \beta_x^{\frac{1}{2}}(\theta) \beta_x^{\frac{1}{2}}(\tau) \beta_y(\theta) \beta_y(\tau) \\
& \times \left( \frac{\cos[\pi\nu_x - 2\pi\nu_y - |\varphi_x(\theta, \tau)| + 2|\varphi_y(\theta, \tau)|]}{\sin[\pi(\nu_x - 2\nu_y)]} \right. \\
& \left. - \frac{\cos[\pi\nu_x + 2\pi\nu_y - |\varphi_x(\theta, \tau)| - 2|\varphi_y(\theta, \tau)|]}{\sin[\pi(\nu_x + 2\nu_y)]} \right), \tag{1.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{yy} = & -\frac{R^2}{64\pi} \iint d\theta d\tau K_2(\theta) K_2(\tau) \beta_x^{\frac{1}{2}}(\theta) \beta_x^{\frac{1}{2}}(\tau) \beta_y(\theta) \beta_y(\tau) \\
& \times \left( \frac{4 \cos[\pi\nu_x - |\varphi_x(\theta, \tau)|]}{\sin[\pi\nu_x]} \right. \\
& + \frac{\cos[\pi\nu_x - 2\pi\nu_y - |\varphi_x(\theta, \tau)| + 2|\varphi_y(\theta, \tau)|]}{\sin(\pi(\nu_x - 2\nu_y))} \\
& \left. + \frac{\cos[\pi\nu_x + 2\pi\nu_y - |\varphi_x(\theta, \tau)| - 2|\varphi_y(\theta, \tau)|]}{\sin[\pi(\nu_x + 2\nu_y)]} \right). \tag{1.35}
\end{aligned}$$

Полученные коэффициенты имеют резонансную зависимость от бетатронной частоты и стремятся к бесконечности при  $\nu_x = n$ ,  $3\nu_x = n$ ,  $\nu_x \pm 2\nu_y = n$  где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Производящая функция второго порядка, вычисленная с помощью (B.37), есть

$$W_2 = j_x^2 W_{2,xx} + j_y^2 W_{2,yy} + j_x j_y W_{2,xy}, \tag{1.36}$$

где, используя

$$\begin{aligned}
\Phi(n_x, m_x, n_y, m_y) = & \\
& n_x(\psi_x + \varphi_x(t_2) - \pi\nu_x - \nu_x\theta) + m_x(\varphi_x(t_1) - \varphi_x(t_2) - \pi\nu_x) \\
& + n_y(\psi_y + \varphi_y(t_2) - \pi\nu_y - \nu_y\theta) + m_y(\varphi_y(t_1) - \varphi_y(t_2) - \pi\nu_y), \tag{1.37}
\end{aligned}$$

коэффициенты  $W_{2,xx}$ ,  $W_{2,yy}$ ,  $W_{2,xy}$  составляют

$$\begin{aligned}
W_{2,xx} = & \int_{\theta}^{\theta+2\pi} R dt_2 \int_{t_2}^{t_2+2\pi} R dt_1 \frac{K_2(t_1)K_2(t_2)}{64} \beta_x^{\frac{3}{2}}(t_1)\beta_x^{\frac{3}{2}}(t_2) \\
& \left\{ \frac{1}{\sin[\pi\nu_x]} \left( \frac{2 \sin[\Phi(2, -1, 0, 0)]}{\sin[2\pi\nu_x]} - \frac{\sin[\Phi(4, 1, 0, 0)]}{\sin[4\pi\nu_x]} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\sin[3\pi\nu_x]} \left( \frac{2 \sin[\Phi(2, 3, 0, 0)]}{\sin[2\pi\nu_x]} + \frac{\sin[\Phi(4, 3, 0, 0)]}{\sin[4\pi\nu_x]} \right) \right\}, \quad (1.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{2,yy} = & \int_{\theta}^{\theta+2\pi} R dt_2 \int_{t_2}^{t_2+2\pi} R dt_1 \frac{K_2(t_1)K_2(t_2)}{64} \beta_x^{\frac{1}{2}}(t_1)\beta_x^{\frac{1}{2}}(t_2)\beta_y(t_1)\beta_y(t_2) \\
& \left\{ \frac{1}{\sin[\pi\nu_x]} \left( \frac{2 \sin[\Phi(0, 1, 2, 0)]}{\sin[2\pi\nu_y]} + \frac{2 \sin[\Phi(0, -1, 2, 0)]}{\sin[2\pi\nu_y]} \right) \right. \\
& + \frac{1}{\sin[\pi(\nu_x + 2\nu_y)]} \left( \frac{2 \sin[\Phi(0, 1, 2, 2)]}{\sin[2\pi\nu_y]} + \frac{\sin[\Phi(0, 1, 4, 2)]}{\sin[4\pi\nu_y]} \right) \\
& \left. + \frac{1}{\sin[\pi(\nu_x - 2\nu_y)]} \left( \frac{2 \sin[\Phi(0, -1, 2, 2)]}{\sin[2\pi\nu_y]} + \frac{\sin[\Phi(0, -1, 4, 2)]}{\sin[4\pi\nu_y]} \right) \right\}, \quad (1.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{2,xy} = & \frac{1}{64} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} Rdt_2 \int_{t_2}^{t_2+2\pi} Rdt_1 K_2(t_1) K_2(t_2) \beta_x^{\frac{3}{2}}(t_1) \beta_x^{\frac{1}{2}}(t_2) \beta_y(t_2) \left\{ \right. \\
& \frac{1}{\sin[\pi\nu_x]} \left( \frac{2 \sin[\Phi(2, 1, 0, 0)]}{\sin[2\pi\nu_x]} - \frac{2 \sin[\Phi(0, 1, 2, 0)]}{\sin[2\pi\nu_y]} - \frac{2 \sin[\Phi(0, -1, 2, 0)]}{\sin[2\pi\nu_y]} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sin[\Phi(2, 1, 2, 0)]}{\sin[2\pi(\nu_x + \nu_y)]} + \frac{\sin[\Phi(2, 1, -2, 0)]}{\sin[2\pi(\nu_x - \nu_y)]} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{\sin[3\pi\nu_x]} \left( \frac{2 \sin[\Phi(2, 3, 0, 0)]}{\sin[2\pi\nu_x]} + \frac{\sin[\Phi(2, 3, 2, 0)]}{\sin[2\pi(\nu_x + \nu_y)]} + \frac{\sin[\Phi(2, 3, -2, 0)]}{\sin[2\pi(\nu_x - \nu_y)]} \right) \right\} \\
& + \frac{1}{64} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} Rdt_2 \int_{t_2}^{t_2+2\pi} Rdt_1 K_2(t_1) K_2(t_2) \beta_x^{\frac{1}{2}}(t_1) \beta_x^{\frac{3}{2}}(t_2) \beta_y(t_1) \left\{ \right. \\
& \frac{1}{\sin[\pi\nu_x]} \left( \frac{2 \sin[\Phi(-2, 1, 0, 0)]}{\sin[2\pi\nu_x]} - \frac{2 \sin[\Phi(2, 1, 0, 0)]}{\sin[2\pi\nu_x]} \right) \\
& + \frac{1}{\sin[\pi(\nu_x + 2\nu_y)]} \left( \frac{\sin[\Phi(-2, 1, 2, 2)]}{\sin[2\pi(\nu_x - \nu_y)]} - \frac{\sin[\Phi(2, 1, 2, 2)]}{\sin[2\pi(\nu_x + \nu_y)]} - \frac{2 \sin[\Phi(0, 1, 2, 2)]}{\sin[2\pi\nu_y]} \right) \\
& + \frac{1}{\sin[\pi(\nu_x - 2\nu_y)]} \left( \frac{\sin[\Phi(-2, -1, 2, 2)]}{\sin[2\pi(\nu_x - \nu_y)]} - \frac{\sin[\Phi(2, -1, 2, 2)]}{\sin[2\pi(\nu_x + \nu_y)]} \right. \\
& \left. \left. - \frac{2 \sin[\Phi(0, -1, 2, 2)]}{\sin[2\pi\nu_y]} \right) \right\} \\
& - \frac{4}{64} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} Rdt_2 \int_{t_2}^{t_2+2\pi} Rdt_1 K_2(t_1) K_2(t_2) \beta_x^{\frac{1}{2}}(t_1) \beta_x^{\frac{1}{2}}(t_2) \beta_y(t_1) \beta_y(t_2) \left\{ \right. \\
& \frac{1}{\sin[\pi\nu_x]} \left( \frac{\sin[\Phi(2, 1, -2, 0)]}{\sin[2\pi(\nu_x - \nu_y)]} - \frac{\sin[\Phi(2, 1, 2, 0)]}{\sin[2\pi(\nu_x + \nu_y)]} \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sin[\Phi(0, 1, 2, 0)]}{\sin[2\pi\nu_y]} + \frac{\sin[\Phi(0, -1, 2, 0)]}{\sin[2\pi\nu_y]} \right) \right. \\
& + \frac{1}{\sin[\pi(\nu_x - 2\nu_y)]} \left( \frac{\sin[\Phi(-2, -1, 2, 2)]}{\sin[2\pi(\nu_x - \nu_y)]} - \frac{\sin[\Phi(2, 1, 0, -2)]}{\sin[2\pi\nu_x]} - \frac{\sin[\Phi(0, -1, 2, 2)]}{\sin[2\pi\nu_y]} \right) \\
& \left. + \frac{1}{\sin[\pi(\nu_x + 2\nu_y)]} \left( \frac{\sin[\Phi(2, 1, 2, 2)]}{\sin[2\pi(\nu_x + \nu_y)]} + \frac{\sin[\Phi(2, 1, 0, 2)]}{\sin[2\pi\nu_x]} + \frac{\sin[\Phi(0, 1, 2, 2)]}{\sin[2\pi\nu_y]} \right) \right\}, \\
\end{aligned} \tag{1.40}$$

С помощью уравнения (В.38) находится поправка гамильтониана третьего

порядка, которая оказывается равной нулю

$$\mathcal{K}_3 = 0. \quad (1.41)$$

На примере рассмотренных трёх порядков теории возмущения видно, что учёт более высоких порядков приводит к появлению новых эффектов – в первом порядке проявляются резонансы  $\nu_x = n$ ,  $3\nu_x = n$ ,  $\nu_x \pm 2\nu_y = n$  где  $n \in \mathbb{Z}$ , то во-втором  $2\nu_{x,y} = n$ ,  $4\nu_{x,y} = n$ ,  $2(\nu_x \pm \nu_y) = n$ , причём всегда в интерференции с резонансами первого порядка.

### 1.2.1 Резонансы возбуждаемые секступолями

Наличие членов вида  $\cos[\phi_x + n\phi_y]$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) в возмущении гамильтониана (1.18) сообщает о наличии резонансов первого порядка  $\nu_x + n\nu_y = m$  ( $n, m \in \mathbb{Z}$ ), это наблюдение более очевидно в наличии резонансных знаменателей в производящей функции (1.22) и в функциях возмущения (1.26), (1.27), (1.28), (1.29), (1.30), которые приводят к разрыву фазовых траекторий и к нарушению сходимости рядов теории возмущения. Это и есть отражение нового явления – изменения топологии фазового пространства. Вблизи резонансов применяют резонансную теорию возмущений, которая изложена в этом параграфе.

Анализ резонансов производится в гармоническом разложении гамильтониана [96] и в приближении изолированного резонанса (резонансная теория возмущений) [64; 97], используя затем метод усреднения [86; 98]. Гамильтониан секступольного возмущения разложенный в ряд Фурье по  $\theta$  (А.50) составляет

$$\begin{aligned} H = & \nu_x j_x + \nu_y j_y \\ & + (2j_x)^{\frac{3}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( 3A_{1,m} \cos[\psi_x + m\theta] + A_{3,m} \cos[3\psi_x + m\theta] \right) \\ & - 3(2j_x)^{\frac{1}{2}} (2j_y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( 2B_{1,m} \cos[\psi_x + m\theta] + B_{1,2,m} \cos[\psi_x + 2\psi_y + m\theta] \right. \\ & \left. + B_{1,-2,m} \cos[\psi_x - 2\psi_y + m\theta] \right), \end{aligned} \quad (1.42)$$



где величины гармоник (для симметричной ячейки) даны в (A.30), (A.31), (A.32), (A.33), (A.35). В первом порядке теории возмущений присутствуют одномерные горизонтальные резонансы  $\nu_x = -m$  и  $3\nu_x = -m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ), двумерные резонансы  $\nu_x \pm 2\nu_y = -m$ .

### Резонанс $3\nu_x = -m$

Рассматривая движение вблизи резонанса  $3\nu_x = -m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ), осуществляют переход к резонансным переменным  $\{\psi_{1,x}, j_{1,x}, \psi_{1,y}, j_{1,y}\}$  с помощью производящей функции вида

$$F_2(\psi_x, j_{1,x}, \psi_y, j_{1,y}) = \left(\psi_x + \frac{m}{3}\theta\right) j_{1,x} + \psi_y j_{1,y}, \quad (1.43)$$

где связь между новыми и старыми переменными даётся выражениями

$$j_{1,x} = j_x, \quad \psi_{1,x} = \psi_x + \frac{m}{3}\theta, \quad j_{1,y} = j_y, \quad \psi_{1,y} = \psi_y. \quad (1.44)$$

После усреднения по времени  $\theta$ , получают автономный резонансный гамильтониан

$$H_1 = \nu_y j_{1,y} + \delta j_{1,x} + 2\sqrt{2}j_{1,x}^{\frac{3}{2}}A_{3,m} \cos[3\psi_{1,x}], \quad (1.45)$$

где  $\delta = \nu_x + \frac{m}{3}$ . Анализ гамильтониана (1.45) даёт положение гиперболических стационарных точек (лежащих на границе динамической апертуры)

$$j_{x,da} = \frac{\delta^2}{18A_{3,m}^2}, \quad x_{da} = \frac{\delta}{6A_{3,m}}\sqrt{\beta_x}, \quad (1.46)$$

а вертикальное движение отделяется (не ограничивает и не влияет на горизонтальное движение) и не имеет ограничений в первом порядке теории возмущений (усреднение в первом порядке). Если известно действие  $j_{x,r}$  при котором наступает резонанс, то вычисляется резонансная зона, область частот вокруг резонанса, где реализуются резонансные условия,

$$\delta \leq \delta_r = 3\sqrt{2}A_{3,m}\sqrt{j_{x,r}}. \quad (1.47)$$

**Резонанс**  $\nu_x = -m$ 

Аналогично рассматривается одномерное горизонтальное движение вблизи резонанса  $\nu_x = -m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ), не забывая члены  $3\nu_x = -3m$ . Замена переменных осуществляется с помощью производящей функции

$$F_2(\psi_x, j_{1,x}, \psi_y, j_{1,y}) = (\psi_x + m\theta) j_{1,x} + \psi_y j_{1,y}. \quad (1.48)$$

Усреднение приносит автономный резонансный гамильтониан

$$H_1 = \nu_y j_{1,y} + \delta j_{1,x} + 2\sqrt{2} j_{1,x}^{\frac{3}{2}} (3A_{1,m} \cos[\psi_{1,x}] + A_{3,3m} \cos[3\psi_{1,x}]) - 12\sqrt{2} j_{1,x}^{\frac{1}{2}} j_{1,y} B_{1,m} \cos[\psi_{1,x}], \quad (1.49)$$

где

$$\delta = \nu_x + m, \quad j_{1,x} = j_x, \quad \psi_{1,x} = \psi_x + m\theta, \quad j_{1,y} = j_y, \quad \psi_{1,y} = \psi_y. \quad (1.50)$$

Переменная  $\psi_{1,y}$  является циклической (не входит в гамильтониан), поэтому вертикальное действие остаётся инвариантным, и не имеет ограничений. Однако, вертикальное действие, совместно с гармоникой  $B_{1,m}$ , влияет на горизонтальное движение только как параметр, приводящий к ограничению горизонтальной динамической апертуры и появлению одномерных лучей в динамической апертуре (рисунок 1.5). В этом смысле ограничение вертикальной динамической апертуры возникает из-за неустойчивости горизонтального движения. Вблизи рассматриваемого резонанса  $\nu_x = -m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) появляются несколько решений для гиперболических стационарных точек, для упрощения формул принято  $j_{1,y} = 0$ ,

$$j_{x,da} = \begin{cases} \frac{A_{3,3m}\delta^2}{18(A_{3,3m}-A_{1,m})^3}, & \text{если } \frac{(A_{1,m}+3A_{3,3m})\delta^2}{A_{1,m}-A_{3,3m}} < 0, \\ \frac{\delta^2}{18(3A_{1,m}+A_{3,3m})^2}, & \text{если } \frac{(A_{1,m}+3A_{3,3m})\delta^2}{-3A_{1,m}-A_{3,3m}} < 0, \end{cases} \quad (1.51)$$

и соответствующие  $x$  координаты

$$x_{da} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\beta_x} A_{3,3m} \delta^2}{3((A_{1,m}-A_{3,3m})\delta A_{3,3m} \pm \sqrt{-3\delta^2 A_{1,m} A_{3,3m} (A_{1,m}-A_{3,3m})^2})}, & \text{если } \frac{(A_{1,m}+3A_{3,3m})\delta^2}{A_{1,m}-A_{3,3m}} < 0, \\ \frac{\delta\sqrt{\beta_x}}{6(3A_{1,m}+A_{3,3m})}, & \text{если } \frac{(A_{1,m}+3A_{3,3m})\delta^2}{-3A_{1,m}-A_{3,3m}} < 0. \end{cases} \quad (1.52)$$

Ширина резонансной зоны тоже имеет несколько значений в зависимости от величин гармоник  $A_{1,m}$  и  $A_{3,3m}$ , и действия  $j_{x,r}$  при котором наступает резонанс:

$$\delta \leq \delta_r = \begin{cases} \sqrt{\frac{18j_{x,r}(A_{3,3m}-A_{1,m})^3}{A_{3,3m}}}, & \text{если } \frac{(A_{1,m}+3A_{3,3m})\delta^2}{A_{1,m}-A_{3,3m}} < 0, \\ \sqrt{18j_{x,r}(3A_{1,m}+A_{3,3m})^2}, & \text{если } \frac{(A_{1,m}+3A_{3,3m})\delta^2}{-3A_{1,m}-A_{3,3m}} < 0. \end{cases} \quad (1.53)$$

**Резонанс**  $\nu_x - 2\nu_y = -m$

При рассмотрении резонанса  $\nu_x - 2\nu_y = -m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) используют производящую функцию

$$F_2(\psi_x, I_1, \psi_y, I_2) = (\psi_x - 2\psi_y + m\theta) I_1 + \psi_y I_2, \quad (1.54)$$

приводящую к резонансному гамильтониану

$$H_1 = \nu_y I_2 + \delta I_1 - 6\sqrt{2}B_{1,-2,m}I_1^{\frac{1}{2}}(I_2 - 2I_1) \cos[\psi_1], \quad (1.55)$$

где

$$I_1 = j_x, \quad \psi_1 = \psi_x - 2\psi_y + m\theta, \quad (1.56)$$

$$I_2 = j_y + 2I_1, \quad \psi_2 = \psi_y, \quad \delta = \nu_x - 2\nu_y + m.$$

Новое действие  $I_2 = j_y + 2I_1 = j_{0,y} + 2j_{0,x}$  является инвариантом и определяется начальными условиями  $\{j_{0,x}, j_{0,y}\}$ . Такой инвариант приводит к противофазным биениям амплитуд горизонтального и вертикального движений в диапазонах

$$\frac{\delta^2}{288B_{1,-2,m}} \leq j_x \leq \frac{I_2}{2}, \quad 0 \leq j_y \leq I_2 - \frac{\delta^2}{144B_{1,-2,m}}. \quad (1.57)$$

Так как старые переменные действия  $j_{x,y}$  неотрицательны, то устойчивое движение возможно только в области

$$0 \leq I_1 \leq \frac{I_2}{2}, \quad (1.58)$$

следовательно граница динамической апертуры

$$j_{x,da} = \frac{I_2}{2}, \quad x_{da} = \sqrt{I_2\beta_x}. \quad (1.59)$$

Резонанс реализуется при

$$\delta \leq \delta_r = 12\sqrt{I_2 B_{1,-2,m}^2}. \quad (1.60)$$

**Резонанс**  $\nu_x + 2\nu_y = -m$

Для изучения резонанса  $\nu_x + 2\nu_y = -m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) используют производящую функцию

$$F_2(\psi_x, I_1, \psi_y, I_2) = (\psi_x + 2\psi_y + m\theta) I_1 - \psi_y I_2, \quad (1.61)$$

приводящую к резонансному гамильтониану

$$H_1 = -\nu_y I_2 + \delta I_1 - 6\sqrt{2} B_{1,2,m} I_1^{\frac{1}{2}} (2I_1 - I_2) \cos[\psi_1], \quad (1.62)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= j_x, & \psi_1 &= \psi_x + 2\psi_y + m\theta, \\ I_2 &= 2I_1 - j_y, & \psi_2 &= -\psi_y, & \delta &= \nu_x + 2\nu_y + m. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Инвариантом является новое действие  $I_2 = 2I_1 - j_y = 2j_{0,x} - j_{0,y}$ , определяемое начальными условиями  $\{j_{0,x}, j_{0,y}\}$ . Так как старые переменные действия  $j_{x,y}$  неотрицательны, то устойчивое движение возможно только в области

$$I_1 \geq \frac{I_2}{2}. \quad (1.64)$$

Резонанс реализуется при

$$\delta \leq \delta_r = 12\sqrt{I_2 B_{1,2,m}^2}, \quad (1.65)$$

и устойчивое движение отсутствует.

Таким образом, резонансы первого порядка ограничивают динамическую аперттуру, и возникает очевидное желание избегать резонансных зон путём управления зависимостью частоты от амплитуды. Дополнительные секступоли позволяют управлять зависимостью частоты от амплитуды во втором порядке возмущения, меняя при этом величины гармоник и ширины резонансных

зон [99]. Другой способ, рассмотренный в следующем параграфе, с помощью октупольного возмущения создаёт независимую “ручку” для управления поведением частоты от амплитуды.

Замечу также, что, вспоминая определения гармоник (А.30), (А.31), горизонтальную динамическую апертуру вблизи резонансов  $3\nu_x = -m$  и  $\nu_x = -m$  можно оценить как

$$x_{da}(s) \propto \frac{1}{K_2 L \beta_x}, \quad (1.66)$$

где  $K_2 L$  – это интегральная сила секступоля, и  $\beta_x$  – величина бета-функции в местонахождении секступоля, а  $\beta_x(s)$  – в точке наблюдения.

### 1.2.2 Динамическая апертура

Как уже было сказано, новые переменные действия (1.24), (1.25) являются инвариантами движения первого порядка и определяют фазовые траектории. Эти уравнения можно рассматривать как многомерные поверхности (двумерные, если положить  $j_y = 0$ ), сечение которых поверхностями  $J_{1,x} = const$  и  $J_{1,y} = const$  даст фазовые кривые. Граница динамической апертуры – это последняя замкнутая фазовая кривая, для её определения, достаточно найти седловые точки многомерных поверхностей и соответствующие инвариантные действия.

Для построения траекторий и нахождения динамической апертуры удобно переписать формулы (1.24), (1.25) в начале системы координат ( $\varphi(0) = 0$ ) и в новых нормализованных координатах  $\{u_x, v_x, u_y, v_y\}$

$$\begin{aligned} u_x &= \sqrt{2j_x} \cos[\phi_x(s)], & v_x &= -\sqrt{2j_x} \sin[\phi_x(s)], \\ u_y &= \sqrt{2j_y} \cos[\phi_y(s)], & v_y &= -\sqrt{2j_y} \sin[\phi_y(s)], \end{aligned} \quad (1.67)$$

связанных со старыми через (1.3)

$$\begin{aligned} x &= u_x \sqrt{\beta_x}, & p_x &= \frac{v_x}{\sqrt{\beta_x}} - \alpha_x \frac{x}{\sqrt{\beta_x}}, \\ y &= u_y \sqrt{\beta_y}, & p_y &= \frac{v_y}{\sqrt{\beta_y}} - \alpha_y \frac{y}{\sqrt{\beta_y}}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Итак,

$$\begin{aligned}
J_{1,x} = & \frac{u_x^2 + v_x^2}{2} + \frac{B_1 + B_3}{2\sqrt{2}}u_x^3 + \frac{B_1 - 3B_3}{2\sqrt{2}}u_xv_x^2 \\
& + \frac{A_1 - A_3}{2\sqrt{2}}v_x^3 + \frac{A_1 + 3A_3}{2\sqrt{2}}u_x^2v_x \\
& + v_x \left( \frac{B_+ - B_-}{\sqrt{2}}u_yv_y - \frac{A_+ + A_- + 2A_2}{2\sqrt{2}}u_y^2 + \frac{A_+ + A_- - 2A_2}{2\sqrt{2}}v_y^2 \right) \\
& + u_x \left( \frac{A_- - A_+}{\sqrt{2}}u_yv_y - \frac{B_+ + B_- + 2B_2}{2\sqrt{2}}u_y^2 + \frac{B_+ + B_- - 2B_2}{2\sqrt{2}}v_y^2 \right) \quad (1.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{1,y} = & \frac{u_y^2 + v_y^2}{2} + u_x \left( \frac{B_- - B_+}{\sqrt{2}}(u_y^2 - v_y^2) - \sqrt{2}(A_- + A_+)u_yv_y \right) \\
& + v_x \left( \frac{A_- - A_+}{\sqrt{2}}(u_y^2 - v_y^2) + \sqrt{2}(B_- + B_+)u_yv_y \right). \quad (1.70)
\end{aligned}$$

### Одномерное горизонтальное движение

Если положить  $j_y = 0$ , то уравнения (1.24), (1.25) существенно упрощаются. Второе упрощение состоит в выборе точки наблюдения в начале симметричной структуры, так что все  $A_{1,3,2} = 0$  и  $A_{\pm} = 0$ . После таких упрощений уравнения (1.69) и (1.70) становятся

$$J_{1,x} = \frac{u_x^2 + v_x^2}{2} + \frac{B_1 + B_3}{2\sqrt{2}}u_x^3 + \frac{B_1 - 3B_3}{2\sqrt{2}}u_xv_x^2 \quad (1.71)$$

$$J_{1,y} = 0. \quad (1.72)$$

Разрешая (1.71) относительно переменной  $v_x$ , получаю уравнение фазовой траектории

$$v_x = \pm \frac{\sqrt{4J_{1,x} - u_x^2(2 + \sqrt{2}(B_1 + B_3)u_x)}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}(B_1 - 3B_3)u_x}}, \quad (1.73)$$

где требуется задать действие  $J_{1,x}$  и функции возмущения рассматриваемой структуры.

Фазовые траектории замкнуты вокруг локальных экстремумов, и разрываются в седловых точках уравнения поверхности (1.71). Это наблюдение позволяет найти последнюю фазовую траекторию (сепаратрису), то есть максимальное новое действие  $J_{1,x}$ . Для нахождения седловых точек функции двух

переменных, необходимо и достаточно найти стационарные точки (первый дифференциал функции обращается в нуль) и проверить знакоопределённость второго дифференциала (матрица Гессе для функций 2-х переменных) [100].

Уравнения на первый дифференциал функции  $J_{1,x}$  (1.71)

$$\frac{\partial J_{1,x}}{\partial u_x} = 0, \quad \frac{\partial J_{1,x}}{\partial v_x} = 0 \quad (1.74)$$

дают четыре стационарных точки:

$$\begin{aligned} P_1 : u_x &= 0, & v_x &= 0, \\ P_{2,3} : u_x &= -\frac{\sqrt{2}}{B_1 - 3B_3}, & v_x &= \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{-B_1 - 9B_3}}{(B_1 - 3B_3)^{3/2}}, \\ P_4 : u_x &= -\frac{2\sqrt{2}}{3(B_1 + B_3)}, & v_x &= 0. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Первая точка является тривиальной и далее не рассматривается, вторая и третья имеют одинаковые старые действия и противоположного знака старые фазы, новое действие у них одинаковое, четвёртая точка существенно отличается от второй и третьей. Для определения седловой точки, необходимо проверить знак определителя матрицы Гессе ( $H$  – матрица вторых производных) в стационарных точках, если он отрицателен, то данная точка является седловой

$$\begin{aligned} P_{2,3} : \det(H) &= \frac{B_1 + 9B_3}{B_1 - 3B_3}, \\ P_4 : \det(H) &= -\frac{B_1 + 9B_3}{3(B_1 + 3B_3)}. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Таким образом, из трёх не тривиальных решений, остаётся только два:

$$J_{1,x,da} = \begin{cases} -\frac{4B_3}{(B_1 - 3B_3)^3}, & \text{если } \frac{B_1 + 9B_3}{B_1 - 3B_3} < 0, \\ \frac{4}{27(B_1 + B_3)^2}, & \text{если } -\frac{B_1 + 9B_3}{3(B_1 + B_3)} < 0, \end{cases} \quad (1.77)$$

соответствующие  $x$  координаты динамической апертуры при условии  $p_x = 0$

$$x_{da} = \begin{cases} \pm \frac{2\sqrt{2\beta_x} \left( (B_1 - 3B_3)B_3 + \sqrt{-B_1 B_3 (B_1 - 3B_3)^2} \right)}{(B_1 - 3B_3)^2 (B_1 + B_3)}, & \text{если } \frac{B_1 + 9B_3}{B_1 - 3B_3} < 0, \\ \frac{\sqrt{2\beta_x}}{3(B_1 + B_3)}, & \text{если } -\frac{B_1 + 9B_3}{3(B_1 + B_3)} < 0. \end{cases} \quad (1.78)$$

Полученные решения могут реализовываться как по отдельности, так и одновременно, в последнем случае выбирается минимальная координата как граница динамической апертуры. Для примера на рисунке 1.3 показаны расчётные фазовые траектории для различных оптических структур, где обозначены четыре стационарные точки, отчётливо видны вторая и симметричная ей третья, можно заметить, что динамическая апертура может определяться как четвёртой точкой, так и второй и третьей.

Чтобы убедиться в правильности полученных формул, приведу сравнение динамической апертуры для ячейки FODO, сосчитанной описанным способом, с найденной численным моделированием (трекингом) рисунок 1.4, при этом два решения показаны синей и оранжевой линиями. Отмечу совпадение предсказания теоретического расчёта с моделированием в падении динамической апертуры при увеличении набеге фазы на ячейку ( $\nu_x = \mu_x/2\pi$ ), и отсутствие резонансов  $\nu = 1/4, 1/5$ , которые появляются в следующих порядках теории возмущения.

## Двумерное движение

Поиск двумерной динамической апертуры значительно сложнее, вычисление седловых точек производится по описанному выше алгоритму, но сами формулы становятся более громоздкими, появляются многочисленные условия и ветвления, что существенно затрудняет вычисления. Однако, анализируя выражение для нового действия  $J_{1,y}$  (1.25) возможно сделать простое наблюдение, что при горизонтальных действиях больших некоторого порогового значения, вертикальное действие  $J_{1,y}$  становится отрицательным, что означает неустойчивость движения. Значение порогового горизонтального действия составляет

$$\sqrt{j_{x,th}} = \frac{1}{2B_+ \cos \psi_+ - 2B_- \cos \psi_- - 2A_+ \sin \psi_+ + 2A_- \sin \psi_-}, \quad (1.79)$$



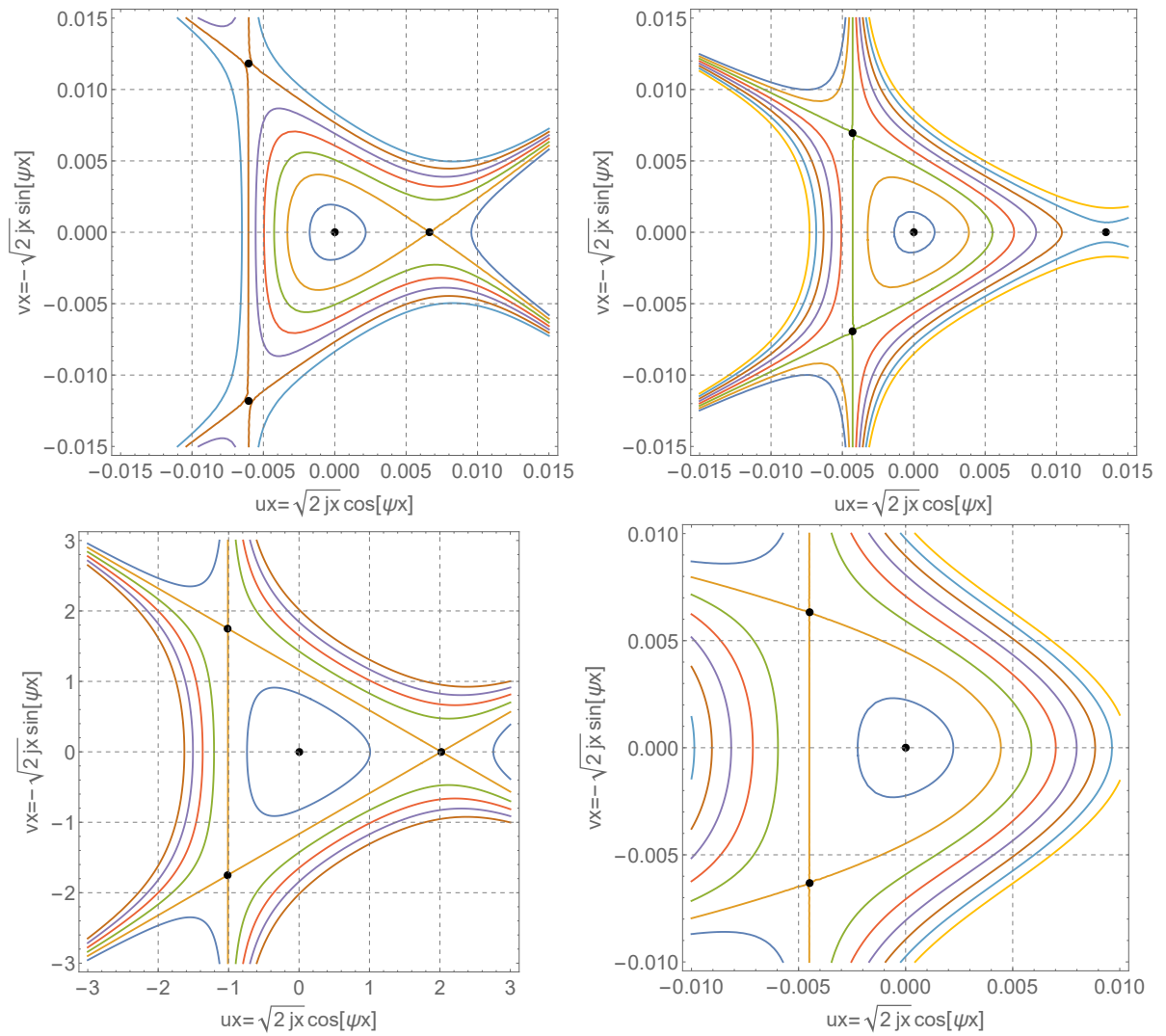


Рисунок 1.3 – Фазовые траектории, рассчитанные с помощью функций возмущения первого порядка. Чёрные точки показывают положение стационарных точек

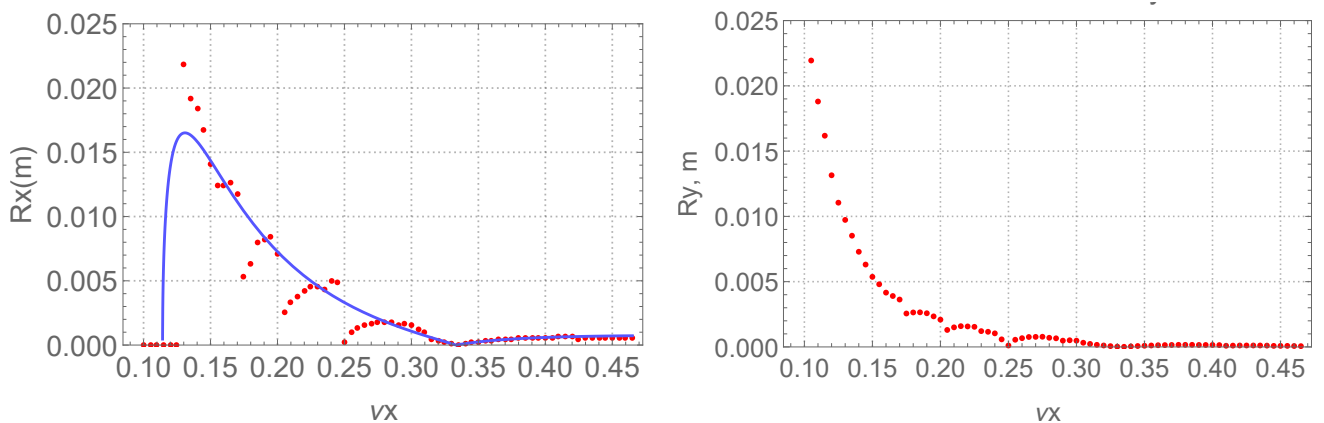


Рисунок 1.4 – Динамическая апертура FODO ячейки в зависимости от частоты ячейки при  $\nu_x = \nu_y$ : красные точки – результаты численного моделирования, синяя линия – аналитические расчёты по (1.78). Слева горизонтальная ДА, справа – вертикальная

где  $\psi_{\pm} = \psi_{0,x} \pm 2\psi_{0,y}$ . Минимум действия  $j_{x,th}$  достигается в точках  $\text{tg } \psi_{\pm} = -A_{\pm}/B_{\pm}$ , при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} (-2B_+ \cos \psi_+ + 2A_+ \sin \psi_+) &< 0, \\ (2B_- \cos \psi_- - 2A_- \sin \psi_-) &< 0, \end{aligned} \quad (1.80)$$

значения функций возмущений взяты в начале оптической структуры (в точке наблюдения). Проявление этого эффекта наблюдается как появление одномерных лучей при  $y = 0$  в динамической апертуре. На рисунке 1.5 приведена полученная трекингом двумерная динамическая апертура Супер  $c - \tau$  фабрики (точки – начальные условия устойчивых частиц), отчётливо видно ступенчатое изменение горизонтальной апертуры при появлении вертикального движения. Формула (1.79) предсказывает значение порогового действия  $j_{x,th} = 3.3\sigma_x$ , которое близко к наблюдаемой величине  $\approx 2\sigma_x$ .

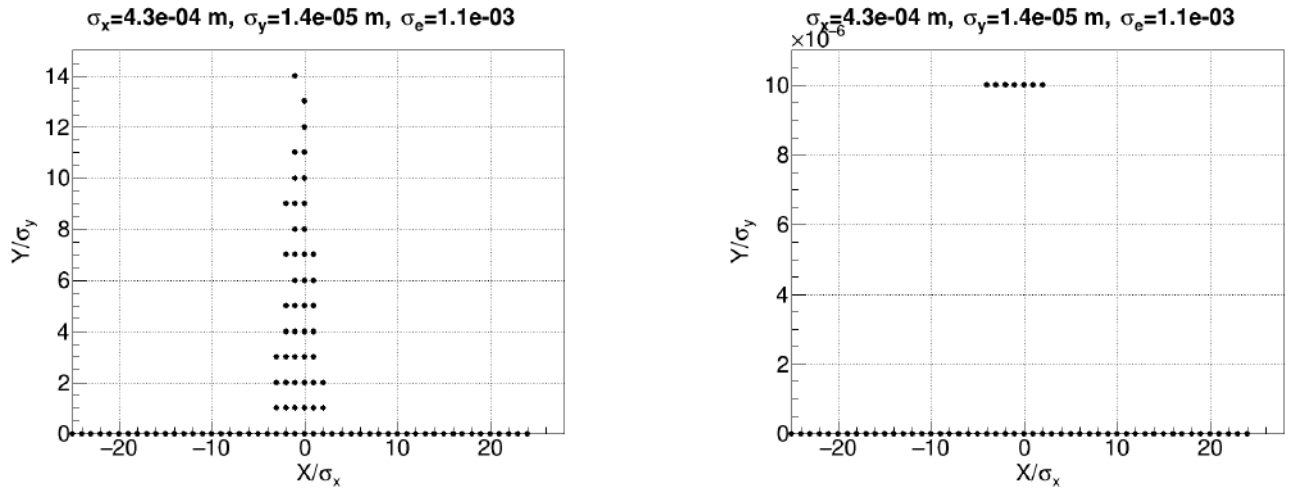


Рисунок 1.5 – Двумерная динамическая апертура Супер  $c - \tau$  фабрики при переходе от одномерного горизонтального движения к двумерному, слева – шаг по вертикали  $\sigma_y$ , справа – шаг по вертикали  $10^{-6}\sigma_y$

### 1.3 Октупольное возмущение

Для октупольного возмущения функция Гамильтона разделённая на линейную часть и возмущение записывается как

$$H = H_0(\psi_x, \psi_y, j_x, j_y; \theta) + H_1(\psi_x, \psi_y, j_x, j_y; \theta) \quad (1.81)$$

$$H_0 = \nu_x j_x + \nu_y j_y \quad (1.82)$$

$$\begin{aligned} H_1 = & \frac{RK_3}{48} j_x^2 \beta_x^2 \left( 3 + 4 \cos[2\phi_x] + \cos[4\phi_x] \right) \\ & - \frac{RK_3}{8} j_x j_y \beta_y \beta_x \left( 2 + 2 \cos[2\phi_x] + 2 \cos[2\phi_y] \right. \\ & \quad \left. + \cos[2\phi_x + 2\phi_y] + \cos[2\phi_x - 2\phi_y] \right) \\ & + \frac{RK_3}{48} j_y^2 \beta_y^2 \left( 3 + 4 \cos[2\phi_y] + \cos[4\phi_y] \right) \end{aligned} \quad (1.83)$$

где

$$\phi_{x,y} = \psi_{x,y} + \varphi_{x,y}(\theta) - \nu_{x,y}\theta, \quad \varphi_{x,y}(\theta) = \int_0^\theta \frac{R d\tau}{\beta_{x,y}(\tau)}. \quad (1.84)$$

Добавка первого порядка (В.29) к гамильтониану неравна нулю, в отличие от секступольного возмущения (1.19),

$$\mathcal{K}_1 = \iint_0^{2\pi} H_1 \frac{d\psi_x}{2\pi} \frac{d\psi_y}{2\pi} = \frac{RK_3}{16} (j_x^2 \beta_x^2 - 4j_x j_y \beta_x \beta_y + j_y^2 \beta_y^2), \quad (1.85)$$

и новый гамильтониан в первом порядке есть

$$K = \nu_x J_{1,x} + \nu_y J_{1,y} + \frac{RK_3}{16} (J_x^2 \beta_x^2 - 4J_x J_y \beta_x \beta_y + J_y^2 \beta_y^2). \quad (1.86)$$

Полученный гамильтониан позволяет найти коэффициенты зависимости частоты от действия в первом порядке (1.32), которые выглядят существенно проще, чем для секступольного возмущения (1.33), (1.34), (1.35),

$$\alpha_{xx} = \frac{R}{16\pi} \oint d\theta K_3(\theta) \beta_x^2(\theta), \quad (1.87)$$

$$\alpha_{xy} = -\frac{R}{8\pi} \oint d\theta K_3(\theta) \beta_x(\theta) \beta_y(\theta), \quad (1.88)$$

$$\alpha_{yy} = \frac{R}{16\pi} \oint d\theta K_3(\theta) \beta_y^2(\theta). \quad (1.89)$$

Производящая функция находится с помощью (B.33) и (B.34)

$$\begin{aligned}
W_1 = & j_x^2 \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\tau \frac{RK_3(\tau)\beta_x^2(\tau)}{96} \left( -\frac{4 \sin[\Phi(2, 0)]}{\sin[2\pi\nu_x]} - \frac{\sin[\Phi(4, 0)]}{\sin[4\pi\nu_x]} \right) \\
& + j_x j_y \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\tau \frac{RK_3(\tau)\beta_x(\tau)\beta_y(\tau)}{16} \left( \frac{2 \sin[\Phi(2, 0)]}{\sin[2\pi\nu_x]} + \frac{2 \sin[\Phi(0, 2)]}{\sin[2\pi\nu_y]} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sin[\Phi(2, 2)]}{\sin[2\pi(\nu_x + \nu_y)]} + \frac{\sin[\Phi(2, -2)]}{\sin[2\pi(\nu_x - \nu_y)]} \right) \\
& + j_y^2 \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\tau \frac{RK_3(\tau)\beta_y^2(\tau)}{96} \left( -\frac{4 \sin[\Phi(0, 2)]}{\sin[2\pi\nu_y]} - \frac{\sin[\Phi(0, 4)]}{\sin[4\pi\nu_y]} \right), \tag{1.90}
\end{aligned}$$

где

$$\Phi(n, m) = n(\psi_x + \varphi_x(\tau) - \pi\nu_x - \nu_x\theta) + m(\psi_y + \varphi_y(\tau) - \pi\nu_y - \nu_y\theta). \tag{1.91}$$

Полученные в первом порядке  $W_1$ ,  $\mathcal{K}_1$ ,  $H_1$ ,  $H_2 = 0$  позволяют с помощью уравнения (В.26) и (В.35) найти члены гамильтониана второго порядка:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_0^{2\pi} \left( H_2 + \frac{1}{2} L_1 (\mathcal{K}_1 + H_1) \right) d\psi_x d\psi_y \\
&= R^2 \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\tau K_3(\theta) K_3(\tau) \left\{ \right. \\
&\quad - J_{2,x}^3 \beta_x^2(\theta) \beta_x^2(\tau) \left( \frac{\cos[2(\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x)]}{144 \sin[2\pi\nu_x]} + \frac{\cos[4(\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x)]}{1152 \sin[4\pi\nu_x]} \right) \\
&\quad - J_{2,y}^3 \beta_y^2(\theta) \beta_y^2(\tau) \left( \frac{\cos[2(\varphi_y(\theta, \tau) + \pi\nu_y)]}{144 \sin[2\pi\nu_y]} + \frac{\cos[4(\varphi_y(\theta, \tau) + \pi\nu_y)]}{1152 \sin[4\pi\nu_y]} \right) \\
&\quad J_{2,x}^2 J_{2,y} \left( \frac{\cos[2(\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x)]}{64 \sin[2\pi\nu_x]} (\beta_x^2(\theta) \beta_x(\tau) \beta_y(\tau) + \beta_x^2(\tau) \beta_x(\theta) \beta_y(\theta)) \right. \\
&\quad \quad + \beta_x(\theta) \beta_x(\tau) \beta_y(\theta) \beta_y(\tau) \left( -\frac{\cos[2(\varphi_y(\theta, \tau) + \pi\nu_y)]}{32 \sin[2\pi\nu_y]} \right. \\
&\quad \quad \quad + \frac{\cos[2(\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x - \varphi_y(\theta, \tau) - \pi\nu_y)]}{128 \sin[2\pi(\nu_x - \nu_y)]} \\
&\quad \quad \quad \left. \left. - \frac{\cos[2(\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x + \varphi_y(\theta, \tau) + \pi\nu_y)]}{128 \sin[2\pi(\nu_x + \nu_y)]} \right) \right) \\
&\quad J_{2,x} J_{2,y}^2 \left( \frac{\cos[2(\varphi_y(\theta, \tau) + \pi\nu_y)]}{64 \sin[2\pi\nu_y]} (\beta_x(\tau) \beta_y^2(\theta) \beta_y(\tau) + \beta_x(\theta) \beta_y(\theta) \beta_y^2(\tau)) \right. \\
&\quad \quad + \beta_x(\theta) \beta_x(\tau) \beta_y(\theta) \beta_y(\tau) \left( -\frac{\cos[2(\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x)]}{32 \sin[2\pi\nu_y]} \right. \\
&\quad \quad \quad + \frac{\cos[2(\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x - \varphi_y(\theta, \tau) - \pi\nu_y)]}{128 \sin[2\pi(\nu_x - \nu_y)]} \\
&\quad \quad \quad \left. \left. - \frac{\cos[2(\varphi_x(\theta, \tau) + \pi\nu_x + \varphi_y(\theta, \tau) + \pi\nu_y)]}{128 \sin[2\pi(\nu_x + \nu_y)]} \right) \right) \left. \right\}, \quad (1.92)
\end{aligned}$$

где  $\varphi_{x,y}(\theta, \tau) = \varphi_{x,y}(\theta) - \varphi_{x,y}(\tau)$ .

Таким образом, октуполи позволяют корректировать зависимость частоты от действия, созданную секступолями, независимо от бетатронной частоты, но создают новые резонансы в первом порядке теории возмущений: одномерные горизонтальные и вертикальные  $2\nu_{x,y} = -m$  и  $4\nu_{x,y} = -m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ), двумерные резонансы  $2\nu_{x,y} = -m$ ,  $2\nu_x \pm 2\nu_y = -m$ .

## 1.4 Секступольное и октупольное возмущения

Возможность управления зависимостью частоты от амплитуды октуполья-ми в первом порядке ставит вопрос о совместном рассмотрении секступольного и октупольного возмущений. Для простоты и наглядности расчёты проведены в одномерном горизонтальном движении до третьего порядка теории возмущений.

Гамильтониан одномерного горизонтального движения записывается как (A.50)

$$H = H_0(\psi_x, j_x; \theta) + H_1(\psi_x, j_x; \theta) \quad (1.93)$$

$$H_0 = \nu_x j_x \quad (1.94)$$

$$H_1 = (2j_x)^{\frac{3}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( 3A_{1,m} \cos[\psi_x + m\theta] + A_{3,m} \cos[3\psi_x + m\theta] \right) \\ + (2j_x)^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( 3C_{0,m} \cos[m\theta] + 4C_{2,m} \cos[2\psi_x + m\theta] \right. \\ \left. + C_{4,m} \cos[4\psi_x + m\theta] \right), \quad (1.95)$$

где величины секступольных гармоник  $A_{1,m}$  и  $A_{3,m}$  даны в (A.30), (A.31), а октупольных гармоник  $C_{0,m}$ ,  $C_{2,m}$  и  $C_{4,m}$  в (A.37), (A.38), (A.39). Добавка к гамильтониану первого порядка

$$\mathcal{K}_1 = 12J_x^2 C_{0,0}, \quad (1.96)$$

второго порядка

$$\mathcal{K}_2 = -J_x^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{54A_{1,m}^2}{m + \nu_x} + \frac{18A_{3,m}^2}{m + 3\nu_x} \right) - J_x^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{512C_{2,m}^2}{m + 2\nu_x} + \frac{64C_{4,m}^2}{m + 4\nu_x} \right), \quad (1.97)$$

третьего порядка

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_3 = & \\
& + 192J_x^3 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{6C_{4,m}A_{1,m-n}A_{3,n}}{(m+4\nu_x)(n+3\nu_x)} + \frac{10C_{2,m}A_{1,n-m}A_{3,n}}{(m+2\nu_x)(n+3\nu_x)} \right. \\
& + \frac{C_{2,m}A_{1,n}(14A_{3,m+n}+10A_{1,m-n})}{(m+2\nu_x)(n+\nu_x)} + \frac{A_{3,m}A_{1,n}(4C_{2,m-n}+6C_{4,m+n})}{(m+3\nu_x)(n+\nu_x)} \\
& \left. + \frac{9C_{0,m-n}A_{3,m}A_{3,n}}{(m+3\nu_x)(n+3\nu_x)} + \frac{A_{1,m}A_{1,n}(9C_{0,m-n}+10C_{0,m+n})}{(m+\nu_x)(n+\nu_x)} \right) \quad (1.98) \\
& + 3840J_x^4 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2C_{0,m-n}C_{4,m}C_{4,n}}{(m+4\nu_x)(n+4\nu_x)} \right. \\
& \left. + \frac{4C_{2,n}(3C_{0,m-n}+3C_{0,n-m}+2C_{4,m+n})}{3(m+2\nu_x)(n+2\nu_x)} + \frac{8C_{2,m}C_{2,n-m}C_{4,n}}{3(m+2\nu_x)(n+4\nu_x)} \right),
\end{aligned}$$

Итак, октуполи помимо создания новых резонансов во втором порядке (1.97), в гамильтониане третьего порядка производят перекрёстные члены (произведения секступольных и октупольных гармоник). Это означает, что октуполи меняют не только зависимость частоты от амплитуды, но и величину гармоник уже существующих резонансов, а следовательно и ширины резонансных зон и динамическую апертуру. Таким образом, использование октуполей для коррекция зависимости частоты от амплитуды должно быть аккуратным, чтобы не уменьшить динамическую апертуру. Замечу, что индивидуальные резонансные члены секступолей появляются в следующем – четвёртом порядке.

## 1.5 Комбинации секступолей

Для коррекции сильного хроматизма используют пары секступолей разделённых  $-I$  преобразованием [101; 102]. Пара тонких секступолей с минус единичным преобразованием между ними не возбуждает хроматические биеения бета функции (1.7) и не имеет нелинейных aberrаций за пределами пары [103], что обещает коррекцию хроматизма без уменьшения динамической апертуры. Однако, нелинейное возмущение фазовых траекторий локализованное

внутри  $-I$  пары секступолей может оказаться таким большим, что частицы, оставаясь формально устойчивыми, погибнут на границе физической апертуры. Далее, реалистичная длина секступолей  $-I$  пары создаёт дополнительные геометрические aberrации, ограничивающие динамическую апертуру. Величина aberrаций пропорциональна квадрату силы секступолей, что в случае сильных секступолей становится значительным фактором, ограничивающим динамическую апертуру. Этот параграф посвящён рассмотрению этих эффектов, а также отвечает на вопрос о существовании других наборов секступолей, не имеющих квадратичных aberrаций, но позволяющих компенсацию хроматизма.

### 1.5.1 Наборы секступолей без квадратичных aberrаций

Геометрические aberrации вызывают искажение переменных действия-фазы (1.3), (1.24) и (1.25), следовательно отсутствие возмущения действия и фазы первого порядка означает отсутствие квадратичных aberrаций. Это возможно только при равенстве нулю функций возмущения (1.26), (1.27), (1.28), (1.29), (1.30). Если представить интегралы в этих выражениях в виде сумм соответствующих векторов на комплексной плоскости, тогда условие равенства нулю функций возмущения означает равенство нулю сумм соответствующих векторов. Рассматривая для простоты наборы секступолей одинаковых сил и нулевой длины, в точках с одинаковыми величинами бета-функций, замечаю, что для равенства нулю функций возмущения (за пределами данного набора секступолей) необходимо зануление сумм векторов на диаграммах  $\varphi$  и  $3\varphi$ . В результате, простейшие наборы тонких секступолей, обеспечивающие отсутствие квадратичных aberrаций за пределами набора, следующие:

1. два секступоля одинаковой силы через  $\varphi_{x,y} = \pi$  ( $-I$  пара),
2. два секступоля противоположной силы через  $\varphi_x = 2\pi$ ,  $\varphi_y = \pi$  (пара CRAB секступолей),



3. четыре секступоля одинаковой силы через  $\varphi_{x,y} = \pi/2$ ,
4. шесть секступолей одинаковой силы через  $\varphi_{x,y} = \pi/3$ .

Полученные требования на наборы секступолей совпадают с условиями ахромата второго порядка [103]. Если же секступоли обладают разными силами, то фазовые соотношения сохраняются, но появляются дополнительные требования на силы секступолей и величины беты-функций в местах их нахождения, случай парных секступолей через  $\pi$  рассмотрен в [104].

### 1.5.2 Искажение фазовых траекторий в $-I$ паре секступолей

Теория возмущения предсказывает искажения фазовых траекторий из-за секступолей (1.24) (1.25), в простых случаях тонких секступолей эти искажения возможно рассчитать без теории возмущений, не используя функции возмущения (1.26) – (1.30). Как уже было сказано, всё возмущение заключено внутри пары, однако это искажение может быть таким сильным, что частица погибнет на геометрической апертуре ускорителя, оставаясь при этом математически устойчивой.

Для простоты оценки буду рассматривать одномерное горизонтальное движение. Двумерное движение тоже возможно рассчитать аналитически, но громоздкость формул затрудняет понимание. На рисунке 1.6 показана рассматриваемая пара  $-I$  секступолей, что означает равенство оптических функций в точках 1 и 3, набег обеих бетатронных фаз между ними равен  $\Delta\mu_{x,y} = \pi$ , интегральная сила каждого секступоля  $K_2L$ . После прохождения первого секступо-

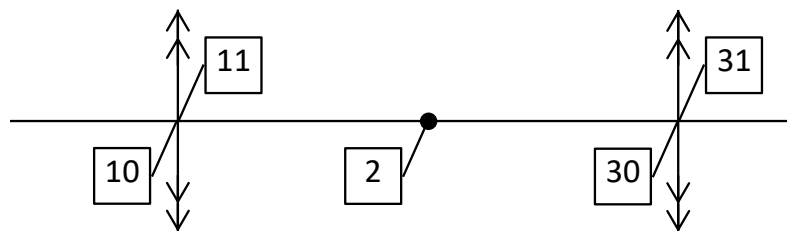


Рисунок 1.6 – Схема и расположение точек наблюдения  $-I$  пары секступолей

ля фазовый эллипс, обозначенный 10 на рисунке 1.7, превращается в фигуру 11, через набег фазы  $\pi/2$ , (точка 2), фазовая траектория поворачивается и приобретает координаты заметно большие первоначальных (фигура 2), перед входом во второй секступоль фазовая траектория выглядит как фигура 30, и после прохождения второго секступоля фазовая траектория восстанавливается (фигура 31). Максимальное отклонение происходит, при условии  $\alpha_x = 0$ ,

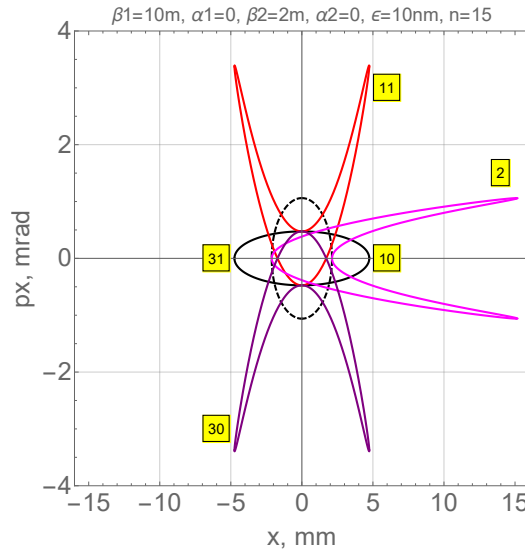


Рисунок 1.7 – Фазовые траектории при прохождении  $-I$  пары секступолей: на входе в первый секступоль – чёрная кривая (точка 10), сразу после первого секступоля – красная кривая (точка 11), посередине  $-I$  пары секступолей с учётом и без учёта нелинейного возмущения – розовая и пунктирная кривые (точка 2), без учёта, на входе во второй секступоль – фиолетовая кривая (точка 30)

ровно через  $\pi/2$  и составляет

$$x_{max} \approx \sqrt{\beta_{x,1}\beta_{x,2}}K_2L\frac{x_1^2}{2}. \quad (1.99)$$

Как видно на рисунке 1.7 нелинейное возмущение увеличивает горизонтальную координату с 2 мм до 15 мм (т.е., если радиус вакуумной камеры меньше 15 мм, частица погибнет), это возмущение пропорционально силе секступоля и квадрату начальной координаты (1.99).

### 1.5.3 Эффект толщины секступолей в $-I$ паре

Используя метод рядов (приложение Б), исследую aberrации до третьего порядка от пары реалистичных ("толстых") секступолей длиной  $L$  и одинаковой силы  $K_2$ . Схема расположения секступолей приведена на рисунке 1.8. С

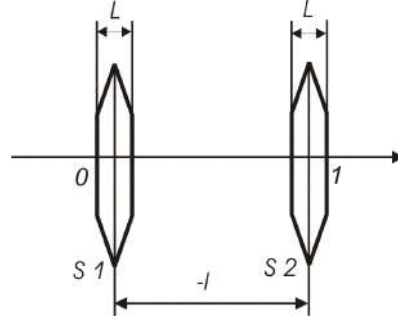


Рисунок 1.8 – Пара одинаковых, протяжённых секступолей с  $-I$  преобразованием между центрами

точностью до 3-го порядка по начальным координатам  $\{x_0, p_{x0}, y_0, p_{y0}\}$  преобразование такой системы из точки 0 в точку 1 есть

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -x_0 - p_{x0}L - \frac{K_2^2}{12} (x_0^3 + x_0 y_0^2) L^4, \\
 p_{x1} &= -p_{x0} - \frac{K_2^2}{6} (x_0^3 + x_0 y_0^2) L^3 - \frac{K_2^2}{12} (3p_{x0}x_0^2 + 2p_{x0}x_0 y_0 + p_{x0}y_0^2) L^4, \\
 y_1 &= -y_0 - p_{y0}L - \frac{K_2^2}{12} (x_0^2 y_0 + y_0^3) L^4, \\
 p_{y1} &= -p_{y0} - \frac{K_2^2}{6} (x_0^2 y_0 + y_0^3) L^3 - \frac{K_2^2}{12} (p_{y0}x_0^2 + 2p_{x0}x_0 y_0 + 3p_{y0}y_0^2) L^4.
 \end{aligned} \tag{1.100}$$

Замечу во-первых, что aberrации третьего порядка вызваны ненулевой толщиной секступолей и пропадают при рассмотрении тонких секступолей. Во-вторых, aberrации третьего порядка не совпадают с октупольными ( $x_1 = x_0 + p_{x0}L - (K_3/12)(x_0^3 - 3x_0 y_0^2)$ ), поэтому невозможна их коррекция октуполями. Величина кубического возмущения пропорциональна квадрату интегральной силы секступоля  $(K_2 L)^2$ .

Добавление второй пары секступолей (рисунок 1.9) позволяет скомпенсировать некоторые из кубических aberrаций [105]. Преобразование координат из точки 0 в точку 1 довольно громоздко, поэтому упрощу начальные условия,

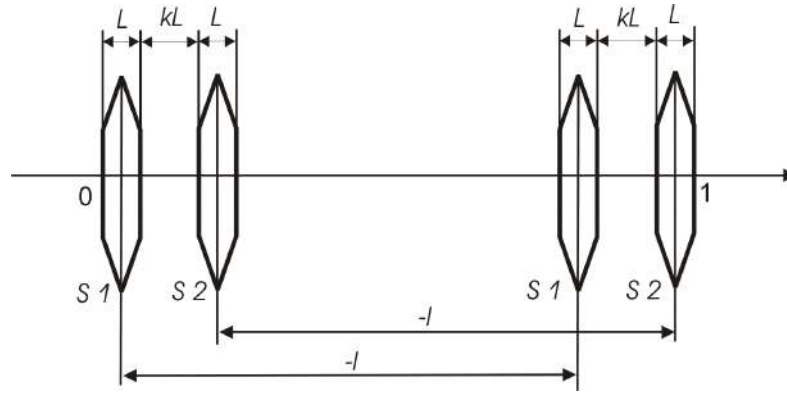


Рисунок 1.9 – Две пары одинаковых, протяжённых секступолей с  $-I$  преобразованием между центрами соответствующих пар

положив  $p_{x0} = 0$  и  $p_{y0} = 0$ . Искомое преобразование тогда выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -x_0 - \frac{B_1(S_1, S_2, k)}{12} (x_0^3 + x_0 y_0^2) L^2, \\
 p_{x1} &= -\frac{B_2(S_1, S_2, k)}{6} (x_0^3 + x_0 y_0^2) L, \\
 y_1 &= -y_0 - \frac{B_1(S_1, S_2, k)}{12} (y_0^3 + x_0^2 y_0) L^2, \\
 p_{y1} &= -\frac{B_2(S_1, S_2, k)}{6} (y_0^3 + x_0^2 y_0) L,
 \end{aligned} \tag{1.101}$$

где

$$\begin{aligned}
 B_1(S_1, S_2, k) &= (3 + 2k)S_1^2 + 6(2 + 3k + k^2)S_1 S_2 + S_2^2, \\
 B_2(S_1, S_2, k) &= S_1^2 + 6(1 + k)S_1 S_2 + S_2^2,
 \end{aligned} \tag{1.102}$$

$S_{(1,2)} = K_{2,(1,2)}L$  – интегральная сила первого или второго секступоля, расстояние между секступолями разных пар  $\Delta L = kL$  выражено через длину секступолей с помощью коэффициента  $k$ . Таким образом, чтобы избавиться от аберраций третьего порядка необходимо подобрать силу секступолей второй пары, чтобы коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$  оказались равными нулю. Однако, уравнения (1.102) с приравненными нулю коэффициентами  $B_1$  и  $B_2$  не обладают общим решением. Существуют два решения для  $S_2$  как функции  $S_1$  и  $k$ , обращающие в ноль один из коэффициентов  $B_1, B_2$ . На рисунке 1.10 приведено сравнение отношения сил секступолей второй и первой пар обращающих в ноль один из коэффициентов  $B_1, B_2$  в секции коррекции вертикального хроматизма Супер

$c - \tau$  фабрики. При  $k = 1$ , то есть расстояние между секступолями разных

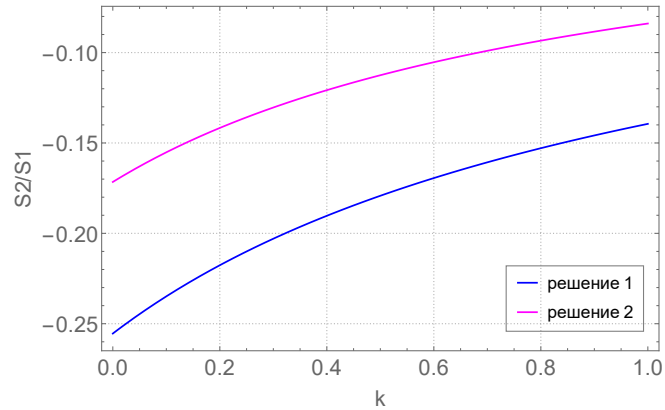


Рисунок 1.10 – Сравнение отношения сил секступолей второй и первой пар обращающихся в ноль один из коэффициентов  $B_1$  (синяя кривая),  $B_2$  (фиолетовая кривая) (1.102)

пар равно их длине, сила секступолей второй пары может составлять  $-14\%$  или  $-8\%$  от силы первой для зануления коэффициента  $B_1$  или  $B_2$ . Численная оптимизация силы секступолей второй пары для увеличения динамической апертуры в Супер  $c - \tau$  фабрике дала  $-9\%$ . Таким образом, постановка до-

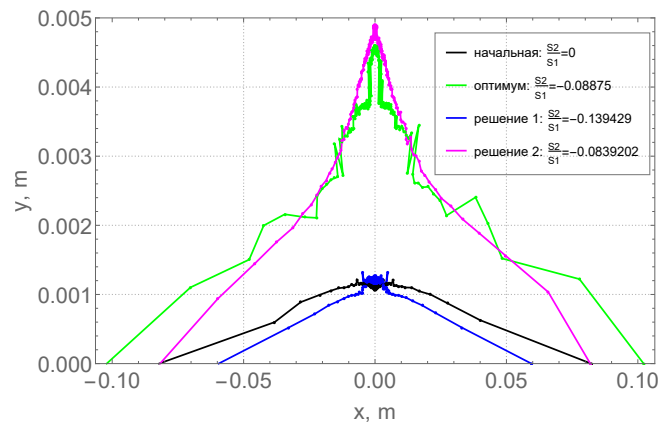


Рисунок 1.11 – Динамическая апертура в Супер  $c - \tau$  фабрике при различной силе секступолей второй пары и оптимизированная. Чёрным показана апертура при выключенных секступолях второй пары

полнительных секступолей рядом с основными позволяет частично управлять aberrациями третьего порядка, и так как сила дополнительных секступолей невелика  $\approx -10\%$  от силы основных секступолей, то коррекция хроматизма основной парой секступолей не нарушается.

### 1.5.4 Зависимость частоты от амплитуды для $-I$ пары секступолей

Зависимость частоты от амплитуды дана выражениями (1.33), (1.34), (1.35). К сожалению не удаётся сосчитать входящие в выражения интегралы напрямую, поэтому каждый секступоль  $-I$  пары был разбит на тонкие, и была получена последовательность коэффициентов  $\alpha_{(x,y),(x,y)}$  по количеству разбиений. Эти последовательности сходятся при устремлении к бесконечности числа разбиений, и дают искомые зависимости частоты от амплитуды во втором порядке теории возмущений

$$\Delta\nu_x = -\frac{1}{16\pi}(K_2L)^2L\beta_x^2J_x - \frac{1}{24\pi}(K_2L)^2L\beta_x\beta_yJ_y, \quad (1.103)$$

$$\Delta\nu_y = -\frac{1}{24\pi}(K_2L)^2L\beta_x\beta_yJ_x - \frac{1}{16\pi}(K_2L)^2L\beta_y^2J_y, \quad (1.104)$$

где  $\beta_{x,y}$  – бета-функция в середине секступоля. Правильность расчёта подтверждена моделированием программой MAD-X РТС [106] и в таблице 1.1 приведено сравнение коэффициентов  $\alpha$ .

Таблица 1.1 – Сравнение коэффициентов  $\alpha = \partial\nu/\partial j$

	$\alpha_{xx} = \frac{\partial\nu_x}{\partial j_x}$	$\alpha_{xy} = \frac{\partial\nu_x}{\partial j_y}$	$\alpha_{yy} = \frac{\partial\nu_y}{\partial j_y}$
Аналитически	-1.628	-209.957	-60912
Моделирование MAD-X	-1.628	-209.828	-60912

Таким образом, при фиксированной интегральной силе секступоля  $K_2L$ ,  $-I$  пара создаёт зависимость частоты от амплитуды, пропорциональную длине секступоля. При этом бесконечно тонкие секступоли ( $L = 0$ ), как и ожидалось, не создают такой зависимости.

### 1.5.5 Динамическая апертура и резонансы для $-I$ пары секступолей

Используя расчёты теории возмущений с помощью рядов Дебри до второго порядка (параграф 1.2), найду новое инвариантное действие  $-I$  пары

секступолей и сравню с численным моделированием. Производящая функция такого преобразования следующая (1.36)

$$\begin{aligned}
W_2 = j_x^2 \int_{\theta}^{\theta+2\pi} R dt_2 \int_{t_2}^{t_2+2\pi} R dt_1 K_2(t_1) K_2(t_2) \beta_x^{\frac{3}{2}}(t_1) \beta_x^{\frac{3}{2}}(t_2) \\
\left( \frac{\sin[2(\psi_x + \varphi_x(t_2) - \pi\nu_x - \nu_x\theta) - (\varphi_x(t_1) - \varphi_x(t_2) - \pi\nu_x)]}{32 \sin[\pi\nu_x] \sin[2\pi\nu_x]} \right. \\
+ \frac{\sin[2(\psi_x + \varphi_x(t_2) - \pi\nu_x - \nu_x\theta) + 3(\varphi_x(t_1) - \varphi_x(t_2) - \pi\nu_x)]}{32 \sin[2\pi\nu_x] \sin[3\pi\nu_x]} \\
+ \frac{\sin[4(\psi_x + \varphi_x(t_2) - \pi\nu_x - \nu_x\theta) + 3(\varphi_x(t_1) - \varphi_x(t_2) - \pi\nu_x)]}{64 \sin[3\pi\nu_x] \sin[4\pi\nu_x]} \\
\left. - \frac{\sin[4(\psi_x + \varphi_x(t_2) - \pi\nu_x - \nu_x\theta) + (\varphi_x(t_1) - \varphi_x(t_2) - \pi\nu_x)]}{64 \sin[\pi\nu_x] \sin[4\pi\nu_x]} \right). \quad (1.105)
\end{aligned}$$

Помимо секступольных резонансов  $\nu_x = -m$  и  $3\nu_x = -m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) появились и октупольные  $2\nu_{x,y} = -m$  и  $4\nu_{x,y} = -m$ . Далее, представляя каждый секступоль в виде двух тонких, получаю инвариантное действие

$$J_{2,x} = j_x + j_x^2 (K_2 L)^2 \beta_x^2 L \left( \frac{\cos[2\psi_{x,0}]}{8 \sin[2\pi\nu_x]} - \frac{\cos[4\psi_{x,0}]}{16 \sin[4\pi\nu_x]} \right) = const, \quad (1.106)$$

где  $K_2 L$  – интегральная сила каждого секступоля пары. Уравнение (1.106) есть неявное уравнение двумерной поверхности в трёхмерном пространстве. Замкнутые фазовые траектории (стабильные) окружают экстремумы этой поверхности и разрываются в четырёх седловых точках, первая — тривиальная (в нуле), оставшиеся три определяют последние замкнутые траектории, то есть динамическую апертуру. Инвариант последней замкнутой траектории (с условием  $J_{2,x,da} > 0$ ) составляет

$$J_{2,x,da} = \begin{cases} \frac{4}{(K_2 L)^2 L \beta_x^2 (-2 \csc[2\pi\nu_x] + \csc[4\pi\nu_x])}, & \text{если } \left( 2 + \frac{6}{1 - 4 \cos[2\pi\nu_x]} \right) > 0, \\ \frac{4}{(K_2 L)^2 L \beta_x^2 (2 \csc[2\pi\nu_x] + \csc[4\pi\nu_x])}, & \text{если } \left( 2 + \frac{6}{1 + 4 \cos[2\pi\nu_x]} \right) > 0, \\ \frac{4 \sin[4\pi\nu_x]}{(K_2 L)^2 L \beta_x^2 (2 + \cos[4\pi\nu_x])}, & \text{если } \left( \frac{12}{2 + \cos[4\pi\nu_x]} - 4 \right) > 0 \end{cases} \quad (1.107)$$

и соответствующее “старое действие”  $j_x$  ( $j_{x,da} > 0$ )

$$j_{x,da} = \begin{cases} \frac{8}{(K_2L)^2L\beta_x^2(-2\csc[2\pi\nu_x]+\csc[4\pi\nu_x])}, & \text{если } \left(2 + \frac{6}{1-4\cos[2\pi\nu_x]}\right) > 0, \\ \frac{8}{(K_2L)^2L\beta_x^2(2\csc[2\pi\nu_x]+\csc[4\pi\nu_x])}, & \text{если } \left(2 + \frac{6}{1+4\cos[2\pi\nu_x]}\right) > 0, \\ -\frac{8\sin[4\pi\nu_x]}{(K_2L)^2L\beta_x^2(2+\cos[4\pi\nu_x])}, & \text{если } \left(\frac{12}{2+\cos[4\pi\nu_x]} - 4\right) > 0. \end{cases} \quad (1.108)$$

Выражение для  $x_{da}$  довольно громоздок, поэтому не приводится, но можно заметить, что динамическая апертура  $-I$  пары секступолей пропорционально  $R_{da} \propto 1 / (|K_2L|\sqrt{L\beta_x})$ .

На рисунке 1.12 показано сравнение результатов численного моделирования динамической апертуры  $-I$  пары секступолей (сила секступолей была постоянна) с расчётом по (1.106). Расчёты выполнены для замкнутой оптиче-

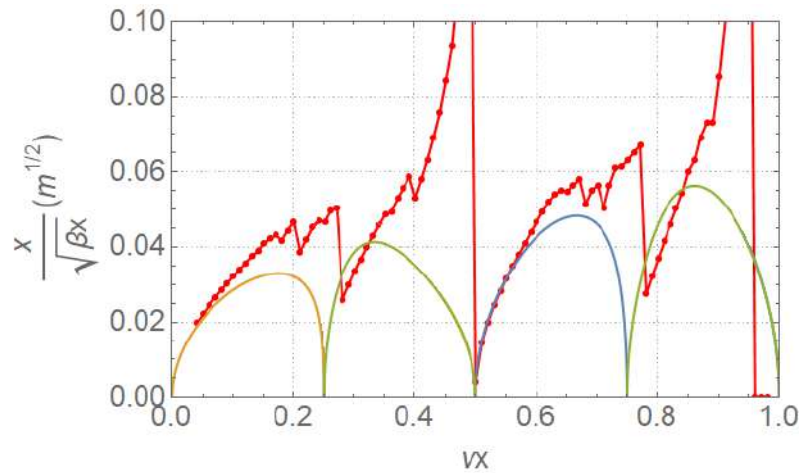


Рисунок 1.12 – Динамическая апертура  $-I$  пары секступолей, красные точки – трекинг, сплошные линии – три решения уравнения (1.106)

ской структуры (рисунок 1.13), имеющей  $-I$  пару секступолей и согласующую секцию, позволяющую менять бетатронную частоту.

Таким образом, аналитические расчёты правильно предсказывают резонансы  $\nu_x = 1, 1/2$ , появление новых резонансов  $\nu_x = 1/4, 3/4$ , и исчезновение секступольного резонанса  $\nu_x = 1/3$ . Так как вычисления сделаны во втором порядке теории возмущений, то они не могут предсказать дополнительные резонансы, например,  $\nu_x = 1/5$ , они имеют численное отличие с моделированием в размера ДА. Сдвиг резонансов объясняется более высокими порядками,



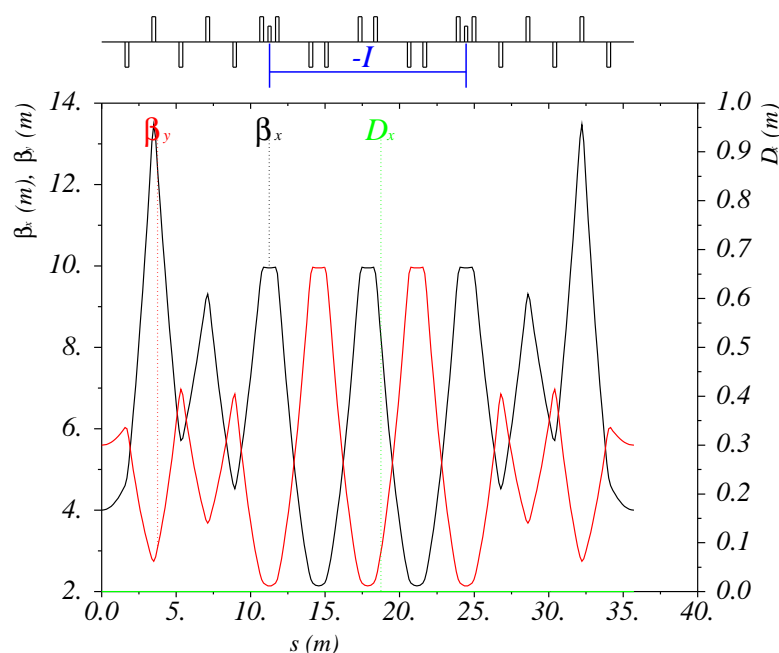


Рисунок 1.13 – Модельная структура

неучтёнными в расчёте. Проведение аналитических расчётов в следующих порядках весьма затруднительно, поэтому аналитический расчёт даёт качественное описание сути явлений, и рекомендации для численной оптимизации реальных структур. Не смотря на ограничения первого порядка теории возмущений, обращу внимание на маленькую ДА для частоты  $\nu = 0.545$ , выбранную для Супер  $s$ - $\tau$  фабрики с учётом эффектов встречи. Следовательно, выбор рабочей точки является компромиссом между светимостью и ДА.

Последнее замечание связано с фазовой ошибкой  $d\phi$ , такой что набег фаз между секступолями  $\pi + d\phi$ , а бета функции остались одинаковыми. В этом случае инвариантное действие составляет

$$\begin{aligned}
 J_{2,x} = & j_x^{3/2} \beta_x^{3/2} K_2 L \frac{d\phi}{4\sqrt{2}} \left( -\frac{\cos[\psi_{x,0}]}{\sin[\pi\nu_x]} + 3\frac{\cos[3\psi_{x,0}]}{\sin[3\pi\nu_x]} \right) \\
 & + j_x^2 \beta_x^2 (K_2 L)^2 (L - 2d\phi\beta_x) \left( \frac{\cos[2\psi_{x,0}]}{8\sin[2\pi\nu_x]} - \frac{\cos[4\psi_{x,0}]}{16\sin[4\pi\nu_x]} \right) \quad (1.109) \\
 & + O(d\phi^2) + O(L^2).
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое в (1.109) является чистым секступольным возмущением, и пропорционально фазовой ошибке  $d\phi$ . Так как размер динамической апертуры обратно пропорционален силе секступоля, то возможно написать оценку

$R_{DA} \propto 1 / (K_2 L \beta_x d\phi)$ , DA уменьшается с увеличением  $d\phi$ .

## 1.6 Края квадрупольных линз и нарушение параксиальности

Траектории частиц в коллайдерах, сфокусированные в точку встречи, затем расходятся, и в краевых полях линз финального фокуса могут достигать существенного отклонения от оси. При этом нелинейности краевого поля могут ограничивать динамическую апертуру. Это отчётливо видно на примере коллайдера NICA[81] (рисунок 1.14) и Супер  $c$ - $\tau$  фабрики [29] (рисунок 1.15). Поэтому ниже исследуется влияние краевых полей квадрупольных линз, а также, нарушение параксиального приближения бетатронных колебаний. Последнее характерно для электрон-позитронных коллайдеров с крабовой перетяжкой, поскольку на точке встречи вертикальная бета-функция может достигать субмиллиметровых значений.

В этой главе показано, что в коллайдере NICA, несмотря на маленькие бета-функции в финальных линзах  $\beta_{x,y} \simeq 150$  м (рисунок 1.14), но большие величины среднего действия (эмиттанс  $\varepsilon_x \approx 1$  мкм) краевые поля приводят к ограничению динамической апертуры, аналогично Супер  $c$ - $\tau$  фабрике, где ситуация противоположна — большие значения бета-функции  $\beta_y \approx 1100$  м, но малые величины среднего действия  $\varepsilon_x \approx 10$  нм,  $\varepsilon_y \approx 40$  пм.

Гамильтониан с учётом октупольного возмущения, краевого поля и непараксиальности записывается как (приложение Г)

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{(p_x^2 + p_y^2)^2}{8} + K_1 \frac{(x^2 - y^2)}{2} + K_1' \frac{(p_x x y^2 - p_y x^2 y)}{4} - K_1'' \frac{(x^4 - y^4)}{48} + K_3 \frac{(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)}{24}, \quad (1.110)$$

где третье слагаемое  $(p_x^2 + p_y^2)^2/8$  называют кинематическим членом, который описывает следующий порядок параксиального приближения,  $K_1$  — нормированная сила квадрупольной линзы,  $K_1'$  и  $K_1''$  — соответствующие производные градиента

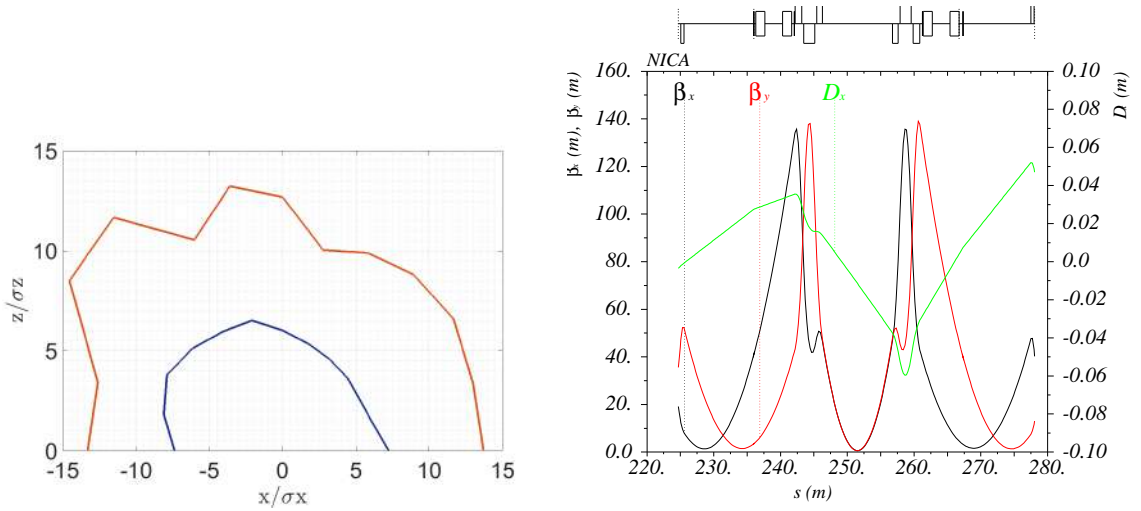


Рисунок 1.14 – Слева – динамическая апертура коллайдера NICA с учётом краевых полей линз финального фокуса (синяя) и без учёта (оранжевая), справа – оптические функции финального фокуса

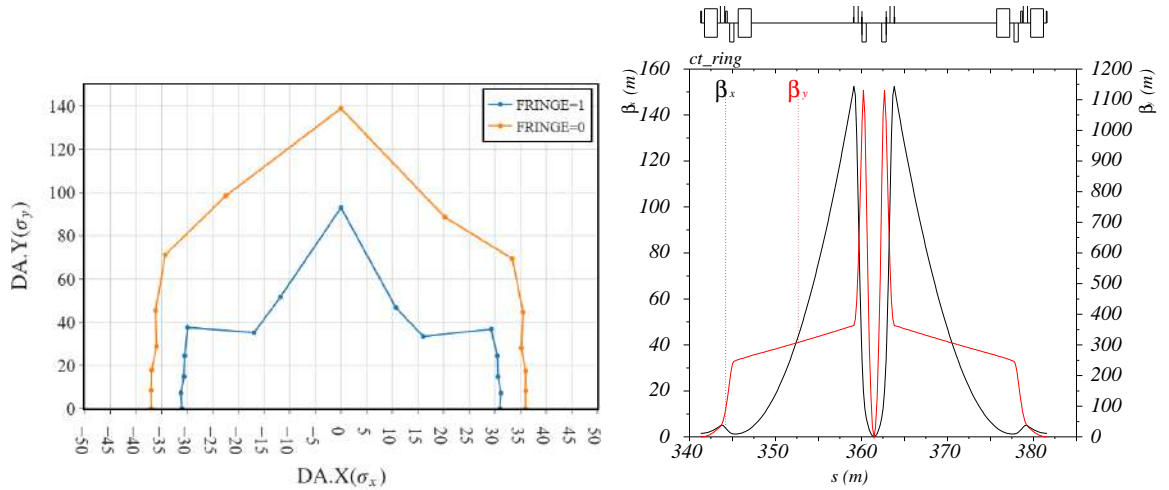


Рисунок 1.15 – Динамическая апертура коллайдера Супер  $c$ - $\tau$  фабрики с учётом краевых полей линз финального фокуса (синяя) и без учёта (оранжевая)

по  $s$ ,  $K_3$  – нормированная сила октуполя. Переход к переменным действия фазы (приложение А) даёт следующий гамильтониан

$$H = H_0(\psi_x, \psi_y, j_x, j_y; \theta) + H_{1,oct}(\psi_x, \psi_y, j_x, j_y; \theta) + H_{1,kin}(\psi_x, \psi_y, j_x, j_y; \theta) + H_{1,fr}(\psi_x, \psi_y, j_x, j_y; \theta), \quad (1.111)$$

где линейная часть есть

$$H_0 = \nu_x j_x + \nu_y j_y, \quad (1.112)$$

октупольное возмущение гамильтониана  $H_{1,oct}$  записано в (1.83), возмущение

от кинематического члена есть

$$\begin{aligned}
H_{1,kin} = & Rj_x^2 \left( \frac{3\gamma_x^2}{16} + \frac{\alpha_x \gamma_x}{2\beta_x} \sin[2\phi_x] - \frac{1 - \alpha_x^4}{4\beta_x^2} \cos[2\phi_x] \right. \\
& \left. - \frac{\alpha_x - \alpha_x^3}{4\beta_x^2} \sin[4\phi_x] + \frac{1 - 6\alpha_x^2 + \alpha_x^4}{16\beta_x^2} \cos[4\phi_x] \right) \\
& + Rj_y^2 \left( \frac{3\gamma_y^2}{16} + \frac{\alpha_y \gamma_y}{2\beta_y} \sin[2\phi_y] - \frac{1 - \alpha_y^4}{4\beta_y^2} \cos[2\phi_y] \right. \\
& \left. - \frac{\alpha_y - \alpha_y^3}{4\beta_y^2} \sin[4\phi_y] + \frac{1 - 6\alpha_y^2 + \alpha_y^4}{16\beta_y^2} \cos[4\phi_y] \right) \\
& + Rj_x j_y \left( \frac{\gamma_x \gamma_y}{4} + \frac{\alpha_y \gamma_x}{2\beta_y} \sin[2\phi_y] + \frac{\alpha_x \gamma_y}{2\beta_x} \sin[2\phi_x] - \frac{(1 - \alpha_y^2)\gamma_x}{4\beta_y} \cos[2\phi_y] \right. \\
& - \frac{(1 - \alpha_x^2)\gamma_y}{4\beta_x} \cos[2\phi_x] - \frac{(\alpha_x + \alpha_y)(1 - \alpha_x \alpha_y)}{4\beta_x \beta_y} \sin[2(\phi_x + \phi_y)] \\
& - \frac{(\alpha_x - \alpha_y)(1 + \alpha_x \alpha_y)}{4\beta_x \beta_y} \sin[2(\phi_x - \phi_y)] \\
& + \frac{(1 - \alpha_x \alpha_y)^2 - (\alpha_x + \alpha_y)^2}{8\beta_x \beta_y} \cos[2(\phi_x + \phi_y)] \\
& \left. + \frac{(1 + \alpha_x \alpha_y)^2 - (\alpha_x - \alpha_y)^2}{8\beta_x \beta_y} \cos[2(\phi_x - \phi_y)] \right), \quad (1.113)
\end{aligned}$$

возмущение от краевых полей квадруполья составляет

$$\begin{aligned}
H_{1,fr} = & -RK_1'' j_x^2 \beta_x^2 \left( \frac{1}{32} + \frac{\cos[2\phi_x]}{24} + \frac{\cos[4\phi_x]}{96} \right) \\
& + RK_1'' j_y^2 \beta_y^2 \left( \frac{1}{32} + \frac{\cos[2\phi_y]}{24} + \frac{\cos[4\phi_y]}{96} \right) \\
& + Rj_x j_y K_1' \left( \frac{(\alpha_y \beta_x - \alpha_x \beta_y)}{4} \left( 1 + \cos[2\phi_x] + \cos[2\phi_y] \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta_x}{4} \sin[2\phi_y] - \frac{\beta_y}{4} \sin[2\phi_x] \right. \\
& \quad + \frac{(\beta_x - \beta_y)}{8} \sin[2(\phi_x + \phi_y)] - \frac{(\beta_x + \beta_y)}{8} \sin[2(\phi_x - \phi_y)] \\
& \left. + \frac{(\alpha_y \beta_x - \alpha_x \beta_y)}{8} \left( \cos[2(\phi_x + \phi_y)] + \cos[2(\phi_x - \phi_y)] \right) \right), \quad (1.114)
\end{aligned}$$

где

$$\phi_{x,y} = \psi_{x,y} + \varphi_{x,y}(\theta) - \nu_{x,y}\theta, \quad \varphi_{x,y}(\theta) = \int_0^\theta \frac{R d\tau}{\beta_{x,y}(\tau)}. \quad (1.115)$$

Слагаемые вида  $\cos[n\phi_x + m\phi_y]$ ,  $\sin[n\phi_x + m\phi_y]$  являются источниками резонансов. Таким образом, кинематический член и краевые поля порождают одинаковые резонансы  $2\nu_{x,y} = -m$  и  $4\nu_{x,y} = -m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ),  $2\nu_x \pm 2\nu_y = -m$ , которые ещё и совпадают с порождаемыми октуполями (1.3).

### 1.6.1 Зависимость бетатронной частоты от амплитуды

В связи с наблюдаемым в компьютерном моделировании существенным ограничением динамической апертуры краевыми полями линз финального фокуса (рисунки 1.14 и 1.15), возникает вопрос о возможности компенсации влияния краевых полей октуполями. Первый способ состоит в компенсации зависимости бетатронной частоты от действия.

Гамильтониан квадруполья с краевым полем и октуполем записан в (1.110). Переходя к переменным действия-фазы (приложение А) и усредняя по фазам разложенный до первого порядка по  $\delta$  (в предположении отсутствия дисперсии в линзе) гамильтониан, получаю

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{\psi_x, \psi_y} = & \frac{J_x}{\beta_x} + \frac{J_y}{\beta_y} + \frac{K'_1}{4} J_x J_y (\alpha_y \beta_x - \alpha_x \beta_y) + \frac{K''_1}{32} (J_y^2 \beta_y^2 - J_x^2 \beta_x^2) \\ & + \frac{3}{16} \frac{J_y^2}{\beta_y^2} (1 + \alpha_y^2)^2 + \frac{3}{16} \frac{J_x^2}{\beta_x^2} (1 + \alpha_x^2)^2 + \frac{1}{4} \frac{J_x J_y}{\beta_x \beta_y} (1 + \alpha_x^2)(1 + \alpha_y^2) \\ & + \frac{K_3}{16} (J_x^2 \beta_x^2 - 4J_x J_y \beta_x \beta_y + J_y^2 \beta_y^2) \\ & - \delta \left[ \frac{K_1}{2} (J_x \beta_x - J_y \beta_y) + \frac{K'_1}{4} J_x J_y (\alpha_y \beta_x - \alpha_x \beta_y) + \right. \\ & \left. + \frac{K''_1}{32} (J_y^2 \beta_y^2 - J_x^2 \beta_x^2) + \frac{K_3}{16} (J_x^2 \beta_x^2 - 4J_x J_y \beta_x \beta_y + J_y^2 \beta_y^2) \right], \end{aligned} \quad (1.116)$$

где  $J_{x,y}$  — горизонтальное или вертикальное действие,  $\beta_{x,y}$  и  $\alpha_{x,y}$  — параметры Твисса,  $\psi_{x,y}$  — фаза бетатронных колебаний. Применяя теорию возмущения имею сдвиги частот и их хроматизмы

$$\Delta\nu_x = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial \langle H \rangle_{\psi_x, \psi_y}}{\partial J_x} ds = \alpha_{xx} J_x + \alpha_{xy} J_y + \delta(\xi_x + \xi_{xx} J_x + \xi_{xy} J_y), \quad (1.117)$$

$$\Delta\nu_y = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial \langle H \rangle_{\psi_x, \psi_y}}{\partial J_y} ds = \alpha_{yy} J_y + \alpha_{yx} J_x + \delta(\xi_y + \xi_{yy} J_y + \xi_{yx} J_x), \quad (1.118)$$

где коэффициенты  $\alpha$  и  $\xi$  составляют

$$\alpha_{xx} = \frac{3}{16\pi} \oint \gamma_x^2 ds - \frac{1}{32\pi} \oint K_1'' \beta_x^2 ds + \frac{1}{16\pi} \oint K_3 \beta_x^2 ds, \quad (1.119)$$

$$\alpha_{xy} = \frac{1}{8\pi} \oint \gamma_x \gamma_y ds + \frac{1}{8\pi} \oint K_1' (\alpha_y \beta_x - \alpha_x \beta_y) ds - \frac{1}{8\pi} \oint K_3 \beta_x \beta_y ds, \quad (1.120)$$

$$\alpha_{yx} = \alpha_{xy}, \quad (1.121)$$

$$\alpha_{yy} = \frac{3}{16\pi} \oint \gamma_y^2 ds + \frac{1}{32\pi} \oint K_1'' \beta_y^2 ds + \frac{1}{16\pi} \oint K_3 \beta_y^2 ds, \quad (1.122)$$

$$\xi_x = -\frac{1}{4\pi} \oint K_1 \beta_x ds, \quad (1.123)$$

$$\xi_y = \frac{1}{4\pi} \oint K_1 \beta_y ds, \quad (1.124)$$

$$\xi_{xx} = \frac{1}{32\pi} \oint K_1'' \beta_x^2 ds - \frac{1}{16\pi} \oint K_3 \beta_x^2 ds, \quad (1.125)$$

$$\xi_{xy} = -\frac{1}{8\pi} \oint K_1' (\alpha_y \beta_x - \alpha_x \beta_y) ds + \frac{1}{8\pi} \oint K_3 \beta_x \beta_y ds, \quad (1.126)$$

$$\xi_{yx} = \xi_{xy}, \quad (1.127)$$

$$\xi_{yy} = -\frac{1}{32\pi} \oint K_1'' \beta_y^2 ds - \frac{1}{16\pi} \oint K_3 \beta_y^2 ds. \quad (1.128)$$

Слагаемые, не зависящие от  $s$  производных  $K_1$  и  $K_3$ , порождены кинематическим членом [107] и пропорциональны  $\gamma_{x,y} = (1 + \alpha_{x,y}^2) / \beta_{x,y}$ . Следовательно, вклад кинематического члена существенен только в прямолинейных областях вокруг места встречи, где величины  $\gamma_{x,y}$  постоянны и достигают максимальных значений. Численные оценки для проектов коллайдеров (параграф 3.4) подтверждают этот вывод.

Сравнивая (1.119), (1.120) и (1.122), замечаю, что одного октуполя недостаточно, чтобы скомпенсировать зависимость частоты от амплитуды – при уменьшении одного коэффициента, другой увеличивается. В этой ситуации прямая численная оптимизация динамической апертуры с участием нескольких семейств октупольных линз для конкретной структуры выглядит предпочтительнее.

Необходимо заметить, что гамильтониан (1.110) был получен ранее в [108],

но в другой калибровке векторного потенциала, что не меняет уравнения движения. Зависимость частоты от амплитуды в [108] получена только в приближении, когда авторы заменили точные выражения для  $K_1'$ ,  $K_1''$  проинтегрированными по области края оценками.

Имея формулы зависимости бетатронной частоты от амплитуды, оценю вклад краевых полей в коллайдерах NICA и Супер  $c$ - $\tau$  фабрика, например, для перекрёстного члена  $\alpha_{yx}$ . В коллайдере NICA, бета-функции в финальных линзах достаточно малы  $\beta_{x,y} \simeq 140$  м (рисунок 1.14), а в Супер  $c$ - $\tau$  фабрике –  $\beta_x \approx 150$  м,  $\beta_y \approx 1100$  м (рисунок 1.15), но средние действия значительно отличаются – NICA:  $j_x = \varepsilon_x = 1.1$  мкм,  $j_y = \varepsilon_y = 0.75$  мкм, Супер  $c$ - $\tau$  фабрика:  $j_x = \varepsilon_x = 8.9$  нм,  $j_y = \varepsilon_y = 4.5$  пм. В таблице 1.2 приведены величины коэффициентов  $\alpha_{yx}$  от всех финальных линз каждого коллайдера и их вклад в сдвиг частоты при действии соответствующем границе динамической апертуры. Причём в NICA имеется два места встречи, финальные линзы собраны в триплеты, всего четыре финальных триплета, в Супер  $c$ - $\tau$  фабрике одно место встречи и финальные линзы собраны в дублеты, всего два финальных дублета. В итоге, не смотря на существенно меньшие величины бета функций в финальных линзах коллайдера NICA и меньшие коэффициент  $\alpha_{yx}$ , сдвиг частот на границе динамической апертуры в обоих коллайдерах оказывается близким из-за больших величин эмиттансов в коллайдере NICA.

Таблица 1.2 – Сравнение коэффициентов  $\alpha_{yx} = \partial\nu_y/\partial j_x$  для коллайдеров NICA и Супер  $c$ - $\tau$  фабрика

	NICA	$c$ - $\tau$ фабрика
$\alpha_{yx}$	1257	33400
$\Delta\nu_y$	0.03 (при $2j_x = 7^2\varepsilon_x$ )	0.06 (при $2j_x = 20^2\varepsilon_x$ )

## Оценки коэффициентов $\alpha_{yy}$ и $\alpha_{yx}$ для линзы финального фокуса

В качестве примера сделаю численные оценки коэффициентов  $\alpha_{yy}$  для дефокусирующей линзы финального фокуса (ближайшая к месту встречи), в которой  $\beta_y \gg \beta_x$  и можно ожидать слабой зависимости горизонтальной частоты от амплитуды.

Используя модель поля линзы в виде двух парабол (уравнения (Г.11) и (Г.13) приложения Г), получаю

$$\alpha_{xx} = -\frac{1}{32\pi} \oint K_1'' \beta_x^2 ds \approx -\frac{K_1}{8\pi} (\alpha_{1,x} \beta_{1,x} - \alpha_{2,x} \beta_{2,x}), \quad (1.129)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{yx} = \alpha_{xy} &= \frac{1}{8\pi} \oint K_1' (\alpha_y \beta_x - \alpha_x \beta_y) ds \\ &\approx \frac{K_1}{8\pi} (\alpha_{1,y} \beta_{1,x} - \alpha_{1,x} \beta_{1,y} - (\alpha_{2,y} \beta_{2,x} - \alpha_{2,x} \beta_{2,y})), \end{aligned} \quad (1.130)$$

$$\alpha_{yy} = \frac{1}{32\pi} \oint K_1'' \beta_y^2 ds \approx \frac{K_1}{8\pi} (\alpha_{1,y} \beta_{1,y} - \alpha_{2,y} \beta_{2,y}), \quad (1.131)$$

где индексы 1, 2 обозначают значение величины на первом (ближайший к месту встречи) или втором крае линзы соответственно.

Для линзы финального фокуса можно предположить, что значение параметра Твисса  $\alpha_y$  меняет знак на входе и выходе из линзы, тогда для тонкой линзы находящейся в центре протяжённой линзы, сила составляет

$$K_1 L_q = \frac{2\alpha_{q,y}}{\beta_{q,y}} = -\frac{2}{L^* + L_q/2}, \quad (1.132)$$

где  $L_q$  — длину линзы, а величины  $\alpha_{q,y}$ ,  $\beta_{q,y}$  взяты на входе в центр линзы. Обозначая за  $\beta_y^*$  бета функцию в месте встречи,  $L^*$  — расстояние от места встречи до края линзы, и используя поведение параметров Твисса

$$\beta_y(s) = \beta_y^* + \frac{s^2}{\beta_y^*}, \quad \alpha_y = -\frac{s}{\beta_y^*}, \quad \gamma_y = \frac{1 + \alpha_y^2}{\beta_y} = \frac{1}{\beta_y^*} \quad (1.133)$$

и получаю величины коэффициентов  $\alpha_{yy}$  и  $\alpha_{yx}$  для разных источников возмущения:



- кинематический член

$$\alpha_{yy,kin} = \frac{3}{16\pi} \oint \frac{(1 + \alpha_y^2)^2}{\beta_y^2} ds \approx \frac{3}{16\pi} \frac{L^* + L_q/2}{\beta_y^{*2}}, \quad (1.134)$$

- октуполь в финальной линзе

$$\alpha_{yy,oct} = \frac{1}{16\pi} \oint K_3 \beta_y^2 ds \approx \frac{K_3 L_q (L^* + L_q/2)^4}{16\pi \beta_y^{*2}}, \quad (1.135)$$

- край линзы

$$\alpha_{yy,edge} \approx -\frac{1}{4\pi} K_1 \frac{L^{*3}}{\beta_y^{*2}} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{L^{*3}}{\beta_y^{*2} L_q (L^* + L_q/2)}, \quad (1.136)$$

$$\alpha_{yx,edge} \approx \frac{1}{\pi} \frac{L^*}{\beta_x^* \beta_y^*} \left( 2 + \frac{L^*}{L_q} \right). \quad (1.137)$$

Полученные выражения показывают, что сдвиг частоты от амплитуды увеличивается как при увеличении  $L^*$ , так и при уменьшении  $\beta_y^*$ , что объясняет уменьшение динамической апертуры в проектах коллайдеров с маленькой  $\beta_y^*$ . Интересно заметить, что при увеличении длины линзы коэффициент  $\alpha_{yy,edge}$  стремится к нулю, следовательно можно ожидать, что одномерная горизонтальная динамическая апертура увеличится, а так как  $\alpha_{yx,edge}$  – стремится к постоянной величине, то двумерная динамическая апертура останется ограниченной. Этот эффект был обнаружен в численном моделировании Супер  $c$ - $\tau$  фабрики (параграф 3.5). Подробное сравнение численных значений этих коэффициентов для различных коллайдеров приведено в параграфе 3.4.

Ещё один важный вопрос состоит в качестве поля финальных линз коллайдеров, а точнее какую октупольную компоненту поля можно позволить. Полученные формулы позволяют оценить требования на октупольные ошибки градиента при изготовлении линзы. Для этого сравниваю коэффициенты  $\alpha_{yy}$  от октуполя (1.135) и от края линзы (1.136) и требую, чтобы вклад октуполя был меньше, в результате получаю оценку на силу октуполя

$$K_3 < 4K_1 \frac{L^{*3}}{L_q (L^* + L_q/2)^4}, \quad (1.138)$$

которая для параметров  $сг$  фабрики  $K_1 = -9.76 \text{ м}^{-2}$ ,  $L^* = 0.9 \text{ м}$ ,  $L_q = 0.2$  имеет реалистичную  $K_3 < 142 \text{ м}^{-4}$ , что на радиусе  $R = 0.01 \text{ м}$  даёт относительную величину октупольного поля по отношению к квадрупольному  $(K_3 R^3 / 3!) / (K_1 R) \lesssim 2 \cdot 10^{-4}$ .

## 1.7 Нелинейный хроматизм

Частицы с отклонением импульса от равновесного  $p_0$  колеблются вокруг новой орбиты, которая отличается от орбиты равновесной частицы. Эта новая орбита уже не проходит через центры мультиполей, что совместно с зависимостью фокусирующей силы от относительного отклонения импульса  $\delta = \Delta p / p_0$  изменяет преобразование координат через период обращения. Искажение линейного преобразования приводит к хроматизму – изменению бетатронных частот и оптических функций в зависимости от импульса частицы [109; 110]. Обычно обращают внимание на линейные хроматизм частот и бета-функций и пренебрегают, в виду малости, нелинейными хроматизмами, однако увеличение жесткости фокусировки для получения более малого эмиттанса или увеличения светимости приводит к возможному ограничению работы установки из-за нелинейного хроматизма. В этой ситуации становится важным понимание источников его возбуждения и способов коррекции. Обычно, нелинейный хроматизм считают с помощью теории возмущений и получают многомерные интегралы, например в [111], такие формулы тяжело анализировать и невозможно сделать практические рекомендации об устройстве оптической структуры ускорителя или о том, какой элемент добавить, чтобы уменьшить нелинейный хроматизм. Для таких рекомендаций необходимы простые формулы содержащие одномерные интегралы по периметру ускорителя от рассчитываемых и измеряемых функций, например, дисперсии, хроматических производных бета функций. Впервые такой расчёт линейного хроматизма был проведён в [110] для коллайдера LEP с надеждой, что правильная коррекция линейного

хроматизма уменьшит влияние хроматических эффектов высокого порядка. Этот параграф посвящён выводу формул, описывающих нелинейный хроматизм частот в подходе развитом в [110], и примерам применения полученных формул к разработке коллайдеров и источников синхротронного излучения.

Для расчёта хроматических сдвигов бетатронных частот, нужно найти новую орбиту до нужного порядка по  $\delta$ , написать новый гамильтониан в базисе новой орбиты и решить уравнения движения.

Гамильтониан описывающий движение частиц в ускорителе получен во многих работах, например в [62; 67], и для связности изложения вывод гамильтониана приведен в приложении А.

Для нахождения орбиты частиц с отклонённым импульсом в виде ряда по  $\delta$ , подставляю в гамильтониан (А.20)

$$\begin{aligned} x &= \eta\delta = \eta_0\delta + \eta_1\delta^2 + \eta_2\delta^3, \\ p_x &= \xi\delta = \xi_0\delta + \xi_1\delta^2 + \xi_2\delta^3, \\ y &= 0, \\ p_y &= 0, \end{aligned} \tag{1.139}$$

где  $\eta$  и  $\xi$  называются координатной и импульсной дисперсионными функциями соответственно. Записывая уравнения Гамильтона и разрешая их относительно  $\eta$  и  $\xi$ , получаю уравнения для дисперсии

$$\eta_i'' + (K_0^2 + K_1)\eta_i = f_i, \tag{1.140}$$

$$\xi_0 = \eta_0', \tag{1.141}$$

$$\xi_1 = \eta_1' - K_0\xi_0\eta_0, \tag{1.142}$$

$$\xi_2 = \eta_2' - K_0(\xi_0\eta_1 + \xi_1\eta_0) - \frac{1}{2}\xi_0^3, \tag{1.143}$$

где возбуждающие функции  $f_i$  (совпадают с [103] и [112])

$$f_0 = K_0, \quad (1.144)$$

$$f_1 = -K_0 + (2K_0^2 + K_1)\eta_0 - \left(K_0^3 + K_0K_1 + \frac{K_2}{2}\right)\eta_0^2 + \frac{1}{2}K_0\eta_0'^2, \quad (1.145)$$

$$f_2 = K_0 - (2K_0^2 + K_1)\eta_0 + (2K_0^2 + K_1)\eta_1 + \left(K_0^3 + K_0K_1 + \frac{K_2}{2}\right)\eta_0^2 \quad (1.146)$$

$$+ \frac{3}{2}K_0\eta_0'^2 - (2K_0^3 + 2K_0K_1 + K_2)\eta_0\eta_1 + K_0\eta_0'\eta_1'$$

$$- \left(\frac{1}{2}K_0K_2 + \frac{1}{6}K_3\right)\eta_0^3 - \left(2K_0^2 + \frac{3}{2}K_1\right)\eta_0\eta_0'^2.$$

Решение уравнения (1.140) записывается как

$$\eta_i(s) = \oint f_i(\tau)G(s, \tau)d\tau, \quad (1.147)$$

где функция Грина  $G(s, \tau)$  есть

$$G(s, \tau) = \frac{\sqrt{\beta_x(s)\beta_x(\tau)}}{2 \sin(\pi\nu_x)} \cos[\pi\nu_x - |\varphi_x(s) - \varphi_\tau(\tau)|]. \quad (1.148)$$

Для перехода к новым каноническим переменным  $x_\beta = x - \eta\delta$  и  $p_{x,\beta} = p_x - \xi\delta$  воспользуюсь производящей функцией

$$F_2(x, p_{x,\beta}) = (x - \eta\delta)(p_{x,\beta} - \xi\delta). \quad (1.149)$$

Оставляя только квадратичные слагаемые по канонически сопряженным переменным, получаю новый гамильтониан в базисе частицы с отклонённой энергией

$$H_2 = -1 + K_y \frac{y^2}{2} + K_x \frac{x^2}{2} + A_y \frac{p_y^2}{2} + A_x \frac{p_x^2}{2} + B_x p_x x, \quad (1.150)$$

где

$$K_y = -K_1 + \delta(K_1 - K_2\eta_0) - \delta^2 \left( K_1 + K_3 \frac{\eta_0^2}{2} - K_2(\eta_0 - \eta_1) \right) \quad (1.151)$$

$$+ \delta^3 \left( K_1 + K_3 \left( \frac{\eta_0^2}{2} - \eta_0\eta_1 \right) - K_2(\eta_0 - \eta_1 + \eta_2) \right)$$

$$K_x = K_0^2 + K_1 - \delta(K_0^2 + K_1 - K_2\eta_0) + \delta^2 \left( K_0^2 + K_1 + K_3 \frac{\eta_0^2}{2} - K_2(\eta_0 - \eta_1) \right) \quad (1.152)$$

$$- \delta^3 \left( K_0^2 + K_1 + K_3 \left( \frac{\eta_0^2}{2} - \eta_0\eta_1 \right) - K_2(\eta_0 - \eta_1 + \eta_2) \right)$$

$$A_y = 1 + \delta K_0\eta_0 + \delta^2 \left( K_0\eta_1 + \frac{\eta_0'^2}{2} \right) + \delta^3 \left( K_0 \left( \eta_2 - \frac{\eta_0\eta_0'^2}{2} \right) + \eta_0'\eta_1' \right) \quad (1.153)$$

$$A_x = 1 + \delta K_0\eta_0 + \delta^2 \left( K_0\eta_1 + \frac{3\eta_0'^2}{2} \right) + \delta^3 \left( K_0 \left( \eta_2 - \frac{3\eta_0\eta_0'^2}{2} \right) + 3\eta_0'\eta_1' \right) \quad (1.154)$$

$$B_x = \delta K_0\eta_0' + \delta^2 (K_0\eta_1' - K_0^2\eta_0\eta_0') + \delta^3 (K_0^3\eta_0'^2\eta_0' - K_0^2(\eta_1\eta_0' + \eta_0\eta_1') + K_0\eta_2') . \quad (1.155)$$

Учитывая, что в большинстве современных ускорителях  $|K_0\eta_0| \ll 1$ ,  $K_0^2 \ll |K_1|$  и  $K_0^2 \ll |K_2\eta_0|$ , использую приближённые значения для коэффициентов  $A_x \approx 1$ ,  $A_y \approx 1$ ,  $B_x \approx 0$  и получаю гамильтониан

$$H_3 = -1 + K_y(\delta) \frac{y^2}{2} + K_x(\delta) \frac{x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{p_x^2}{2}, \quad (1.156)$$

где отклонение энергии частицы  $\delta$  является внешним параметром.

### 1.7.1 Хроматизм частот и бета-функций

Вертикальные и горизонтальные уравнения движения полученные из гамильтониана (1.156) являются уравнениями Хилла [62]

$$z'' + K(s)z = 0, \quad (1.157)$$

где индекс  $z$  обозначает  $x$  или  $y$ . Решение этого уравнения известно (1.3)

$$z = \sqrt{2j_z\beta_z(s)} \cos[\phi_z(s)], \quad \frac{d\phi_z(s)}{ds} = \frac{1}{\beta_z(s)}, \quad \alpha_z = -\frac{1}{2} \frac{d\beta_z(s)}{ds}, \quad (1.158)$$

где бета-функция подчиняется уравнению

$$2\beta_z\beta_z'' - \beta_z'^2 + 4K_z\beta_z^2 = 4. \quad (1.159)$$

## Хроматизм первого порядка

Вводя обозначения

$$b_{1,z} = \frac{1}{\beta_z} \frac{d\beta_z}{d\delta} \Big|_{\delta=0}, \quad (1.160)$$

$$a_{1,z} = \left( \frac{d\alpha_z}{d\delta} - \frac{\alpha_z}{\beta_z} \frac{d\beta_z}{d\delta} \right) \Big|_{\delta=0} \quad (1.161)$$

и используя (1.158), имею

$$\frac{d}{d\delta} \left( \frac{d\varphi_z}{ds} \right) \Big|_{\delta=0} = -\frac{b_{1,z}}{\beta_z}, \quad (1.162)$$

$$\frac{db_{1,z}}{ds} = -2 \frac{a_{1,z}}{\beta_z}, \quad (1.163)$$

$$\frac{da_{1,z}}{ds} = \beta_z \frac{dK_z}{d\delta} \Big|_{\delta=0} + 2 \frac{b_{1,z}}{\beta_z}. \quad (1.164)$$

Дифференцируя уравнения (1.163) и (1.164), разделяя их относительно  $b_{1,z}$  и  $a_{1,z}$ , делая замену переменной  $ds = \beta_z d\varphi_z|_{\delta=0}$ , получаю несвязанные уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 b_{1,z}}{d\varphi_z^2} + 4b_{1,z} = -2\beta_z^2 \frac{dK_z}{d\delta} \Big|_{\delta=0}, \quad (1.165)$$

$$\frac{d^2 a_{1,z}}{d\varphi_z^2} + 4a_{1,z} = -4\alpha_z \beta_z^2 \frac{dK_z}{d\delta} \Big|_{\delta=0}. \quad (1.166)$$

## Хроматизм второго порядка

Аналогично первому порядку, получают вторые хроматические производные

$$\frac{d^2}{d\delta^2} \left( \frac{d\varphi_z}{ds} \right) \Big|_{\delta=0} = 2 \frac{b_{1,z}^2}{\beta_z} - \frac{b_{2,z}}{\beta_z}, \quad (1.167)$$

$$\frac{db_{2,z}}{ds} = -2 \frac{a_{2,z}}{\beta_z}, \quad (1.168)$$

$$\frac{da_{2,z}}{ds} = 2 \frac{b_{2,z}}{\beta_z} - 2 \frac{(a_{1,z}^2 + b_{1,z}^2)}{\beta_z} + 2\beta_z b_{1,z} \frac{dK_z}{d\delta} \Big|_{\delta=0} + \beta_z \frac{d^2 K_z}{d\delta^2} \Big|_{\delta=0}, \quad (1.169)$$

где

$$b_{2,z} = \frac{1}{\beta_z} \frac{d^2 \beta_z}{d\delta^2} \Big|_{\delta=0}, \quad (1.170)$$

$$a_{2,z} = \left( \frac{d^2 \alpha_z}{d\delta^2} - \frac{\alpha_z}{\beta_z} \frac{d^2 \beta_z}{d\delta^2} \right) \Big|_{\delta=0}. \quad (1.171)$$

Разделённые относительно  $b_{2,z}$  и  $a_{2,z}$  дифференциальные уравнения второго порядка, с заменённой переменной  $ds = \beta_z d\varphi|_{\delta=0}$ , есть

$$\frac{d^2 b_{2,z}}{d\varphi_z^2} + 4b_{2,z} = 4(a_{1,z}^2 + b_{1,z}^2) - 4\beta_z^2 b_{1,z} \frac{dK_z}{d\delta} \Big|_{\delta=0} - 2\beta_z^2 \frac{d^2 K_z}{d\delta^2} \Big|_{\delta=0}, \quad (1.172)$$

$$\frac{d^2 a_{2,z}}{d\varphi_z^2} + 4a_{2,z} = -8\beta_z^2 (\alpha b_{1,z} + a_{1,z}) \frac{dK_z}{d\delta} \Big|_{\delta=0} - 4\alpha_z \beta_z^2 \frac{d^2 K_z}{d\delta^2} \Big|_{\delta=0}. \quad (1.173)$$

### Хроматизм третьего порядка

Аналогично первому и второму порядку, получаю хроматические производные третьего порядка

$$\frac{d^3}{d\delta^3} \left( \frac{d\varphi_z}{ds} \right) \Big|_{\delta=0} = -6 \frac{b_{1,z}^3}{\beta_z} + 6 \frac{b_{1,z} b_{2,z}}{\beta_z} - \frac{b_{3,z}}{\beta_z}, \quad (1.174)$$

$$\frac{db_{3,z}}{ds} = -2 \frac{a_{3,z}}{\beta_z}, \quad (1.175)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_{3,z}}{ds} = & \beta_z \frac{d^3 K_z}{d\delta^3} \Big|_{\delta=0} + 3\beta_z b_{1,z} \frac{d^2 K_z}{d\delta^2} \Big|_{\delta=0} + 3\beta_z b_{2,z} \frac{dK_z}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \\ & + 6 \frac{b_{1,z}^3}{\beta_z} + 6 \frac{b_{1,z} a_{1,z}^2}{\beta_z} - 6 \frac{b_{1,z} b_{2,z}}{\beta_z} - 6 \frac{a_{1,z} a_{2,z}}{\beta_z} + 2 \frac{b_{3,z}}{\beta_z}, \end{aligned} \quad (1.176)$$

где

$$b_{3,z} = \frac{1}{\beta_z} \frac{d^3 \beta_z}{d\delta^3} \Big|_{\delta=0}, \quad (1.177)$$

$$a_{3,z} = \left( \frac{d^3 \alpha_z}{d\delta^3} - \frac{\alpha_z}{\beta_z} \frac{d^3 \beta_z}{d\delta^3} \right) \Big|_{\delta=0}. \quad (1.178)$$

Дифференциальные уравнения второго порядка получены с помощью соотношений для хроматических производных первого и второго порядков, и замены

$$ds = \beta_z d\varphi_z|_{\delta=0}:$$

$$\frac{d^2 b_{3,z}}{d\varphi_z^2} + 4b_{3,z} = 12 (a_{1,z}a_{2,z} - a_{1,z}^2 b_{1,z} - b_{1,z}^3 + b_{1,z}b_{2,z}) \quad (1.179)$$

$$- 6\beta_z^2 b_{2,z} \frac{dK_z}{d\delta} \Big|_{\delta=0} - 6\beta_z^2 b_{1,z} \frac{d^2 K_z}{d\delta^2} \Big|_{\delta=0} - 2\beta_z^2 \frac{d^3 K_z}{d\delta^3} \Big|_{\delta=0}, \quad (1.180)$$

$$\frac{d^2 a_{3,z}}{d\varphi_z^2} + 4a_{3,z} = -12\beta_z^2 (a_{2,z} + \alpha_z b_{2,z}) \frac{dK_z}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \quad (1.181)$$

$$- 12\beta_z^2 (a_{1,z} + \alpha_z b_{1,z}) \frac{d^2 K_z}{d\delta^2} \Big|_{\delta=0} - 4\beta_z^2 \alpha_z \frac{d^3 K_z}{d\delta^3} \Big|_{\delta=0}. \quad (1.182)$$

## Решение уравнения и функция Грина

Хроматические производные оптических функций подчиняются одностипному уравнению вида

$$\frac{d^2 b}{d\varphi^2} + 4b = f(\varphi), \quad (1.183)$$

которое удобно решать с помощью функции Грина. В случае периодических граничных условий функция Грина уравнения (1.183) записывается как

$$G(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{4 \sin \mu} \cos(\mu - 2|\varphi - \varphi_0|), \quad (1.184)$$

где  $\mu = \varphi(s = \Pi)$  набег бетатронной фазы  $\varphi$  за период обращения  $\Pi$ , а для непериодических начальных условий

$$G(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \cos(2\varphi_0) \sin(2\varphi) - \frac{1}{2} \sin(2\varphi_0) \cos(2\varphi). \quad (1.185)$$

Имея функцию Грина, получаю периодические решения уравнений (1.165), (1.172) и (1.179) для хроматических производных бета-функции

$$b_{1,z}(s) = \frac{1}{4 \sin \mu_z} \int_0^\Pi \left( -2\beta_z(s_0) \frac{dK_z(s_0)}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \right) \times \cos[\mu_z - 2|\varphi_z(s) - \varphi_z(s_0)|] ds_0, \quad (1.186)$$



$$\begin{aligned}
b_{2,z}(s_z) = & \frac{1}{4 \sin \mu_z} \int_0^\Pi \left( -2\beta_z(s_0) \frac{d^2 K_z(s_0)}{d\delta^2} \Big|_{\delta=0} \right. \\
& \left. - 4\beta_z(s_0) b_{1,z}(s_0) \frac{dK_z(s_0)}{d\delta} \Big|_{\delta=0} + 4 \frac{(a_{1,z}^2(s_0) + b_{1,z}^2(s_0))}{\beta_z(s_0)} \right) \\
& \times \cos [\mu_z - 2 |\varphi_z(s) - \varphi_z(s_0)|] ds_0, \tag{1.187}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{3,z}(s_z) = & \frac{1}{4 \sin \mu_z} \int_0^\Pi \left( -2\beta_z(s_0) \frac{d^3 K_z(s_0)}{d\delta^3} \Big|_{\delta=0} \right. \\
& - 6\beta_z(s_0) b_{1,z}(s_0) \frac{d^2 K_z(s_0)}{d\delta^2} \Big|_{\delta=0} - 6\beta_z(s_0) b_{2,z}(s_0) \frac{dK_z(s_0)}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \\
& \left. + 12 \frac{(a_{1,z}(s_0) a_{2,z}(s_0) - a_{1,z}^2(s_0) b_{1,z}(s_0) - b_{1,z}^3(s_0) + b_{1,z}(s_0) b_{2,z}(s_0))}{\beta_z(s_0)} \right) \\
& \times \cos [\mu_z - 2 |\varphi_z(s) - \varphi_z(s_0)|] ds_0. \tag{1.188}
\end{aligned}$$

Подставляя полученные решения в (1.162), (1.167) и (1.174), используя периодичность оптических функций, и соотношение

$$\int_0^\mu G(\varphi, \varphi_0) d\varphi = \frac{1}{4}, \tag{1.189}$$

получаю выражения для хроматизма набега бетатронной фазы

$$\frac{d\varphi_z}{d\delta} = \frac{1}{2} \int_0^\Pi \beta_z(s_0) \frac{dK_z(s_0)}{d\delta} \Big|_{\delta=0} ds_0, \tag{1.190}$$

$$\frac{d^2\varphi_z}{d\delta^2} = \frac{1}{2} \int_0^\Pi \beta_z(s_0) \left[ \frac{d^2 K_z(s_0)}{d\delta^2} \Big|_{\delta=0} + b_{1,z}(s_0) \frac{dK_z(s_0)}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \right] ds_0, \tag{1.191}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\varphi_z}{d\delta^3} = & \frac{1}{2} \int_0^\Pi \beta_z(s_0) \left[ \frac{d^3 K_z(s_0)}{d\delta^3} \Big|_{\delta=0} + 3b_{2,z}(s_0) \frac{dK_z(s_0)}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \right. \\
& \left. - 6 (a_{1,z}^2(s_0) + b_{1,z}^2(s_0)) \frac{dK_z(s_0)}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \right] ds_0, \tag{1.192}
\end{aligned}$$

где необходимо использовать хроматические производные фокусирующей си-

лы полученные в (1.151) и (1.152) (в пренебрежении  $K_0^2$ ):

$$K_y = -K_1 + \delta(K_1 - K_2\eta_0) - \delta^2 \left( K_1 + K_3 \frac{\eta_0^2}{2} - K_2(\eta_0 - \eta_1) \right) + \delta^3 \left( K_1 + K_3 \left( \frac{\eta_0^2}{2} - \eta_0\eta_1 \right) - K_2(\eta_0 - \eta_1 + \eta_2) \right) \quad (1.193)$$

$$K_x = K_1 - \delta(K_1 - K_2\eta_0) + \delta^2 \left( K_1 + K_3 \frac{\eta_0^2}{2} - K_2(\eta_0 - \eta_1) \right) - \delta^3 \left( K_1 + K_3 \left( \frac{\eta_0^2}{2} - \eta_0\eta_1 \right) - K_2(\eta_0 - \eta_1 + \eta_2) \right). \quad (1.194)$$

Конечные выражения для хроматизма набега бетатронной фазы до третьего порядка следующие

$$\frac{d\varphi_y}{d\delta} = \frac{1}{2} \int_0^\Pi \beta_y (K_1 - K_2\eta_0) ds, \quad (1.195)$$

$$\frac{d^2\varphi_y}{d\delta^2} = -2 \frac{\partial\varphi_y}{\partial\delta} - \int_0^\Pi \beta_y (K_2\eta_1 + K_3 \frac{\eta_0^2}{2}) ds + \frac{1}{2} \int_0^\Pi \beta_y b_{y,1} (K_1 - K_2\eta_0) ds, \quad (1.196)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3\varphi_y}{d\delta^3} &= 6 \frac{\partial\varphi_y}{\partial\delta} - 3 \int_0^\Pi \beta_y (a_{y,1}^2 + b_{y,1}^2) (K_1 - K_2\eta_0) ds \\ &+ 3 \int_0^\Pi \beta_y \left[ K_3 \left( \frac{\eta_0^2}{2} - \eta_0\eta_1 \right) + K_2(\eta_1 - \eta_2) \right] ds \\ &+ \frac{3}{2} \int_0^\Pi \beta_y b_{y,2} (K_1 - K_2\eta_0) ds, \end{aligned} \quad (1.197)$$

$$\frac{d\varphi_x}{d\delta} = -\frac{1}{2} \int_0^\Pi \beta_x (K_1 - K_2\eta_0) ds, \quad (1.198)$$

$$\frac{d^2\varphi_x}{d\delta^2} = -2 \frac{\partial\varphi_x}{\partial\delta} + \int_0^\Pi \beta_x (K_2\eta_1 + K_3 \frac{\eta_0^2}{2}) ds - \frac{1}{2} \int_0^\Pi \beta_x b_{x,1} (K_1 - K_2\eta_0) ds, \quad (1.199)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3\varphi_x}{d\delta^3} &= 6 \frac{\partial\varphi_x}{\partial\delta} + 3 \int_0^\Pi \beta_x (a_{x,1}^2 + b_{x,1}^2) (K_1 - K_2\eta_0) ds \\ &- 3 \int_0^\Pi \beta_x \left[ K_3 \left( \frac{\eta_0^2}{2} - \eta_0\eta_1 \right) + K_2(\eta_1 - \eta_2) \right] ds \\ &- \frac{3}{2} \int_0^\Pi \beta_x b_{x,2} (K_1 - K_2\eta_0) ds. \end{aligned} \quad (1.200)$$

Полученные формулы позволяют сделать несколько выводов:

1. хроматизм бета-функции любого порядка “распространяется” на удвоенной бетатронной частоте, поэтому для подавления возбуждения хроматизма бета-функций в периодических структурах, набег фазы на элементарный период должен быть равен  $\pi/2$  с нечётным множителем;
2. нелинейный хроматизм набега фазы возбуждается хроматизмом бета-функции в квадруполе, поэтому необходимо как можно ближе к источнику компенсировать хроматизм бета-функции;
3. хроматизм набега фазы можно компенсировать не только за счёт соответствующего мультиполя в месте с дисперсией, но и мультиполем более низкого порядка в месте с дисперсией и хроматизмом бета-функции, например, компенсация хроматизма третьего порядка может быть осуществлена секступолем в месте с большим хроматизмом бета-функции второго порядка и дисперсией, это может оказаться более эффективным, чем октуполем за счёт слагаемого  $K_3(\eta_0^2/2 - \eta_0\eta_1)$  или секступолем со слагаемым  $K_2(\eta_1 - \eta_2)$ ;
4. для оптимизации нелинейного хроматизма структуры недостаточно оптимизировать поведение бета-функции для постановки секступолей, необходимо создавать места с большим хроматизмом бета-функции желаемого порядка и управлять нелинейным хроматизмом.

## 1.8 Выводы

Приведённый обзор источников нелинейного возмущения позволил рассмотреть уже известные эффекты, и их применение для оптимизации нелинейной динамики в циклических ускорителях, и обнаружить новые:

1. в параграфе 1.2 сделаны аналитические расчёты динамической апертуры для секступольного возмущения (1.2.2) с помощью функций возмуще-

ния, которые в первом порядке теории возмущений совпали с результатами численного моделирования одномерной (горизонтальной) динамической апертуры FODO ячейки, которые позволили объяснить пороговое уменьшение горизонтальной при переходе от одномерного движения к двумерному (т.е., появления вертикальной компоненты даже с бесконечно малой амплитудой) для Супер  $c - \tau$  фабрики;

2. в параграфе 1.4 впервые показана интерференция секступольного и октупольного возмущений в третьем порядке теории возмущений (1.4), которая говорит о том, что управление зависимостью частоты от амплитуды с помощью октуполей необходимо производить с определенной осторожностью, поскольку это меняет ширины резонансных зон и ДА;
3. в параграфе 1.5 найдены простейшие наборы секступолей без квадратичных аббераций помимо  $-I$  пары секступолей, для которой
  - a) показано искажение фазовых траекторий, не ограничивающее ДА, но приводящее к потерям частиц на границе физической апертуры,
  - b) рассчитано влияние толщины секступолей на ДА и предложен способ коррекции такого влияния,
  - c) впервые аналитически оценены зависимость частоты от амплитуды и ДА для пары секступольных линх разделенных минус-единичным оптическим преобразованием,
  - d) найдена зависимость ДА от величины фазовой ошибки;
4. в параграфе 1.6 приведён подробный анализ нелинейного влияния краевых полей квадрупольных линз;
5. в параграфе 1.7 получены выражения для хроматизма оптических функций до третьего порядка, позволившие выбрать схему организации сек-

ступолей в Супер  $c - \tau$  фабрике для увеличения энергетической апертуры.

## Глава 2

# Источник СИ четвёртого поколения ЦКП “СКИФ”

В настоящее время в р.п. Кольцово Новосибирской области создается источник синхротронного излучения четвертого поколения с энергией электронного пучка 3 ГэВ Центр коллективного пользования “Сибирский кольцевой источник фотонов” (ЦКП “СКИФ”).

При разработке этого проекта была поставлена сложная задача получения рекордных параметров (прежде всего, малого горизонтального эмиттанса, обеспечивающего большую яркость излучения) при очень коротком сроке реализации. Последнее означает, что для экономии времени необходимо использовать простые, серийные, надежные решения, чтобы избежать длительных расчетов, проектирования, прототипирования, испытаний и переделок, и последующей настройки при запуске.

Одной из основных проблем источников синхротронного излучения четвертого поколения (эмиттанс  $10\text{пм} \lesssim \varepsilon_x \lesssim 500\text{пм}$ ) являются экстремально малые динамическая и энергетическая апертуры. Динамическая апертура может стать такой маленькой, что затруднит использование традиционной схемы инжекции с поперечным смещением накопленного пучка в горизонтальной плоскости, требующей апертуры  $R_x \approx 10$  мм. Тогда придется использовать более сложные, изоцтренные и непроверенные схемы инжекции, как, например в [10; 11].

Маленький энергетический акцептанс ограничивает время жизни пучка, из-за возросшего влияния эффекта Тушека [16; 17] (однократное внутрисгустковое рассеяние) при малых размерах и большом токе сгустка. Для обеспечения приемлемого времени жизни пучка, определяемого эффектом Тушека, требуется энергетический акцептанс  $\Delta E/E_0 \gtrsim 3\%$ .

Для оптимизации динамической апертуры в современных источниках СИ используют сложные схемы с несколькими семействами секступольных и октупольных линз.

Всего этого, и непроверенных схем инжекции, и “зоопарк” разнородных мультипольных элементов, хотелось избежать.

В этой главе обсуждаются подходы к конструированию магнитной структуры ЦКП “СКИФ”, позволившие получить экстремально малый горизонтальный эмиттанс и динамическую апертуру, позволяющую применять простую и надежную схему инжекции. Полученный энергетический акцептанс обеспечивает тушековское время жизни на уровне 5-10 часов.

Сначала на примере периодической ячейки FODO, состоящей из двух квадрупольных и двух дипольных, изучена связь между глобальными параметрами источника СИ, такими как эмиттанс, периметр кольца, бетатронная частота, динамическая апертура, нелинейный хроматизм и параметрами ячейки – длина, угол поворота, силы квадрупольных и секступольных. Показано, что для большой динамической апертуры необходим малый набег бетатронной фазы, а уменьшение эмиттанса эффективно осуществлять увеличением числа элементарных ячеек.

Далее рассмотрена ячейка TME [113] (Theoretical Minimum Emittance) из трёх квадрупольных и одного дипольного, в которой возможно достижение минимального для плоского магнита эмиттанса. Впервые показано, что в такой ячейке существует четыре оптически замкнутых решения. В одном из решений, действительно, достигается минимальный эмиттанс, но с большими силами квадрупольных и секступольных, приводящими к неприемлемой динамической апертуре. Другое решение mTME (modified TME) обеспечивает эмиттанс в два раза больше, но при более слабых магнитных элементах. Незначительное уменьшение угла поворота магнита приводит к понижению эмиттанса до требуемого значения при более слабых силах квадрупольных и секступольных, достаточной динамической апертуре и приемлемом периметре кольца. На основе этого решения

создана структура источника СИ четвёртого поколения ЦКП “СКИФ”, уникальностью которого является малый эмиттанс  $\varepsilon_x \approx 72$  пм, периметр 476 м и большая динамическая апертура, достигаемая всего двумя семействами идентичных секступолей.

## 2.1 Масштабные свойства источников СИ с малым ЭМИТТАНСОМ

### 2.1.1 Эмиттанс

Среднеквадратичным эмиттансом пучка называют величину

$$\varepsilon_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle - \langle xp_x \rangle^2}, \quad (2.1)$$

где  $\langle \rangle$  обозначает усреднение по частицам пучка. Для релятивистских электронов, когда распределение частиц определяется только синхротронным излучением, равновесный эмиттанс пучка есть [114; 115]

$$\varepsilon_x = C_q \gamma^2 \frac{1}{J_x} \frac{I_5}{I_2}, \quad (2.2)$$

где  $\gamma$  – релятивистский фактор пучка,

$$C_q = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} = 3.84 \cdot 10^{-13} \text{ м},$$

$$J_x = 1 - \frac{I_4}{I_2} - \text{безразмерный декремент затухания},$$

и радиационные интегралы [116]

$$I_2 = \oint K_0^2 ds,$$

$$I_4 = \oint \eta_x (K_0^3 + 2K_0 K_1) ds,$$

$$I_5 = \oint |K_0^3| \mathcal{H} ds,$$

$$\mathcal{H} = \gamma_x^2 \eta_x^2 + 2\alpha_x \eta_x \eta_{px} + \beta_x^2 \eta_{px}^2,$$



где  $K_0 = B_y/B\rho$  – кривизна или нормализованное поле магнита,  $K_1 = G/B\rho$  – нормализованный градиент,  $(\beta, \alpha, \gamma)$  – параметры Твисса, в релятивистском приближении  $B\rho[\text{Т м}] = E[\text{эВ}]/c[\text{м/с}]$  – жёсткость пучка с энергией  $E$ ,  $c$  – скорость света.

### 2.1.2 Масштабные свойства ячейки FODO

FODO-ячейка, состоящая из двух “тонких” (с нулевой длиной) квадрупольных линз интегральной силой  $p_{1,2} = (K_1L)_{1,2}$  и двух магнитов длиной  $L$  и углом поворота  $\varphi$  каждый (кривизна  $K_0 = \varphi/L$ ), и двух “тонких” (с нулевой длиной) секступолей, совмещённых по положению с квадрупольными (рисунок 2.1), хорошо изучена [117; 118], и позволяет сделать ряд, хоть и качественных, но полезных выводов для нашей задачи. Поскольку для исследования свойств структуры в зависимости от величины горизонтального эмиттанса вертикальное движение не входит в задачу, значение вертикального набега бетатронной фазы берётся равным горизонтальному, значения сил квадрупольных линз оказываются одинаковыми по модулю. В самом общем виде эмиттанс зависит от угла поворота магнита и силы фокусировки, которая определяется одним параметром – набегом горизонтальной бетатронной фазы на ячейку  $\mu$ , поэтому ниже полученные выражения даются как точно, так и разложенными в ряд по  $\mu$ . Длина и полный угол поворота такой ячейки есть  $L_c = 2L$ ,

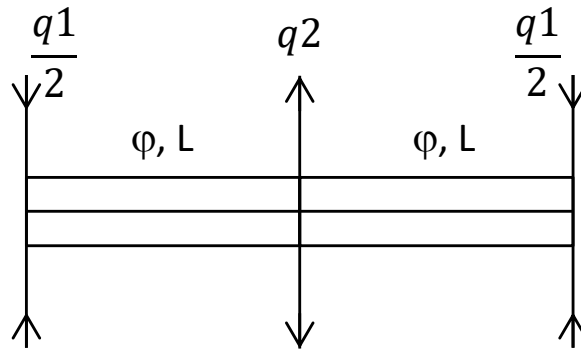


Рисунок 2.1 – Схема FODO ячейки, с полным углом поворота  $\varphi_c = 2\varphi$

$\varphi_c = 2\varphi$ , периметр кольца, собранного из ячеек,  $\Pi = L_c 2\pi/\varphi_c$ , число ячеек

$$N_{cell} = 2\pi/\varphi_c.$$

В приведённых ниже выражениях собраны параметры ячейки, точные и разложенные по малому набегу фазы на ячейку  $\mu = \mu_x = \mu_y$ : эмиттанс

$$\frac{\varepsilon_x}{C_q\gamma^2} = \frac{\varphi^3}{480} \frac{(303 + 176 \cos(\mu) + \cos(2\mu))}{\sin(\frac{\mu}{2})^3 \cos(\frac{\mu}{2})} \approx \left( \frac{8}{\mu^3} + \frac{1}{2\mu} + \frac{7\mu}{120} \right) \varphi^3. \quad (2.3)$$

Из этого выражения можно сделать вывод: поскольку эмиттанс падает как  $1/\mu^3$ , его минимизация увеличением фокусировки или увеличением угла поворота магнита подобны. Расчеты и моделирование показывает, что это справедливо и для более сложных структур.

Максимальные и минимальные значения бета функций совпадают для горизонтальной и вертикальной плоскостей, хотя и реализуются в разных линзах,

$$\frac{\beta_{max,min}}{L} = 2 \frac{(1 \pm \sin(\frac{\mu}{2}))}{\sin(\mu)} \approx \frac{2}{\mu} \pm 1 + \frac{\mu}{3}, \quad (2.4)$$

дисперсия достигает максимального и минимального значения в линзах

$$\frac{\eta_{max,min}}{L\varphi} = \frac{2 \pm \sin(\frac{\mu}{2})}{1 - \cos(\mu)} \approx \frac{1}{3} \pm \frac{1}{\mu} + \frac{4}{\mu^2} \pm \frac{\mu}{24}, \quad (2.5)$$

интегральные силы квадрупольных линз

$$(K_1L)_{1,2} = \pm \frac{2}{L} \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \approx \pm \frac{\mu}{L}, \quad (2.6)$$

натуральный хроматизм

$$\xi_{x,y} = \frac{d\mu_{x,y}}{d\delta} = -\frac{1}{\pi} \tan\left(\frac{\mu}{2}\right) \approx -\frac{\mu}{2\pi}, \quad (2.7)$$

интегральные силы секступолей для компенсации линейного хроматизма

$$(K_2L)_{1,2}L^2\varphi = \frac{4 \sin(\frac{\mu}{2})^3}{\pm 2 + \sin(\frac{\mu}{2})} \approx \pm \frac{\mu^3}{4} - \frac{\mu^4}{16}, \quad (2.8)$$

хроматизм второго порядка при скомпенсированном линейном хроматизме

$$\frac{d^2\mu_x}{d\delta^2} = -2 \tan\left(\frac{\mu}{2}\right) \frac{3 + \cos(\mu)}{7 + \cos(\mu)} \approx -\frac{\mu}{2} - \frac{\mu^3}{96} \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2\mu_y}{d\delta^2} = -2 \tan\left(\frac{\mu}{2}\right) \frac{-5 + \cos(\mu)}{7 + \cos(\mu)} \approx \frac{\mu}{2} + \frac{13\mu^3}{96}, \quad (2.10)$$

хроматизм третьего порядка при скомпенсированном линейном хроматизме

$$\frac{d^3 \mu_x}{d\delta^3} = 12 \tan\left(\frac{\mu}{2}\right) \frac{3 + \cos(\mu)}{7 + \cos(\mu)} \approx 3\mu + \frac{\mu^3}{16} \quad (2.11)$$

$$\frac{d^2 \mu_y}{d\delta^2} = 12 \tan\left(\frac{\mu}{2}\right) \frac{-5 + \cos(\mu)}{7 + \cos(\mu)} \approx -3\mu - \frac{13\mu^3}{16}. \quad (2.12)$$

Динамическая апертура ячейки падает при увеличении набега фазы или частоты  $\nu_x = \mu_x/2\pi$ , как показывают результаты численного моделирования (красные точки) и теоретического расчёта с помощью функций возмущения первого порядка [92; 96] (синяя и оранжевая линии) на рисунке 2.2. Хроматизм второго и третьего порядка растёт с увеличением набега фазы (2.9) и (2.11), (2.10) и (2.12), уменьшая энергетический акцептанс ячейки.

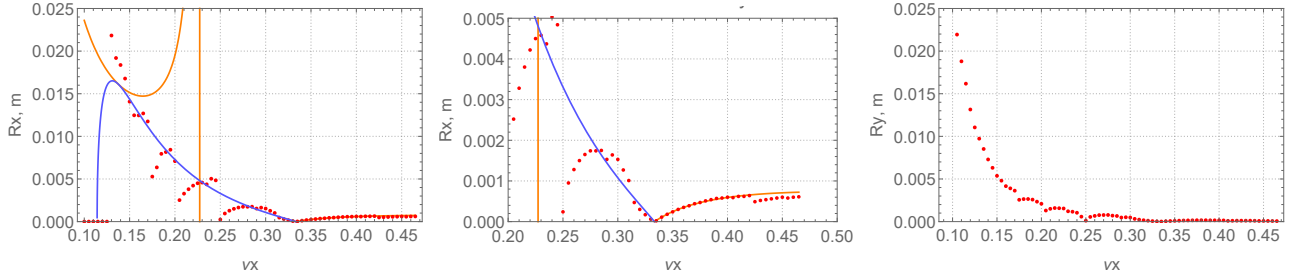


Рисунок 2.2 – Динамическая апертура FODO ячейки при  $\nu_x = \nu_y$ : красные точки – результаты численного моделирования, синяя и оранжевая линии – аналитические расчёты с помощью функций возмущения первого порядка

Сравнение точных формул с приближительными для величин эмиттанса, интегральной силы квадруполей и секступолей приведено на рисунке 2.3, где наблюдается совпадение до примерно  $\nu = 0.3$ , что близко к положению минимума эмиттанса  $\nu_x = 0.38$ . Поэтому далее используются упрощенные выражения для частот меньших  $\nu \lesssim 0.3$ .

Необходимо также заметить, что приведённые расчёты выполнены в приближении тонких линз. В реальной ячейке диполи не заполняют всю ячейку, если обозначить за  $d$  расстояние от края диполя до центра квадруполя  $2d + L = L_c/2$ , то в первом порядке по  $d$  эмиттанс увеличивается как

$$\varepsilon_x(d) \approx \varepsilon_x(0) \left(1 + 4 \frac{d}{L_c}\right). \quad (2.13)$$

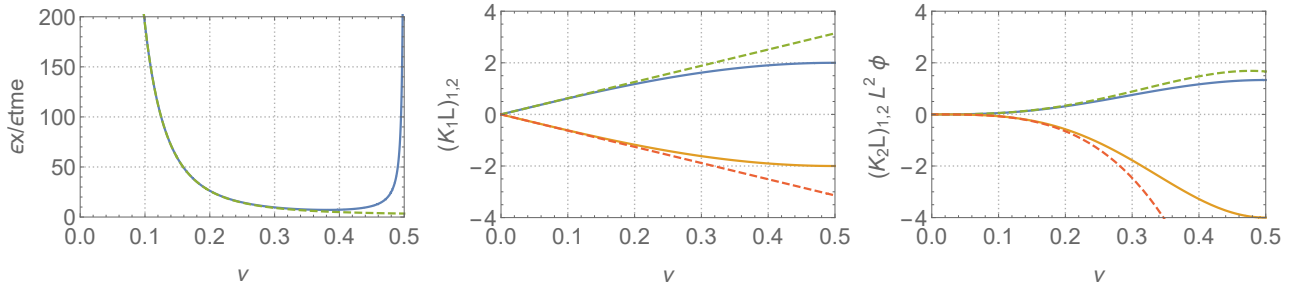


Рисунок 2.3 – Сравнение точного (сплошные синяя и оранжевая линии) и приближённого (пунктирные зелёная и красная линии) расчётов при  $\nu_x = \nu_y$ : эмиттанс – левый (2.3), силы квадруполей – средний (2.6), силы секступолей – правый (2.8)

Таким образом, для получения больших динамической апертуры и энергетического акцептанса необходимо уменьшать набег фазы на ячейку, что, ожидаемо, приводит к увеличению эмиттанса. Поиск компромисса между уменьшением апертуры и увеличением эмиттанса является одной из важных задач проектирования источников синхротронного излучения.

Еще одним ограничением для уменьшения эмиттанса является рост интегральных сил квадрупольных и секступольных линз. Перепишу формулы для эмиттанса, силы квадруполей и секступолей через периметр кольца и длину ячейки

$$\varepsilon_x = C_q \gamma^2 \frac{1}{\nu_x^3} \left( \frac{L_c}{\Pi} \right)^3, \quad (2.14)$$

$$(K_1 L)_{1,2} = \pm \left( \frac{C_q \gamma^2}{\varepsilon_x} \right)^{1/3} \frac{4\pi}{\Pi}, \quad (2.15)$$

$$(K_2 L)_{1,2} = \pm \frac{C_q \gamma^2}{\varepsilon_x} \frac{8\pi^2}{\Pi^2}. \quad (2.16)$$

Как мы видим, более сильным техническим ограничением является увеличение сил секступольных линз, необходимых для коррекции хроматизма кольца; он пропорционален уменьшению эмиттанса. В результате появляются два способа поддержания эмиттанса постоянным и малым. Первый состоит в увеличении периметра при уменьшении  $\nu_x$ , при этом уменьшаются и интегральные силы квадруполей и секступолей, но увеличивается стоимость установки.

Второй способ не меняет периметр ускорителя, но уменьшает длину ячейки,

увеличивая их число. Хотя и интегральные силы квадруполей и секступолей не зависят от длины ячейки, но градиенты линз зависят, поэтому получаются ячейки с сильными квадрупольным и секступольным градиентами. Следствием роста градиентов является неизбежное уменьшение апертуры магнитов и вакуумных камер источников СИ с малым эмиттансом.

Минимальный градиент достигается, когда квадруполи и секступоли занимают половину длины ячейки, тогда их нормализованные градиенты

$$K_1 = \pm \left( \frac{C_q \gamma^2}{\varepsilon_x} \right)^{2/3} \frac{8\pi}{\nu_x \Pi^2}, \quad (2.17)$$

$$K_2 = \pm \left( \frac{C_q \gamma^2}{\varepsilon_x} \right)^{4/3} \frac{16\pi^2}{\nu_x \Pi^3}, \quad (2.18)$$

увеличиваются с уменьшением частоты  $\nu_x$  и периметра  $\Pi$ . На рисунке 2.4 показаны градиенты квадрупольных и секступольных линз в зависимости от набег фазы на ячейку, для фиксированных эмиттанса  $\varepsilon_x = 100$  пм и периметра  $\Pi = 200$  м.

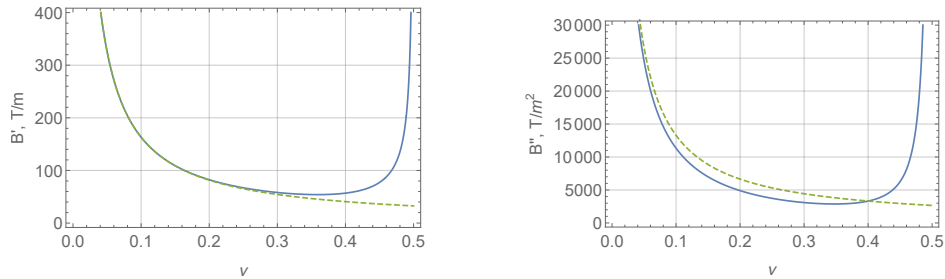


Рисунок 2.4 – Квадрупольный (слева) и секступольный (справа) градиенты в зависимости от набег бетатронной фазы на ячейку, при постоянных эмиттансе  $\varepsilon_x = 100$  пм и периметре  $\Pi = 200$  м. Точные (синяя сплошная линия) и приближённые (пунктирная зелёная линия) формулы (2.6) и (2.8), (2.15) и (2.16)

Итак, для достижения большой динамической апертуры желателен малый набег бетатронной фазы на ячейку ( $\nu_x < 0.2$ ), при этом для получения малого эмиттанса необходимо увеличивать либо периметр установки (и стоимость) при умеренных силах квадруполей и секступолей, либо число ячеек, сохраняя периметр, что вызывает рост градиентов квадруполей и секступолей вплоть до технических ограничений.

## 2.2 Получение малого эмиттанса в накопителе электронов

Для получения экстремально малого эмиттанса в современных источниках СИ 4-го поколения наиболее часто применяются две структуры. Одна — МВА (Multiple Bend Achromat) предложена Дитером Айнфельдом [119], состоит из нескольких ячеек типа ТМЕ, обрамлённых ячейками, зануляющими дисперсионную функцию в прямолинейном промежутке, куда ставится вигглер или ондулятор. Другая — НМВА (Hybrid MBA) разработана Панталео Раймонди [120], успешно им использована в проекте ESRF-EBS [121] и после этого весьма популярна, особенно для источников с энергией 6 ГэВ [10; 12—14]. Мотивацией для создания НМВА послужил тот факт, что с уменьшением эмиттанса хроматизм растёт, дисперсионная функция в ячейках падает, силы секступолей увеличиваются (см. предыдущий параграф), межполюсная апертура уменьшается вплоть до невозможности реализации таких магнитов с железным ярмом и резистивными катушками возбуждения поля. Раймонди предложил не ставить секступольные линзы внутрь центральной структуры типа ТМЕ, обеспечивающей малый эмиттанс, в качестве краевых ячеек использовать ахроматический поворот DBA (Double Bend Achromat) с большой дисперсионной функцией (dispersion bump), куда и поместить секступольные линзы, компенсирующие хроматизм всей последовательности. Крайний магнит DBA зануляет дисперсионную функцию в следующем промежутке. Между двумя краевыми ячейками DBA организуется минус-единичное преобразование, что дополнительно должно способствовать увеличению динамической апертуры. Ожидалось, что уменьшенные силы секступольных линз в сочетании с минус-единичным преобразованием обеспечат большую динамическую апертуру и акцептанс. Это утверждение спорно, поскольку (а) невозможно создать минус-единичное не перекрывающееся преобразование в такой структуре (а выше мы видели, что для таких структур динамическая апертура отнюдь

не так велика) и (б) число секступольных линз в классической МВА (обычно используются 5-9 ячеек) больше, чем в двух ячейках DBA, а следовательно, и силы секступолей в МВА могут быть такие же и даже меньше, чем в НМВА. Забегая вперёд скажу, что для ЦКП “СКИФ” (МВА) с проектным эмиттансом 73 пм и для ESRF-EBS (НМВА) с проектным эмиттансом 132 пм поперечная динамическая апертура и силы секступольных линз практически равны. Конечно, можно сказать, что энергия ESRF-EBS в два раза больше, чем у ЦКП “СКИФ”, но и периметр почти в два раза больше (т.е., угол поворота магнитов — меньше). К недостаткам НМВА относятся ещё и необходимость как-то компенсировать большой вклад в эмиттанс от DBA — это делается с помощью сложных магнитов с продольным градиентом, использование дополнительных (помимо хроматических) семейств секступольных и октупольных линз для оптимизации динамической и энергетической апертур.

Поэтому для проекта ЦКП “СКИФ” было решено подробнее рассмотреть зеркально-симметричную ячейку, основанную на одном поворотном магните, частным случаем которой является ТМЕ.

### 2.2.1 Зеркально-симметричная ячейка с одним дипольным магнитом

Для магнита с однородным полем, длиной  $2L$  и углом поворота  $2\varphi$  в [113] было получено, что теоретический минимальный эмиттанс (ТМЕ) составляет

$$\varepsilon_{TME} = C_q \gamma^2 (2\varphi)^3 \frac{1}{12\sqrt{15}}, \quad (2.19)$$

при этом бетатронная  $\beta_x$  и дисперсионные  $\eta$  функции должны иметь минимумы в центре магнита определённой величины

$$\beta_{x,min} = \frac{L}{\sqrt{15}}, \quad \eta_{min} = \frac{L\varphi}{6}. \quad (2.20)$$

Простейшая ячейка, имеющая устойчивое оптическое решение, состоит из двух пар квадрупольных линз на расстоянии  $d_1$  друг от друга, интегральной

силой  $p_{1,2} = (K_1 L)_{1,2}$ , окружающих центральный магнит длиной  $2L$  и углом поворота  $2\varphi$ , кривизной  $K_0 = \varphi/L$  (рисунок 2.5). Секступоли совмещены с квадрупольями и обладают интегральной силой  $S_{1,2} = (K_2 L)_{1,2}$ . Такую ячейку используют во всех новых проектах источников СИ четвёртого поколения. Длина и полный угол поворота ячейки есть  $L_c = 2(L + d_1)$ ,  $\varphi_c = 2\varphi$ , периметр

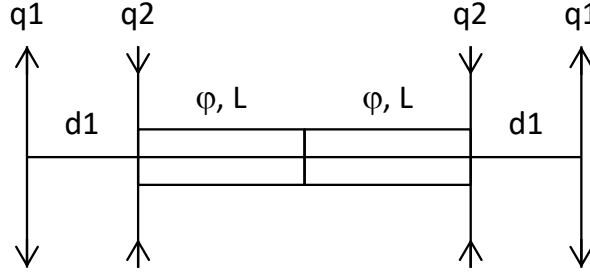


Рисунок 2.5 – Схема ТМЕ ячейки, с полным углом поворота  $\varphi_c = 2\varphi$

кольца, собранного из ячеек,  $\Pi = L_c 2\pi/\varphi_c$ , число ячеек  $N_{cell} = 2\pi/\varphi_c$ .

Оказалось, что в такой структуре возможны четыре оптически устойчивых решения, показанных на рисунке 2.6, где, для примера (параметры ячейки выбираются близкими к ЦКП “СКИФ”), выбрано  $L = 0.65$  м,  $d_1 = 1.0974$  м,  $L_c \approx 3.5$  м и  $\varphi_c = \pi/49$ . Эти решения были найдены аналитически с помощью системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* [122] и подтверждены численно с помощью программы моделирования ускорителей заряженных частиц MAD-X [106]. Пока для простоты, вертикальная бетатронная частота всегда выбирается такой, чтобы выполнялось равенство  $\cos(\mu_x) = \cos(\mu_y)$ . Область устойчивости ячейки в виде зависимости частоты  $\nu_x$  и силы первой линзы  $p_1$  от силы второй линзы  $p_2$  показана на рисунке 2.7 и подтверждает наличие четырёх областей. Получающиеся эмиттансы четырёх решений приведены на рисунке 2.8. Первые три решения реализуются в области частот  $\nu_x = 0 \div 0.5$ , а четвертое при  $\nu_x = 0.5 \div 1$ . Минимальный эмиттанс (ТМЕ) достигается только в четвертом решении, именно оно, в основном, и изучалось в ранних публикациях [123–125]. Из первых трёх решений изучалось только третье [126], получив название модифицированное ТМЕ (mТМЕ), в [127] первое решение использовано для примера, но не изучено. Второе решение имеет наи-



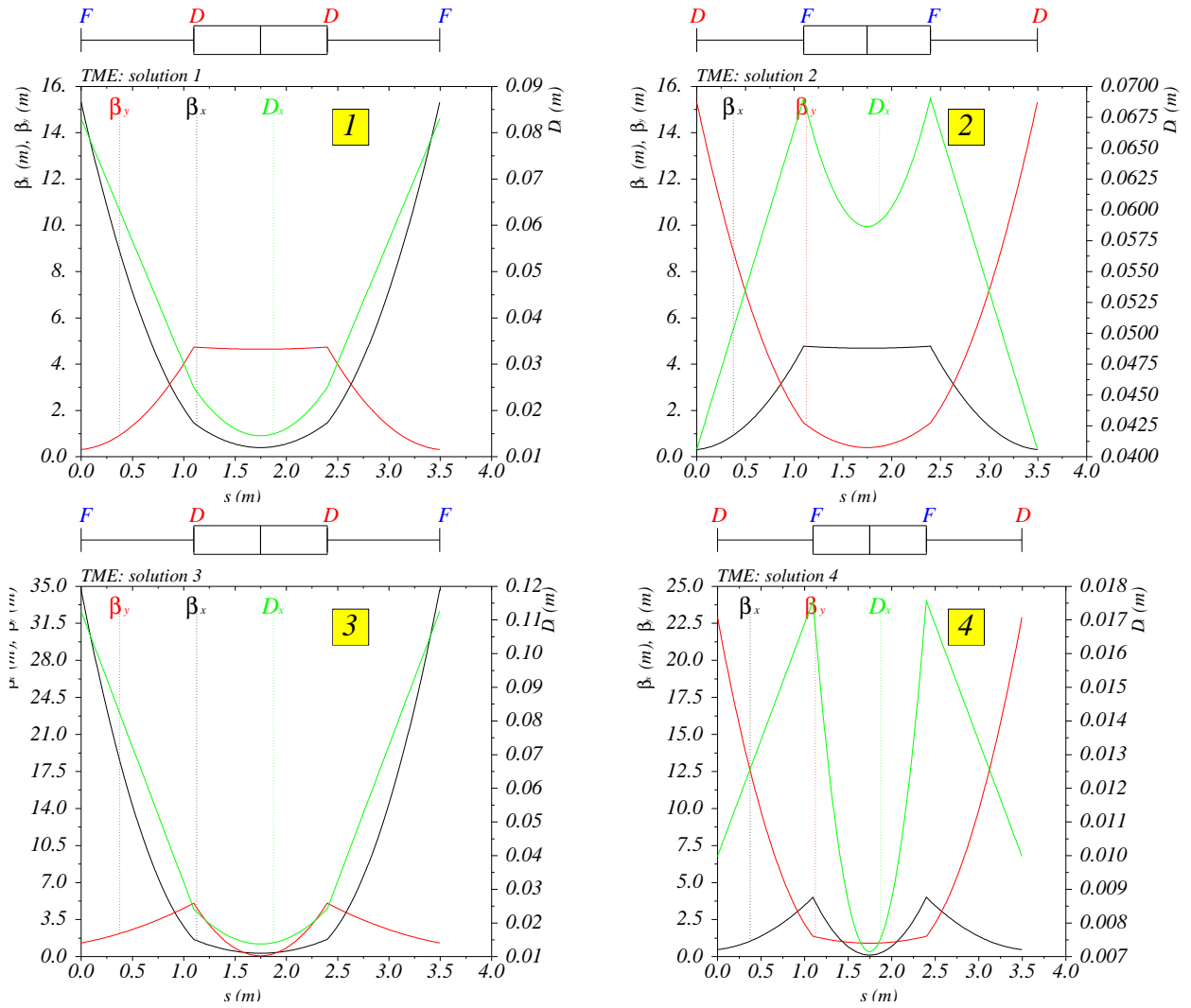


Рисунок 2.6 – Четыре устойчивых решения ячейки с рисунка 2.5

большую дисперсию в центре магнита, поэтому ожидается имеет наибольший эмиттанс. Решения 1 и 3 близки по минимальному эмиттансу, который примерно в два раза больше минимального эмиттанса решения 4 (ТМЕ). Третье решение имеет сильные квадруполи, по абсолютной величине равные четвертому решению (рисунок 2.7), и только первое решение имеет слабые квадруполи и малый эмиттанс. Графики хроматизма на рисунке 2.9 показывают, что первой и второе решение имеют оба хроматизма  $|\xi_{x,y}| < 1$ , в то время как для первого и четвертого один из хроматизмов по модулю больше 2. Компенсация больших хроматизмов требует сильных секступолей, что подтверждается графиком силы секступолей на рисунке 2.10. Помимо эмиттанса важным свойством ячейки является динамическая апертура, и на рисунке 2.11 приведены

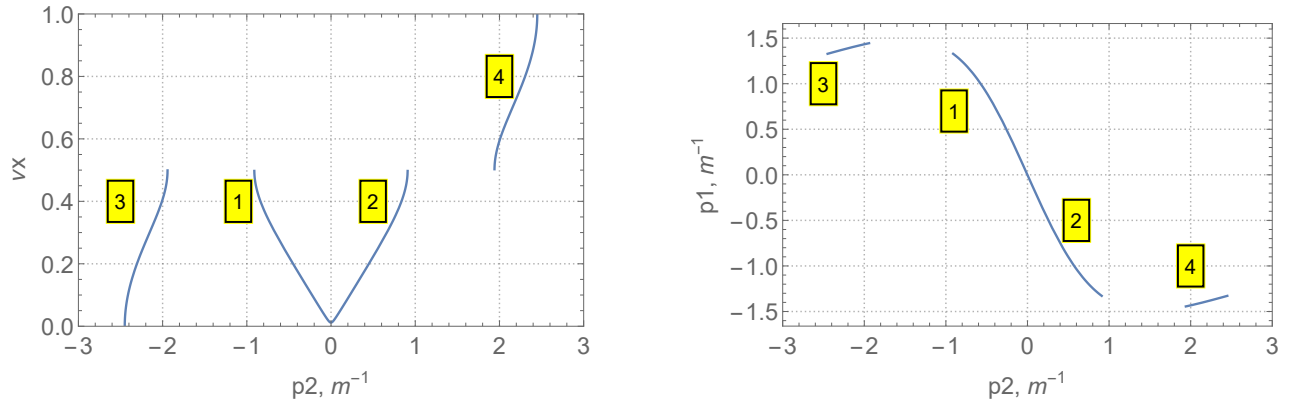


Рисунок 2.7 – Область устойчивости ячейки в виде зависимости частоты  $\nu_x$  и силы первой линзы  $p_1$  от силы второй линзы  $p_2$

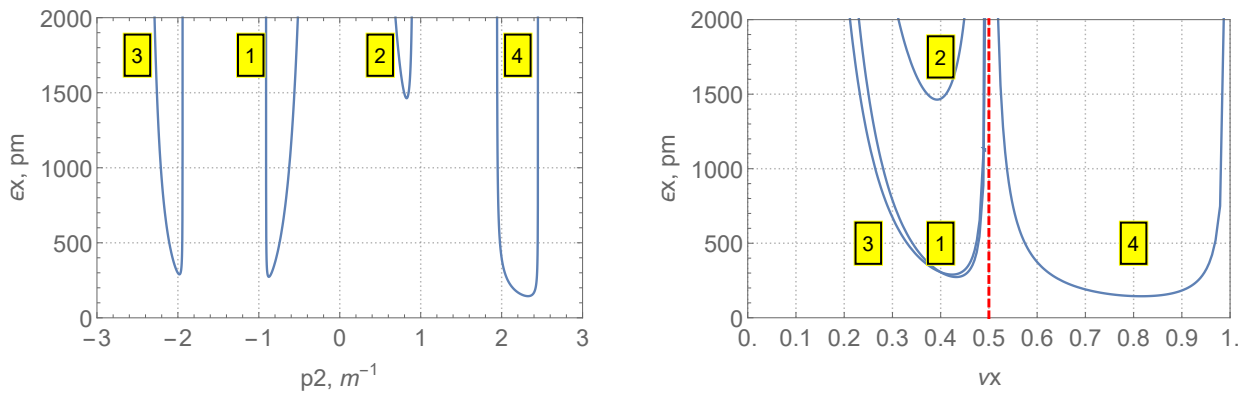


Рисунок 2.8 – Эмиттанс в зависимости от силы второй линзы или бетатронной частоты, соответствующий четырём решениям ячейки с рисунка 2.5

динамические апертуры четырёх решений, соответствующие рисунку 2.6, но для сравнения, приведённые к  $\beta_x = 15$  м,  $\beta_y = 5$  м на рисунке 2.11. Как и ожидалось, решение 4, с более сильной фокусировкой (большим набегом бетатронной фазы), обеспечивающее наименьший эмиттанс с наибольшими силами квадрупольей и секступольей, имеет наименьшую динамическую апертуру. Решение 2, хотя и обладает большой динамической апертурой, но даёт слишком большой эмиттанс по сравнению с четвёртым. Решения 1 и 3 близки по эмиттансу, но первое обладает более слабыми квадрупольями и секступольями, что и обеспечивает большую динамическую апертуру. Уменьшить эмиттанс первого решения в два раза до величины ТМЕ можно понизив угол поворота магнита как  $2^{1/3} \approx 1.26$ , во столько же раз увеличив периметр. В таблице 2.1 приведены основные параметры четырёх решений, где горизонтальная бетатронная частота

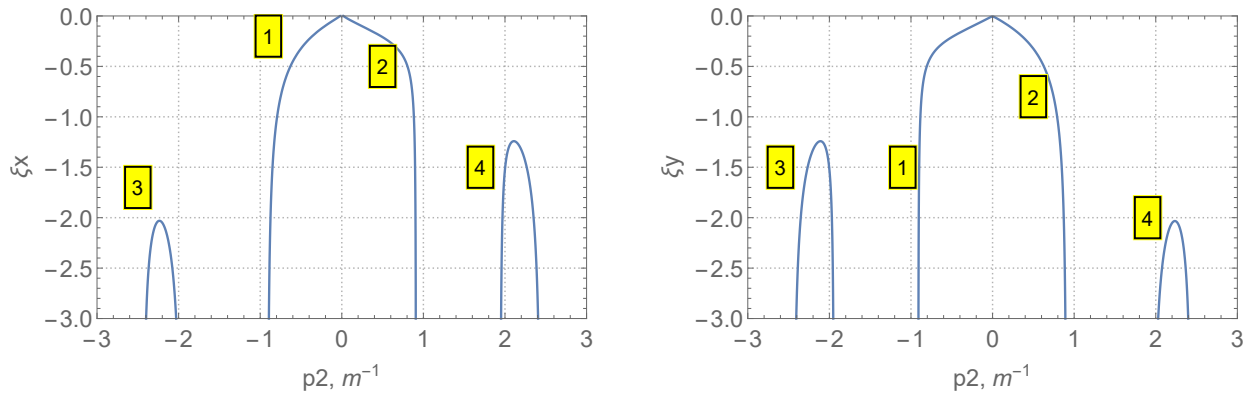


Рисунок 2.9 – Горизонтальный и вертикальный хроматизмы в зависимости от силы второй линзы для четырёх решений ячейки с рисунка 2.5

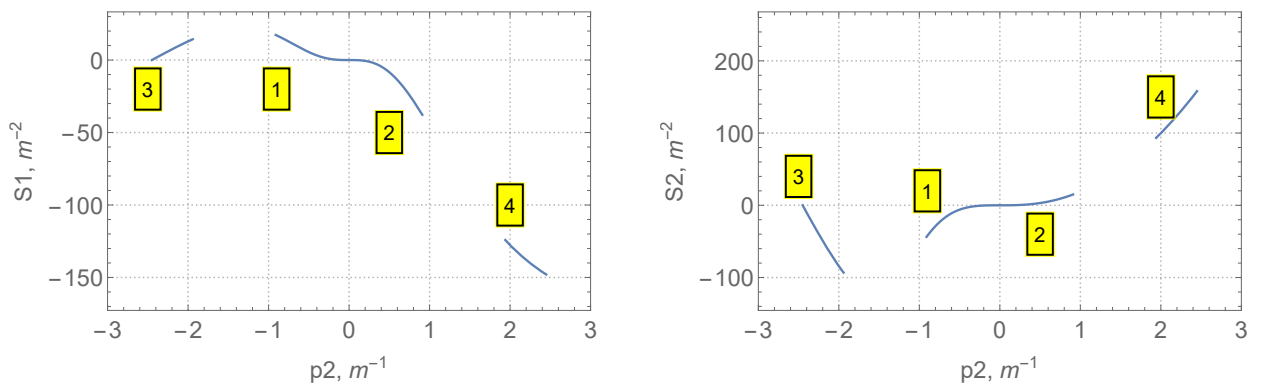


Рисунок 2.10 – Интегральные силы секступолей в зависимости от силы второй линзы для четырёх решений ячейки с рисунка 2.5

та  $\nu_x$  выбрана в области минимума эмиттанса, а вертикальная — из условия выполнения равенства  $\cos(\mu_x) = \cos(\mu_y)$ . Для реального (четвёртого) решения ТМЕ (таблица 2.1) эмиттанс получается приблизительно в два раза больше, чем согласно простой формуле (2.19), потому что  $\varepsilon_{TME}$  получен без каких-либо условий оптической устойчивости ячейки. Обеспечение этих условий приводит к зависимости эмиттанса не только от  $\nu_x$ , но и от  $L$  и  $d_1$ , и, соответственно, увеличивает эмиттанс — это иллюстрирует утверждение, что в реальной жизни получить минимальный эмиттанс практически невозможно.

Таким образом, наиболее оптимальным для получения малого эмиттанса и большой динамической апертуры для проекта ЦКП “СКИФ” является решение 1. Дальнейшее исследование ячейки будет проведено на сравнении решения 1 и 4, которые для краткости буду называть mTME и TME соответственно. Все

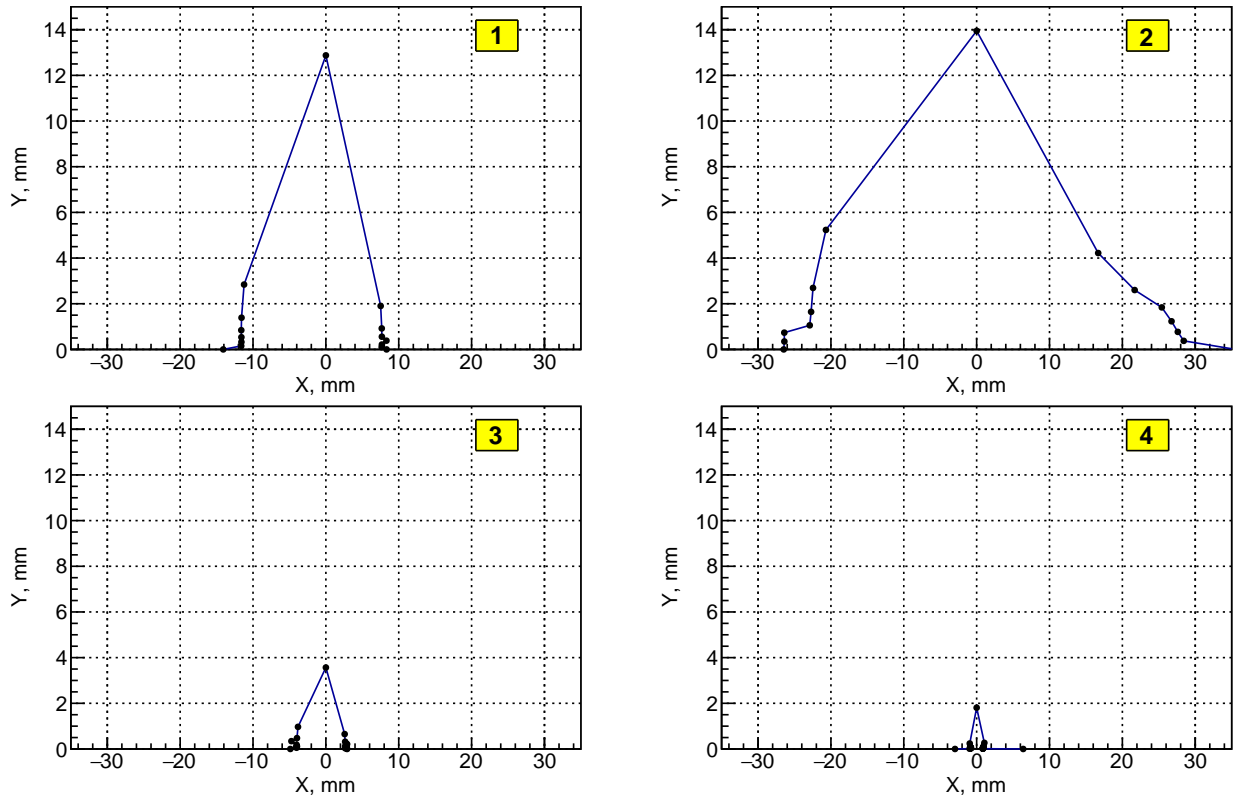


Рисунок 2.11 – Динамические апертуры четырёх решений, приведённые к  $\beta_x = 15$  м,  $\beta_y = 5$  м

расчёты выполнены с помощью системы аналитических вычислений *Wolfram Mathematica* [122]. Полученные выражения совпадают с моделированием, однако, являются слишком громоздкими для анализа.

## Сравнение решений mTME и TME

Вводя отношение длины магнита к длине ячейки

$$u = \frac{2L}{2(L + d_1)}, \quad (2.21)$$

разложу в ряд по степеням  $\mu$  и  $u$  выражения для эмиттанса (2.2)

$$F = \frac{\varepsilon_x}{C_q \gamma^2 (2\varphi)^3} \approx \frac{8}{u \mu_x^3} + \frac{f_{-2}(u)}{\mu_x^2} + \frac{f_{-1}(u)}{\mu_x} + f_0(u) + \mu_x f_1(u) + \mu_x^2 f_2(u) + \mu_x^3 f_3(u), \quad (2.22)$$

где  $f_i(u) = c_0 + (c_{-1,i}/u) + c_{1,i}u$  с постоянными коэффициентами  $c_i$ . Это выражение слишком громоздкое для анализа, уменьшение количества членов при-

Таблица 2.1 – Параметры четырёх решений с рисунков 2.5 и 2.6

Решение	1	2	3	4
Энергия, $E$ [ГэВ]	3			
$d_1$ [м]	1.0974			
$L$ [м]	0.65			
$L_c = 2(L + d_1)$ [м]	3.4948			
Периметр, $\Pi$ [м]	342.49			
Число ячеек, $N_c$	98			
Угол поворота ячейки, $\varphi_c$	$\pi/49$			
Поле магнита, $B$ [Т]	0.493			
$\varepsilon_{TME}$ [пм]	75			
$\nu_x/\nu_y$	0.4/0.4	0.4/0.4	0.4/0.6	0.74/0.26
$\varepsilon_x$ [пм]	305.5	1470.5	305.6	163.5
Коэффициент уплотнения орбиты, $\alpha \cdot 10^{-4}$	3.3	11.39	3.16	1.95
Натуральный хроматизм, $\xi_x$	-1.36	-0.61	-3.43	-1.36
Натуральный хроматизм, $\xi_y$	-0.61	-1.36	-1.46	-2.04
Бета в центре магнита, $\beta_{x0}$	0.39	4.69	0.32	0.11
Дисперсия в центре магнита, $\eta_{x0}$	0.014	0.059	0.014	0.07
$q_1$ [м <sup>-1</sup> ]	1.27	-1.27	1.43	-1.38
$q_2$ [м <sup>-1</sup> ]	-0.84	0.84	-2.01	2.22
$S_1$ [м <sup>-2</sup> ]	15.35	-31.39	12.71	-138.74
$S_2$ [м <sup>-2</sup> ]	-33.59	12.14	-83.04	126.26

водит к расхождению с точным выражением. Сравнение точного выражения для эмиттанса и разложенного при  $u = 0.372$  приведено на рисунке 2.12 слева. Видно, что приближение совпадает с точным выражением до  $\nu_x \lesssim 0.4$ . При  $\mu_x \rightarrow 0$  эмиттанс ячейки mTME растёт как  $1/\mu_x^3$ , также как и для ячейки

FODO (2.3). Сравнивая эмиттанс mTME при различных соотношениях длин магнита и ячейки, с эмиттансом FODO ячейки с теми же длиной и углом поворота магнита (рисунке 2.12 справа), отмечаю, что mTME обладает более, чем в два раза меньшим эмиттансом, и минимум эмиттанса достигается при  $u \rightarrow 0$  и  $\nu_x \rightarrow 0.5$ . Уменьшение эмиттанса сопровождается ростом по абсо-

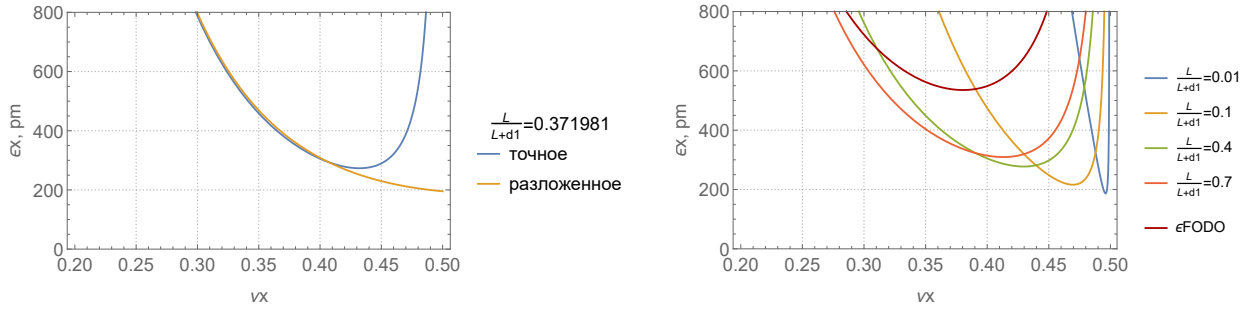


Рисунок 2.12 – Слева – сравнение точного и приближенного эмиттанса ячейки mTME. Справа – сравнение эмиттанса ячеек mTME и FODO

лютой величине сил как квадруполей, так и секступолей рисунки 2.13 и 2.14.

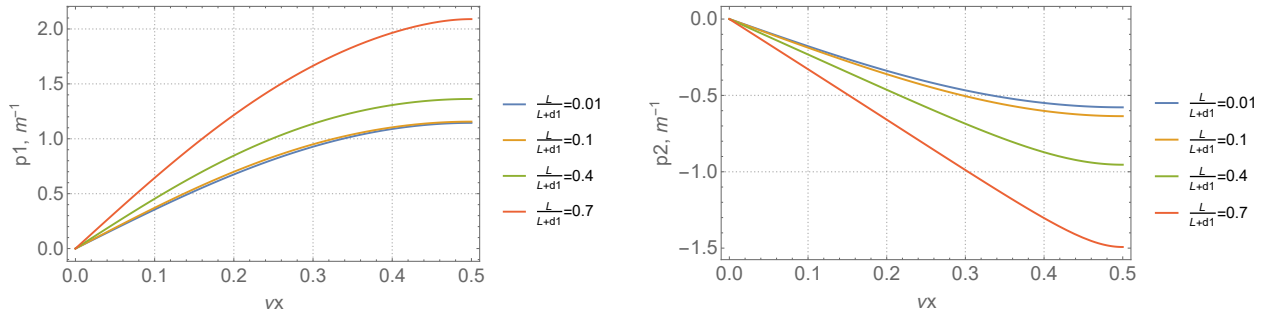


Рисунок 2.13 – Силы квадруполей ячейки mTME в зависимости от бетатронной частоты

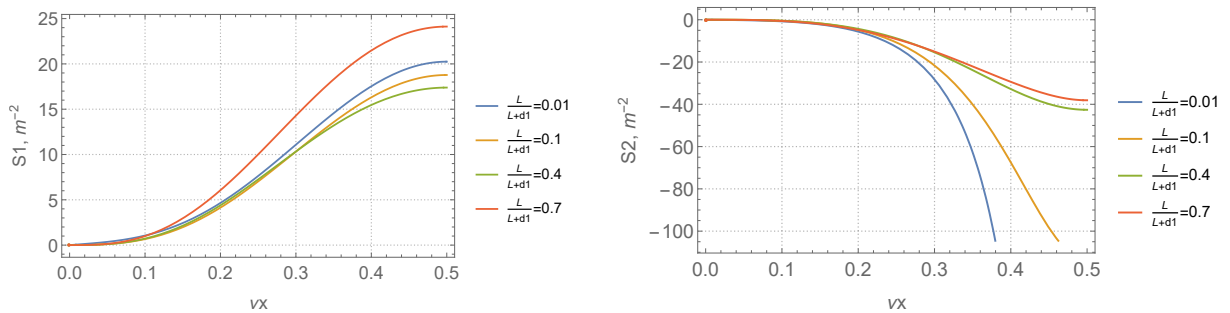


Рисунок 2.14 – Силы секступолей ячейки mTME в зависимости от бетатронной частоты

Для ячейки ТМЕ тоже находится выражение, описывающее зависимость эмиттанса от  $\mu_x$  и  $x$ , которое неудобно для анализа, графики этой зависимости показаны на рисунке 2.15. Величина минимального эмиттанса зависит от соотношения длин магнита и ячейки, и не зависит от  $\nu_x$ . Численное решение уравнения на минимум эмиттанса даёт значение, совпадающее с (2.19), при  $\nu_x = 1 - \arctan(\sqrt{3/5}) \approx 0.79$  и  $u \approx 0.53$ . То есть для достижения эмиттанса ТМЕ (в ячейке с рисунка 2.5) длина магнита должна составлять приблизительно половину длину ячейки. Компьютерное моделирование подтверждает эти выводы.

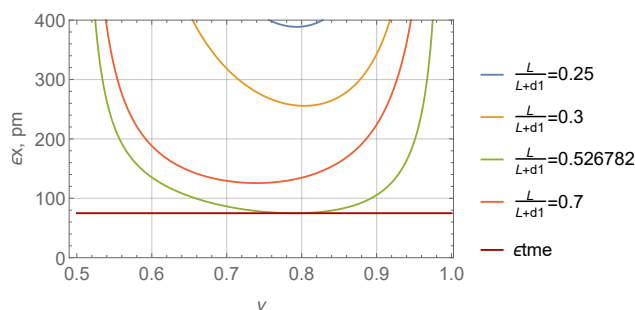


Рисунок 2.15 – Эмиттанс ячейки ТМЕ при различных  $u = 2L/2(L + d_1)$ . Тёмно-красная линия это минимальный эмиттанс (2.19), составляющий  $\epsilon_{TME} = 75$  пм для параметров из таблицы 2.1

Для сравнения динамических апертур решений mТМЕ и ТМЕ, уменьшу эмиттанс mТМЕ (решение 1) до значения решения 4 в таблице 2.1 ( $\epsilon_x = 165$  пм), путём уменьшения угла поворота ячейки с  $\varphi_c = \pi/49$  до  $\varphi_c = \pi/58$ . При этом увеличивается число ячеек с 98 до 116 и, при сохранении длины ячейки ( $L = const$ ,  $d_1 = const$ ), вырастает полная длина ячеек (периметр) с 342.5 м до 405.4 м. Аналогично поступлю и с решением ТМЕ, но чтобы сохранить эмиттанс, уменьшу ещё и набег бетатронной фазы на ячейку. Параметры получившихся ячеек приведены в таблице 2.2, где энергия, длины пустого промежутка и магнита взяты из таблицы 2.1. С этими параметрами в программе MAD-X [106] были созданы две модели, для которых были рассчитаны оптические функции (рисунок 2.16) и динамические апертуры (рису-

нок 2.17). Динамическая апертура определялась как область начальных условий  $(x, y, p_x = 0, p_y = 0)$ , при которых частица устойчива в течении 1024 оборотов. Так как динамическая апертура зависит от бета функций в точке наблюдения, поэтому на рисунке 2.18 показаны приведённые к  $\beta_x = 15$  м и  $\beta_y = 5$  м динамические апертуры обоих решений.

Таблица 2.2 – Параметры mTME и TME

Решение	1-1	4-1
Периметр, $\Pi$ [м]	405.4	
Число ячеек, $N_c$	116	
Угол поворота ячейки, $\varphi_c$	$\pi/58$	
$\nu_x/\nu_y$	0.43/0.43	0.64/0.36
$\varepsilon_x$ [пм]	165	161
Натуральный хроматизм, $\xi_x/\xi_y$	-2.0/ - 0.84	-1.27/ - 2.63
$q_1/q_2$ [м <sup>-1</sup> ]	1.3/ - 0.87	-1.42/2.06
$S_1/S_2$ [м <sup>-2</sup> ]	19.33/ - 45.45	-155.14/126.62

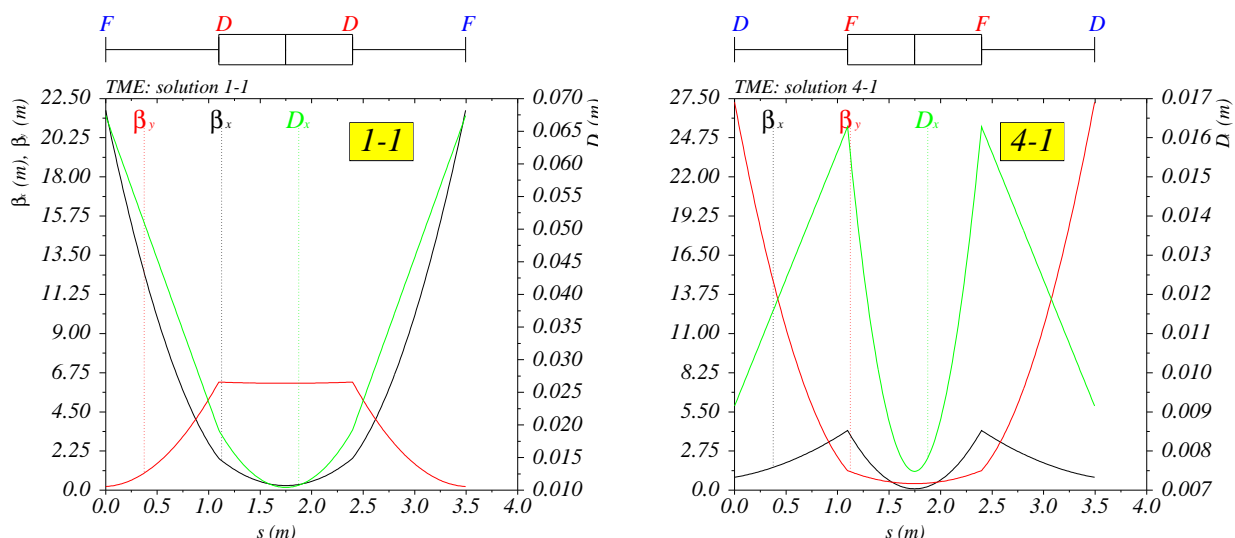


Рисунок 2.16 – Оптика решения mTME (слева) и TME (справа)

Итак, при равных энергиях, эмиттансе и периметре, сила секступольных линз ячейки TME в несколько раз больше, чем mTME (таблица 2.2), что при-



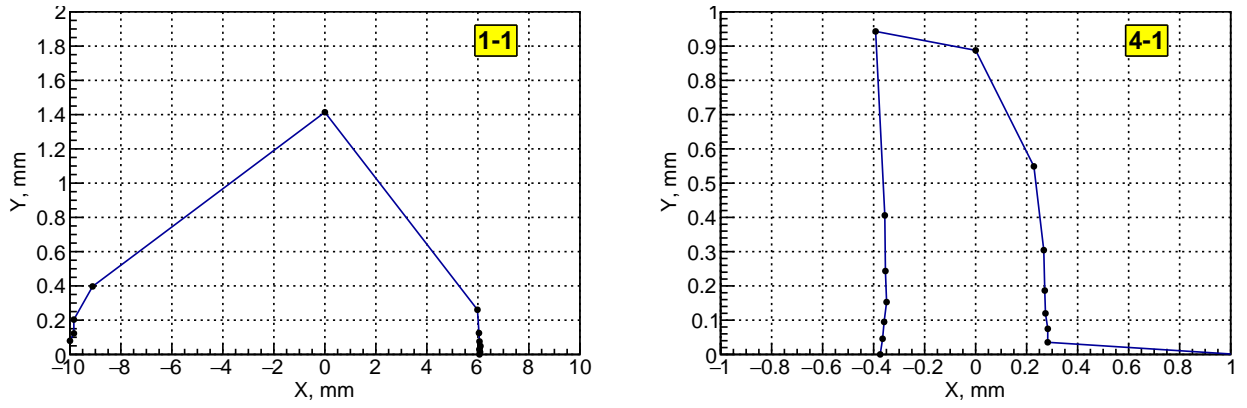


Рисунок 2.17 – Динамические апертюры mTME (слева,  $\beta_x = 21.8$  м,  $\beta_y = 0.22$  м) и TME (справа,  $\beta_x = 0.9$  м,  $\beta_y = 27.25$  м)

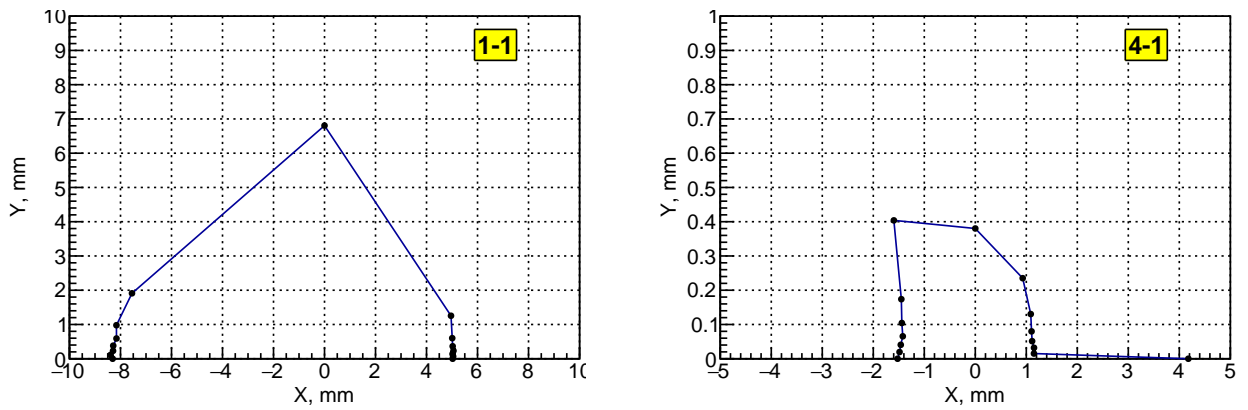


Рисунок 2.18 – Приведённый к  $\beta_x = 15$  м и  $\beta_y = 5$  м динамические апертюры mTME (слева) и TME (справа)

вело к существенно меньшей динамической апертюре. Поэтому для структуры источника СИ ЦКП “СКИФ” была выбрана ячейка mTME.

### 2.2.2 Магнитная структура источника СИ ЦКП “СКИФ”

За основу была взята ячейка mTME с некоторыми изменениями:

1. дефокусирующий градиент двух линз  $q_2$  был внесён в дипольный магнит, что позволило увеличить длину пустых промежутков, для установки секступолей,
2. квадрупольные линзы  $q_1$  были сдвинуты по горизонтали, что привело к появлению дипольного поля обратного знака (reverse bend [127]), такие

магниты облегчают получение оптимальной дисперсии для минимизации эмиттанса,

3. магниты с совмещёнными функциями позволили получить горизонтальный декремент  $J_x = 2$ , что уменьшило эмиттанс в два раза (2.2),
4. силы и расстояние между элементами были численно оптимизированы, для увеличения динамической апертуры, минимизации эмиттанса и натурального хроматизма.

На рисунке 2.19 показана получившаяся ячейка (слева). Центральный магнит BD с небольшим отрицательным (дефокусирующим) градиентом, обеспечивает вертикальную фокусировку. По обе стороны от магнита находятся две квадрупольные линзы QB, фокусирующие пучок в горизонтальной плоскости. Линзы смещены по горизонтали, и создают поворотное поле обратного знака по сравнению с основным магнитом, что помогает настроить дисперсию и уменьшить эмиттанс. Коррекция хроматизма осуществляется двумя секступольными линзами SY и одной SX.

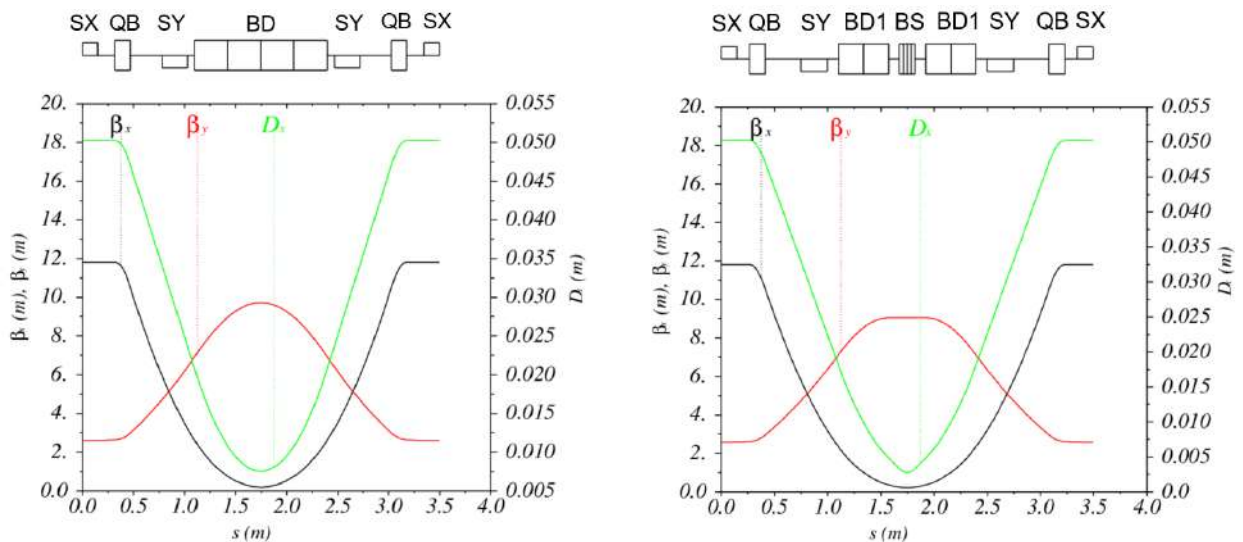


Рисунок 2.19 – Оптические функции базовой ячейки ЦКП “СКИФ” (слева) и ячейки с сильным центральным магнитом (справа)

Для получения малого эмиттанса поле дипольного магнита длиной 1.3 м мало (0.55 Т), и спектр излучения из него имеет максимум в области мягко-

го рентгена. Чтобы увеличить число экспериментальных станций, способных работать с более жестким спектром, в центральной ячейке каждого суперпериода один слабый магнит заменен “сэндвичем” из трех: двух коротких со слабым полем и отрицательным градиентом BD1, расположенный по краям, и коротким центральным диполем BS с полем 2 Т без градиента (рисунке 2.19). Длина модифицированной ячейки (HF — high field) не изменилась и составила около 3.5 м, остальные параметры немного отличаются от параметров базовой ячейки (LF — low field) (таблица 2.3).

Таблица 2.3 – Параметры LF и HF ячеек ЦКП “СКИФ”

	LF	HF
Длина, $L_c$ [м]	3.4948	
Угол поворота ячейки, $\varphi_c$ [°]	3.682	3.642
$\nu_x/\nu_y$	0.446/0.124	0.442/0.122
Коэффициент уплотнения орбиты, $\alpha$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$8.1 \cdot 10^{-6}$
$\varepsilon_x$ [пм]	70	75
Энергетический разброс, $\sigma_E/E$	$8.73 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$
Потери энергии за оборот, $U_0$ [кэВ]	4.72	9.83
Декременты затухания, $J_x/J_y$	2.24/0.76	1.7/1.3
Натуральный хроматизм, $\xi_x/\xi_y$	-1.32/ - 0.36	-1.27/ - 0.34

Интересно сравнить сделанные оценки параметров ячейки mTME (таблица 2.2) с полученными в результате численной оптимизации (таблица 2.3). Выполнение требования на число и длину прямолинейных промежутков, привело к увеличению угла поворота ячейки  $\varphi_c = \pi/50 \approx 3.1^\circ$  до  $\varphi_c \approx 3.6^\circ$ , что должно было увеличить эмиттанс в 3.6 раза. Однако, увеличенный горизонтальный декремент затухания  $J_x \approx 2$  и магниты с отрицательным полем позволили получить эмиттанс  $\varepsilon_x \approx 70$  пм, вместо  $\varepsilon_x = 165$  пм. Горизонтальная частоты не изменилась, а вертикальная была уменьшена до  $\nu_y \approx 0.12$ , поэтому

и натуральный хроматизм уменьшился до  $\xi_x/\xi_y \approx -1.3/-0.4$ . Интегральные квадрупольные силы тоже стали меньше  $K_1L \approx -1.3 \text{ м}^{-1}$  и  $K_2L \approx 0.8 \text{ м}^{-1}$  вместо  $2q_2 = -1.64 \text{ м}^{-1}$  и  $q_1 = 1.3 \text{ м}^{-1}$ . Разница связана как с реальной длиной линз, так и с другим размещением. Интегральные силы секступолей стали больше  $(K_2L)_{1/2} \approx 70/-59 \text{ м}^{-2}$ , вместо  $S_{1/2} \approx 20/45$ . Это произошло потому, что в модели на рисунке 2.5 секступоли размещались в максимумах и минимумах соответствующих бета функций. В реальной же ячейке положение секступолей оптимизировалось, путём подбора набега бетатронных фаз между ними, для увеличения динамической апертуры и энергетического акцептанса.

Магнитная структура всего кольца ЦКП “СКИФ” состоит из 16 суперпериодов с пятью регулярными ячейками (LF), окружёнными двумя для за-нуления дисперсии в прямолинейном промежутке длиной 6 м. Два дублета квадрупольных линз обеспечивают в центре промежутка большую  $\beta_x$  для оптимизации горизонтальной инжекции, и малую  $\beta_y$  для уменьшения влияния излучающих устройств (змеек и ондуляторов с вертикальным полем) на динамику пучка. Оптические функции суперпериода, показаны на рисунке 2.20. Параметры всего кольца ЦКП “СКИФ” приведены в таблице 2.4. Линейный

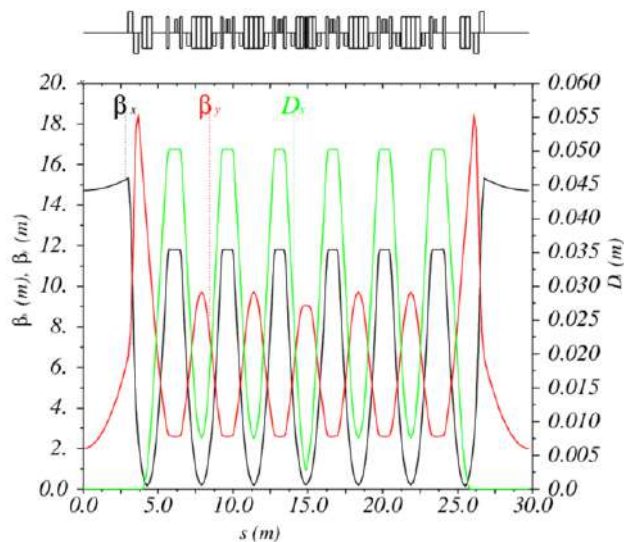


Рисунок 2.20 – Оптические функции суперпериода ЦКП “СКИФ”, начинающегося и кончающегося в центре соседних прямолинейных промежутков

хроматизм структуры компенсируется двумя семействами секступолей, распо-

Таблица 2.4 – Параметры кольца ЦКП “СКИФ” из 16 суперпериодов с рисунка 2.20

Энергия пучка [ГэВ]	3
Симметрия	16
Периметр [м]	476.14
Период обращения [мкс]	1.59
Горизонтальный эмиттанс [пм]	72
Энергетический разброс	$1 \cdot 10^{-3}$
Потери энергии за оборот [кэВ]	535
Бетатронные частоты ( $x/y$ )	50.88/17.76
Коэффициент уплотнения орбиты	$7.6 \cdot 10^{-5}$
Натуральный хроматизм ( $x/y$ )	-162/ - 58
Гармоника ВЧ резонатора	567
Частота ВЧ [МГц]	357
Напряжение ВЧ [МВ]	0.77
Энергетический акцептанс	2.6%
Синхротронная частота	$1.13 \cdot 10^{-3}$
Длина сгустка [мм]	5.5
Декременты затухания ( $x/y$ )	1.91/1.09
Время затухания ( $x/y$ ) [мс]	9/16

ложенными только в регулярных ячейках периодичности (рисунок 2.21). Так как горизонтальный секступоль находится в начале и конце базовой ячейки, то на концах структуры из пяти ячеек установлен секступоль половинной длины. Параметры секступольных линз приведены в таблице 2.5. Динамическая апертура всего кольца ЦКП “СКИФ” показана на рисунке 2.22, слева — результаты моделирования для частиц с постоянной равновесной энергией (ВЧ резонаторы выключены), справа — результаты с включёнными ВЧ резонаторами. Для источника СИ с малыми длиной и поперечными размерами время жизни пучка

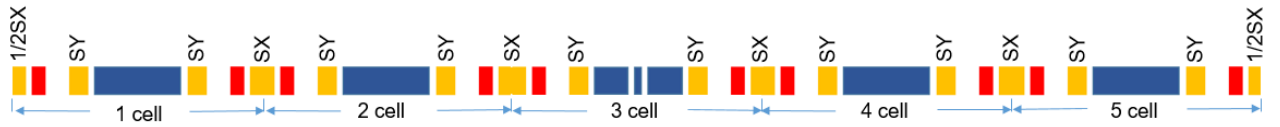


Рисунок 2.21 – Схема размещения секступолей в суперпериоде ЦКП “СКИФ”

Таблица 2.5 – Основные параметры хроматических секступолей

	$l, \text{ м}$	$B'', \text{ Т/м}^2$	$(K_2L), \text{ м}^{-2}$
SY	0.25	-2370	-59.25
SX	0.30	2358	70.74

определяется эффектом Тушека [16; 17] и размером энергетической апертуры, чем больше апертура, тем больше время жизни. Поэтому на рисунке 2.23 приведена получившаяся область устойчивости ( $\pm 3\%$ ) в зависимости от энергии частиц.

Таким образом, можно констатировать, что исследование магнитной ячейки с центральным магнитом привело к созданию оптической структуры источника синхротронного излучения четвертого поколения ЦКП “СКИФ” с горизонтальным эмиттансом  $\varepsilon_x = 72$  пм при энергии пучка 3 ГэВ, и умеренном периметре кольца 476 м с 16-тью длинными (6 м) прямолинейными промежутками для размещения вставных устройств — источников излучения. Оптические функции в прямолинейных промежутках оптимизированы как с точки

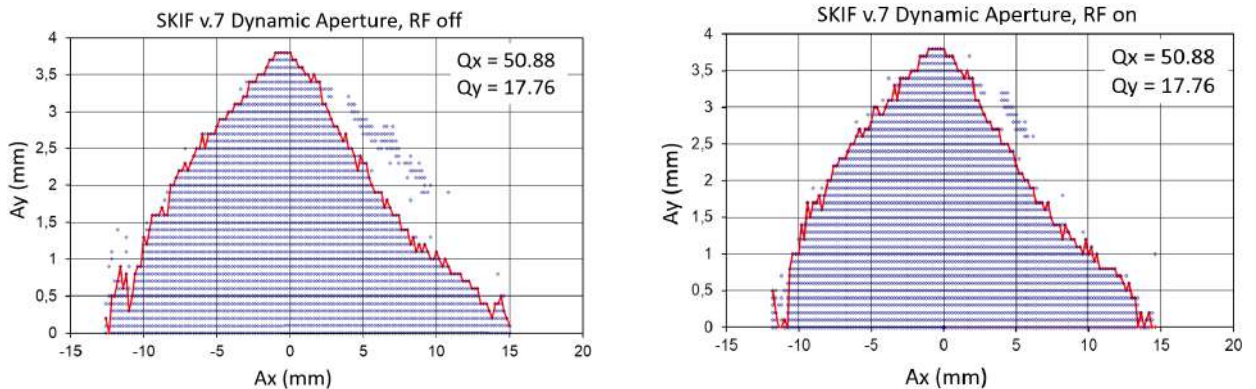


Рисунок 2.22 – Поперечная динамическая апертура ЦКП “СКИФ” без синхротронных колебаний (слева) и с синхротронными колебаниями (справа)

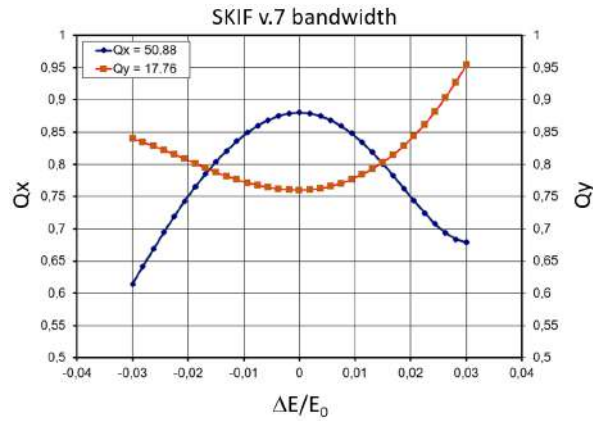


Рисунок 2.23 – Область устойчивости частицы с неравновесной энергией

зрения постановки сильнополевых сверхпроводящих многополюсных вигглеров (дисперсионная функция занулена, а вертикальная бета-функция мала), так и для обеспечения простой и надежной инжекции (достаточно большая горизонтальная бета-функция). Коррекция хроматизма и большие поперечная и продольная (энергетическая) апертуры достигаются всего двумя семействами идентичных секступольных линз. Дополнительные секступольные или октупольные линзы не требуются.

Отметим, что параметры магнитов, насчитанные выше и обеспечивающие все необходимые характеристики источника СИ ЦКП “СКИФ”, не являются труднодостижимыми — все магниты накопителя спроектированы и их производство идет полным ходом. Проектные параметры магнитных элементов приведены в таблице 2.6, а их фотографии показаны на рисунке 2.24

Таблица 2.6 – Основные параметры магнитных элементов накопителя ЦКП “СКИФ” для базовой структуры

Тип /число	$L$ , м	$\varphi^\circ$	$\rho$ , м	$B$ , Т	$K_1$ , м <sup>-2</sup>	$G$ , Т/м	$K_2$ , м <sup>-3</sup>	$S$ , Т/м
Дипольные магниты								
BD1/64	1.3	4.12	18.07	0.553	-0.791	-7.91		
BD2/32	0.47	1.245	21.62	0.526	-1.074	-10.74		
BM/32	0.69	2.079	19.01	0.526				
BP/16	0.148	1.74	4.87	2.05				
Квадрупольные магниты								
QD/32	0.3				-4.456	-44.56		
QF1/32	0.3				4.397	43.97		
QF2/32	0.15	-0.221	-38.84	-0.257	5.152	51.52		
QF4/32	0.15	-0.3	-28.66	-0.349	4.987	49.87		
Секступольные магниты								
SF1/32	0.15						231.309	2313.09
SD/160	0.25						-237.939	-2379.39
SF2/64	0.3						231.309	2313.09



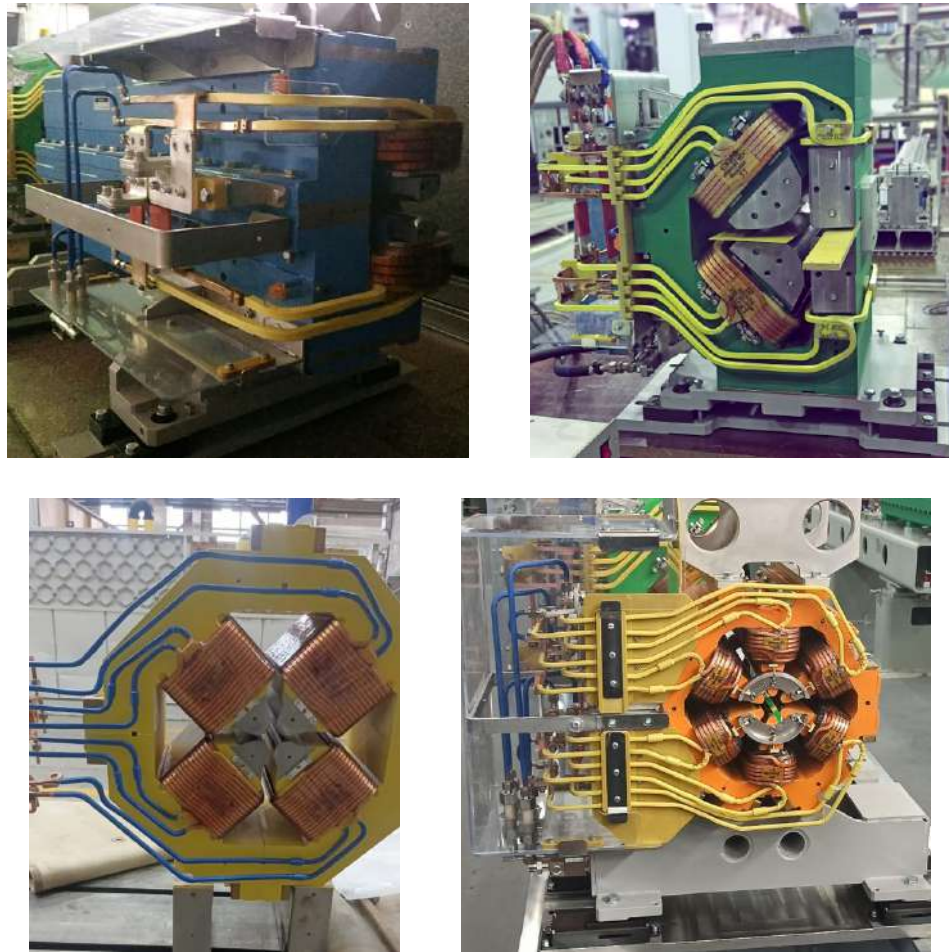


Рисунок 2.24 – Фотографии магнитов источника СИ ЦКП “СКИФ”: два диполя с отрицательным градиентом сверху, квадруполь и секступоль снизу

## Глава 3

Коллайдер Супер  $c - \tau$  фабрика

Изобретение новой схемы встречи пучков, названной крабовой перетяжкой (КП) [18], теоретически позволяет увеличить светимость в проектах новых электрон-позитронных коллайдеров на один – два порядка [19] при том, что основные параметры пучка (ток и длина сгустка, эмиттанс, энергетический разброс и т.д.) остаются на уровне достигнутых ранее. Название (по английски, Crab Waist) происходит от того, что сгустки электронов и позитронов встречаются под довольно большим углом (десятки миллирадиан), а линия минимума вертикальной бета-функции (перетяжка, waist) разворачивается в горизонтальной плоскости, так, что движение сгустка напоминает походку краба боком вперед. Такой разворот уменьшает связь мод колебаний частицы при взаимодействии с полем встречного сгустка и, тем самым, подавляет эффекты встречи.

Испытание схемы на коллайдер DAΦNE [26; 27] увеличило светимость в три раза и подтвердило принципы крабовой перетяжки. Ограничение дальнейшего увеличения светимости было связано с тем, что для структуры DAΦNE невозможно выполнить все условия КП (в частности, уменьшить большой горизонтальный эмиттанс).

Второй (и последний) пример реализации нового подхода столкновения электрон-позитронных пучков — это японский проект Super KEKB Factory [28; 128; 129]. Первоначально здесь удалось воплотить все ингредиенты новой схемы встречи кроме разворота линии минимума вертикальной бета-функции, поэтому и сам подход был назван не КП, а Nano-beam Scheme [28]. Развернуть перетяжку не позволяла форма тоннеля, доставшегося "в наследство" от предыдущего коллайдера KEKB Factory [130]. Когда после начала работы коллайдера стало ясно, что без КП не обойтись, такое преобразование было

найденно с использованием специальных секступолей в арках [131], а затем с помощью существующих (хроматических) секступолей [129], однако, ввиду своей, можно сказать, "случайности" (КП не оптимизировалась с самого начала) не удаётся реализовать все условия нового подхода.

Несмотря на существенные успехи, достигнутые японскими коллегами, например, вертикальная бета-функция в точке встречи была уменьшена до 0.8 мм (июнь 2022 года) [129] и стала в несколько раз меньше, чем длина сгустка, а пиковая светимость достигла рекордных значений  $\mathcal{L} = 4.71 \times 10^{34} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$  [20], проектные параметры за пять лет работы еще далеко не достигнуты: вертикальная бета-функция должна быть  $\beta_y^* = 0.3$  мм,  $\xi_y = 0.08$  (достигнуто 0.04), ток пучка 3.6 А (получено 1.3 А) и светимость планировалась  $\mathcal{L} = 8 \times 10^{35} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$  [28; 128].

В реальной жизни получение всех компонентов, необходимых для получения высокой светимости в схеме встречи КП, оказалось сложной задачей. Сильные крабовые и хроматические секступольные линзы уменьшают шестимерную динамическую апертуру, экстремально малая  $\beta_y^*$  в точке встречи требует размещения сверхпроводящих линз финального фокуса внутри детектора, большая интенсивность сгустков приводит к сильному внутрисгустковому рассеянию и малому времени жизни, росту фоновых событий, регистрируемых детектором и т.п.

Флагманским проектом электрон-позитронного коллайдера ИЯФ СО РАН является Супер  $c - \tau$  фабрика [29]. В этой главе описывается методика проектирования и моделирования двухкольцевого коллайдера со схемой встречи пучков типа КП, позволяющего получить максимальную пиковую светимость  $\mathcal{L} = 10^{35} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$  в диапазоне энергии пучков 2.5–3.5 ГэВ и  $3\text{--}4 \times 10^{34} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$  в диапазоне энергии пучков 1–2 ГэВ. Задача получения столь высокой светимости осложнена пожеланием физиков иметь возможность проводить эксперименты с продольно поляризованным пучком электронов, значительно расширяющим возможную научную программу.

## 3.1 Светимость для встречи под углом

### 3.1.1 Инвариантная светимость

Основной характеристикой коллайдеров является светимость, поэтому приведу общий вывод релятивистски инвариантной светимости независимый от схемы встречи [132].

В сопутствующей второму пучку системе координат (рисунок 3.1) число столкновений  $dN$  в объёме  $dV$  в течение времени  $dt$  составляет

$$dN = \sigma v_{rel} n_1 n_2 dV dt, \quad (3.1)$$

где  $\sigma$  – лоренц инвариантное сечение рассеяния,  $n_1$  и  $n_2$  – плотности частиц первого и второго сгустков соответственно,  $v_{rel}$  – скорость первого сгустка относительно второго, тоже лоренц инвариантная по определению. Число столк-

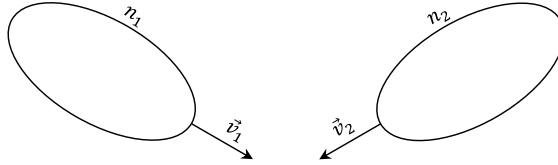


Рисунок 3.1 – Сталкивающиеся пучки

новений  $dN$  является инвариантной величиной, поэтому его можно искать в виде пригодном для любой системы отсчёта

$$dN = A \cdot n_1 n_2 dV dt, \quad (3.2)$$

где  $A = \sigma v_{rel}$ , так как  $dV dt$  есть лоренц инвариантная величина, то  $An_1 n_2$  тоже инвариант. Замечая, что плотность частиц в какой-то системе с лоренц фактором  $\gamma$  зависит от плотности  $n_0$  в сопутствующей системе как  $n = \gamma n_0$ , имею  $An_1 n_2 = inv$  и  $A\gamma_1 \gamma_2 = inv$ . Следовательно для двух частиц с четырёх-векторами  $P_{1,2} = \{E_{1,2}/c, \mathbf{p}_{1,2}\} = \{E_{1,2}/c, \gamma_{1,2} m_{1,2} \mathbf{v}_{1,2}\}$

$$A \frac{E_1 E_2}{c^2 P_1 P_2} = inv,$$

$c$  – скорость света, при этом скалярное произведение двух четырёх-векторов по определению инвариантно  $P_1 P_2 = E_1 E_2 / c^2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 = inv$ . В системе второго пучка  $\mathbf{p}_2 = 0$  и

$$A \frac{E_1 E_2}{c^2 P_1 P_2} = A \frac{E_1 E_2}{E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 c^2} = A = \sigma v_{rel},$$

следовательно для любой системы отсчёта

$$A = \sigma v_{rel} \frac{c^2 P_1 P_2}{E_1 E_2}. \quad (3.3)$$

В общем виде, произведение четырёх-импульсов составляет

$$P_1 P_2 = \frac{E_1 E_2}{c^2} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 = \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 c^2 \left( 1 - \frac{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}{c^2} \right), \quad (3.4)$$

а в системе второго пучка ( $\mathbf{p}_2 = 0$ )

$$P_1 P_2 = \frac{m_1 m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{rel}^2}{c^2}}}, \quad (3.5)$$

откуда получаю

$$v_{rel} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2}}{1 - \frac{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}{c^2}}, \quad (3.6)$$

где символ  $\times$  обозначает векторное произведение. Подставляя (3.6), (3.4) в (3.3), имею

$$A = \sigma c \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2}, \quad (3.7)$$

$$dN = \sigma c \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2} n_1 n_2 dV dt. \quad (3.8)$$

Светимостью  $\mathcal{L}$  однократной встречи пучков называют отношение полного числа столкнувшихся частиц к сечению

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{N}{\sigma} = \int dV dt n_1 n_2 \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2} \\ &= \int dV dct n_1 n_2 \sqrt{\left( 1 - \frac{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}{c^2} \right)^2 - \frac{1}{\gamma_1^2 \gamma_2^2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В циклических коллайдерах полученное выражение необходимо умножить на частоту обращения  $f_0$  и на количество сгустков  $N_b$ .

Для лобовой встречи  $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$  и светимость есть (точное и в ультрарелятивистском приближении  $v \approx c$ )

$$\mathcal{L} = \int n_1 n_2 2v dt dV = 2 \int n_1 n_2 c dt dV \quad (3.10)$$

Для встречи под углом  $2\theta$  и в приближении ультрарелятивистских пучков ( $\gamma_{1,2} \gg 1$ ) светимость составляет [133; 134]

$$\mathcal{L} = (1 + \cos(2\theta)) \int n_1 n_2 c dt dV. \quad (3.11)$$

### 3.1.2 Светимость для встречи под углом

Для встречи под углом (рисунок 3.2), каждый пучок имеет нормальное распределение в своей ускорительной системе координат  $\{x_{1,2}, s_{1,2}, y_{1,2}\}$ , которые связаны с лабораторной  $\{x, s, y\}$  как

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos(\theta) + s \sin(\theta), & x_2 &= x \cos(\theta) - s \sin(\theta), \\ y_1 &= y, & y_2 &= y, \\ s_1 &= -x \sin(\theta) + s \cos(\theta), & s_2 &= x \sin(\theta) + s \cos(\theta), \end{aligned} \quad (3.12)$$

Распределения пучков есть

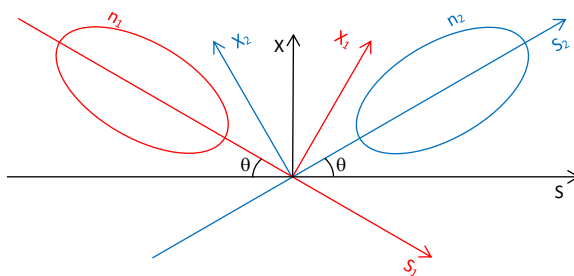


Рисунок 3.2 – Схема координат сталкивающихся пучков

$$n_1 = \frac{N_1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x(s_1) \sigma_y(s_1) \sigma_s} \times \exp \left[ -\frac{(x \cos(\theta) + s \sin(\theta))^2}{2\sigma_x^2(s_1)} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2(s_1)} - \frac{(-x \sin(\theta) + s \cos(\theta) - ct)^2}{2\sigma_s^2} \right], \quad (3.13)$$

$$n_2 = \frac{N_2}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x(s_2) \sigma_y(s_2) \sigma_s} \times \exp \left[ -\frac{(x \cos(\theta) - s \sin(\theta))^2}{2\sigma_x^2(s_2)} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2(s_2)} - \frac{(x \sin(\theta) + s \cos(\theta) + ct)^2}{2\sigma_s^2} \right], \quad (3.14)$$

где  $N_{1,2}$  – полное число частиц в соответствующем сгустке. Подставляя полученное распределение в (3.11) и последовательно вычисляя интегралы ( $dV = dx dy ds$ ) по  $dy$ ,  $dct$ , получаю

$$\mathcal{L} = \frac{(1 + \cos(2\theta)) N_1 N_2 \sqrt{2}}{8\pi^2} \int \frac{dx ds}{\sigma_x(s_1) \sigma_x(s_2) \sigma_s \sqrt{\sigma_y^2(s_1) + \sigma_y^2(s_2)}} \times \exp \left[ -\frac{(x \cos(\theta) - s \sin(\theta))^2}{2\sigma_x^2(s_2)} - \frac{(x \cos(\theta) + s \sin(\theta))^2}{2\sigma_x^2(s_1)} - \frac{s^2 \cos^2(\theta)}{\sigma_s^2} \right]. \quad (3.15)$$

Дальнейшее аналитическое интегрирование требует некоторых приближений, так как поперечные размеры пучков зависят от собственной продольной координаты  $s_{1,2}$ , которая есть функция лабораторных координат  $x$  и  $s$  (3.12)

$$\sigma_{x,y}^2(s_{1,2}) = \sigma_{1,2,x,y}^2 \left( 1 + \frac{s_{1,2}^2}{\beta_{1,2,x,y}^2} \right), \quad (3.16)$$

где индекс 1, 2 обозначает значение соответствующей величины в месте встречи первого или второго пучка, пучки могут иметь неодинаковые размеры и бета функции в месте встречи.

Первое приближение основано на том, что в месте встречи  $\beta_x \gg \sigma_s$ , (характерные величины  $\sigma_s \simeq 1$  см,  $\beta_x \sim 5$ – $100$  см) поэтому полагаю независимость горизонтального размера от азимута

$$\begin{cases} \sigma_x^2(s_1) = \text{const}(s) = \sigma_{1,x}^2, \\ \sigma_x^2(s_2) = \text{const}(s) = \sigma_{2,x}^2. \end{cases} \quad (3.17)$$

Второе приближение, основано на том, что  $\sigma_{1,2,x} \ll \sigma_s$ , тогда в сумме квадратов вертикальных размеров пренебрегаю малыми членами и имею

$$\sigma_y^2(s_1) + \sigma_y^2(s_2) = \sigma_{1,y}^2 + \sigma_{2,y}^2 + s^2 \cos^2(\theta) \left( \frac{\sigma_{1,y}^2}{\beta_{1,y}^2} + \frac{\sigma_{2,y}^2}{\beta_{2,y}^2} \right). \quad (3.18)$$

Эти предположения позволяют вычислить интеграл по  $dx$  в (3.15)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{N_1 N_2}{4\pi} \frac{2}{\sqrt{\sigma_{1,x}^2 + \sigma_{2,x}^2} \sqrt{\sigma_{1,y}^2 + \sigma_{2,y}^2}} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\pi}} \\ & \times \int d\tau \frac{\exp[-\tau^2 \cos^2(\theta) (1 + \varphi^2)]}{\sqrt{1 + \tau^2 \frac{\sigma_s^2}{\sigma_{1,y}^2 + \sigma_{2,y}^2} \cos^2(\theta) \left( \frac{\sigma_{1,y}^2}{\beta_{1,y}^2} + \frac{\sigma_{2,y}^2}{\beta_{2,y}^2} \right)}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где  $\tau = s/\sigma_s$ ,  $\varphi = \sqrt{2}\sigma_s \tan(\theta) / \sqrt{\sigma_{1,x}^2 + \sigma_{2,x}^2}$  – параметр Пивинского. Получившийся интеграл вычисляется с помощью модифицированной функции Бесселя нулевого порядка  $K_0(x)$  и в результате получаю выражение для светимости для встречи под углом с учётом изменения вертикального размера от продольной координаты (hour-glass effect)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{N_1 N_2}{4\pi} \frac{2}{\sqrt{\sigma_{1,x}^2 + \sigma_{2,x}^2} \sqrt{\sigma_{1,y}^2 + \sigma_{2,y}^2}} \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_s} \sqrt{\frac{\sigma_{1,y}^2 + \sigma_{2,y}^2}{\frac{\sigma_{1,y}^2}{\beta_{1,y}^2} + \frac{\sigma_{2,y}^2}{\beta_{2,y}^2}}} \\ & \times K_0 \left( \frac{(\sigma_{1,y}^2 + \sigma_{2,y}^2)(1 + \varphi^2)}{2\sigma_s^2 \left( \frac{\sigma_{1,y}^2}{\beta_{1,y}^2} + \frac{\sigma_{2,y}^2}{\beta_{2,y}^2} \right)} \right) \exp \left[ \frac{(\sigma_{1,y}^2 + \sigma_{2,y}^2)(1 + \varphi^2)}{2\sigma_s^2 \left( \frac{\sigma_{1,y}^2}{\beta_{1,y}^2} + \frac{\sigma_{2,y}^2}{\beta_{2,y}^2} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Если сталкивающиеся пучки имеют одинаковые соответствующие бета функции и размеры в месте встречи (обозначены индексом 0), то выражение для светимости упрощается

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \frac{r e^{\frac{r^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} K_0 \left( \frac{r^2}{2} \right), \quad (3.21)$$

где  $r = \beta_{0y} \sqrt{(1 + \varphi^2)} / \sigma_s$ . Если  $\beta_{0y} \gg \sigma_s$  (пренебрегаю hour-glass эффектом), то получится известное выражение [135]

$$\mathcal{L}_0 = \frac{N_1 N_2}{4\pi \sigma_{0x} \sigma_{0y} \sqrt{1 + \varphi^2}}. \quad (3.22)$$



График относительного изменения светимости от параметра  $r$  на рисунке 3.3 показывает, что при уменьшении бета функции в месте встречи относительная светимость падает, и при значении параметра  $r = 1$  достигает уровня 0.84 от максимально возможного значения. В области малых  $r$  светимость  $\mathcal{L} \propto \sqrt{r}$ , и уменьшение бета функции меньше оптимального значения равного длине области взаимодействия  $\beta_{0y} = \sigma_s / \sqrt{(1 + \varphi^2)}$  не целесообразно, хотя и максимально возможная светимость (3.22) при этом растёт.

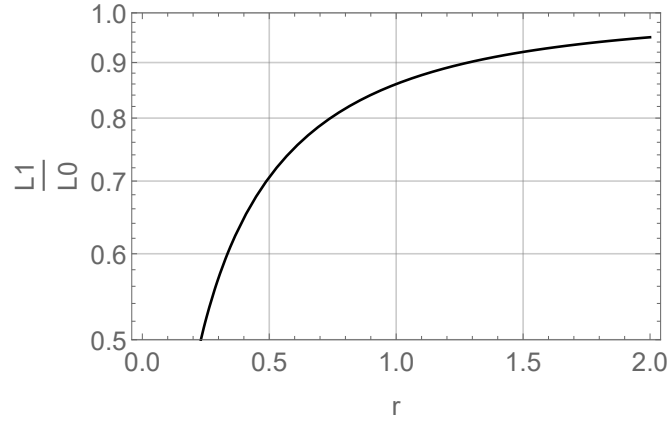


Рисунок 3.3 – Относительная светимость в зависимости от параметра  $r = \frac{\beta_{0y} \sqrt{1 + \varphi^2}}{\sigma_s}$

## 3.2 Сдвиг частоты от встречного пучка для встречи под углом

Гамильтониан описывающий движение частицы в поле встречного пучка получен в приложении E (E.10)

$$H(x, \sigma, y, p_x, p_\sigma, p_y; s) \approx -1 + U + \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2}, \quad (3.23)$$

где потенциал есть, в приближении  $\varphi = \sigma_s \tan \theta / \sigma_x \approx \sigma_s \theta / \sigma_x \gg 1$ ,

$$U = -\frac{Nr_e}{\pi^2} \int \frac{dk_x dk_y dk_s}{k_x^2 + k_y^2 + k_s^2} \exp \left[ -\frac{k_x^2 \sigma_x^2}{2} + ik_x(x + s2\theta) - \frac{k_y^2 \sigma_y^2}{2} + ik_y y - \frac{k_s^2 \gamma^2 \sigma_s^2}{2} + ik_s \gamma_1 (2s - \sigma) \right], \quad (3.24)$$

где  $r_e$  – классический радиус электрона, средние энергии пучков одинаковы.

Следуя теории возмущения (приложение В) сдвиг частоты в первом порядке теории возмущений, вычисляется как (В.31)

$$\Delta\nu_{x,y} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial j_{x,y}} \int \langle U \rangle_{\psi_y, \psi_x} ds, \quad (3.25)$$

где  $j_{x,y}$  – горизонтальное, вертикальное действие,  $\langle \rangle_{\psi_x, \psi_y}$  – обозначает усреднение по горизонтальным и вертикальным бетатронным фазам.

Зная зависимость бета функции и вертикального размера пучка от продольной координаты

$$\begin{aligned} \beta_y(s) &= \beta_{0y} \left( 1 + \frac{s^2}{\beta_{0y}^2} \right), \\ \sigma_y^2(s) &= \sigma_{0y}^2 \left( 1 + \frac{s^2}{\beta_{0y}^2} \right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где величины с индексом 0 обозначают значение соответствующего параметра в месте встречи,  $\sigma_{0,y} = \sqrt{\varepsilon_y \beta_{0y}}$ ,  $\varepsilon_y$  – вертикальный эмиттанс пучка, записываю координату частицы через переменные действия, фазы

$$y = \sqrt{2j_y \beta_y(s)} \cos \left( \psi_y + \arctg \left( \frac{s}{\beta_{0y}} \right) \right). \quad (3.27)$$

и разлагаю экспоненту из (3.24) в ряд по функциям Бесселя первого рода  $J_n(x)$

$$\begin{aligned} \exp[ik_y y] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(k_y \sqrt{2j_y \beta_y}) \exp(-in\psi_y) \\ &\times \exp \left[ -in \arctg \left( \frac{s}{\beta_{0y}} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

где  $i$  – комплексная единица. Аналогично поступаю и с координатой  $x$

$$\begin{aligned} \exp[ik_x x] &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(k_x \sqrt{2j_x \beta_x}) \exp(-im\psi_x) \\ &\times \exp \left[ -im \arctg \left( \frac{s}{\beta_{0x}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Усреднение по  $\psi_y, \psi_x$  в (3.25) уничтожит все члены с  $m \neq 0, n \neq 0$ , поэтому от всего ряда остаётся только один член с  $m = 0$  и  $n = 0$ . Заменяя

переменные как

$$v = k_x \sigma_x, \quad u = k_y \sigma_y, \quad t = k_s \gamma \sigma_s, \quad (3.30)$$

имею

$$\begin{aligned} \langle U \rangle_{\psi_x, \psi_y} = & -\frac{Nr_e}{\pi^2} \int \frac{dv du dt}{\sigma_x \sigma_y \gamma \sigma_s \left( \frac{v^2}{\sigma_x^2} + \frac{u^2}{\sigma_y^2} + \frac{t^2}{\gamma^2 \sigma_s^2} \right)} \exp \left[ -\frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{t^2}{2} \right. \\ & \left. + iv \frac{s2\theta}{\sigma_x} + it \frac{(2s - \sigma)}{\sigma_s} \right] J_0 \left( u \sqrt{\frac{2j_y}{\varepsilon_y}} \right) J_0 \left( v \sqrt{\frac{2j_x}{\varepsilon_x}} \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Разлагая функции Бесселя в ряд

$$J_0 \left( u \sqrt{\frac{2j_y}{\varepsilon_y}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n!} u^{2n} \left( \frac{j_y}{2\varepsilon_y} \right)^n, \quad (3.32)$$

полагая продольную координату  $\sigma = 0$  и используя приближение  $\sigma_x(s) = \text{const}$ , справедливое при  $\beta_{0x} \gg \sigma_s$ , получаю выражения для сдвига частот

$$\begin{aligned} \Delta\nu_y = & -\frac{Nr_e}{2\pi^3} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m+1}}{n!(n+1)!m!m!} \left( \frac{j_y}{2\varepsilon_y} \right)^n \left( \frac{j_x}{2\varepsilon_x} \right)^m \frac{1}{2\varepsilon_y} \\ & \times \int \frac{dv du dt ds u^{2n+2} v^{2m}}{\sigma_x \sigma_y \gamma \sigma_s \left( \frac{v^2}{\sigma_x^2} + \frac{u^2}{\sigma_y^2} + \frac{t^2}{\gamma^2 \sigma_s^2} \right)} \exp \left[ -\frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{t^2}{2} \right. \\ & \left. + iv \frac{s2\theta}{\sigma_x} + it \frac{2s}{\sigma_s} \right], \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \Delta\nu_x = & -\frac{Nr_e}{2\pi^3} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m+1}}{n!n!m!(m+1)!} \left( \frac{j_y}{2\varepsilon_y} \right)^n \left( \frac{j_x}{2\varepsilon_x} \right)^m \frac{1}{2\varepsilon_x} \\ & \times \int \frac{dv du dt ds u^{2n} v^{2m+2}}{\sigma_x \sigma_y \gamma \sigma_s \left( \frac{v^2}{\sigma_x^2} + \frac{u^2}{\sigma_y^2} + \frac{t^2}{\gamma^2 \sigma_s^2} \right)} \exp \left[ -\frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{t^2}{2} \right. \\ & \left. + iv \frac{s2\theta}{\sigma_x} + it \frac{2s}{\sigma_s} \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

### Вертикальный сдвиг частоты

Использование двух следующих предположений позволяет вычислить интегралы в (3.33): первое –  $\gamma \sigma_s \gg \sigma_x \gg \sigma_y$ , позволяет пренебречь в знаменателе

(3.33) членами  $v2/\sigma_x^2$  и  $t^2/\gamma^2\sigma_s^2$ ; второе –  $\sigma_y(s) = \text{const}$  на длине области взаимодействия (рисунок 3.5), справедливое при  $\beta_{0y} \gg \sigma_s/\sqrt{1+\varphi^2} \approx x/\theta$ . В итоге получаю в первом порядке теории возмущений сдвиг частоты

$$\begin{aligned} \xi_y(j_x, j_y) = \xi_{y,0} \times \exp \left[ -\frac{j_x}{2\varepsilon_x(1+\varphi^2)} \right] I_0 \left( \frac{j_x}{2\varepsilon_x(1+\varphi^2)} \right) \\ \times \exp \left[ -\frac{j_y}{2\varepsilon_y} \right] \left( I_0 \left( \frac{j_y}{2\varepsilon_y} \right) + I_1 \left( \frac{j_y}{2\varepsilon_y} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

где  $I_n(x)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда). При нулевых действиях сдвиг частоты составляет

$$\xi_y(0, 0) = \xi_{y,0} = \frac{Nr_e}{2\pi\gamma} \frac{\beta_{0y}}{\sigma_y\sigma_x\sqrt{1+\varphi^2}}, \quad (3.36)$$

что совпадает с [136]. Так как вычисления делались в первом порядке теории возмущения, то приведу выражение для сдвига частоты с точностью до первого порядка по действиям

$$\xi_y(j_x, j_y) = \xi_{y,0} \left( 1 - \frac{j_y}{4\varepsilon_y} - \frac{j_x}{2\varepsilon_x(1+\varphi^2)} \right). \quad (3.37)$$

Использование первого предположения без учёта второго, и выбор нулевых действий позволяет вычислить зависимость сдвига частоты с учётом hour-glass эффектом

$$\xi_y = \xi_{y,0} \times \frac{r e^{r^2}}{\sqrt{2\pi}} (K_0(r^2) + K_1(r^2)), \quad (3.38)$$

$r = \beta_{0y}\sqrt{(1+\varphi^2)} / \sigma_s$ ,  $K_n(x)$  – функция Бесселя второго рода (функция Макдональда). График относительной сдвига частоты в зависимости от параметра  $r$  показан на рисунке 3.4, и при значении  $r = 1$  сдвиг частоты за счёт эффекта hour-glass составляет  $1.1\xi_{y,0}$ . В области малых  $r$  относительный сдвиг частоты  $\xi_y / \xi_{y,0} \propto 1 / r$ , и уменьшение вертикальной бета функции меньше оптимального значения  $\beta_{0y} = \sigma_s / \sqrt{(1+\varphi^2)}$  приводит к значительному увеличению сдвига частоты, существенному отличию от численного моделирования и, следовательно, требует учёта следующих порядков теории возмущений.

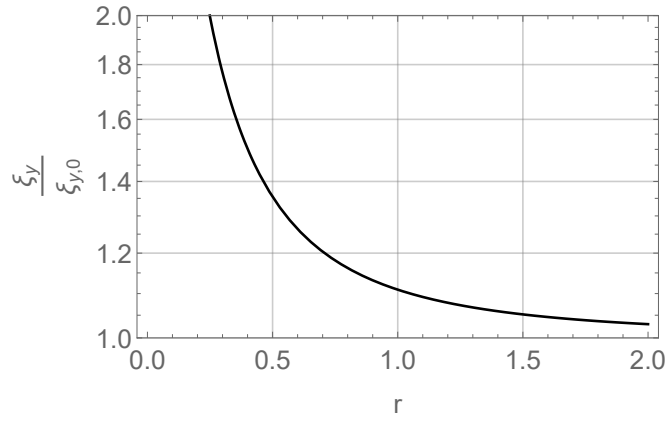


Рисунок 3.4 – Относительный сдвиг частоты в зависимости от параметра  $r = \frac{\beta_{0y}\sqrt{1+\varphi^2}}{\sigma_s}$

### Горизонтальный сдвиг частоты

При вычислении горизонтального сдвига частоты в знаменателе (3.33) можно пренебречь только членом  $t^2/\gamma^2\sigma_s^2$ , иначе интеграл становится расходящимся. Второе предположение и постоянстве вертикального размера на длине области взаимодействия  $\sigma_y(s) = const$  позволяет вычислить интегралы, а результат разложить до первого порядка по степеням отношения  $\sigma_y/\sigma_x$ .

В первом порядке теории возмущения горизонтальный сдвиг частоты составляет

$$\begin{aligned}
 \xi_x(j_x, j_y) = & \xi_{x,0} \frac{1}{\left[1 - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}\right]} \exp\left[-\frac{j_x}{\varepsilon_x(1+\varphi^2)}\right] \\
 & \times \left[1 - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \frac{1}{3\varepsilon_x\varepsilon_y(1+\varphi^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{j_y}{2\varepsilon_y} + \frac{j_x}{2\varepsilon_x(1+\varphi^2)}\right]\right. \\
 & \times \left(\left(2j_y + 3\varepsilon_y\right)I_0\left(\frac{j_y}{2\varepsilon_y}\right) + \left(2j_y + \varepsilon_y\right)I_1\left(\frac{j_y}{2\varepsilon_y}\right)\right) \\
 & \left. \times \left(\left(\varepsilon_x(1+\varphi^2) - j_x\right)I_0\left(\frac{j_x}{2\varepsilon_x(1+\varphi^2)}\right) + j_x I_1\left(\frac{j_x}{2\varepsilon_x(1+\varphi^2)}\right)\right)\right]
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

где при нулевых действиях сдвиг частоты составляет

$$\xi_x(0, 0) = \xi_{x,0} = \frac{Nr_e}{2\pi\gamma} \frac{\beta_x}{\sigma_x^2(1+\varphi^2)} \left[1 - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}\right], \tag{3.40}$$

что совпадает с [136] при  $\sigma_x \gg \sigma_y$ .

### 3.3 Встреча в схеме крабовой перетяжки

В основе встречи по схеме крабовой перетяжки лежат три принципа [19]. Для понимания этих принципов необходимы выражения для светимости  $\mathcal{L}$  (3.22), вертикального  $\xi_y$  (3.36) и горизонтального  $\xi_x$  (3.40) параметров встречи [137; 138]:

$$\mathcal{L} \propto \frac{N\xi_y}{\beta_y^*}, \quad \xi_y \propto \frac{N\beta_y^*}{\sigma_x^*\sigma_y^*\sqrt{1+\varphi^2}}, \quad \xi_x \propto \frac{N}{\epsilon_x(1+\varphi^2)}, \quad (3.41)$$

где  $N$  — это число частиц в сгустке,  $\beta_y^*$  — вертикальная бета функция в месте встречи (IP),  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$  и  $\sigma_z$  — горизонтальный, вертикальный и продольный размеры пучка соответственно,  $\varphi = (\sigma_z/\sigma_x^*) \tan(\theta)$  — параметр Пивинского [139],  $\theta$  — половинный угол встречи.

Первый принцип — это большой угол Пивинского, для чего требуются длинные сгустки, маленький горизонтальный эмиттанс и большой угол встречи. Этот принцип уменьшает вертикальный параметр встречи и размер области пересечения (жёлтый ромб на рисунке 3.5), поэтому, желая сохранить величину вертикального параметра встречи, увеличивают число частиц в сгустке и таким образом увеличивают светимость. Второй принцип — это уменьшение вертикальной бета-функции до размеров половины длины области взаимодействия, а не длины сгустка. Это опять уменьшает вертикальный параметр встречи и увеличивает светимость. Третий принцип — это использование краб секступолей, установленных на определённых набегах фазы от IP  $\Delta\mu_x = \pi \cdot m$ ,  $\Delta\mu_y = \pi \cdot (2n + 1)/2$ . Секступоли сдвигают перетяжку бета функции вдоль оси встречного пучка (рисунок 3.5) и подавляют бетатронные и синхро-бетатронные резонансы [140—143]. Интегральная сила секступолей, находящихся в точке с вертикальной  $\beta_y$  и горизонтальной  $\beta_x$  бета функциями

$$K2L[m^{-2}] = \pm \frac{1}{2\theta\beta_y^*\beta_y} \sqrt{\frac{\beta_x^*}{\beta_x}}, \quad (3.42)$$

где оба секступоля имеют силу разных знаков. Такое объединение секступолей в

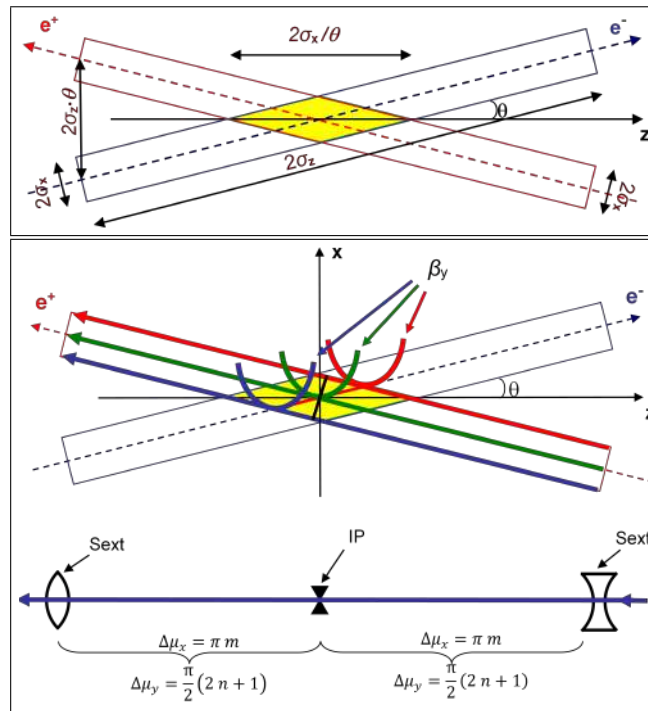


Рисунок 3.5 – Схема встречи по краевой перетяжке

паре не имеет геометрических aberrаций второго порядка, что обещает неумножение динамической апертуры.

Итак, требования для схемы краевой перетяжки:

1. угол пересечения,
2. длина пучка, горизонтальный размер и угол пересечения должны обеспечить большой угол Пивинского,
3. вертикальная функция сравнима с размером области пересечения,
4. пара секступолей на определенном набеге бетатронной фазы от IP с определенной силой.

У такой схемы встречи существуют трудности:

1. маленькая бета-функция и желание уменьшить бета-функции в линзах финального фокуса (ФФ), несмотря на угол пересечения, может потребовать двухапертурных квадруполей с большим градиентом,

2. сильные ФФ квадруполи с большой бета-функцией являются источниками большого хроматизма, компенсация которого требует специальных хроматических секций,
3. хроматические секции и ФФ квадруполи возбуждают большой нелинейный хроматизм, ограничивающий энергетический акцептанс кольца,
4. маленький горизонтальный эмиттанс достигается при большом хроматизме всего кольца, коррекция которого осуществляется сильными секступолями, уменьшающими динамическую апертуру,
5. крабовые секступоли требуют специального места с правильными набегам фаз относительно IP и правильными величинами бета-функций, для уменьшения силы секступолей, что может быть невозможным или очень трудным в случае модернизации существующего коллайдера,
6. интерференция крабовых секступолей с краями квадруполей финального фокуса и хроматических секций тоже может ограничивать динамическую апертуру [55].

### 3.4 Ограничение динамической апертуры краб секступолями

В работе [55] приведён подробный обзор мест встречи в существующих и проектируемых коллайдерах с крабовой перетяжкой: DAΦNE [26; 27] и SuperKEKB [130], SuperB в Италии [21], Супер  $c - \tau$  фабрика в Новосибирске [29], FCC-ee в ЦЕРН [22]. В этом списке DAΦNE — единственный коллайдер, который не имеет значительного уменьшения динамической апертуры из-за крабовых секступолей. Характерный примером уменьшения динамической апертуры является SuperKEKB, динамическая апертура которого для разных сил крабовых секступолей приведена на рисунке 3.6.



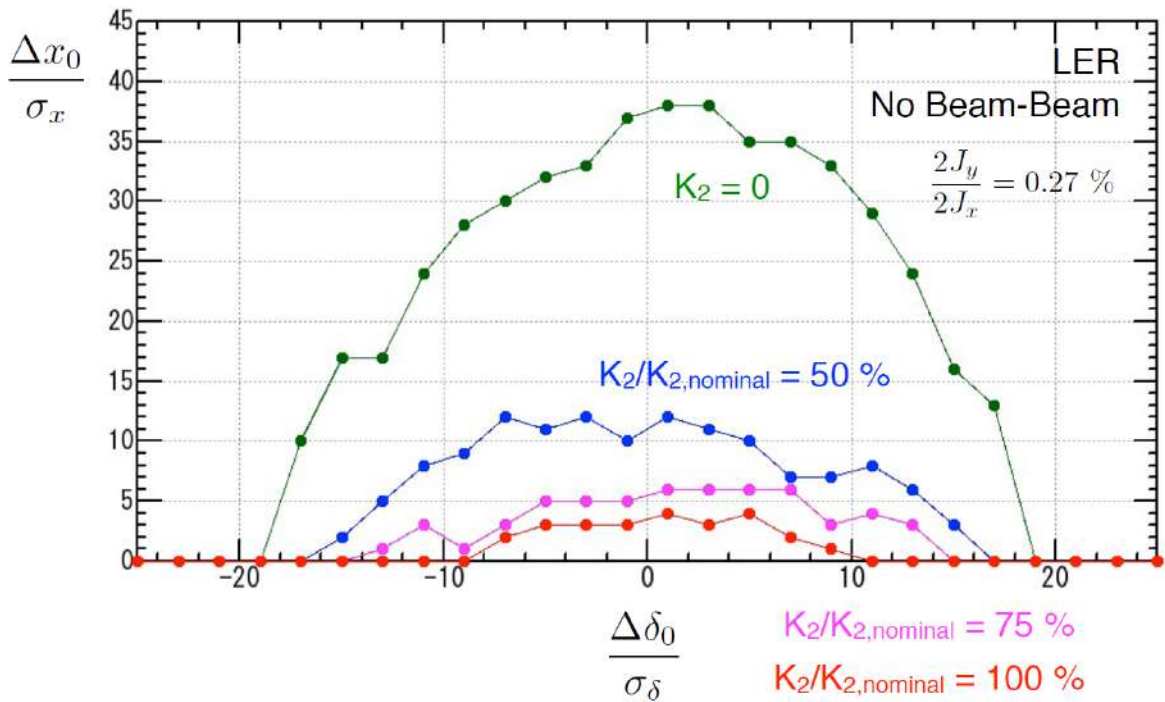


Рисунок 3.6 – Динамическая апертура SuperKEKB с различной силой краевых секступолей

Экстремально малая вертикальная бета-функция в точке встречи (и очень большая в линзах финального фокуса) Супер  $c - \tau$  фабрики приводит к тому, что нелинейное возмущение вертикального движения частиц на этом участке существенно выше, чем горизонтального. Для его оценки и оптимизации желательно найти какой-нибудь параметр, который можно было бы вычислять локально не прибегая к численному моделированию движения частицы во всем кольце. На наш взгляд таковым параметром может быть сдвиг бетатронной частоты в зависимости от вертикального действия  $J_y$  [144; 145]. Достоинством такого параметра является простота его вычисления: в первом порядке это интеграл по участку орбиты. Недостатком — отсутствие прямой связи с размером динамической апертуры. Даже если коэффициенты первого порядка в (1.118) малы, более высокие порядки могут ограничивать динамическую апертуру. Напомним, что источников нелинейности в промежутке встречи несколько — это непараксиальность движения, краевые поля линз финального фокуса, хроматические и краевые секступоли, нелинейные ошибки поля магнитов и т.д.

Другой важной характеристикой оптической структуры места встречи,

которая влияет на энергетическую динамическую апертуру и может быть вычислена локально, является хроматизм, произведённый финальными дефокусирующими квадрупольями.

Сравнение коэффициентов зависимости частоты от действия (таблица 3.1) для кинематического члена (индекс  $k$ , раздел 1.6), для краевых полей (индекс  $f$ , раздел 1.6), для пары хроматических секступолей (индекс  $s$ , раздел 1.5) показывает, что SuperKEKB имеет наибольшие коэффициенты для кинематического члена и для краевого поля квадруполья. Причиной уменьшения динамической апертуры тогда является интерференция нелинейных толчков крабового секступоля, кинематического члена и краевого поля квадруполья. Для понимания

Таблица 3.1 – Сравнение коэффициентов зависимости частоты от действия

	$\mu'_y$	$\alpha_{yy}^k [m^{-1}]$	$\alpha_{yy}^f [m^{-1}]$	$\alpha_{yy}^s [m^{-1}]$
ДФНЕ	-61	694	218	
SuperKEKB	-5400	$1.8 \times 10^6$	$9.8 \times 10^6$	$-7 \times 10^5$
SuperB	-1060	$1 \times 10^6$	$2.8 \times 10^5$	$-5.4 \times 10^6$
СТau	-700	$1.3 \times 10^5$	$7.7 \times 10^5$	$-7.2 \times 10^5$
FCC-2	-2800	$4.5 \times 10^5$	$1.9 \times 10^5$	$-1.2 \times 10^7$

механизма этой интерференции в [55] было вычислено преобразование координат от левого до правого крабового секступоля (рисунок 3.5) с точностью до 4-го порядка. Используя обозначения  $V_{ijklm}$  для коэффициентов преобразования координат вектора  $z = \{x, p_x, y, p_y\}$  ( $z_i = V_{ijklm} z_{j,0} z_{k,0} z_{l,0} z_{m,0}$ ), сравнение величин коэффициентов приведено в таблице 3.2. Два проекта Супер  $s - \tau$  фабрика (2011) и SuperKEKB, где уменьшение динамической апертуры велико, имеют наибольшие коэффициенты  $V_{11133}$  и  $V_{13333}$ . Это позволяет предположить, что интерференция влияния крабовых секступолей и краевого поля линзы, приводит к увеличению коэффициентов нелинейного преобразования от первого секступоля до второго и уменьшает динамическую апертуру. Прове-

Таблица 3.2 – Сравнение коэффициентов преобразования координат для различных проектов

	$V_{11111}[m^{-3}]$	$V_{11133}[m^{-3}]$	$V_{13333}[m^{-3}]$
DAΦNE	-16500	$-5.5 \times 10^4$	$6.8 \times 10^3$
SuperKEB	-496	$-1.2 \times 10^6$	$1.2 \times 10^6$
SuperB	-980	$-6.5 \times 10^5$	$6.5 \times 10^5$
CTau	-1800	$-2.6 \times 10^6$	$2.6 \times 10^6$
FCC-2	-60	$-9.3 \times 10^3$	$9.4 \times 10^3$

дённый анализ показал, что увеличение  $\beta_y$  в крабовом секступоле уменьшает большинство коэффициентов нелинейного преобразования. И хотя невозможно по величине локального преобразования координат сделать однозначный вывод о размере динамической апертуры, но можно предположить, что уменьшение размера области "нелинейности" увеличивает размер области линейного движения, а, следовательно, благотворно сказывается и на динамической апертуре.

Для проверки это утверждения была сделана новая структура FCC-ее с увеличенной вертикальной бета функцией в крабовом секступоле, также были изменены и длины квадрупольей и расстояние до места встречи (по другим причинам). Сравнение старой (FCC-2) и новой структур (FCC-3) FCC приведено в таблице 3.3, динамические апертуры сравнены на рисунке 3.7.

Наблюдённое уменьшение коэффициентов нелинейного преобразования и увеличение динамической апертуры с включённым крабовым секступолем более чем в пять раз, дало принципы построения промежутка встречи коллайдера с крабовой перетяжкой. Эти принципы использовались для оптимизации Супер  $c - \tau$  фабрики в Новосибирске.

Таблица 3.3 – Сравнение изменений в структурах FCC-ee

	FCC-2	FCC-3
$\beta_x[m]$	42	16
$\beta_y[m]$	835	2086
$L^*[m]$	2	2.9
$L_q[m]$	3.6	1.8
$V_{11133}[m^{-3}]$	-9349	-1874
$V_{13333}[m^{-3}]$	9396	1878

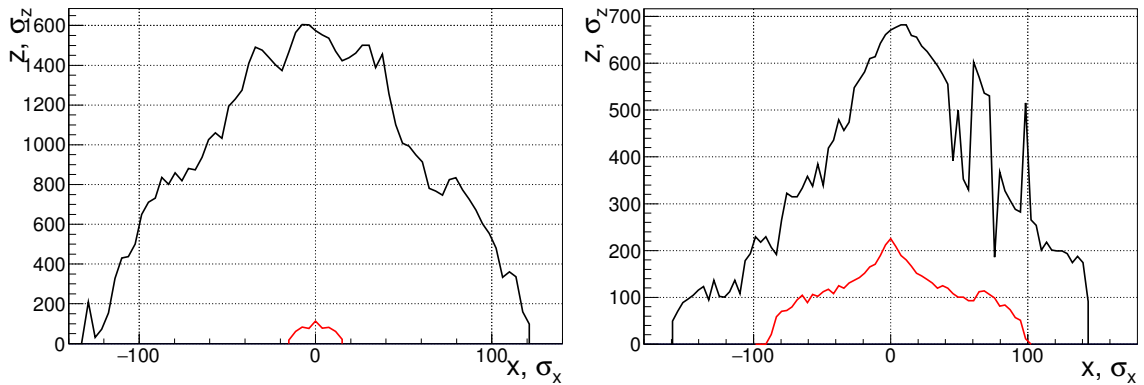


Рисунок 3.7 – 4-х мерная динамическая апертура двух вариантов структур FCC (нелинейное преобразование арок заменено линейным), слева — старый вариант (2016), справа — новый (2016), чёрная линия — крабовые секступоли выключены, красная — включены

### 3.5 Супер $s$ - $\tau$ фабрика

Первый концептуальный проект Супер  $s$  –  $\tau$  фабрики в ИЯФ СО РАН был опубликован в 2010 [29; 146]. За прошедшее время проект был существенно изменён по желанию физиков:

1. увеличена максимальная энергия пучка с 2.5 ГэВ до 3.5 ГэВ с целью изучения XYZ состояний [147; 148],
2. увеличена минимальная энергия пучка с 1 ГэВ до 1.5 ГэВ (работа с энергией пучка ниже 1.5 ГэВ возможна, но не является приоритетной при оптимизации параметров пучка),

3. уменьшено число сибирских змеек с пяти до трёх, при этом степень продольной поляризации пучка уменьшилась незначительно, а динамические параметры пучка существенно улучшились,
4. уменьшено число вигглеров-затухателей, так как они вносили сильное возмущение,
5. более реалистично спроектирован промежуток встречи, включая сверхпроводящие линзы финального фокуса (ФФ), соленоиды и т.д., максимальный градиент линз ФФ уменьшен с 100 Т/м до 40 Т/м, что существенно упростило конструкцию линз,
6. проведена работа по увеличению динамической апертуры и Тушековско-го времени жизни пучка для токов, обеспечивающих заданную светимость.

В результате проделанной работы концептуально решены все основные проблемы создания Супер  $s-\tau$  фабрики на энергиях выше 2 ГэВ [50], для меньших энергий осталась проблема получения адекватной динамической апертуры, которая позволила бы достигнуть времени жизни пучка (с учётом внутрисгусткового рассеяния) больше 300 с, требуемого для достижения светимости в  $10^{35} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$  при имеющихся возможностях инжекционного комплекса.

### **3.5.1 Анализ источников нелинейного возмущения для Супер $s-\tau$ фабрики**

Причиной уменьшения области устойчивого движения частиц в коллайдерах с методом встречи по схеме крабовой перетяжки (КП) является комбинация различных сильных нелинейных эффектов. Крабовые секступоли, секступоли коррекции хроматизма (места встречи и поворотных арок), краевые поля линз финального фокуса, кинематическая нелинейность, нелинейные ошибки поля магнитных элементов и т.д. Моделирование с помощью PTC MAD-X [106]

показывает, что трудно выделить какой-то один вид возмущения, компенсация которого может однозначно решить проблему с динамической апертурой.

Для уменьшения влияния мощных секступольных линз широко используется приём, когда они организовываются в пары (тройки и т.д.), разделенные правильным оптическим преобразованием (параграф 1.5). При этом для тонких линз за пределами такой системы исчезают все нелинейные aberrации, а для толстых — квадратичные. Именно так организованы все сильные секступоли в Супер  $s - \tau$  фабрик (в арках — перемежающиеся). Октуполи в промежутке встречи тоже собраны в пары.

Для примера на рисунке 3.8 приведена 4-х мерная динамическая апертура (ДА) частиц с нулевым отклонением по энергии для различных источников нелинейного возмущения. Исключение краевых полей линз финального фокуса (FRINGE=0, жёлтая кривая) существенно увеличивает вертикальную апертуру, но не сказывается на горизонтальной. Выключение краевых секступолей умеренно увеличивает и горизонтальную, и вертикальную апертуру (CRAB=0, зелёная кривая). Только секступоли арок (остальные нелинейности занулены) дают большую вертикальную апертуру и умеренно увеличивают горизонтальную (ARC=0, красная кривая). Самая большая ДА, когда всё выключено, определяется большой вертикальной угловой расходимостью в точке встречи (малая вертикальная бета-функция), которая ограничивает применение параксиального приближения. Даже с учётом ликвидации квадратичных aberrаций ДА не очень велика ( $20\sigma_x \times 80\sigma_y$ ). Необходимо отметить, что разложение полной апертуры на “элементарные апертуры” от различных источников не является правильным, поскольку работает интерференция различных нелинейностей, которую нельзя свести к суммарному действию отдельных. Например, слабая кинематическая нелинейность нарушает компенсацию сильных краевых секступолей слева и справа от точки встречи, и их совместное действие оказывается значительным (жёлтая и красная кривые на рисунке 3.8). Такая же картина наблюдается, когда исследуется шестимерная ДА

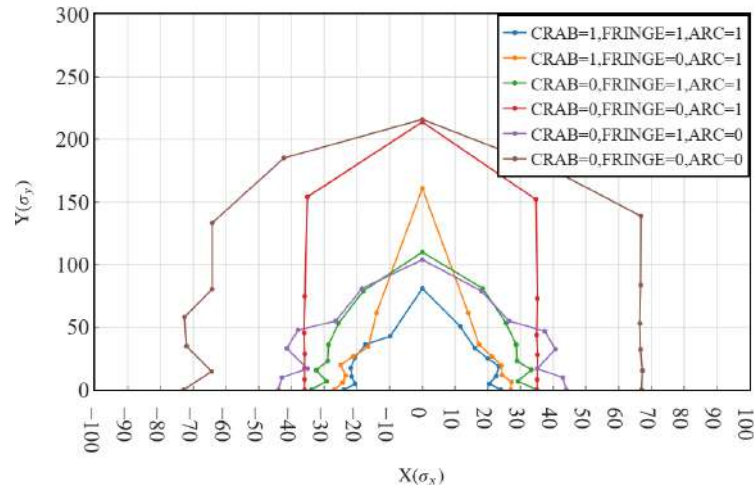


Рисунок 3.8 – Поперечная динамическая апертура в Супер  $c - \tau$  фабрике (v. 68) частиц с нулевым отклонением по энергии (4d трекинг) для различных комбинаций нелинейностей: CRAB, FRINGE и ARC — статусы крабового секступоля, краевых полей линз ФФ и регулярных секступолей в арках соответственно

(рисунок 3.9): хроматизм оптических функций для частицы с отклоненным импульсом приводит к тому, что взаимная компенсация сильных секступольных линз пропадает, и апертура резко уменьшается.

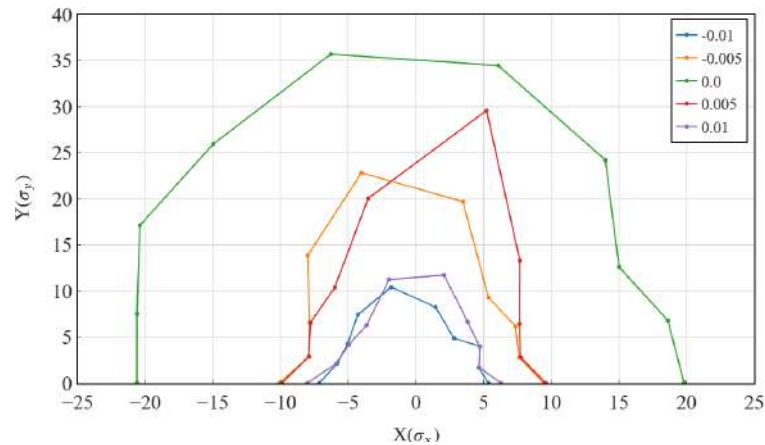


Рисунок 3.9 – Поперечная апертура (6d трекинг) для различных начальных отклонений по энергии

Аналитически оценить размер динамической апертуры от различных источников трудно. Однако если все-таки необходимо оценить вклад в нелинейное возмущение от различных источников, можно воспользоваться достаточно простой оценкой величины нелинейного сдвига бетатронных частот в первом

порядке теории возмущений

$$\begin{aligned}\Delta\nu_x &= \alpha_{xx}j_x + \alpha_{xy}j_y, \\ \Delta\nu_y &= \alpha_{yx}j_x + \alpha_{yy}j_y.\end{aligned}\tag{3.43}$$

Конечно, это весьма качественный показатель, но лучше, чем ничего. Его преимущество, что он достаточно просто вычисляется, если известен возмущенный гамильтониан движения.

Для наглядности, вместо коэффициентов  $\alpha_{(x,y)(x,y)}$ , удобнее использовать сдвиг бетатронной частоты  $\Delta\nu_{(x,y)(x,y)}$ , вычисленный при величинах действия  $2j_{x,y} = 20^2\varepsilon_{x,y}$ , соответствующих амплитудам бетатронных колебаний  $20\sigma_{x,y}$ , используемые эмиттансы Супер  $c - \tau$  фабрики составляют  $\varepsilon_x = 10.6 \times 10^{-9}$  м,  $\varepsilon_y = 53 \times 10^{-12}$  м при энергии пучка  $E_0 = 3.5$  ГэВ.

### Кинематический член

Нарушение параксиальности рассмотрено в параграфе 1.6, оценки коэффициентов для сдвига частот составляют

$$\alpha_{xx} = \frac{3}{16\pi} \oint \gamma_x^2 ds \approx \frac{3}{16\pi} \frac{2 \left( L^* + \frac{L_q}{2} \right)}{\beta_{0x}^2},\tag{3.44a}$$

$$\alpha_{xy} = \alpha_{yx} = \frac{1}{8\pi} \oint \gamma_x \gamma_y ds \approx \frac{1}{8\pi} \frac{2 \left( L^* + \frac{L_q}{2} \right)}{\beta_{0x} \beta_{0y}},\tag{3.44b}$$

$$\alpha_{yy} = \frac{3}{16\pi} \oint \gamma_y^2 ds \approx \frac{3}{16\pi} \frac{\left( L^* + \frac{L_q}{2} \right)}{\beta_{0y}^2},\tag{3.44c}$$

где  $L^* = 0.9$  м – расстояние от места встречи до края линзы,  $L_q = 0.5$  м – длина линзы,  $\beta_{0x} = 0.1$  м,  $\beta_{0y} = 1$  мм. Получившиеся сдвиги частот только для места встречи (IP) и для всего кольца приведены в таблице 3.4. Наибольшую величину имеет перекрёстный сдвиг частоты  $\Delta\nu_{yx} \approx 0.014$ , то есть зависимость вертикальной частоты от горизонтальных колебаний, другие существенно меньше. При этом только  $\Delta\nu_{yy}$  определяется длиной места встречи, остальные создаются всем кольцом.



Таблица 3.4 – Сдвиги частот от кинематического члена при  $2j_x = 20^2\varepsilon_x$ ,  $2j_y = 20^2\varepsilon_y$ 

	$\Delta\nu_{xx}$	$\Delta\nu_{xy}$	$\Delta\nu_{yx}$	$\Delta\nu_{yy}$
IP	$6 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-5}$	$4 \times 10^{-3}$	$2.9 \times 10^{-3}$
Ring	$4 \times 10^{-3}$	$7 \times 10^{-5}$	$14 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-3}$

### Краевые поля финальных линз

Формулы для сдвига частот приведены в параграфе 1.6. В таблице 3.5 приведено сравнение вклада в сдвиг частоты линз финального дублета со вкладом всех линз кольца. Замечаю, что сдвиг частоты от краевых полей линз создаётся в основном финальными линзами, и наибольшее значение имеет перекрёстный член  $\Delta\nu_{yx} \approx 0.079$ , который примерно в пять раз больше, чем аналогичный вклад кинематического члена.

Таблица 3.5 – Сдвиги частот от краевых полей линз при  $2j_x = 20^2\varepsilon_x$ ,  $2j_y = 20^2\varepsilon_y$ .

	$\Delta\nu_{xx}$	$\Delta\nu_{xy}$	$\Delta\nu_{yx}$	$\Delta\nu_{yy}$
дублет ФФ	$5.2 \times 10^{-3}$	$3.7 \times 10^{-4}$	$7.4 \times 10^{-2}$	$4.3 \times 10^{-3}$
Все квадруполи	$6.7 \times 10^{-3}$	$3.9 \times 10^{-4}$	$7.9 \times 10^{-2}$	$5.6 \times 10^{-3}$

Раскладывая выражение для  $\Delta\nu_{x,y}$  (1.130) на четыре края финального дублета квадруполей (рисунок 3.10), замечаю, что вклад, создаваемый внутренними краями линз (второй и третий) (3.45), на два порядка больше вкладов от первого и четвёртого краёв.

$$\alpha_{yx}(Q0) \approx \underbrace{\frac{K_{1,Q0}}{8\pi} (\alpha_{1,y}\beta_{1,x} - \alpha_{1,x}\beta_{1,y})}_{11} - \underbrace{\frac{K_{1,Q0}}{8\pi} (\alpha_{2,y}\beta_{2,x} - \alpha_{2,x}\beta_{2,y})}_{-9487} \quad (3.45a)$$

$$\alpha_{yx}(Q1) \approx \underbrace{\frac{K_{1,Q1}}{8\pi} (\alpha_{3,y}\beta_{3,x} - \alpha_{3,x}\beta_{3,y})}_{6966} - \underbrace{\frac{K_{1,Q1}}{8\pi} (\alpha_{4,y}\beta_{4,x} - \alpha_{4,x}\beta_{4,y})}_{-235} \quad (3.45b)$$

Это наблюдение разрешает оптимизацию длин квадруполей и расстояния между ними. Невозможно уменьшить  $L^*$  (хотя это и желательно), из-за требований

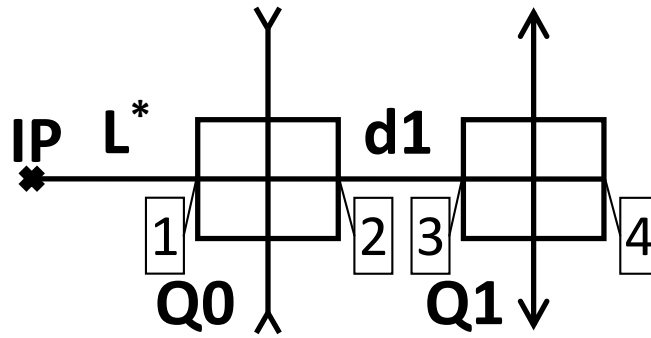


Рисунок 3.10 – Схема финального дублета

детектора и геометрических размеров линзы  $Q0$ , поэтому это расстояние не менялось. В таблица 3.6 приведены сдвиги частот, градиенты и вклады в хроматизм для трёх вариантов финального дублета (оба дублета, симметричные относительно места встречи). Первая колонка (49\_5) показывает начальную

Таблица 3.6 – Оптимизация финального дублета, для уменьшения нелинейного сдвига частот от краевых полей линз при  $2j_x = 20^2 \varepsilon_x$ ,  $2j_y = 20^2 \varepsilon_y$

Структура	49_5	54_1	55_1
$L(Q0, d1, Q1)$ , м	0.2, 0.3, 0.3	0.5, 0.44, 0.5	0.5, 0.45, 0.5
$G(Q0, Q1)$ , Т/м	-95, 43	-31, 18	-36, 20
$\xi_x, \xi_y$	-10, -203	-16, -218	-16, -218
$\beta_x^*/\beta_y^*$ , см	10/0.1		
$\Delta\nu_{xx} \ \Delta\nu_{xy}$ $\Delta\nu_{yx} \ \Delta\nu_{yy}$	$5.3 \times 10^{-3} \ 7.1 \times 10^{-4}$ $1.5 \times 10^{-1} \ 1.5 \times 10^{-2}$	$6 \times 10^{-3} \ 4.4 \times 10^{-4}$ $8.8 \times 10^{-2} \ 5.6 \times 10^{-3}$	$5.2 \times 10^{-3} \ 3.7 \times 10^{-4}$ <b><math>7.4 \times 10^{-2} \ 4.3 \times 10^{-3}</math></b>

структуру, с наиболее короткими квадрупольными, расположенными как можно ближе друг к другу для уменьшения хроматизма, но перекрёстный сдвиг частоты  $\Delta\nu_{yx} = 0.15$  при  $2j_x = 20^2 \varepsilon_x$  оказался фатальным для ДА. Третья колонка (структура 55\_1) обладает длинными квадрупольными, большим промежутком между ними, но сдвиг частоты в два раза меньше  $\Delta\nu_{yx} = 0.074$ . Сравнение четырёхмерных апертур для трёх структур приведено на рисунке 3.11; структура 55\_1 обладает наибольшей динамической апертурой, что подтверждает правильность оптимизации.

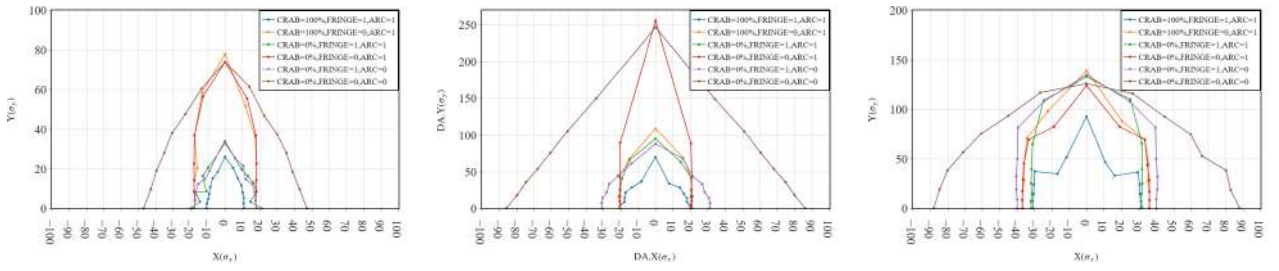


Рисунок 3.11 – Поперечная апертура частиц с нулевым отклонением по энергии (4d трекинг) для различных комбинаций нелинейностей: CRAB, FRINGE и ARC – статусы крабового секступоля, краевых полей линз ФФ и регулярных секступолей в арках соответственно. 49\_5 слева, 54\_1 посередине, 55\_1 справа

### – $I$ пары секступолей

Пара – $I$  секступолей рассмотрена в параграфе 1.5, там же получены формулы для сдвига частот (1.103) с учётом толщины секступолей пары и выражения для динамической апертуры. В Супер  $s - \tau$  фабрике используется два варианта пар секступолей без геометрических aberrаций второго порядка

1. два секступоля одинаковой силы с – $I$  преобразованием в вертикальной и горизонтальной плоскостях (секступоли хроматических секций и регулярные секступоли в арках),
2. два секступоля противоположной силы с  $I$  преобразованием в горизонтальной и – $I$  в вертикальной плоскостях (крабовые секступоли).

Сдвиг частоты для пар секступолей оказывается малым, как показано в таблице 3.7, демонстрирующей вклады крабовых секступолей (CRAB), вертикальной (CCSY) и горизонтальной (CCSX) секций коррекции хроматизма, секступолей арок (ARCS) и краевых полей финальных линз (FF fringes). Наибольший сдвиг частоты создаётся краевыми полями, и опять это перекрёстный член  $\Delta\nu_{yx}$ .

В проведённом анализе перекрёстный сдвиг частоты  $\Delta\nu_{yx}$  наибольший для всех рассмотренных вариантов, что создаёт дополнительные трудности для оптимизации, так она должна быть, по крайней мере, двумерной.

Таблица 3.7 – Сдвиги частот от различных источников при  $2j_x = 20^2 \varepsilon_x$ ,  $2j_y = 20^2 \varepsilon_y$  для финальной версии Супер  $c - \tau$  фабрики (v. 68)

	$\Delta\nu_{xx}$	$\Delta\nu_{xy}$	$\Delta\nu_{yx}$	$\Delta\nu_{yy}$
CRAB pair	$-2.8 \times 10^{-7}$	$-7 \times 10^{-7}$	$-1.4 \times 10^{-4}$	$-3.5 \times 10^{-4}$
CCSY	$2.3 \times 10^{-8}$	$-1.5 \times 10^{-6}$	$-3 \times 10^{-4}$	$-4.4 \times 10^{-4}$
CCSX	$-1.8 \times 10^{-3}$	$-2 \times 10^{-7}$	$-4 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-10}$
ARCS	$2.4 \times 10^{-4}$	$-3.2 \times 10^{-5}$	$-6.5 \times 10^{-3}$	$6.5 \times 10^{-6}$
FF fringes	$2.6 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-4}$	<b><math>4.2 \times 10^{-2}</math></b>	$1.9 \times 10^{-3}$

### Функции возмущения и уменьшение ДА для частиц с отклонением по энергии

Функции возмущения и нахождение с их помощью ДА рассмотрено в параграфе 1.2.

В случае Супер  $c - \tau$  фабрики квадратичные аберрации для частиц с нулевым отклонением по энергии малы, так как все секступоли объединены в самокомпенсирующиеся пары (в арках перемежающиеся), дополнительные секступоли для коррекции высших порядков хроматизма (параграфы 1.7) — одиночны, но слабы. Поэтому, ДА определяется высшими порядками, а не только первым порядком использованным в формулах (1.78), (1.106). Однако, для частиц с отклонением по энергии, все секступольные пары нарушены и вычисления в первом порядке с новыми функциями Твисса становятся полезными. На рисунке 3.12 показаны бета функции для трёх отклонений по энергии. Замечу, что изменения бета функций асимметричны по отношению к отклонению энергии, что усложняют оптимизацию.

В подпараграфе 1.2.2 было рассмотрено уменьшение двумерной ДА и появление одномерных лучей. На рисунке 1.5 приведена полученная трекингом двумерная динамическая апертура Супер  $c - \tau$  фабрики (точки — начальные условия устойчивых частиц) для отклонения по энергии  $\delta = -1\%$ , отчётливо

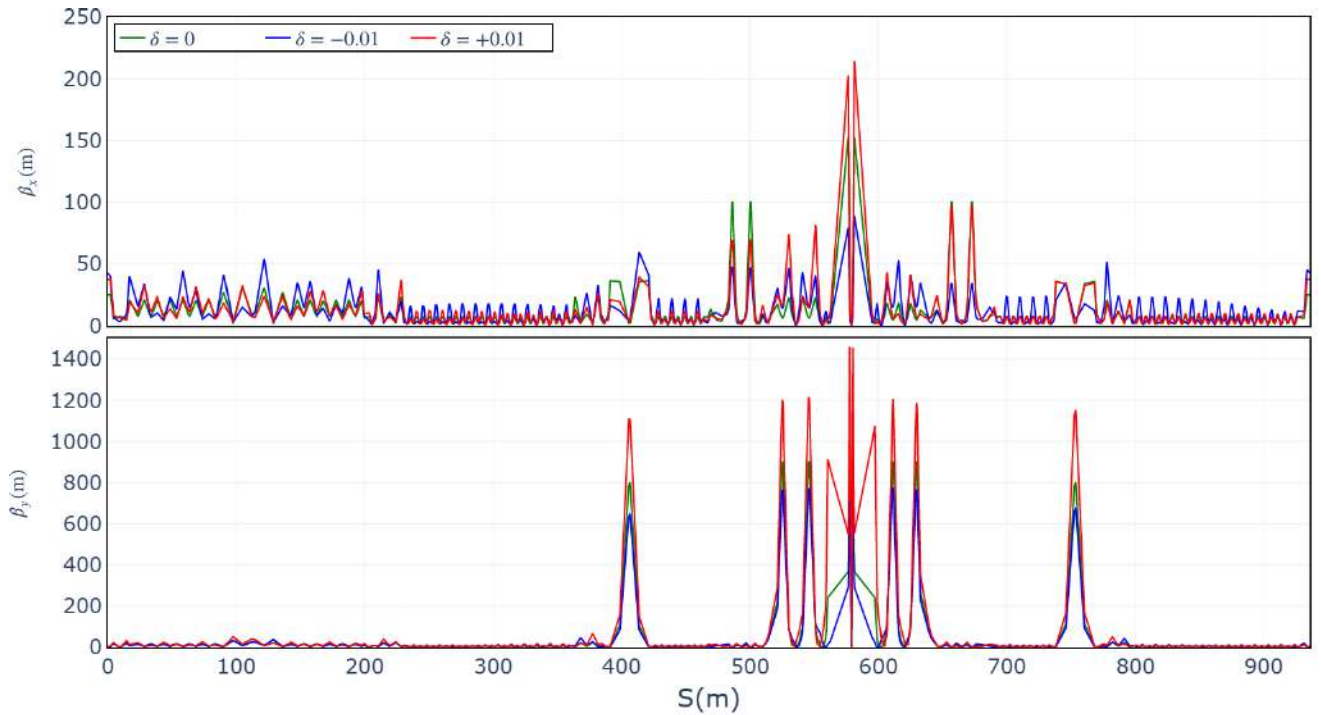


Рисунок 3.12 – Функции Твисса Супер  $c - \tau$  фабрики для трёх отклонений по энергии, зелёная линия – нулевое отклонение, голубая и красная для  $\delta = \mp 1\%$  соответственно. Верхний график – горизонтальная, нижний – вертикальная бета функции

видно ступенчатое изменение горизонтальной апертуры при появлении вертикального движения. Формула (1.79) предсказывает значение порогового действия  $j_{x,th} = 3.3\sigma_x$ , которое близко к наблюдаемой величине  $\approx 2\sigma_x$ . Это и доказывает, что причиной уменьшения ДА является возмущения линейной оптики для частиц с отклонением по энергии.

### 3.5.2 Новое расположение крабовых секступолей

Организация оптики финального фокуса и промежутка встречи является одной из ключевых задач при разработке коллайдера с крабовой перетяжкой, потому что именно здесь сосредоточены основные источники нелинейного возмущения: крабовые секступоли, секступоли секций локальной коррекции хроматизма, нелинейные края линз финального фокуса, кинематический член. Обычно используются два варианта организации промежутка встречи. Первый основан на финальном фокусе, предложенном П. Раймонди и А. Серым

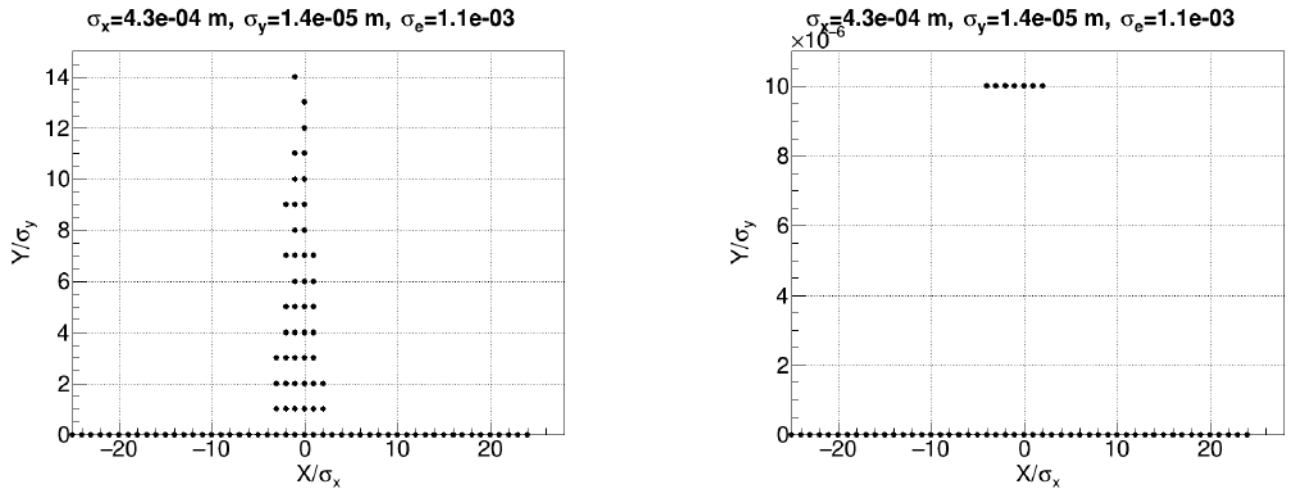


Рисунок 3.13 – Двумерная динамическая апертюра Супер  $c - \tau$  фабрики для отклонения по энергии в  $\delta = -1\%$ , показан переход от одномерного горизонтального движения к двумерному, слева – шаг по вертикали  $\sigma_y$ , справа – шаг по вертикали  $10^{-6}\sigma_y$

[149] для линейного коллайдера. Он использовался в проектах итальянской Супер-Б [21] фабрики, и в начальном варианте новосибирской Супер  $c - \tau$  фабрики [146] (рисунок 3.14). На небольшом расстоянии от места встречи по-

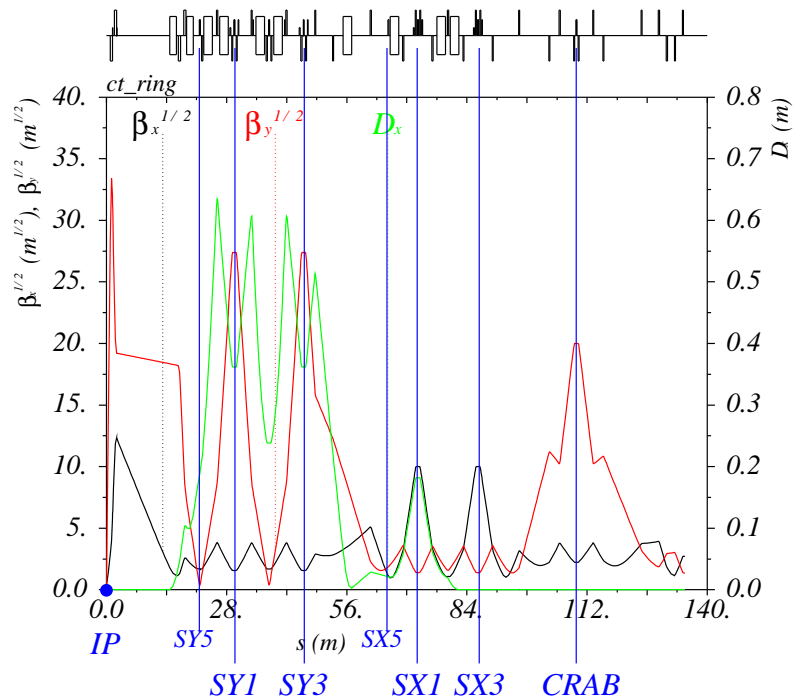


Рисунок 3.14 – Оптические функции Супер  $c - \tau$  фабрики (v. 57-2) от места встречи до крабового секступоля в варианте Раймонди Серого

сле телескопического преобразования с требуемым набегом бетатронной фазы

размещаются секции локальной коррекции вертикального и горизонтального хроматизма финальных линз. Обе секции представляют пары идентичных секступолей разделенных  $-I$  преобразованием. На этом участке могут ставиться дополнительные секступольные и октупольные линзы для коррекции более высоких хроматических и геометрических aberrаций. Далее идёт секция зануления дисперсионной функции, и затем располагаются крабовые секступоли в правильном набеге фазы и с правильными бета функциями. Такой финальный фокус предоставляет большие возможности для коррекции хроматизма по обеим координатам, однако занимает много места, что существенно для компактных машин.

Другой вариант оптической организации промежутка встречи был предложен К. Ойдэ для FCC-ее [150]. В нём присутствует только вертикальная секция коррекции хроматизма, где занулена дисперсия во втором от места встречи секступоле  $-I$  пары. Вертикальная бетатронная фаза уже удовлетворяет условию крабовой перетяжки и коррекции хроматизма, горизонтальная подстраивается, чтобы поставить крабовый секступоль. Таким образом, второй секступоль не создает хроматические aberrации, компенсирует геометрические aberrации первого секступоля и играет роль крабового секступоля. Сила второго секступоля является суперпозицией сил первого и крабового секступолей. Пример оптики Супер  $s-\tau$  фабрики с такой организацией промежутка встречи приведен на рисунке 3.15.

Для Супер  $s-\tau$  фабрики в Новосибирске были опробованы оба варианта, и ни с одним не удалось получить приемлемой апертуры и тушековского времени жизни. Причиной, как уже упоминалось в предыдущем разделе, является нарушение оптического преобразования между крабовыми секступолями для частиц с отклонением по энергии, которое вызывает сильное секступольное возмущение, как это показывает использование функций возмущения. При этом в промежутке между левой и правой крабовыми секступолями не хватает корректирующих элементов (тоже секступолей), которые могли бы хоть

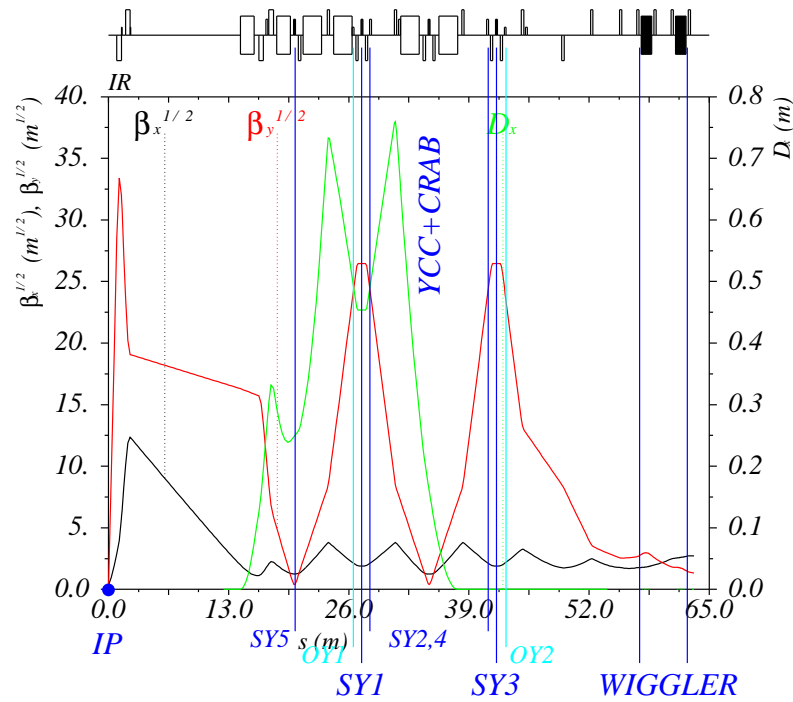


Рисунок 3.15 – Оптические функции Супер  $c - \tau$  фабрики (v. 54-1) от места встречи до крабового секступоля в варианте Ойдэ

как-то исправить положение и уменьшить большие функции возмущения (хроматизм набега фаз, бета и альфа функций). Поэтому, было принято решение перенести крабовые секступоли после первой арки, которая содержит секступоли, позволяющие исправить оптику и функции возмущения между крабовыми секступолями для частиц с отклонением по энергии. Две секции коррекции локального хроматизма размещаются как в варианте Раймонди-Серого. Новый вариант оптической структуры показал лучшие результаты, описанные ниже [50]. На рисунке 3.16 приведены оптические функции новой структуры. Секступоль “SY5” расположен в конце телескопического преобразования от места встречи с маленькими бета функциями для частиц с нулевым отклонением по энергии, но с большими бета функциями для частиц с отклонением по энергии ( $\propto \delta^2$  рисунок 3.17), позволяя корректировать хроматизм третьего порядка, как описано в параграфе 1.7 формула (1.197). Арка между горизонтальной секцией коррекции хроматизма и крабовым секступолем состоит из четырёх  $90^\circ$  ячеек, образуя две перемежающиеся  $-I$  пары секступолей для каждой плоскости. Такая комбинация не создаёт квадратичных aberrаций, и поэтому



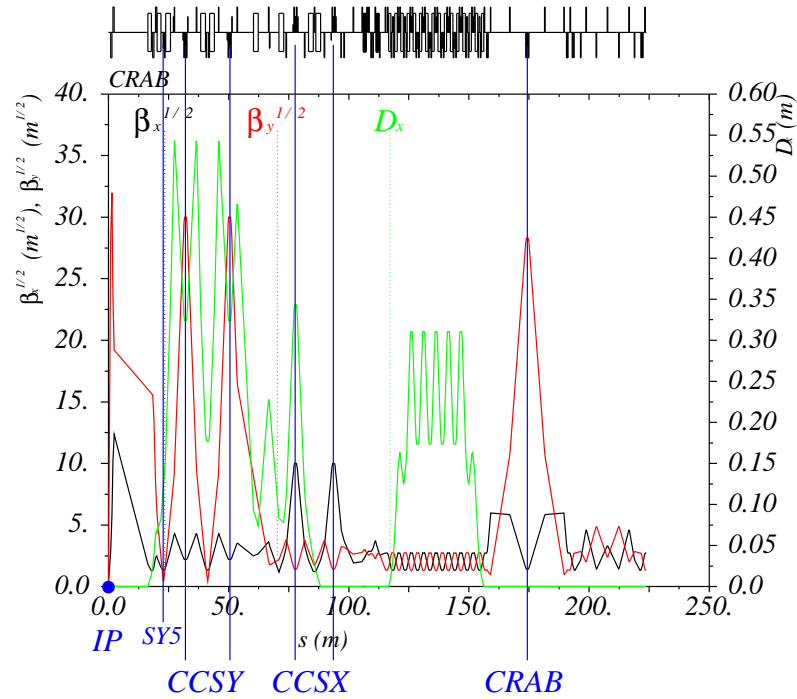


Рисунок 3.16 – Оптические функции Супер  $c - \tau$  фабрики (v. 68) от места встречи до крабового секступоля

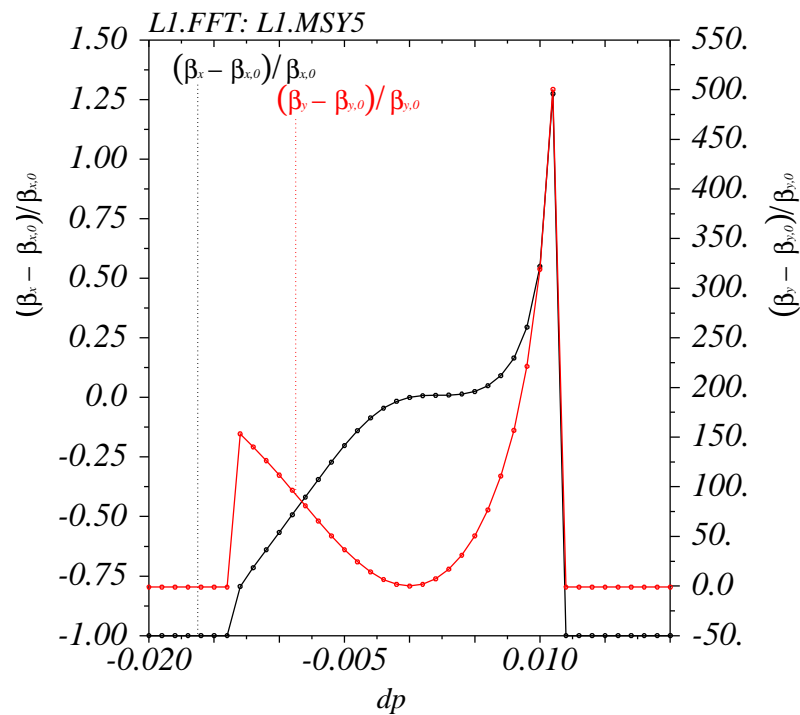


Рисунок 3.17 – Изменением бета-функции в зависимости от отклонения энергии частицы в секступоле “SY5” Супер  $c - \tau$  фабрики (v.68)

не возмущает крабовое преобразование.

### 3.5.3 Современные параметры и геометрия коллайдера

Геометрия Супер  $c - \tau$  фабрики приведена на рисунке 3.18. Это двухкольцевой коллайдер длиной 936 м с одним местом встречи. Оптическая структура состоит из финального фокуса, промежутка встречи, секций крабового секстиполя, арок, прямолинейного промежутка для инъекции, секций с затухательными змейками, с ускоряющими резонаторами, секции пересечения дорожек пучков (Xing) и трёх сибирских змеек (СЗ). Оптические функции всего кольца

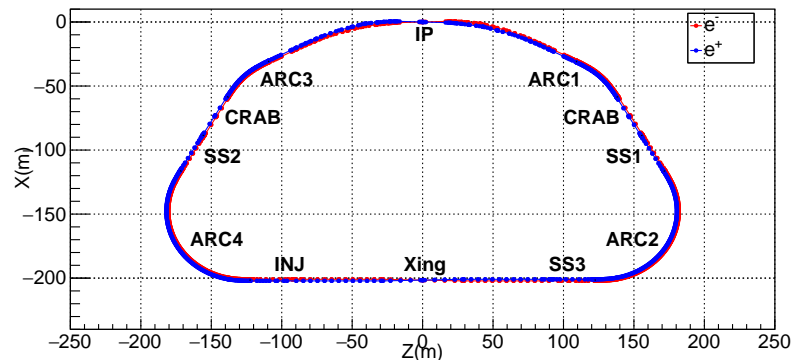


Рисунок 3.18 – Геометрия Супер  $c - \tau$  фабрики (v.68)

показаны на рисунке 3.19. На левом графике рисунка 3.20 нарисованы оптиче-

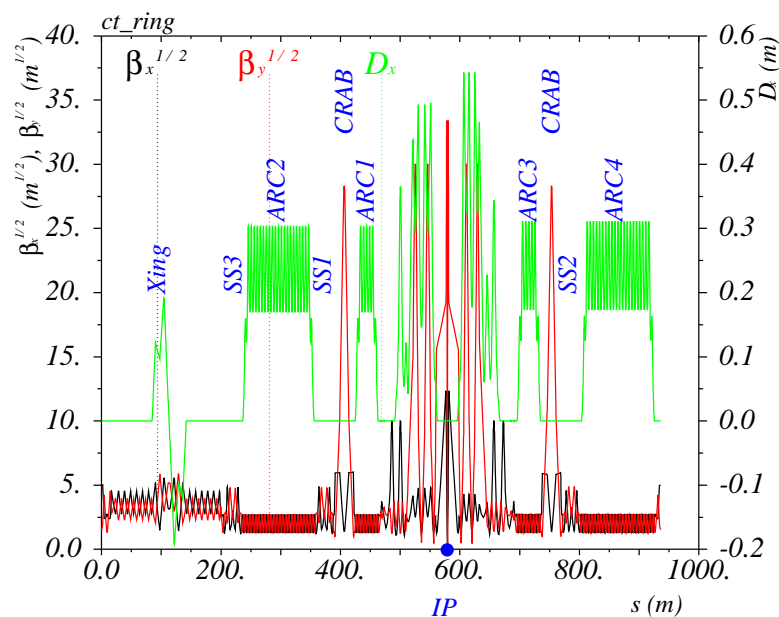


Рисунок 3.19 – Оптические функции Супер  $c - \tau$  фабрики

ские функции прямолинейного промежутка противоположного месту встречи, где находятся точка инжекции, пересечение пучков, ФОДО ячейки для установки ускоряющих резонаторов и третья СЗ, на правом графике приведена отдельно СЗ.

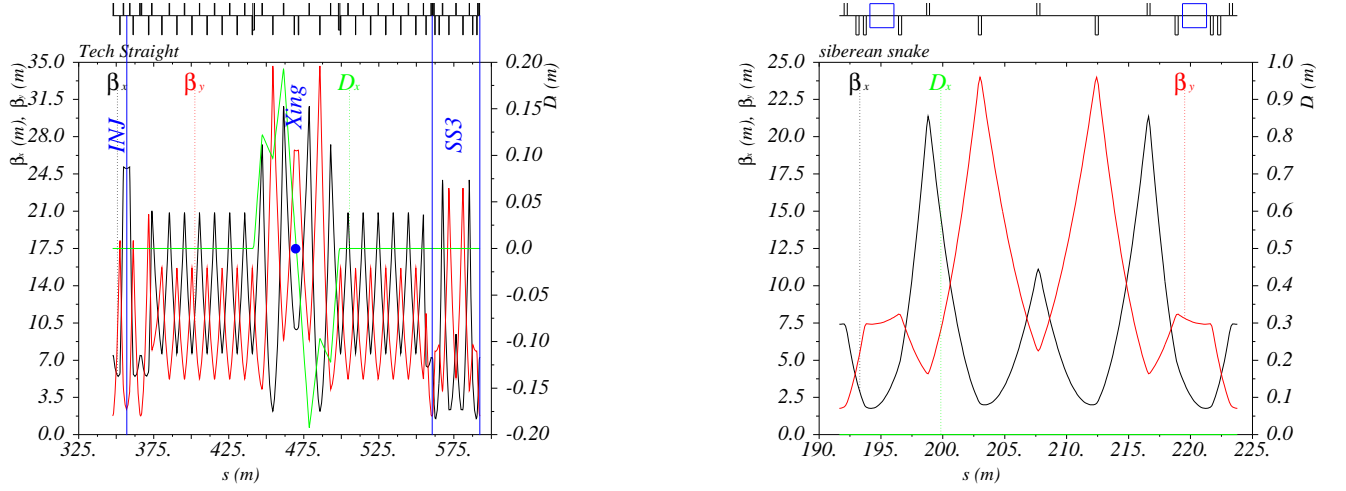


Рисунок 3.20 – Прямолинейный промежуток противоположный месту встречи (слева) и СЗ (справа) Супер  $c - \tau$  фабрики (v.68)

Локальная энергетическая апертура (LMA) (рисунок 3.21) получена с помощью ELEGANT [151] с начальной координатой  $y_0 = 1 \times 10^{-10}$  м, чтобы учесть вертикальное движение; она также сравнивается с линейным приближением, вычисляемым по формуле

$$\delta(s) = \frac{R}{\eta(s) + \sqrt{\mathcal{H}(s)\beta_x(s)}}, \quad (3.46)$$

где  $R$  апертурное ограничение,  $\eta(s)$  – горизонтальная дисперсионная функция,  $\mathcal{H} = \gamma\eta^2 + 2\alpha\eta\eta' + \beta_x\eta'^2$ ,  $\beta, \gamma, \alpha$  – параметры Твисса. Выбранное значение  $R = 3 \text{ mm} \approx 5\sigma_x$  получено из графика ДА на рисунке 3.22, достигаемого при  $PT = \delta \approx 0.01$ . ДА в координатах  $\{x, PT = \delta\}$  приведена на рисунке 3.22, где цветами обозначены силы крабовых секступолей. Зависимость бетатронных частот от отклонения энергии и хроматические функции приведены на рисунке 3.23.

Главной целью оптимизации Супер  $c - \tau$  фабрики было нахождение параметров, обеспечивающих Тушековское время жизни пучка  $t_T \geq 300$  с, что

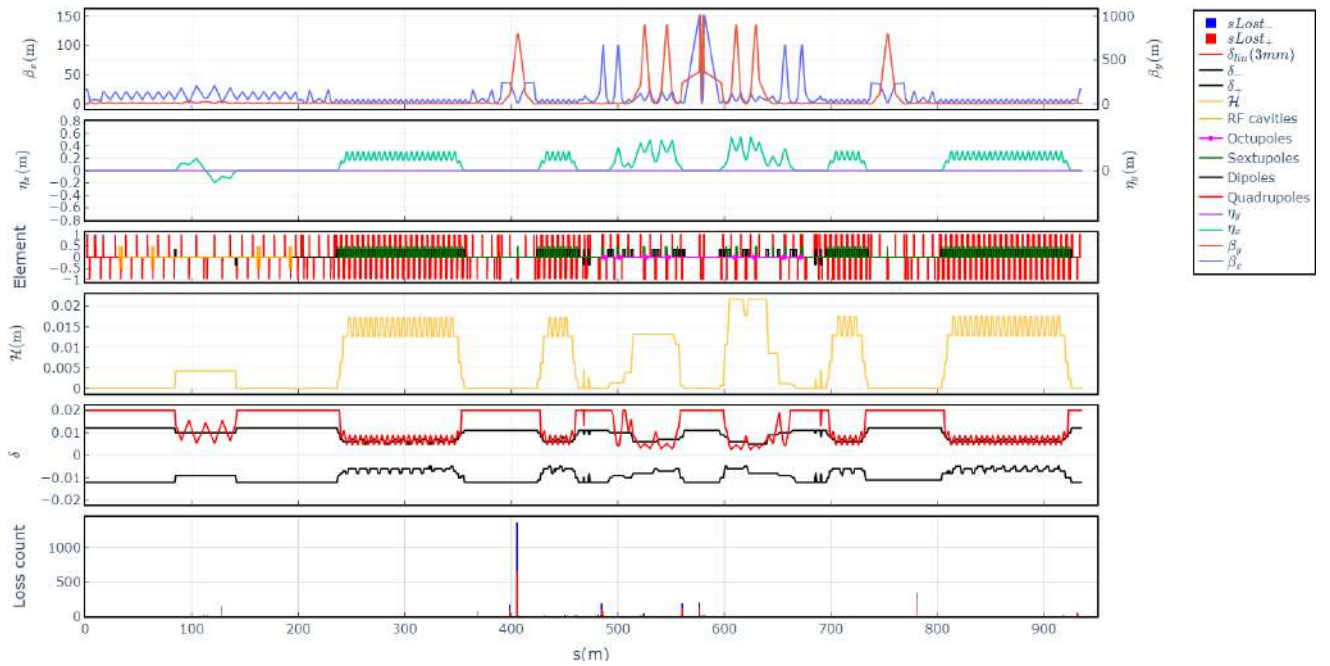


Рисунок 3.21 – Локальная энергетическая апертура Супер  $c$ - $\tau$  фабрики (v.68). Сверху вниз: горизонтальная и вертикальная бета функции, дисперсия, тип элемента,  $\mathcal{H}$  инвариант, ЛМА (чёрная) и линейная оценка (красная), распределение потерь частиц

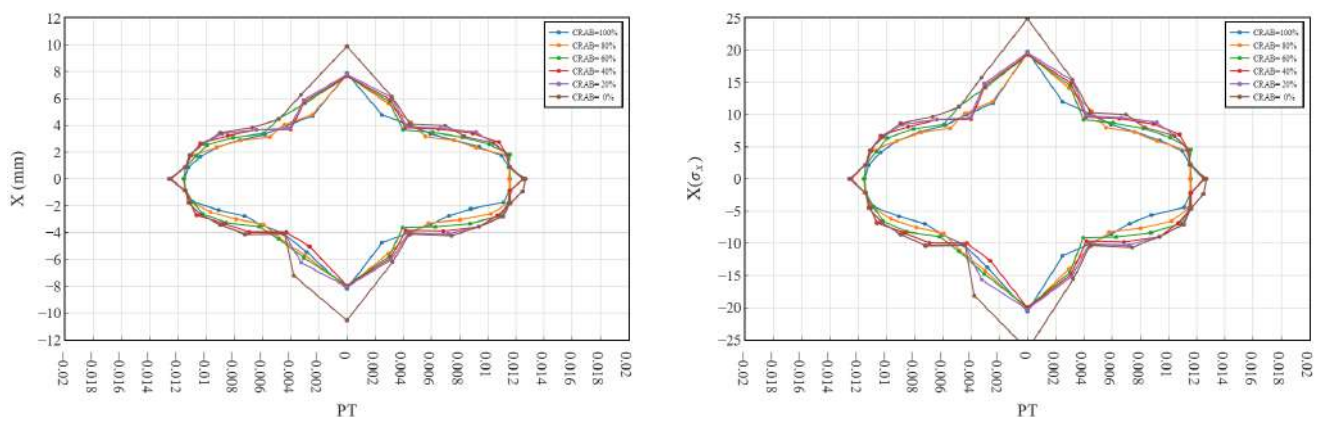


Рисунок 3.22 – 6d ДА Супер  $c$ - $\tau$  фабрики для  $y_0 = \sigma_y = 8.7 \times 10^{-6}$  м,  $\sigma_x = 4 \times 10^{-4}$ ,  $\sigma_\delta = 1 \times 10^{-3}$  при различных силе крабового секступоля. Бетатронные частоты  $\nu_x = 30.545$ ,  $\nu_y = 29.61$

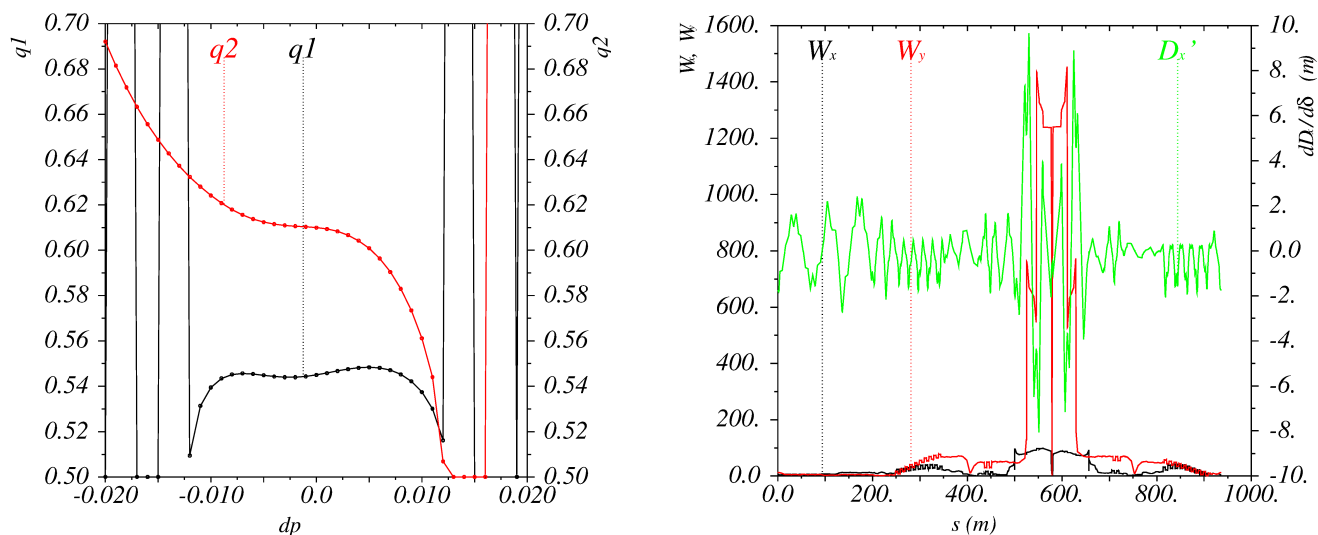


Рисунок 3.23 – Вариация бетатронных частот в зависимости от  $\delta$  (слева) и хроматические функции (справа) для Супер  $c - \tau$  фабрики (v.68)

выглядит приемлемым для современных инжекционных комплексов. Дополнительные условия определялись эффектами встречи  $\xi_y \lesssim 0.08$  и отношение синхротронной частоты к горизонтальному параметру эффектов встречи  $\nu_s/\xi_x \gtrsim 3$  [152; 153]. Также для низких энергий оптимизировалось отношение эмиттансов  $\varepsilon_y/\varepsilon_x$  с целью увеличения времени жизни и максимизации светимости.

Окончательно, получена светимость  $\mathcal{L} = 10^{35} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$  только на энергиях пучка 2.5 – 3.5 ГэВ, на энергии пучка 2 ГэВ  $\mathcal{L} = 4 \times 10^{34} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$ , на 1.5 ГэВ  $\mathcal{L} = 2.9 \times 10^{34} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$  с большим током пучка в 3 А. Тушековское время жизни было сосчитано с ELEGANT [151] используя LMA и прямое рассеяние частиц пучка. Оба метода дали согласующиеся результаты. Замечу, что упрощённый расчёт даёт неправильные, завышенные результаты. ДА находилась с помощью PTC MAD-X [106].

Не смотря на прогресс, требуется дальнейшая оптимизация для увеличения Тушековского времени жизни, чтобы создать резерв для возможных ошибок выставки. Кроме того, уменьшение потерь частиц улучшит фоновую ситуацию для детектора. таблица 3.8 содержит современные параметры Супер  $c - \tau$  фабрики для пяти энергий пучка.

Таблица 3.8 – Параметры Супер  $c - \tau$  фабрики

$E$ , ГэВ	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
$\Pi$ , м	935.874				
$2\theta$ , мрад	60				
$\beta_x^*/\beta_y^*$ , см	10/0.1				
$\nu_x/\nu_y$	30.545/29.61				
хроматизм $C_x/C_y$	-64/ - 328				
$\alpha \times 10^3$	1.35				
$F_{RF}$ , МГц	350				
гармоника	1093				
$I$ , А / $N_b$	2.9/941	1.64/983	2.5/983	2.7/983	2.9/974
$N_p \times 10^{-10}$	6	3.25	5	5.3	5.8
$\varepsilon_y/\varepsilon_x$ (%)	10	0.5	0.5	0.5	0.5
$\varepsilon_x$ , нм (SR/IBS+WG)	2/2.9	3.5/3.5	5.5/3.2	7.9/4.1	10.7/5.7
$\sigma_e \times 10^3$ (SR/IBS+WG)	0.3/0.9	0.4/1.1	0.45/1.2	0.5/1.2	0.6/1.3
$\sigma_s$ , мм	17	15	14	14	14
$\xi_x/\xi_y$	0.003/0.03	0.002/0.06	0.002/0.08	0.002/0.065	0.002/0.053
$\nu_s/\xi_x$	3	8	6.8	8	8
$\tau_x/\tau_y/\tau_e$ , нс	102/102/51	43/43/22	31/31/15	23/23/11	17/17/9
$\mathcal{L} \times 10^{-35}$ , $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$	0.29	0.4	1	1	1
$T_t$ , с	304	304	302	560	1100

## Эффекты излучения, ограничивающие параметры электрон-позитронных коллайдеров на сверхвысокую энергию

В настоящее время активно развиваются два проекта электрон-позитронных коллайдеров на сверхвысокую энергию (до 175 ГэВ на пучок) — FCC-ee (CERN) [22; 154] и CEPC (ИНЕР, Пекин) [80; 155]. Оба проекта предназначены, прежде всего, для прецизионного исследования бозона Хиггса [156; 157], однако имеют ввиду и более широкую физическую программу в диапазоне энергий от порога рождения Z-бозона до топ-кварка. При таких энергиях синхротронное излучение играет решающую роль в определении размеров коллайдеров — обе установки будут расположены в тоннеле длиной 100 км. Для CEPC максимальная мощность потерь на СИ ограничена величиной 30 МВт, для FCC-ee — 50 МВт.

Однако СИ не только определяет радиус кривизны магнитного поля этих сверх-коллайдеров, имеются и более “тонкие” эффекты, которые могут лимитировать их параметры и производительность. Два таких эффекта рассматриваются в этой главе на примере FCC-ee.

Первый из них связан с т.н. “пучковым” излучением (beamstrahlung) частицы в коллективном поле встречного сгустка. Это явление хорошо изучено для линейных встречных  $e^+e^-$  коллайдеров на высокую энергию [158; 159], где интенсивное пучковое излучение (ПИ) снижает эффективную энергию столкновений и светимость. После опубликования первых работ по циклическому  $e^+e^-$  коллайдеру FCC-ee В.И. Тельнов показал, что в циклическом ускорителе излучение электроном или позитроном кванта с очень высокой энергией будет приводить к потере частицы за пределами энергетической области устойчивости

и, тем самым, ограничивать время жизни пучков и светимость [160]. Однако будет происходить и процесс (более вероятный) излучения сталкивающимися частицами менее жестких фотонов, не приводящих непосредственно к гибели электронов и позитронов, однако существенно влияющих на эмиттанс и энергетический разброс пучков и ограничивающий светимость установки. Ранее такой эффект упоминался в связи с рассмотрением циклических  $e^+e^-$  коллайдеров на сверхвысокую энергию [161], однако впервые был подробно исследован в нашей работе [41]. Его изучение позволило оптимизировать параметры коллайдера FCC-ee и увеличить светимость от 1.5 до 10 раз в зависимости от энергии. Однократное испускание энергичного кванта с последующей потерей частицы и множественное излучение более мягких фотонов можно сравнить с однократным и многократным эффектом Тушека: первый так же определяет время жизни пучка, в то время, как второй — эмиттанс, энергетический разброс и т.д.

Второй эффект, рассматриваемый ниже, был обнаружен при моделировании движения частицы с учетом силы трения из-за синхротронного излучения (квантовая раскачка колебаний не рассматривалась). Было показано, что даже без нелинейностей поперечная динамическая апертура ограничивается, если учитывать СИ из квадрупольных линз. Ограничение горизонтальной апертуры в таких условиях ранее было объяснено Д. Джоветом, и названо им — радиационной бета-синхротронной связью [31], однако, как было выяснено автором диссертации (впервые), ограничение вертикальной амплитуды движения объясняется совсем другим механизмом. Учёт потери энергии от излучения в квадрупольных линзах приводит для движения в вертикальной плоскости к параметрическому резонансу с трением, который описывается уравнением, похожим на уравнение Ван-дер-Поля. Решение полученного уравнения показывает, что с ростом амплитуды вертикальных колебаний затухание сменяется анти-затуханием. Полученное пороговое значение хорошо согласуется с результатами численного моделирования.



## 4.1 Организация встречи пучков в FCC-ee

Эффекты синхротронного излучения при сверхвысоких энергиях пучка, исследуемые ниже, зависят от условий формирования пересечения электронного и позитронного сгустков, поэтому в данном параграфе рассматривается устройство промежутка встречи FCC-ee, элементы, его составляющие, а также, финальный фокус коллайдера, поскольку именно линзы финального фокуса являются определяющими для изучения эффекта ограничения динамической апертуры из-за излучения. Интересной особенностью схемы локальной коррекции хроматизма промежутка встречи является размещение специальной секступольной линзы не в больших бета-функциях (как это делается обычно), а в фокусе финального телескопа с минимальными бета-функциями, но большим хроматизмом второго порядка.

Будущий циклический ускоритель (FCC-ee) — это проект развиваемый в ЦЕРНе с максимальной энергией 175 ГэВ [30; 162]. На рисунке 4.1 показаны расположение и схематическое изображение двухкольцевого коллайдера.

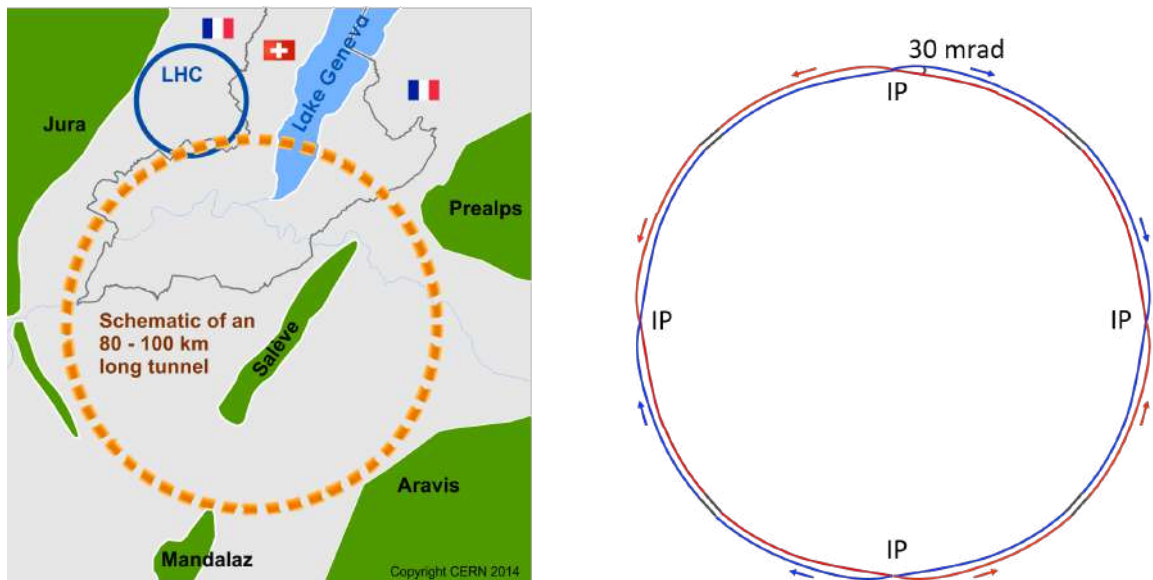


Рисунок 4.1 – Расположение (слева) и схема FCC-ee (справа)

Место встречи организована по схеме крабовой перетяжки [18; 19; 141; 142] с очень маленькой величиной вертикальной бета функции в точке встречи (IP). В рассматриваемом варианте FCC (январь 2013 года) обладал четырьмя

местами встречи и четырёхкратной симметрией, симметричным относительно IP промежутком встречи. Параметры представлены в таблице 4.1, на рисунке 4.2 приведены оптические функции половины промежутка встречи, ячейки периодичности в арке и четверти кольца. Промежуток встречи состоит из секции финального телескопа (FFT), в конце секции установлен дополнительный секступоля для коррекции хроматизма третьего порядка, секций коррекции вертикального (CCSY) и горизонтального хроматизмов, имеющих по паре секступолей с минус единичным преобразованием между ними, и находящихся в кратном  $\pi$  набеге вертикальной или горизонтальной бетатронной фазы от соответствующей финальной линзы, секции подавления дисперсии (CCT), обеспечивающей телескопическое преобразование от IP до начала секции крабового секступоля (CRAB), и согласующей секции (MS) для перехода в арку. Секции коррекции хроматизма подавляют хроматизм бета функций, их дей-

Таблица 4.1 – Параметры четверти кольца одного из вариантов FCC

	tt
Энергия [ГэВ]	175
Периметр [м]	24655.9
Горизонтальный эмиттанс [нм]	1.3
Энергетический разброс [ $10^{-3}$ ]	1.6
$\beta_x^*/\beta_y^*$ [м]	0.5 / 0.001
$Q_x/Q_y$	124.54 / 84.57
$Q'_x/Q'_y$	-152 / -816
Потери энергии / оборот [GeV]	2.12

ствие показано на рисунке 4.3 на примере вертикальной бета функции. Два семейства секступолей в арках компенсируют хроматизм частот первого порядка всего кольца. Зависимость бетатронных частот от отклонения энергии – энергетический акцептанс структуры без и с дополнительным секступолем

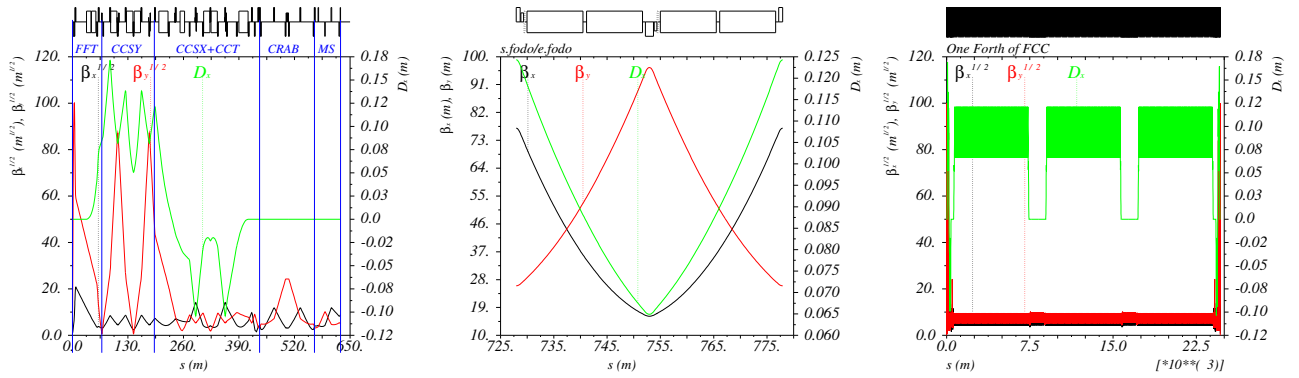


Рисунок 4.2 – Оптические функции половины промежутка встречи (слева), ячейки периодичности арки (посередине):  $\mu_x = \pi/2$ ,  $\mu_y = \pi/3$  и четверти кольца (справа)

показаны на рисунке 4.4, а в таблице 4.2 приведены значения хроматизма частот и их вклад в сдвиг частоты при отклонении энергии в 2%. Как видно из рисунка 4.4 и таблицы 4.2 без дополнительного секступоля энергетический акцептанс структуры ограничен хроматизмом третьего порядка вертикальной частоты. Использование дополнительного секступоля в фокальной точке FFT (отмечен фиолетовым кругом на рисунке 4.3), с маленькими значениями бета функции и хроматизма бета функции первого порядка, но большой величиной хроматизма второго порядка вертикальной бета функции, согласно выражению (1.197) (последнее слагаемое) позволяет контролировать хроматизм частот третьего порядка. Действительно, подстановка значения дисперсии  $\eta_0 = 0.085$  м, хроматизма второго порядка бета функции  $\beta_y b_{y,2} = 10^7$  м и силы секступоля  $K_2 L = -2 \text{ м}^{-2}$  даёт добавку в хроматизм частоты третьего порядка  $\Delta Q''' = 4 \cdot 10^5$  совпадающую с величиной приведенной в таблице 4.2 и увеличивает энергетический акцептанс  $[-1.9\%; +0.8\%]$  до  $[-3.1\%; +1.9\%]$ . Таким образом, один дополнительный секступоль (два симметрично расположенных относительно IP) позволил увеличить энергетический акцептанс более, чем в два раза.

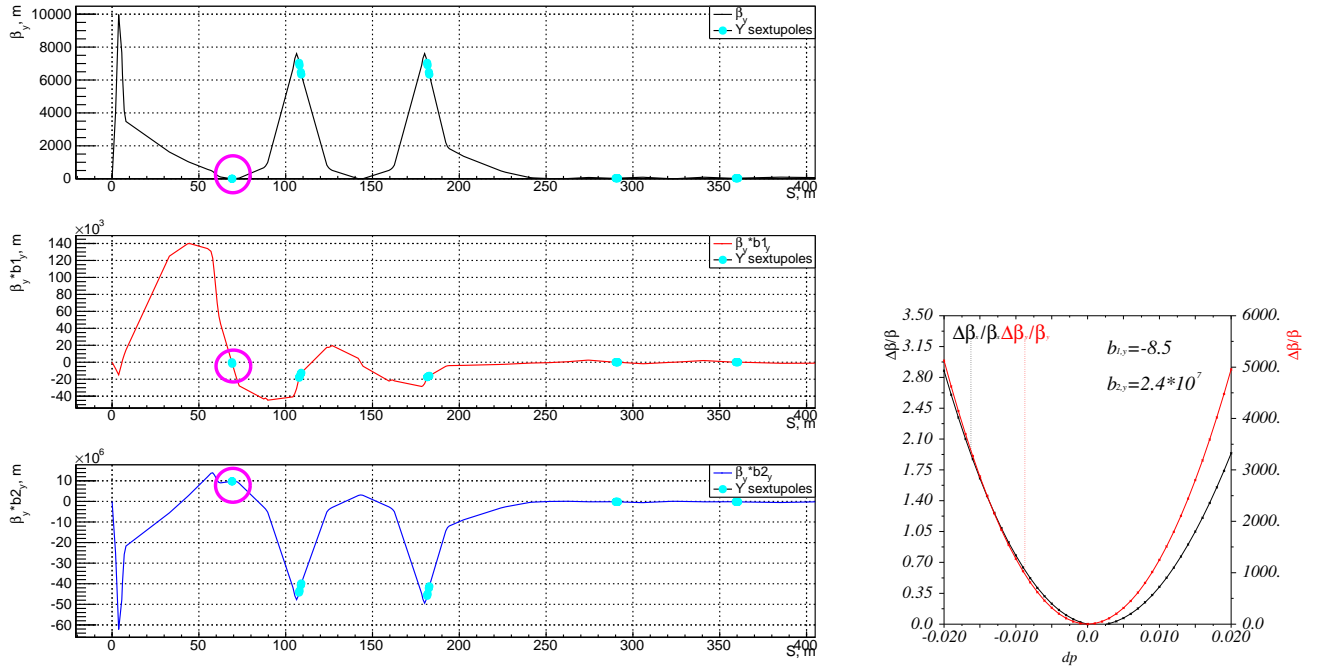


Рисунок 4.3 – Вертикальная бета функция (слева сверху), её хроматизм первого (слева посередине) и второго (слева внизу) порядка. Голубыми точками отмечено положение секступолей, фиолетовый круг отмечает положение дополнительного секступоля в фокусе FFT. Поведение вертикальной бета функции в фокусе FFT (справа)

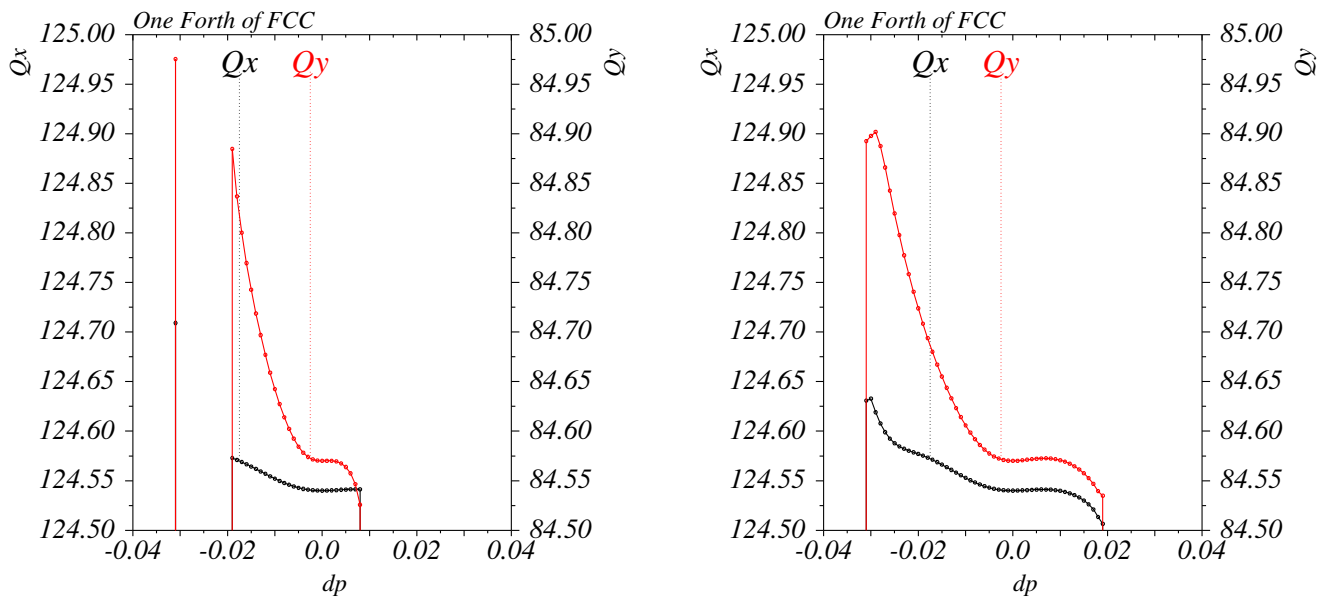


Рисунок 4.4 – Энергетический акцептанс структуры FCC без дополнительного секступоля  $[-1.9\%; +0.8\%]$  (слева) и с дополнительным секступолем  $[-3.1\%; +1.9\%]$  (справа)

Таблица 4.2 – Численные значение хроматизма частот и их вклад при отклонении энергии в 2% без и с дополнительным секступолем

	без дополнительного секступоля		с дополнительным секступолем	
	Значение	$\Delta Q(2\%)$	Значение	$\Delta Q(2\%)$
$Q_x$	124.54		124.54	
$Q'_x$	0	0	0	0
$Q''_x$	170	0.034	170	0.034
$Q'''_x$	$-4.5 \cdot 10^4$	-0.059	$-5.1 \cdot 10^4$	-0.068
$Q''''_x$	$-5.3 \cdot 10^6$	-0.035	$-4.8 \cdot 10^6$	-0.032
$Q_y$	84.57		84.57	
$Q'_y$	0	0	0	0
$Q''_y$	387	0.077	387	0.077
$Q'''_y$	$-5.3 \cdot 10^5$	-0.7	$-1.4 \cdot 10^5$	-0.182
$Q''''_y$	$-4.3 \cdot 10^6$	-0.029	$1.9 \cdot 10^6$	-0.013

Устройство финального фокуса, начиная с IP, показано на рисунке 4.5 (траектории) и на рисунке 4.6 (бета-функции). Первая линза находится на расстоянии  $L^* = 2.2$  м от IP и разбита на три независимые части, следующая линза находится на расстоянии 0.3 м от первой и состоит из двух частей, расстояния между частями линз 8 см. В таблице 4.3 приведены параметры линз.

Таблица 4.3 – Параметры линз финального фокуса FCC-ee на энергии 45.6 ГэВ

Имя	Длина, м	Градиент, Т/м
Q1a	1.2	-97.2
Q1b	1.0	51.2
Q1c	1.0	12.0
Q2a	1.25	7.3
Q2b	1.25	7.2

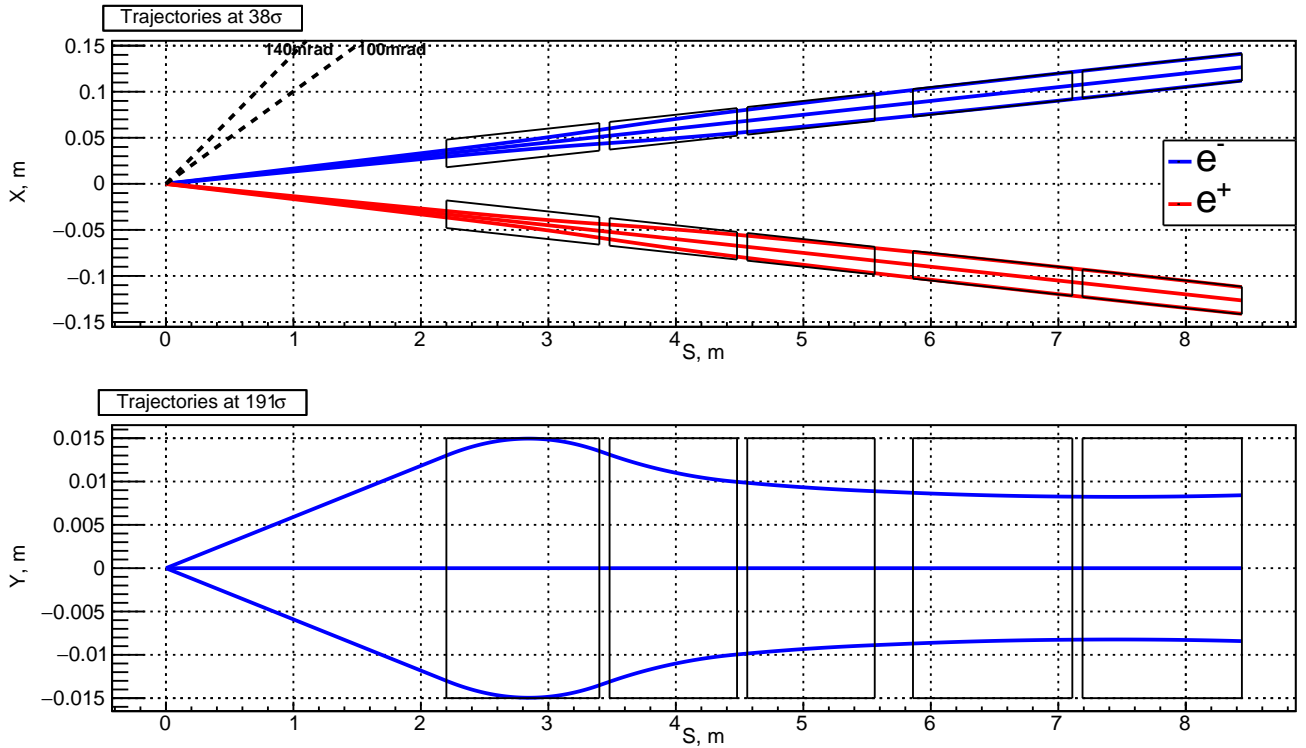


Рисунок 4.5 – Крайние (для  $x = 38\sigma_x$  и  $y = 191\sigma_y$ ) траектории пучка в горизонтальной (сверху) и в вертикальной (снизу) плоскостях в финальном фокусе FCC-ee на энергии 45.6 ГэВ. Чёрные прямоугольники обозначают апертуры квадрупольных линз

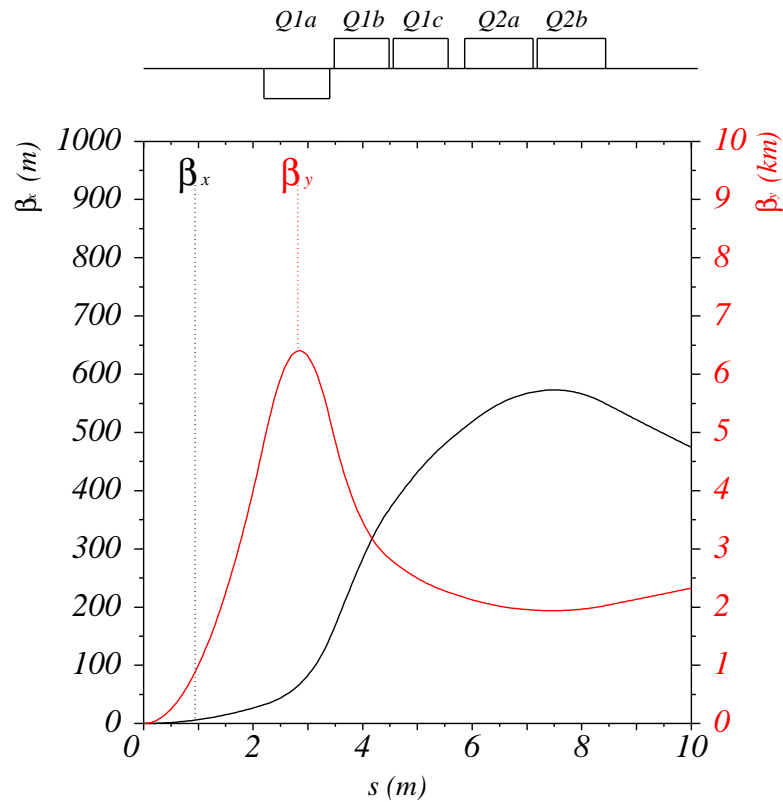


Рисунок 4.6 – Горизонтальная (левая шкала) и вертикальная (правая шкала) бета-функции в финальном фокусе FCC-ee на энергии 45.6 ГэВ

## 4.2 Синхротронное излучение в поле встречного сгустка

Излучение частицы, отклонённой коллективным полем встречного сгустка, получило название пучкового излучения [161]. Это излучение вносит дополнительные возбуждение и затухание колебаний частицы, что приводит к новым равновесным энергетическим и продольным размерам пучка. Первые оценки изменения энергетического разброса были сделаны в работе 1978 года [161], где было учтено только дополнительное квантовое возбуждение, а дополнительное затухание было посчитано незначительным. В работе [160] было показано уменьшение времени жизни пучка из-за ПИ и ограниченного энергетического акцептанса коллайдера, но не учитывалось изменение продольного размера пучка, от которого зависит плотность частиц и коллективное поле сгустка. Более правильный расчёт должен учитывать изменение синхротронных интегралов [116], которые определяют новые равновесные энергетический разброс и продольный размер пучка.

Потенциал встречного пучка записывается как [163]

$$U(x, y, s, z) = -\frac{2N_p r_e}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp \left[ -\frac{(x + s 2\theta)^2}{2\sigma_x^2 + q} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2 + q} - \frac{\gamma^2(2s - z)^2}{2\gamma^2\sigma_z^2 + q} \right]}{\sqrt{(2\sigma_x^2 + q)(2\sigma_y^2 + q)(2\gamma^2\sigma_z^2 + q)}} dq, \quad (4.1)$$

где  $r_e$  – классический радиус электрона,  $\gamma$  – релятивистский фактор,  $N_p$  – число частиц,  $\sigma_{x,y,z}$  – горизонтальный, вертикальный и продольный размеры пучка,  $2\theta$  – полный угол встречи,  $x, y, s$  – горизонтальная, вертикальная и продольная координата,  $z = s - ct$  – продольное отклонение частицы относительно центра пучка описывающее синхротронные колебания. Для простоты, пренебрегаю синхротронными колебаниями  $z = 0$  и записываю уравнения дви-



жения:

$$y'' = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{4N_p r_e}{\sqrt{\pi}} y \int_0^\infty \frac{\exp \left[ -\frac{(x+s2\theta)^2}{2\sigma_x^2+q} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2+q} - \frac{\gamma^2(2s)^2}{2\gamma^2\sigma_z^2+q} \right]}{\sqrt{(2\sigma_x^2+q)(2\sigma_y^2+q)^3(2\gamma^2\sigma_z^2+q)}} dq, \quad (4.2)$$

$$x'' = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{4N_p r_e}{\sqrt{\pi}} x \int_0^\infty \frac{\exp \left[ -\frac{(x+s2\theta)^2}{2\sigma_x^2+q} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2+q} - \frac{\gamma^2(2s)^2}{2\gamma^2\sigma_z^2+q} \right]}{\sqrt{(2\sigma_x^2+q)^3(2\sigma_y^2+q)(2\gamma^2\sigma_z^2+q)}} dq. \quad (4.3)$$

Для расчёта эффекта в кусочно-постоянном приближении, сосчитаю эффективную длину взаимодействия и средний радиус поворота  $\rho_{x,y}$ , при этом пренебрегаю зависимостью поперечных размеров  $\sigma_{x,y}$  от  $s$  (hour-glass эффект) и использую  $\sigma_x \gg \sigma_y$ . Средние значения вертикального  $\Delta y'$  и горизонтального  $\Delta x'$  толчков есть

$$\langle |\Delta y'| \rangle_{y,x+s2\theta=0} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{N_p r_e}{\gamma \sigma_x \sqrt{1+\phi^2}}, \quad (4.4)$$

$$\langle |\Delta x'| \rangle_{x,y=0} \approx \frac{\log \left( \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right)}{\sqrt{\pi}} \frac{N_p r_e}{\gamma \sigma_x \sqrt{1+\phi^2}}, \quad (4.5)$$

где  $\phi = \sigma_z \tan(\theta) / \sigma_x$  – угол Пивинского,  $\langle \rangle$  означает среднее значение по первому индексу с условием обозначенным во втором индексе. Величина обратная радиуса поворота считается как

$$\frac{1}{\rho_y} = \langle |y''| \rangle_{y,x+s2\theta=0} \approx \frac{N_p r_e}{\gamma \sigma_z \sigma_x}, \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{\rho_x} = \langle |x''| \rangle_{x,y=0} \approx \frac{\sqrt{2}}{\pi} \log \left( \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) \frac{N_p r_e}{\gamma \sigma_z \sigma_x}. \quad (4.7)$$

В итоге получаю эффективную длину взаимодействия

$$\begin{aligned} L = L_x = L_y &= \frac{\langle |\Delta y'| \rangle_{y,x+s2\theta=0}}{\langle |y''| \rangle_{y,x+s2\theta=0}} \\ &= \frac{\langle |\Delta x'| \rangle_{x,y=0}}{\langle |x''| \rangle_{x,y=0}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_z}{\sqrt{1+\phi^2}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Так как  $\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\sqrt{2}/\pi \approx 0.8$ , полагаю горизонтальный и вертикальный радиусы поворота одинаковыми и вычисляю полный радиус поворота  $\rho$

$$\frac{1}{\rho_x} \approx \frac{1}{\rho_y} \approx \frac{N_p r_e}{\gamma \sigma_z \sigma_x}, \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{1}{\rho_x^2} + \frac{1}{\rho_y^2}} \approx \frac{N_p r_e}{\gamma \sigma_x \sigma_z} \sqrt{2}. \quad (4.10)$$

Дополнительное излучение меняет радиационные интегралы [116]

$$\Delta I_2 = \frac{L}{\rho^2} N_{ip}, \quad (4.11)$$

$$\Delta I_3 = \frac{L}{\rho^3} N_{ip}, \quad (4.12)$$

где  $N_{ip}$  – это количество мест встречи.

Для наглядности перепису выражение для полного радиуса поворота через параметр пространственного заряда  $\xi_y$  [138] и эффективную длину взаимодействия  $L$

$$\xi_y = \frac{N_p r_e}{2\pi\gamma\varepsilon_y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{1+\phi^2}}, \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{\rho} = \xi_y \sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\beta_y}} \frac{2\pi^{3/2}}{L}, \quad (4.14)$$

где  $\varepsilon_y$  и  $\beta_y$  – вертикальный эмиттанс и бета функция в месте встречи соответственно.

Энергетический разброс в пучке вычисляется через синхротронные интеграла

$$\frac{\sigma_\delta^2}{\sigma_{\delta,syn}^2} = \frac{1 + \Delta I_3/I_3}{1 + \Delta I_2/I_2}, \quad (4.15)$$

если и дополнительные потери энергии на пучковое излучение малы по сравнению с потерями за оборот (то есть не меняется синхротронная частота), то и длина пучка изменяется аналогично

$$\frac{\sigma_z^2}{\sigma_{z,syn}^2} = \frac{1 + \Delta I_3/I_3}{1 + \Delta I_2/I_2}, \quad (4.16)$$

где индекс *syn* обозначает величины без учёта пучкового излучения.

Подстановка выражений (4.10), (4.11) и (4.12) в (4.15) и в (4.16) даёт уравнение, позволяющие найти новые равновесные величины энергетического разброса и длины пучка. Однако, получающееся уравнение имеет громоздкое выражение, поэтому удобнее решать его методом итераций, когда на каждом шаге вычисляются радиус поворота, синхротронные интегралы и энергетический разброс (длина пучка), но для следующего шага берётся среднее геометрическое энергетических разбросов от предыдущих двух итераций. Такой метод обеспечивает быструю сходимость результата, требуется около 10 итераций (рисунок 4.7).

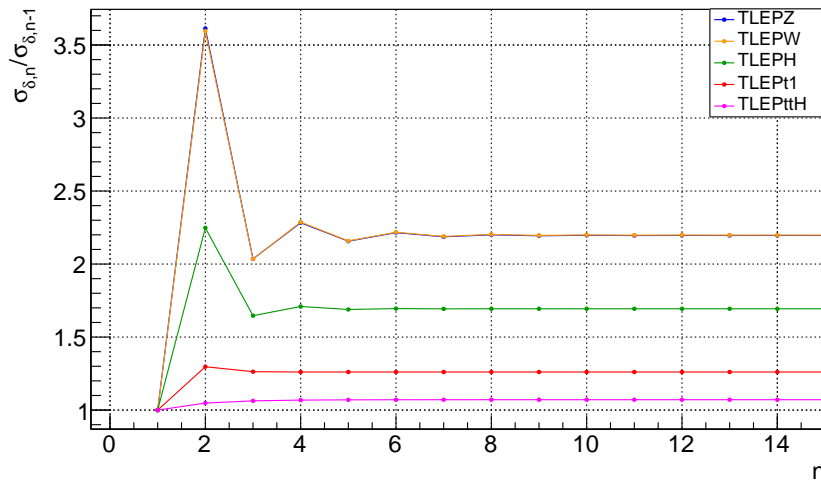


Рисунок 4.7 – Отношение энергетического разброса пучка на  $n$  шаге к величине разброса на  $n - 1$  шаге в зависимости от номера итерации для различных сценариев работы FCC-ee

Зная установившуюся длину пучка и следуя [160], записываю число излучённых фотонов с энергией большей  $\eta E_0$  [164], где  $\eta$  – энергетический акцептанс ускорителя,  $E_0$  – энергия пучка, и соответствующее время жизни пучка

$$N(u > \eta E_0) = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha r_e}{\eta}} \exp\left(-\frac{2\eta\alpha\rho}{3r_e\gamma^2}\right) \frac{L\gamma^2}{\rho^{3/2}}, \quad (4.17)$$

$$\tau_{bs} = \frac{1}{f_0 N N_{ip}} = \frac{1}{f_0 N_{ip}} \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \sqrt{\frac{\eta}{\alpha r_e}} \exp\left(\frac{2\eta\alpha\rho}{3r_e\gamma^2}\right) \frac{\rho^{3/2}}{L\gamma^2},$$

где  $\alpha$  – постоянная тонкой структуры.

С помощью полученных формул были предложены новые параметры FCC-ee (TLEP), которые хорошо согласуются с результатами компьютерного моде-

лирования в квази сильно-сильной модели программой Lifetrac [41; 165]. Новый набор параметров приведён в таблице 4.4. Сравнение результатов аналитического расчёта и компьютерного моделирования для нового и старого наборов параметров (рисунок 4.8) показывает увеличение светимости в 10 раз для сценария TLEPZ, в 2 раза для TLEPW и в 1.6 раза для TLEPH. Для сценариев TLEPt и TLEPtH светимость меньше, но получено приемлемое время жизни пучка. На рисунках “Lifetrac full” обозначает моделирование для старого набора параметров, “crab analytical” и “crab Lifetrac full” – аналитические расчёты (зелёные точки) и компьютерное моделирование (красные кресты) для нового набора параметров соответственно (таблица 4.4).

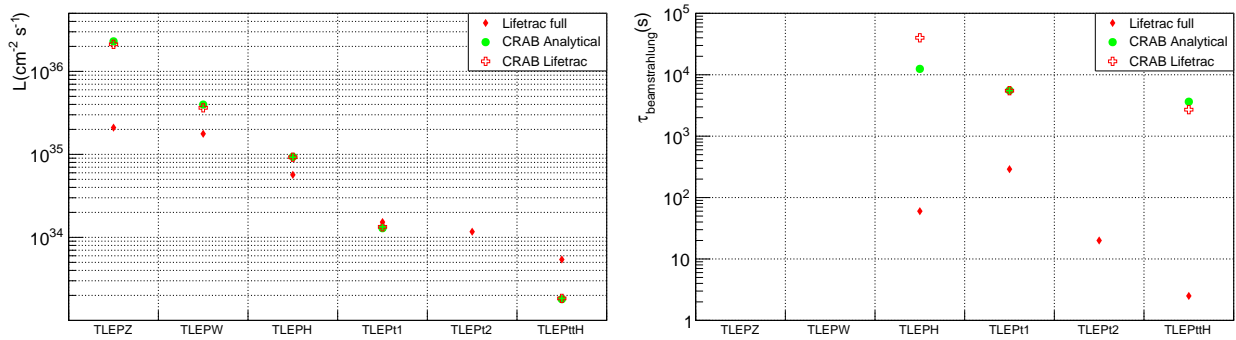


Рисунок 4.8 – Светимость (слева) и время жизни для разных сценариев FCC-ee (TLEP). Красные ромбы и красные кресты – компьютерное моделирование для старого и нового набора параметров соответственно; зелёные точки – аналитические расчёты для нового набора параметров

Длина пучка и энергетический разброс показаны на рисунке 4.9. Аналитические расчёты хорошо совпадают с компьютерным моделированием для сценариев TLEPH, TLEPt и TLEPtH, отличие на TLEPZ и TLEPW связано с тем, что аналитические расчёты не учитывают изменение горизонтального и вертикального эмиттансов из-за эффектов встречи.

Таблица 4.4 – Новый набор параметров FCC-ee в схеме пересечения под углом и крабовой перетяжки

	Z	W	H	t	ttH, ZHH
$\Pi[km]$	100				
$2\theta[mrad]$	30				
Current[mA]	1431	142	29	6.3	1.4
$N_{bunches}$	29791	739	127	33	6
$N_{particles}[10^{11}]$	1	4	4.7	4	5
$\varepsilon_x[nm]/\varepsilon_y[pm]$	0.14/1	0.44/2	1/2	2.1/4.25	4.34/8.68
$\beta_x^*[m]/\beta_y^*[m]$	0.5/0.001				
$V_{RF}[GV]$	0.54	1.35	3.6	11.4	34.2
$\nu_{syn}$	0.062	0.072	0.092	0.124	0.124
$\sigma_{s,syn}[mm]$	2.7	4.1	4.9	5.3	7.5
$\sigma_{\delta,syn}[10^{-3}]$	0.5	0.9	1.4	2	2.9
$\sigma_z[mm]$	5.9	9.1	8.2	6.6	8
$\sigma_\delta[10^{-3}]$	1.2	2.1	2.4	2.6	3.1
$\phi$	10.6	9.1	5.5	3	2.6
$L[mm]$	0.7	1.2	1.8	2.6	3.6
$F_{hg}$ hour-glass	0.94	0.86	0.78	0.7	0.61
$L/IP[10^{32}cm^{-2}s^{-1}]$	21200	3640	924	134	18
$\xi_x/IP$	0.032	0.031	0.029	0.024	0.014
$\xi_y/IP$	0.175	0.187	0.16	0.077	0.038
$\tau_L[s]$	2300	1300	1100	1800	2900
$\tau_{bs}(\eta = 2\%)[s]$	$> 10^{19}$	$> 10^6$	40000	5500	2700
$\tau_{  }[turns]$	1338	238	70	22	7
$U_{loss,SR}[GeV/turn]$	0.03	0.3	1.7	7.7	32
$P_{SR}[MW]$	50	50	50	49.1	46.3

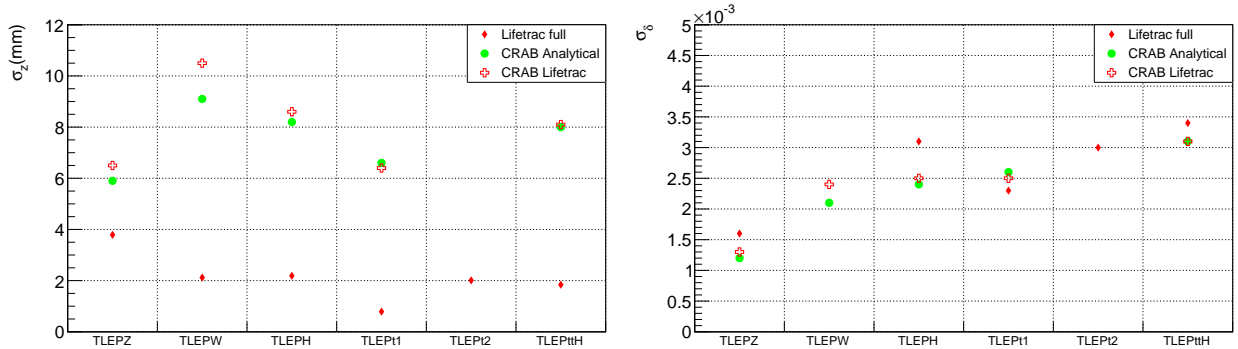


Рисунок 4.9 – Длина пучка (слева) и энергетический разброс (справа) для разных сценариев FCC-ee (TLEP). Красные ромбы и красные кресты – компьютерное моделирование для старого и нового набора параметров соответственно; зелёные точки – аналитические расчёты для нового набора параметров

### 4.3 Ограничение динамической апертуры

#### синхротронным излучением в квадрупольных линзах

В настоящее время разрабатываются два будущих электрон-позитронных коллайдера FCC-ee (CERN) [154] и CEPC (IHEP, China) [80] для проведения экспериментов в диапазоне энергий в системе центра масс от 90 ГэВ до 360 ГэВ. В этих проектах сильное синхротронное излучение (мощность  $\mathcal{P} \propto E^4$ ) оказывает значительное влияние на динамику пучка и производительность коллайдера, которое пренебрежимо мало на низких энергиях. Первый пример — это уменьшение светимости из-за потери частиц или из-за увеличения энергетического разброса и поперечного эмиттанса пучка [41], вызванных излучением частиц в поле встречного сгустка (пучковое излучение [161]), [160]. Следующий пример — это ограничение динамической апертуры, даже в отсутствии нелинейных магнитов, из-за излучения в квадрупольных линзах. Джон Джовет был первым кто обратил внимание на этот эффект в большом электрон-позитронном коллайдере (LEP, CERN) с максимальной энергией пучка в 100 ГэВ [31]. Он назвал этот эффект радиационной бета-синхротронной связью, суть которого в том, что частица с большими бетатронными амплитудами теряет больше энергии из-за излучения в квадрупольях, следовательно, равновесная

точка в продольном фазовом пространстве смещается и частица испытывает синхротронные колебания с большей амплитудой, что приводит к выходу частицы из области стабильного движения в продольном фазовом пространстве.

К.Ойде продемонстрировал уменьшение динамической апертуры в FCC [30] с помощью программы SAD [166]. Данное им объяснение опять было связано с возбуждением синхротронных колебаний дополнительными потерями на излучение в квадрупольях.

Проверка с помощью программ MADX-X PTC [106] и TracKing [167] подтвердила уменьшение динамической апертуры (рисунок 4.10). Однако, приведённое в этой главе, детальное рассмотрение явления показало отличные от объяснений Джовета и Ойде, и различающиеся механизмы потерь частиц с колебаниями в горизонтальной и вертикальной областях. Излучение в квадрупольях при больших горизонтальных амплитудах, действительно, сдвигает равновесную точку продольного движения, возбуждает большие синхротронные колебания и синхро-бетатронные резонансы, сдвигает горизонтальную частоту к целому резонансу (из-за нелинейных хромо-геометрических aberrаций) в соответствии с объяснениями Джовета и Ойде. Однако, при колебаниях в вертикальной плоскости излучение из квадрупольей существенно меньше, чем в случае горизонтальных колебаний, и не сдвигает так сильно равновесную точку продольных колебаний. Было обнаружено, что затухание вертикальных колебаний зависит от амплитуды колебаний, и начиная с некоторой сменяется возбуждением. Это есть проявление параметрического резонанса с трением. Излучение из квадрупольей (в основном только из финального фокуса) модулирует энергию частицы на двойной бетатронной частоте, поэтому вертикальная составляющая фокусирующей силы тоже колеблется на двойной бетатронной частоте, создавая бетатронный резонанс. Трение приводит к тому, что параметрический резонанс развивается только начиная с некоторых амплитуд. Удивительной свойство этого резонанса состоит в его независимости от бетатронной частоты, иначе говоря “самонаводящийся” резонанс.

### 4.3.1 Параметры и результаты наблюдений

На рисунке 4.10 показаны результаты моделирования динамической апертуры для структуры FCC-ее “FCCee\_z\_202\_nosol\_13.seq” на энергии пучка 45 ГэВ с помощью программ MADX-X PTC [106] и TracKing [167]. Добавле-

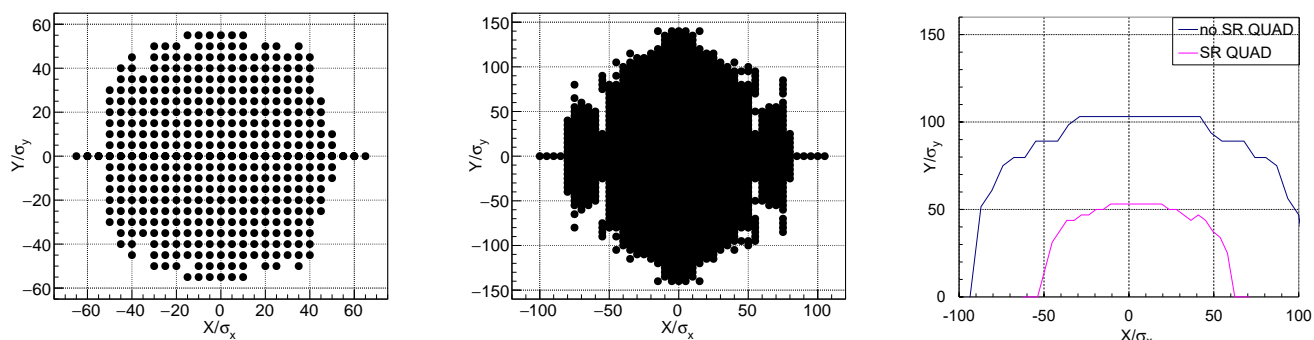


Рисунок 4.10 – Результаты компьютерного моделирования динамической апертуры: с помощью MADX PTC с синхротронным излучением из всех магнитных элементов (слева) и без синхротронного излучением из всех магнитных элементов (в центре), с помощью TracKing с синхротронным излучением из квадруполей (фиолетовая линия) и без (голубая линия) ние синхротронного излучения из квадруполей в моделирующие программы уменьшает динамическую апертуру:

- по вертикали от  $R_y = 142\sigma_y$  до  $R_y = 57\sigma_y$ ,
- по горизонтали от  $R_x = 109\sigma_x$  до  $R_x = 65\sigma_x$ .

Структура FCC-ее имеет два места встречи и в таблице 4.5 приведены необходимые параметры.

В таблице 4.6 приведены полные потери энергии на синхротронное излучение в различных магнитах. Для частиц с вертикальными колебаниями, потери энергии в линзах финального фокуса (ФФ) доминируют над потерями в квадруполях арок. Для частиц с горизонтальными колебаниями, потери энергии в линзах ФФ и арок сравнимы по величине и существенно превышают величины для вертикальных колебаний.



Таблица 4.5 – Параметры структуры FCC-ee

$E_0$ [ГэВ]	45.6
частоты: $\nu_x/\nu_y/\nu_s$	269.14/267.22/0.0413
времена затухания: $\tau_x/\tau_y/\tau_\sigma$ [оборотов]	2600/2600/1300
$\beta_x/\beta_y$ [м] в месте встречи	0.15/0.001
$\varepsilon_x/\varepsilon_y$ [м]	$2.7 \times 10^{-10}/9.6 \times 10^{-13}$
$\sigma_x/\sigma_y$ [м] в месте встречи	$6.3 \times 10^{-6}/3.1 \times 10^{-8}$
$\sigma_\delta$	$3.8 \times 10^{-4}$

Таблица 4.6 – Полные потери энергии из диполей, квадруполей финального фокуса  $QFF$ , фокусирующих  $QF$  и дефокусирующих  $QD$  квадруполей арок

Тип	Кол-во	$U(50\sigma_x)$ , МэВ	$U(50\sigma_y)$ , МэВ
Диполи	2900	35.96	
QFF	8	12	2
QF	1470	4.1	$3.7 \times 10^{-3}$
QD	1468	1.5	$1.5 \times 10^{-2}$

Усреднённые по бетатронным фазам потери энергии на излучение в квадруполях составляют

$$U_q = \frac{C_\gamma}{2\pi} E_0^4 \oint K_1^2(x^2 + y^2) ds = E_0 \Gamma \Pi [\langle K_1^2 \beta_x \rangle J_x + \langle K_1^2 \beta_y \rangle J_y] , \quad (4.18)$$

где  $\Gamma = \frac{C_\gamma E_0^4}{2\pi p_0 c}$  константа связанная с излучением,  $\Gamma = 1.3$  м при  $E_0 = 45.6$  ГэВ,  $\Pi$  — периметр ускорителя, угловые скобки обозначают усреднение по периметру  $\langle \dots \rangle = \oint \dots ds / \Pi$ , и

$$\begin{aligned} \langle K_1^2 \beta_x \rangle &= 4 \times 10^{-3} \text{ м}^{-3}, \\ \langle K_1^2 \beta_y \rangle &= 1.4 \times 10^{-1} \text{ м}^{-3}. \end{aligned}$$

Для понимания причин потери частиц интересно рассмотреть траектории частицы вблизи границы динамической апертуры. На рисунке 4.11 приведены

фазовые и временные траектории первой нестабильной частицы с начальными условиями  $y = 58\sigma_y$  и остальными пятью нулевыми. В плоскости продольных колебаний  $\{PT, T\}$  синхротронные колебания, возбуждённые дополнительными потерями энергии на излучение в квадрупольях, затухают, затем, что-то заставляет частицу выйти из положения равновесия. Так как продольные колебания затухли, они не могут быть источником неустойчивости. Горизонтальные колебания возбуждаются из-за нелинейной поперечной связи, но амплитуда колебаний не велика ( $< 5\sigma_x$  верхний левый график на рисунке 4.11). Следовательно, вертикальные колебания каким-то образом порождают неустойчивость.

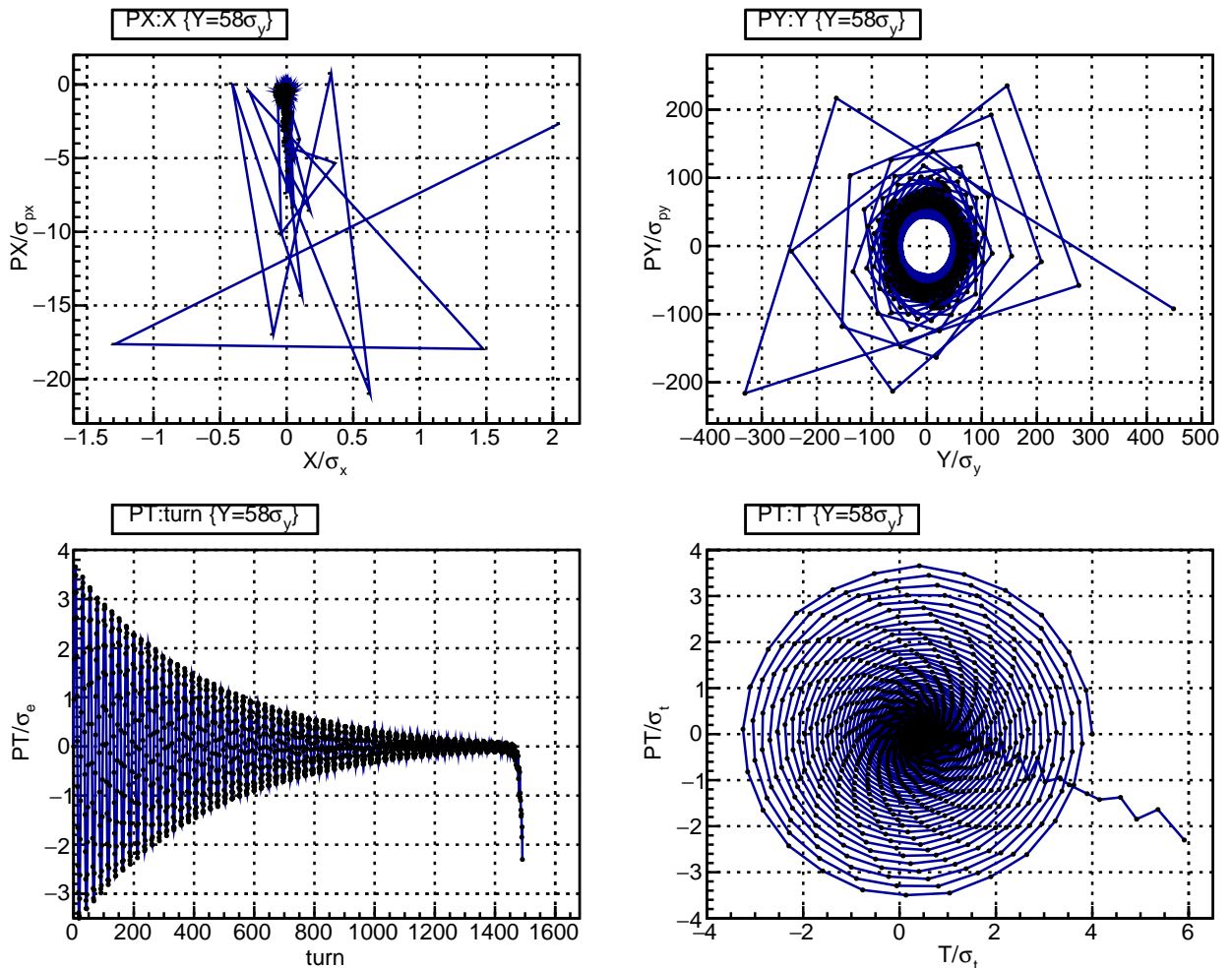


Рисунок 4.11 – Фазовые и временные траектории первой нестабильной частицы с начальными условиями  $\{x = 0, y = 58\sigma_y, p_x = 0, p_y = 0, \sigma = 0, p_\sigma = 0\}$

Неожиданные наблюдения появляются при изучении рисунка 4.12, на ко-

тором показаны временные эволюции вертикальной координаты частиц с начальными условиями вблизи границы динамической апертуры. Для малых начальных амплитуд вертикальные колебания экспоненциально затухают, как и ожидалось, но с увеличением начальной вертикальной амплитуды и доли потери энергии на излучение в квадрупольях, огибающая меняет форму (левый нижний график на рисунке 4.12), пока затухание не сменится возбуждением.

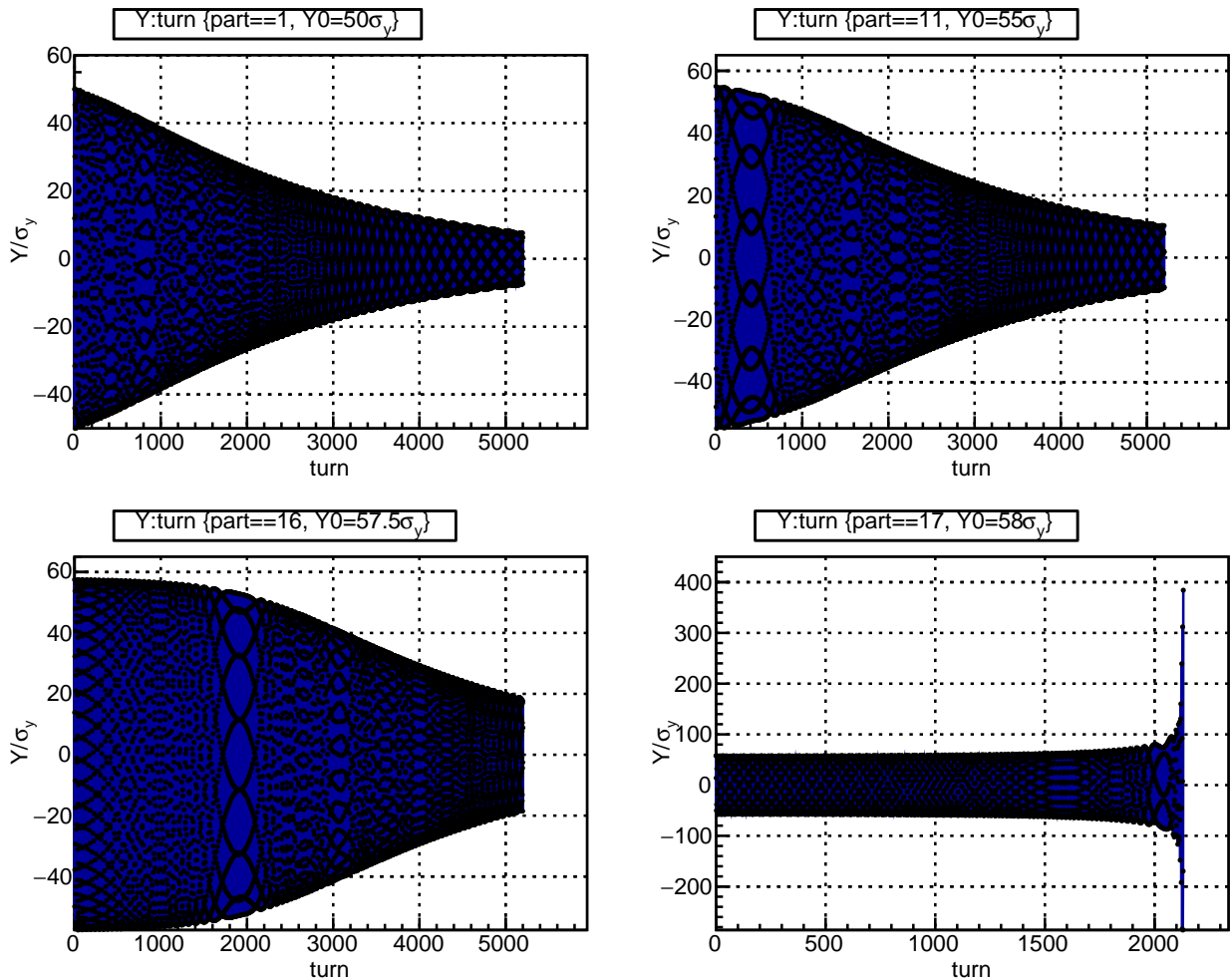


Рисунок 4.12 – Временная эволюция вертикальных колебаний для частиц с начальными условиями  $y = \{50; 55; 57.5; 58\} \times \sigma_y$ , горизонтальные координаты равны нулю, продольные выбраны с учётом новой равновесной точки

Совершенно другие наблюдения сделаны при изучении горизонтального движения для частиц с начальными условиями вблизи границы динамической апертуры. На рисунках 4.13 и 4.14 показаны фазовые и временные траектории первой неустойчивой частицы с начальными координатами  $x = 67.1\sigma_x$  и

остальными пятью нулевыми. Отсутствуют затухание и возбуждение в продольной плоскости  $\{PT, T\}$  как в случае вертикальных начальных условий на рисунке 4.11. На рисунке 4.14 правый график показывает изменение набеге бетатронной фазы частицы от номера оборота, действие частицы начинает расти на левом графике, когда набег фазы достигает целого.

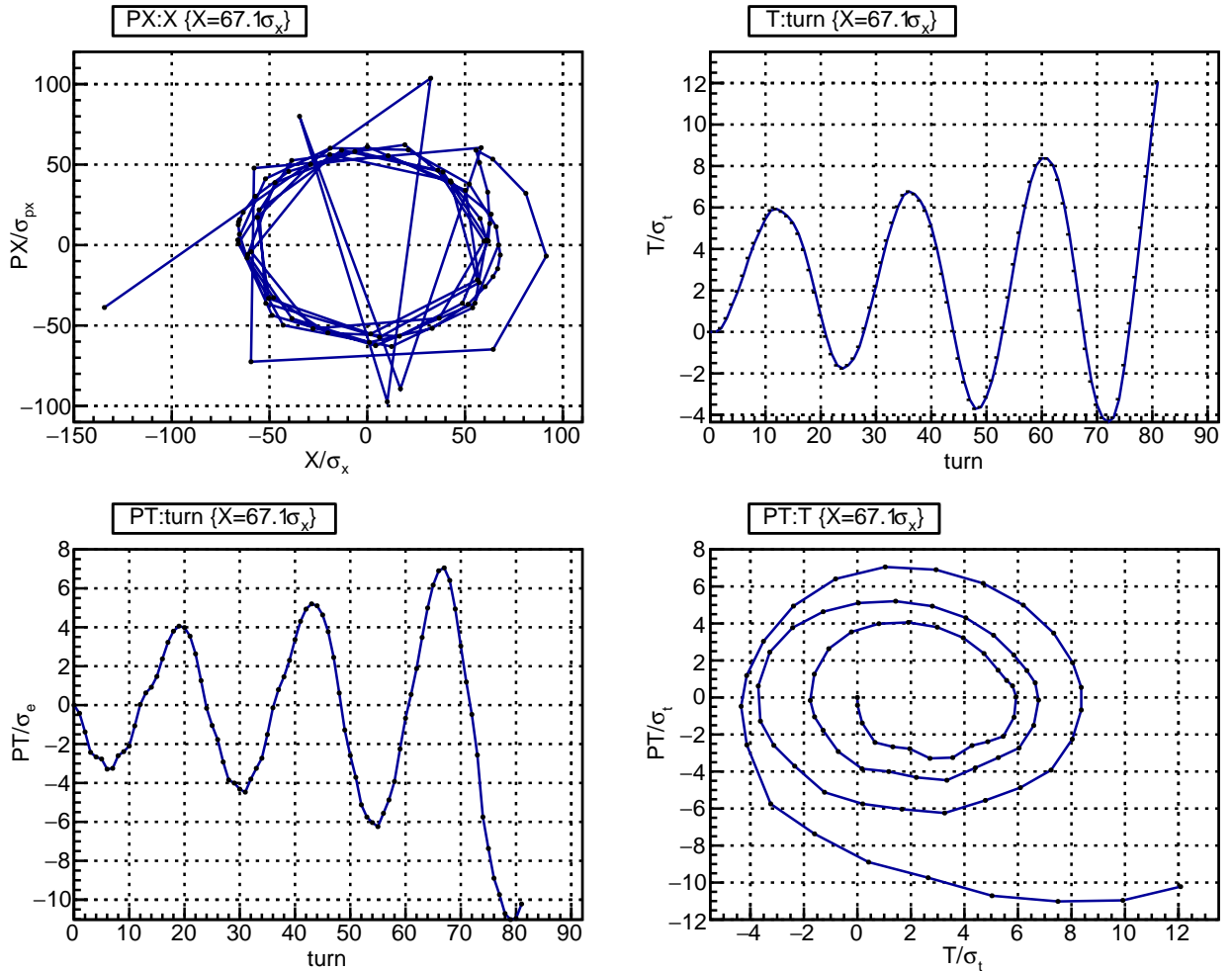


Рисунок 4.13 – Фазовые и временные траектории первой неустойчивой частицы с начальными координатами  $\{x = 67.1\sigma_x, y = 0, p_x = 0, p_y = 0, \sigma = 0, p_\sigma = 0\}$

Поперечная динамическая апертура FCC-ee без излучения ограничена хроматическими секступолями, Максвелловскими краевыми полями магнитов [168], кинематическим членом, описывающим в первом порядке непараксиальность траекторий. Все хроматические секступоли объединены в -I пары [30]. Такое объединение не имеет квадратичных геометрических аберраций, поэтому ведущие члены нелинейного возмущения имеют третий порядок. Динамиче-

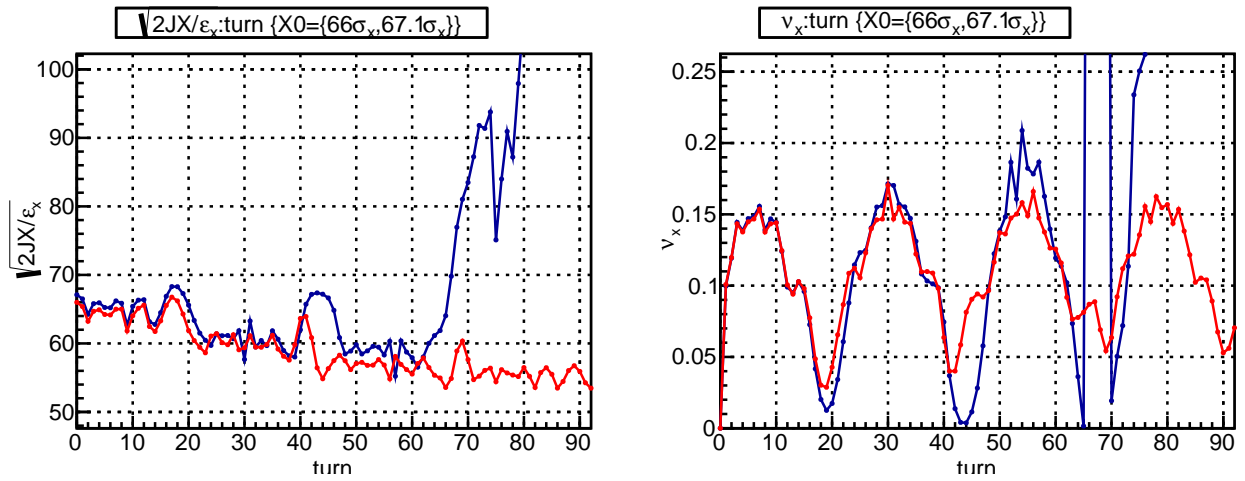


Рисунок 4.14 – Временная эволюция действия и бетатронной фазы для двух частиц: устойчивая (красная) с  $x_0 = 66\sigma_x$  и неустойчивая (голубая) с  $x_0 = 67.1\sigma_x$ , остальные пять координат нулевые. Квадратный корень действия слева. Отчётливо видны биения действия из-за синхо-бетатронной связи. Набег бетатронной фазы справа. Частица теряет устойчивость, когда набег фазы достигает целого значения

ская апертура оптимизирована с помощью метода SIMPLEX программы SAD. Каждая пара секступолей была использована независимо от других, обеспечивая более 300 степеней свободы. На рисунке 4.15 показано поведение бетатронных частот как функций начальных амплитуд. Обе частоты стремятся к ближайшему целому резонансу  $\nu_x = 269$ ,  $\nu_y = 267$  при увеличении начальной амплитуды. Однако, из-за симметрии потенциала, кубическая нелинейность

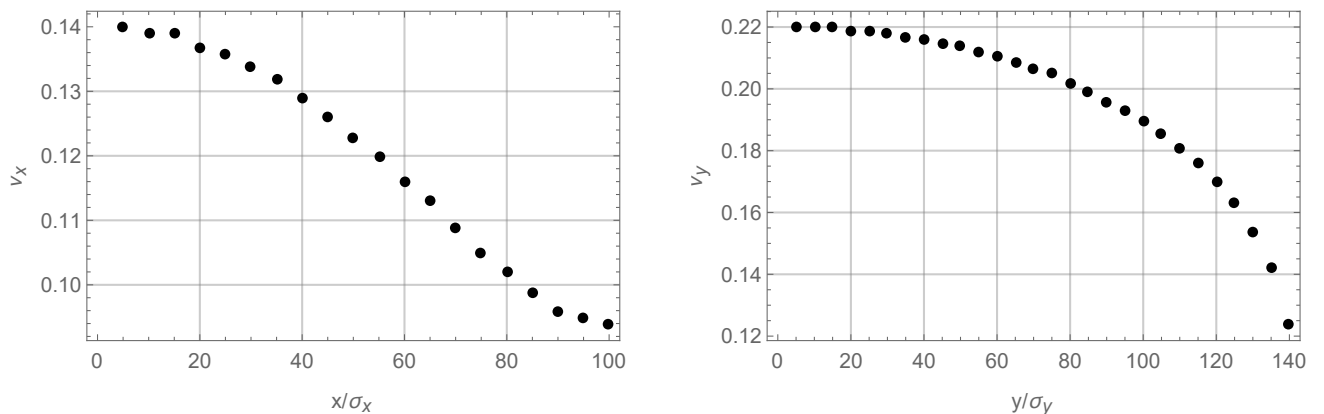


Рисунок 4.15 – Зависимость горизонтальной (слева) и вертикальной (справа) частот от соответствующих начальных амплитуд, остальные начальные координаты нулевые

не порождает целочисленный резонанс. Форма фазовых траекторий на рисун-

ке 4.16 показывает существование двух гиперболических стационарных точек на обоих графиках и двух резонансных островков в горизонтальной плоскости, это признаки полупростого резонанса  $2\nu_x = 538$ ,  $2\nu_y = 534$  присущего данному потенциалу.

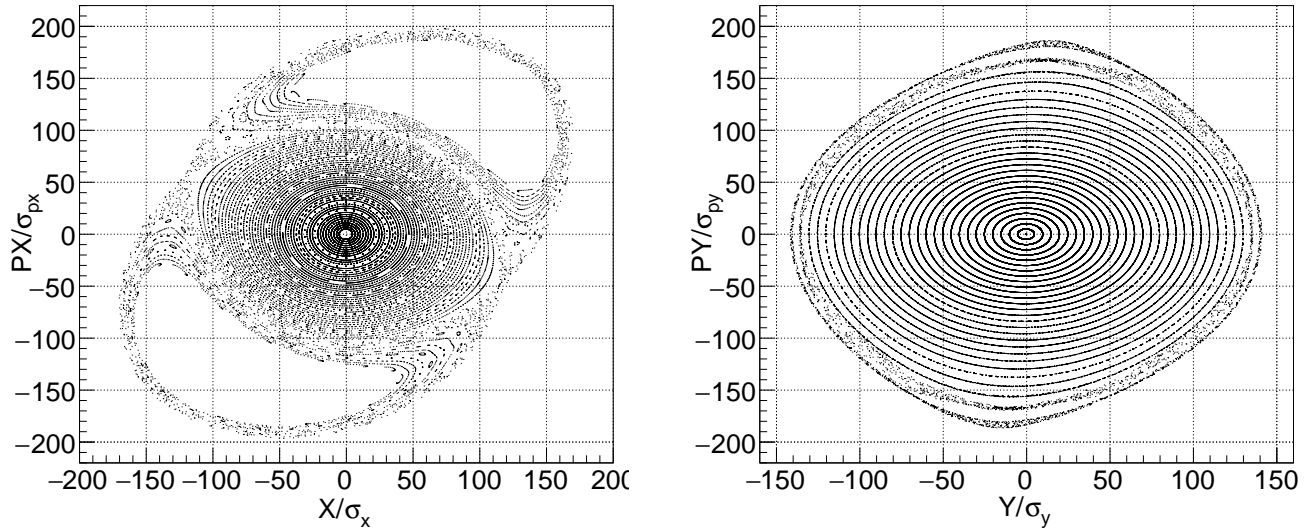


Рисунок 4.16 – Фазовые траектории из 4-х мерного моделирования: только горизонтальные начальные условия слева и только вертикальные начальные условия справа  $\sigma_x = 6.3 \times 10^{-6}$  м,  $\sigma_y = 3.1 \times 10^{-8}$  м

### 4.3.2 Уравнения движения с учётом излучения

Гамильтониан частицы с учётом излучения описывает движение как частицы, так и излученного электромагнитного поля. Так как целью является описание движения частицы, а не её поля, то в уравнения движения частицы без излучения добавляю слагаемые, описывающие изменение энергии и импульса частицы за счёт излучения [169].

Начинаю с гамильтониана, (A.15) в ультрарелятивистском приближении и с подставленными векторными потенциалами

$$\begin{aligned}
 H(x, \sigma, y, p_x, p_\sigma, p_y; s) = & 1 + p_\sigma + K_0 x + K_0^2 \frac{x^2}{2} \\
 & + K_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + K_2 \frac{x^3 - 3xy^2}{6} - (1 + K_0 x) \sqrt{(1 + p_\sigma)^2 - p_x^2 - p_y^2} \\
 & + \left( -\frac{eV_0}{p_0 c} \right) \frac{\lambda_{RF}}{2\pi} \cos \left( \phi_s + \frac{2\pi\sigma}{\lambda_{RF}} \right) \delta(s - s_0),
 \end{aligned} \quad (4.19)$$

где  $B\rho = -e/p_0c$ ,  $K_0 = B_y(0)/B\rho$  — кривизна базисной орбиты,  $K_1 = (dB_y/dx)/B\rho$  и  $K_2 = (d^2B_y/dx^2)/B\rho$  — это нормализованные силы квадруполья и секступолья соответственно,  $V_0$ ,  $\lambda_{RF}$  и  $\phi_s$  — амплитуда напряжения, длина волны и фаза ВЧ поля в резонаторе,  $s_0$  — координата нахождения точечного ВЧ резонатора.

Мощность излучения в пренебрежении массой электрона ( $\beta = v/c = 1$ ,  $E = pc$ ) есть

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= c \frac{C_\gamma}{2\pi} e^2 E^2 B^2 \\ &= c \frac{C_\gamma}{2\pi} E_0^4 (1 + 2p_\sigma)(K_0^2 + 2K_0K_1x + K_1^2(x^2 + y^2)) \\ &= c \frac{C_\gamma}{2\pi} E_0^4 (K_0^2(1 + 2p_\sigma) + 2K_0K_1x + K_1^2(x^2 + y^2)), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где  $B^2 = (B_y + xdB_y/dx)^2 + y^2(dB_y/dx)^2$ , и, ввиду малости, опущены слагаемые с  $p_\sigma^2$  и  $4K_0K_1xp_\sigma$ ,  $2K_1^2p_\sigma(x^2 + y^2)$ . В ультрарелятивистском приближении частица излучает вдоль импульса, тогда изменения энергии и трёх компонент импульса частицы за время излучения  $\Delta t$  следующие:

$$\Delta E = \mathcal{P} \Delta t = c \Delta t \frac{C_\gamma}{2\pi} E_0^4 (K_0^2(1 + 2p_\sigma) + 2K_0K_1x + K_1^2(x^2 + y^2)), \quad (4.21)$$

$$\Delta p_\sigma = \frac{\Delta E}{p_0c} = c \Delta t \frac{C_\gamma}{2\pi} \frac{E_0^4}{p_0c} (K_0^2(1 + 2p_\sigma) + 2K_0K_1x + K_1^2(x^2 + y^2)), \quad (4.22)$$

$$\Delta p_x = p_x \frac{\Delta E}{p_0c} = c \Delta t \frac{C_\gamma}{2\pi} \frac{E_0^4}{p_0c} p_x (K_0^2(1 + 2p_\sigma) + 2K_0K_1x + K_1^2(x^2 + y^2)), \quad (4.23)$$

$$\Delta p_y = p_y \frac{\Delta E}{p_0c} = c \Delta t \frac{C_\gamma}{2\pi} \frac{E_0^4}{p_0c} p_y (K_0^2(1 + 2p_\sigma) + 2K_0K_1x + K_1^2(x^2 + y^2)). \quad (4.24)$$

Добавляя полученные изменения импульсов к уравнениям движения разложенного до третьего порядка по всем переменным гамильтониана (4.19), получаю

конечные уравнения движения

$$x' = p_x - p_x p_\sigma \quad (4.25)$$

$$p'_x = K_0 p_\sigma - x(K_0^2 + K_1) - K_2 \frac{x^2 - y^2}{2} - \Gamma p_x [K_0^2(1 + 2p_\sigma) + x(2K_0K_1 + K_0^3) + K_1^2(x^2 + y^2)] \quad (4.26)$$

$$y' = p_y - p_y p_\sigma \quad (4.27)$$

$$p'_y = yK_1 + K_2 xy - \Gamma p_y [K_0^2(1 + 2p_\sigma) + x(2K_0K_1 + K_0^3) + K_1^2(x^2 + y^2)] \quad (4.28)$$

$$\sigma' = -K_0 x - \frac{p_x^2}{2} - \frac{p_y^2}{2} \quad (4.29)$$

$$p'_\sigma = \left( -\frac{eV_0}{p_0 c} \right) \left( \sin \phi_s + \frac{2\pi\sigma}{\lambda_{RF}} \cos \phi_s \right) \delta(s - s_0) - \Gamma [K_0^2(1 + 2p_\sigma) + x(2K_0K_1 + K_0^3) + K_1^2(x^2 + y^2)], \quad (4.30)$$

где  $\Gamma = \frac{C_\gamma E_0^4}{2\pi p_0 c}$ , и связанный с ВЧ  $\cos(\dots)$  разложен по  $\sigma$  до первого порядка. Замечу, что излучение из квадрупольных производит нелинейные слагаемые  $\Gamma K_1^2 p_{x,y} x^2$ ,  $\Gamma K_1^2 p_{x,y} y^2$  в уравнениях (4.26) и (4.28), подобные же слагаемые появляются и от краевого поля квадрупольного [168]. Однако, их влияние мало, поэтому они будут опущены.

### 4.3.3 Решение продольных уравнений движения

Так как период синхротронных колебаний (25 оборотов) существенно меньше времени затухания поперечного движения (2600 оборотов) (таблица 4.5), то полагаю поперечные амплитуды колебаний независимыми от времени, что позволяет решать несвязанные уравнения. Для начала рассматриваю только вертикальные колебания, считая горизонтальные малыми. Разделяя горизонтальное движение на бетатронную и дисперсионную части  $x = x_\beta + \eta p_\sigma$ ,  $p_x = p_{x\beta} + \xi p_\sigma$  и пренебрегая бетатронным движением  $x_\beta = 0$ ,  $p_{x\beta} = 0$ , получаю



следующие уравнения

$$\sigma' = -K_0\eta p_\sigma - \xi^2 \frac{p_\sigma^2}{2} - \frac{p_z^2}{2} \quad (4.31)$$

$$p'_\sigma = \left( -\frac{eV_0}{p_0c} \right) \left( \sin \phi_s + \frac{2\pi\sigma}{\lambda_{RF}} \cos \phi_s \right) \delta(s - s_0) - \Gamma \left[ K_0^2 + p_\sigma(2K_0^2 + 2K_0K_1\eta + K_0^3\eta) + K_1^2(\eta^2 p_\sigma^2 + y^2) \right]. \quad (4.32)$$

Вертикальное движение через нелинейную связь возбуждает горизонтальные колебания (левый верхний график на рисунке 4.11), которые, однако, малы ( $\approx 5\sigma_x$  для  $y_0 = 58\sigma_y$ ), и в соответствии с таблицей 4.7 (вторую колонку нужно умножить на  $(5/67)^2 \approx 6 \cdot 10^{-3}$ ), возбуждённые горизонтальными продольные колебания на порядок меньше, чем возбуждённые вертикальным движением напрямую. Это наблюдение и дальнейшие численные оценки доказывают справедливость пренебрежения нелинейной связью.

Усреднение полученных уравнений за период обращения (как обычно делается для синхротронного движения) представляет знакомые величины: коэффициент уплотнения орбиты

$$\alpha = \langle K_0\eta \rangle = \frac{1}{\Pi} \oint K_0\eta ds, \quad (4.33)$$

относительные потери энергии в диполях за один оборот

$$\frac{1}{\Pi} \frac{U_0}{p_0c} = \Gamma \langle K_0^2 \rangle, \quad (4.34)$$

волновой вектор синхротронных колебаний

$$k_s^2 = \frac{\alpha}{\Pi} \left( -\frac{eV_0}{p_0c} \right) \frac{2\pi}{\lambda_{RF}} \cos \phi_s = \left( \frac{\nu_s}{R} \right)^2, \quad (4.35)$$

продольный декремент затухания

$$\begin{aligned} 2\alpha_\sigma[m^{-1}] &= \Gamma \langle (2K_0^2 + 2K_0K_1\eta + K_0^3\eta) \rangle \\ &= \frac{U_0}{\Pi p_0c} \left( 2 + \frac{\oint (2K_0K_1\eta + K_0^3\eta) ds}{\oint K_0^2 ds} \right) \\ &= \frac{U_0}{\Pi p_0c} \left( 2 + \frac{I_4}{I_2} \right), \end{aligned} \quad (4.36)$$

где  $\Pi = 2\pi R$  — периметр кольца,  $R$  — средний радиус, угловые скобки обозначают усреднение по периметру  $\langle \dots \rangle = \oint \dots ds/\Pi$ ,  $\nu_s$  — синхротронная частота, фаза ВЧ поля выбрана в соответствии с  $(-eV_0) \sin \phi_s = U_0$ ,  $I_4$  и  $I_2$  — синхротронные интегралы [116].

Факторы  $\langle \xi^2 \rangle$  и  $\langle K_1^2 \eta^2 \rangle$  малы, умножение их на  $p_\sigma^2$  делает их ещё более маленькими, поэтому ими пренебрегаю.

Нелинейные члены  $y^2$  и  $p_y^2$  преобразую с помощью общего решения в форме Флоке [62]

$$\begin{aligned} y &= A_y f_y + A_y^* f_y^* \\ p_y &= A_y f_y' + A_y^* f_y^{*'} \end{aligned} \quad (4.37)$$

где постоянная амплитуда  $A_y$  зависит от начальных условий,  $f_y$  — функция Флоке со следующими свойствами

$$f_y = \sqrt{\beta_y} e^{i\psi_y}, \quad (4.38)$$

$$\psi_y(s) = \int_0^s \frac{d\tau}{\beta_y(\tau)}, \quad (4.39)$$

$$f_y f_y^{*'} - f_y' f_y^* = -2i, \quad (4.40)$$

$$f_y' = \frac{1}{\sqrt{\beta_y}} \left( \frac{\beta_y'}{2} + i \right) e^{i\psi_y}, \quad (4.41)$$

$$f_y' f_y^{*'} = \frac{1}{\beta_y} \left[ \left( \frac{\beta_y'}{2} \right)^2 + 1 \right] = \gamma_y, \quad (4.42)$$

$$f_y'^2 = \frac{1}{\beta_y} \left[ \left( \frac{\beta_y'}{2} \right)^2 - 1 + i\beta_y' \right] e^{i2\psi_y}, \quad (4.43)$$

где  $i$  — это мнимая единица,  $\beta_y$  — вертикальная бета функция,  $\psi_y$  — набег бетатронной фазы. Итак,

$$\begin{aligned} y^2 &= (A_y f_y + A_y^* f_y^*)^2 = J_y \beta_y + A_y^2 f_y^2 + A_y^{*2} f_y^{*2}, \\ p_y^2 &= (A_y f_y' + A_y^* f_y^{*'})^2 = J_y \gamma_y + A_y^2 f_y'^2 + A_y^{*2} f_y^{*'}^2, \end{aligned} \quad (4.44)$$

где действие связано с амплитудой как  $J_y = 2A_y A_y^*$ , параметры Твисса  $\gamma_y = (1 + \alpha_y^2)/\beta_y$  и  $\alpha_y = -\beta_y'/2$ , ' обозначает производную  $d/ds$ .

Чтобы использовать метод усреднения Крылова-Боголюбова, разлагаю  $p_y^2$  и  $\Gamma K_1^2 y^2$  в ряд Фурье:

$$\Gamma K_1^2 y^2 = \Gamma K_1^2 \beta_y J_y + \Gamma A_y^2 e^{i2k_y s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{y,n} e^{in \frac{s}{R}} + \Gamma A_y^{*2} e^{-i2k_y s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{y,n}^* e^{-in \frac{s}{R}}, \quad (4.45)$$

$$p_y^2 = J_y \gamma_y + A_y^2 e^{i2k_y s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{y,n} e^{in \frac{s}{R}} + A_y^{*2} e^{-i2k_y s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{y,n}^* e^{-in \frac{s}{R}}, \quad (4.46)$$

где  $k_y = 2\pi\nu_y/\Pi = \nu_y/R$  есть волновой вектор вертикальных бетатронных колебаний с частотой  $\nu_y$ ,

$$\begin{aligned} F_{y,n} &= \frac{1}{\Pi} \int_0^\Pi K_1^2(s) f_y^2(s) e^{-i2k_y s - in \frac{s}{R}} ds \\ &= \frac{1}{\Pi} \int_0^\Pi K_1^2(s) \beta_y(s) e^{i(2\psi_y(s) - 2\nu_y \frac{s}{R} - n \frac{s}{R})} ds, \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} P_{y,n} &= \frac{1}{\Pi} \int_0^\Pi f_y^2(s) e^{-i2k_y s - in \frac{s}{R}} ds \\ &= \frac{1}{\Pi} \int_0^\Pi \frac{1}{\beta_y(s)} \left[ \left( \frac{\beta_y'(s)}{2} \right)^2 - 1 + i\beta_y'(s) \right] e^{i(2\psi_y(s) - 2\nu_y \frac{s}{R} - n \frac{s}{R})} ds. \end{aligned} \quad (4.48)$$

При усреднении уравнений (4.31) и (4.32) сохраняю постоянные и медленно меняющиеся слагаемые (Джовет сохранил постоянные и опустил медленные слагаемые в [169]), и получаю следующие уравнения движения

$$\sigma' = -\alpha p_\sigma - J_y \frac{\langle \gamma_y \rangle}{2} - \frac{A_y^2}{2} P_{y,n} e^{i \frac{s}{R} (2\nu_y + n)} - \frac{A_y^{*2}}{2} P_{y,n}^* e^{-i \frac{s}{R} (2\nu_y + n)}, \quad (4.49)$$

$$p'_\sigma = \frac{k_s^2}{\alpha} \sigma - 2\alpha_\sigma p_\sigma - \Gamma \langle K_1^2 \beta_y \rangle J_y - \Gamma A_y^2 F_{y,n} e^{i \frac{s}{R} (2\nu_y + n)} - \Gamma A_y^{*2} F_{y,n}^* e^{-i \frac{s}{R} (2\nu_y + n)}, \quad (4.50)$$

где  $n = -[2\nu_y]$  — это отрицательная целая часть удвоенной бетатронной частоты и единственная медленно меняющаяся гармоника.

## Синхронная точка (фаза)

Приравнивая нулю правые части уравнение (4.49) и (4.50) и выбрасывая осциллирующие члены получаю выражения для синхронной точки в продоль-

ной плоскости

$$\sigma = -\frac{\alpha_\sigma}{k_s^2} \langle \gamma_y \rangle J_y + \frac{\alpha}{k_s^2} \Gamma \langle K_1^2 \beta_y \rangle J_y \quad (4.51)$$

$$p_\sigma = -\frac{1}{2\alpha} \langle \gamma_y \rangle J_y, \quad (4.52)$$

где член с  $\Gamma$  описывает дополнительные потери энергии за счёт излучения в квадрупольях, остальные слагаемые описывают удлинение траектории частицы. Джовет получил подобные выражения в [31] и [170].

Частица с отличающимися от синхронной точки начальными условиями будет испытывать синхротронные колебания, обладающие продольным инвариантом

$$\sigma^2 + \frac{\alpha^2}{k_s^2} p_\sigma^2 = const, \quad (4.53)$$

с помощью которого нахожу максимальное отклонение энергии частицы

$$p_{\sigma,max} = J_y \sqrt{\left( -\frac{\alpha_\sigma \langle \gamma_y \rangle}{k_s \alpha} + \frac{\Gamma \langle K_1^2 \beta_y \rangle}{k_s} \right)^2 + \frac{\langle \gamma_y \rangle^2}{4\alpha^2}}. \quad (4.54)$$

### Общее решение без осциллирующих членов

Общее решение уравнений (4.49) и (4.50) без осциллирующих членов состоит из постоянного сдвига и двух слагаемых, описывающих затухание синхротронных колебаний (только для  $p_\sigma$ )

$$p_\sigma = -\frac{\langle \gamma_y \rangle}{2\alpha} J_y + B_1 e^{-\alpha_\sigma s} \cos\left(s\sqrt{k_s^2 - \alpha_\sigma^2}\right) + B_2 e^{-\alpha_\sigma s} \sin\left(s\sqrt{k_s^2 - \alpha_\sigma^2}\right), \quad (4.55)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  константы, зависящие от начальных условий.

### Частное решение

Вводя обозначение  $\varkappa_y = (2\nu_y + n)/R$  (волновой вектор дробной части удвоенной бетатронной частоты) и преобразуя систему дифференциальных уравне-

ний первого порядка (4.49) и (4.50) в уравнение второго порядка, получаю

$$p''_{\sigma} + k_s^2 p_{\sigma} + 2\alpha_{\sigma} p'_{\sigma} = -A_y^2 \left( \frac{k_s^2}{2\alpha} P_{y,n} + i\Gamma \varkappa_y F_{y,n} \right) e^{i\varkappa_y s} - A_y^{*2} \left( \frac{k_s^2}{2\alpha} P_{y,n}^* - i\Gamma \varkappa_y F_{y,n}^* \right) e^{-i\varkappa_y s}. \quad (4.56)$$

Частное решение уравнения (4.56) есть

$$p_{\sigma} = -\frac{A_y^2 \left( \frac{k_s^2}{2\alpha} P_{y,n} + i\Gamma \varkappa_y F_{y,n} \right)}{k_s^2 - \varkappa_y^2 + i2\varkappa_y \alpha_{\sigma}} e^{i\varkappa_y s} - \frac{A_y^{*2} \left( \frac{k_s^2}{2\alpha} P_{y,n}^* - i\Gamma \varkappa_y F_{y,n}^* \right)}{k_s^2 - \varkappa_y^2 - i2\varkappa_y \alpha_{\sigma}} e^{-i\varkappa_y s}. \quad (4.57)$$

Так как справедливы следующие неравенства

$$\varkappa_y \gg k_s \gg \alpha_{\sigma}, \quad (4.58)$$

$$\Gamma \varkappa_y |F_{y,n}| \gg \frac{k_s^2}{2\alpha} |P_{y,n}|, \quad (4.59)$$

то перепишу решение в виде

$$p_{\sigma} \approx iA_y^2 \frac{\Gamma F_{y,n}}{\varkappa_y} e^{i\varkappa_y s} - iA_y^{*2} \frac{\Gamma F_{y,n}^*}{\varkappa_y} e^{-i\varkappa_y s}. \quad (4.60)$$

Решения (4.57) и (4.60) не должны зависеть от начальной бетатронной фазы  $\varphi_y$ , потому что при усреднении за период обращения теряется информация о начальной фазе. Поэтому, заменяю комплексную амплитуду  $A_y = |A_y| \exp(i\varphi_y)$  на её абсолютное значение  $|A_y|$ . Записывая решение в удобной форме, имею

$$p_{\sigma} = c_n |A_y|^2 e^{i\varkappa_y s} + c_n^* |A_y|^2 e^{-i\varkappa_y s} = |c_n| J_y \cos(\varkappa_y s + \chi_0), \quad (4.61)$$

где  $\chi_0 = \arg(c_n)$  и

$$c_n = -\frac{\left( \frac{k_s^2}{2\alpha} P_{y,n} + i\Gamma \varkappa_y F_{y,n} \right)}{k_s^2 - \varkappa_y^2 + i2\varkappa_y \alpha_{\sigma}} \approx i \frac{\Gamma F_{y,n}}{\varkappa_y}. \quad (4.62)$$

#### 4.3.4 Решение вертикальных уравнений движения

С использованием таких же предположений как в предыдущем параграфе, уравнения (4.27) и (4.28) становятся

$$y' = p_y - p_y p_{\sigma}, \quad (4.63)$$

$$p'_y = K_1 y + K_2 \eta p_{\sigma} y - \Gamma p_y [K_0^2 + p_{\sigma} D + K_1^2 y^2], \quad (4.64)$$

где коэффициент  $D = 2K_0^2 + 2K_0K_1\eta + K_0^3\eta$  для машин с раздельными функциями пренебрежим мал, пренебрегаю также и слагаемым  $\Gamma p_y K_1^2 \eta^2 p_\sigma^2$ . Можно применить метод усреднения Крылова-Боголюбова непосредственно к уравнениям (4.63), (4.64), но более наглядно если применить его к дифференциальному уравнению второго порядка  $y''$ . При выводе уравнения пренебрегаю членами содержащими  $p'_\sigma$ , потому что они колеблются либо на частоте синхротронных колебаний, либо на дробной части удвоенной бетатронной частоты, и после взятия производной умножатся на маленький фактор. Искомое уравнение есть

$$y'' - (K_1 - (K_1 - K_2\eta)p_\sigma) y + \Gamma (K_0^2 + K_1^2 y^2) y' = 0. \quad (4.65)$$

Это уравнение параметрического резонанса с трением; второе слагаемое зависит от  $p_\sigma$ , которое содержит члены колеблющиеся на удвоенной бетатронной частоте (4.61). Это также и уравнение Ван-дер-Поля, из-за нелинейного трения, описываемого вторым членом в третьем слагаемом. Джовет получил уравнение Ван-дер-Поля для нелинейного виглера (совмещённые квадруполь и секступоль) в [170]. Большого влияния нелинейного трения не было обнаружено, поэтому пренебрегаю им.

Подставляя выражение для  $p_\sigma$ , пренебрегаю постоянным сдвигом и затухающими синхротронными колебаниями (4.55), сохраняю только частное решение (4.61) осциллирующее на дробной части удвоенной бетатронной частоты, то есть рассматриваю параметрический резонанс. Используя общее решение для  $y$  (4.37), усредняю, сохраняя только медленно меняющиеся члены, получаю уравнение для амплитуды

$$\begin{aligned} (-2i)A'_y &= A_y \langle \Gamma K_0^2 (-\alpha_y + i) \rangle \\ &+ |A_y|^2 A_y^* |c_n| \left\langle (K_1 - K_2\eta) \beta_y e^{i(-2\psi_y + \alpha_y s + \chi_0)} \right\rangle \\ &- 3A_y^2 A_y^* \langle \Gamma K_1^2 \beta_y \alpha_y \rangle + iA_y^2 A_y^* \langle \Gamma K_1^2 \beta_y \rangle. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Слагаемые  $\langle \Gamma K_1^2 \beta_y \alpha_y \rangle$  и  $\langle \Gamma K_1^2 \beta_y \rangle$  малы, пренебрегая ими получаю

$$\begin{aligned} A'_y &= -\frac{1}{2} \langle \Gamma K_0^2 (1 + i\alpha_y) \rangle A_y \\ &\quad + \frac{i}{2} |c_n| \left\langle (K_1 - K_2 \eta) \beta_y e^{i(-2\psi_y + \mathfrak{A}_y s + \chi_0)} \right\rangle |A_y|^2 A_y^* \\ &= -B_1 A_y + iB_2 |A_y|^2 A_y^*. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Действительная часть полученного уравнения описывает эволюция  $|A_y|$  (т.е. затухание), мнимая часть описывает изменение бетатронной частоты. При этом введены коэффициенты

$$B_1 = \frac{1}{2} \langle \Gamma K_0^2 (1 + i\alpha_y) \rangle \quad (4.68)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} c_n \left\langle (K_1 - K_2 \eta) \beta_y e^{i(-2\psi_y + \mathfrak{A}_y s)} \right\rangle, \quad (4.69)$$

где выражение в угловых скобках коэффициента  $B_2$  можно назвать локальным хроматизмом, который не исчезает при компенсации глобального хроматизма.

Разделяя модуль и аргумент амплитуды  $A_y = a_y e^{i\varphi_y}$ ,  $B_1 = |B_1| e^{i\varphi_1}$ ,  $B_2 = |B_2| e^{i\varphi_2}$  и подставляя в уравнение (4.67), получаю два уравнения

$$a'_y = -a_y |B_1| \cos(\varphi_1) - a_y^3 |B_2| \sin(-2\varphi_y + \varphi_2), \quad (4.70)$$

$$\varphi'_y = -|B_1| \sin(\varphi_1) + a_y^2 |B_2| \cos(-2\varphi_y + \varphi_2), \quad (4.71)$$

где коэффициент  $|B_1| \sin(\varphi_1) = \text{Im}(B_1) = \frac{1}{2} \langle \Gamma K_0^2 \alpha_y \rangle \approx 0$  мал и описывает изменение бетатронной частоты из-за затухания; пренебрежение им эквивалентно принятию  $\varphi_1 = 0$ . Второе слагаемое в уравнении (4.71) описывает зависимость частоты от амплитуды. Уравнение (4.70) и (4.71) имеют сложную топологию в пространстве  $\{a_y, \varphi_y\}$  (приложение Д.1, Д.2, Д.3), в котором существуют две стационарные точки обеспечивающие  $\varphi'_y = 0$

$$\varphi_y = \frac{\varphi_2}{2} \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad (4.72)$$

где  $n$  целое. В этих точках модуль амплитуды есть

$$a_y(s) = \frac{a_{y,0} e^{-|B_1|s}}{\sqrt{1 \pm a_{y,0}^2 \frac{|B_2|}{|B_1|} (1 - e^{-|B_1|s})}}, \quad (4.73)$$

используя связь амплитуды и действия  $J_y = 2A_y A_y^* = 2a_y^2$  имею

$$J_y(s) = \frac{J_{y,0} e^{-2|B_1|s}}{1 \pm J_{y,0} \frac{|B_2|}{2|B_1|} (1 - e^{-2|B_1|s})}. \quad (4.74)$$

Решение со знаком «+» описывает всегда затухающую амплитуду (стабильную), знак «-», в зависимости от начального действия, описывает либо затухающее решение (стабильное) или расходящееся (нестабильное). Величина действия разделяющее стабильное решение от нестабильного определяет динамическую апертуру и составляет

$$J_{y,lim} = \frac{2|B_1|}{|B_2|}. \quad (4.75)$$

Существование начальных амплитуд со стабильным движением на параметрическом резонансе обязано трению, в данном случае радиационному затуханию.

### 4.3.5 Продольное и горизонтальное движение

Уравнения связанного горизонтального и продольного движения (4.25), (4.26), (4.29), (4.30) с  $y = 0$  и  $p_y = 0$  похожи на вертикальные и продольные (4.27), (4.28) с  $x_\beta = 0$ ,  $p_{x\beta} = 0$ . Уникальное для горизонтального движения слагаемое  $K_0 p_\sigma$  в (4.26) производит дисперсию, а  $-K_0 x_\beta$  в (4.29) порождает синхро-бетатронный резонанс  $\nu_x \pm \nu_s = \text{целое}$ . Таблица 4.7 показывает, что сдвиг синхронной точки и амплитуда синхротронных колебаний существенно больше для горизонтального движения (вторая колонка), чем для вертикального (третья колонка) на границе динамической апертуры. Рассматривание набега фазы за оборот на рисунке 4.14 (справа) позволяет сделать вывод, что частица теряется когда набег фазы за оборот достигает целого (65-ый оборот) и это происходит при  $p_\sigma = 7\sigma_\delta$ . Используя коэффициент зависимости частоты от амплитуды и его хроматизм с данными начальными условиями, сосчитанный вклад в сдвиг частоты от каждого члена приведён в таблице 4.8. Сумма последних трёх строчек в точности равна нулю, что означает, равенство частоты целому числу.



Таблица 4.7 – Синхронная точка и амплитуда синхротронных колебаний для различных поперечных начальных условий

$\{X_0, Y_0\}$	$\{67\sigma_x, 0\}$	$\{0, 58\sigma_y\}$
$p_{\sigma, max}/\sigma_\delta$	4	0.29
$p_{\sigma, syn}/\sigma_\delta$	-2.5	-0.025
$\sigma_{syn}/\sigma_s$	3.1	0.29

Таблица 4.8 – Сдвиг частоты от коэффициента зависимости частоты от амплитуды и от его хроматизма

$\frac{\partial \nu_x}{\partial J_x}$	$-5 \times 10^4$
$\frac{\partial^2 \nu_x}{\partial J_x \partial \delta}$	$-6.8 \times 10^7$
$J_x$	$67^2 \varepsilon_x / 2$
$p_\sigma$	$7\sigma_\delta$
$\Delta \nu_x = \frac{\partial \nu_x}{\partial J_x} J_x$	-0.03
$\Delta \nu_x = \frac{\partial^2 \nu_x}{\partial J_x \partial \delta} J_x p_\sigma$	-0.11
$\nu_x(J_x = 0, p_\sigma = 0)$	0.14

#### 4.3.6 Сравнение численных оценок и моделирования

##### Вертикальное движение

Для рассматриваемой структуры FCC-ее необходимые параметры есть  $n = -534$ ,  $\varkappa_y = 2.8 \times 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ ,  $k_s = 2.6 \times 10^{-6} \text{ м}^{-1}$ . Величины гармоник (4.47), (4.48) и (4.62) составляют

$$\begin{aligned}
 F_{y,n} &= (-0.14, 3 \times 10^{-5}) \text{ м}^{-3} & |F_{y,n}| &= 0.14 \text{ м}^{-3} \\
 P_{y,n} &= (-0.13, 0.0006) \text{ м}^{-1} & |P_{y,n}| &= 0.13 \text{ м}^{-1} \\
 c_n &= (-42.11, -6474.19) \text{ м}^{-1} & |c_n| &= 6474.33 \text{ м}^{-1},
 \end{aligned}$$

где комплексные величины записаны как реальная и мнимая части в скобках ( $Re, Im$ ). Численные значения подтверждают неравенство (4.59)

$$\begin{aligned}\Gamma \alpha_y |F_{y,n}| &= 5.13 \times 10^{-6} \\ \frac{k_s^2}{2\alpha} |P_{y,n}| &= 3.22 \times 10^{-8}.\end{aligned}$$

Коэффициенты (4.68) и (4.69) равны

$$\begin{aligned}B_1 &= (4.03 \times 10^{-9}, -2.76 \times 10^{-10}) \text{ м}^{-1} \\ |B_1| &= 4.04 \times 10^{-9} \text{ м}^{-1} \\ B_2 &= (10.35, 6.43) \text{ м}^{-2} \\ |B_2| &= 12.18 \text{ м}^{-2}.\end{aligned}$$

Вычисленная по (4.75) граница динамической апертуры

$$R_y = \sqrt{2J_{y,lim}\beta_y} = 37.2\sigma_y, \quad (4.76)$$

которую необходимо сравнить с результатом полученным в моделировании  $R_y = 57\sigma_y$ . Детальное исследование моделирования показало, что поперечная нелинейная связь (неучтённая в аналитическом расчёте) уменьшает эффективную амплитуду вертикальных колебаний, поэтому величина продольной гармоники, порождающей параметрический резонанс примерно в два раза меньше приведённых оценок. Учитывая эту поправку увеличивает оценку динамической апертуры до  $R_y \approx 37.2 \times \sqrt{2}\sigma_y = 52.6\sigma_y$ , что уже хорошо совпадает с результатом моделирования.

Сравнение продольных фазовых траекторий, полученных из моделирования (рисунок 4.11) и, полученных решением продольных уравнений (4.49) и (4.50) (рисунок 4.17) доказывает правильность аналитического анализа. Рисунок 4.17 показывает численное решение продольных уравнение (4.49) и (4.50) с вертикальным действием в форме (4.74), соответствующим начальному условию  $y = 58\sigma_y$ .

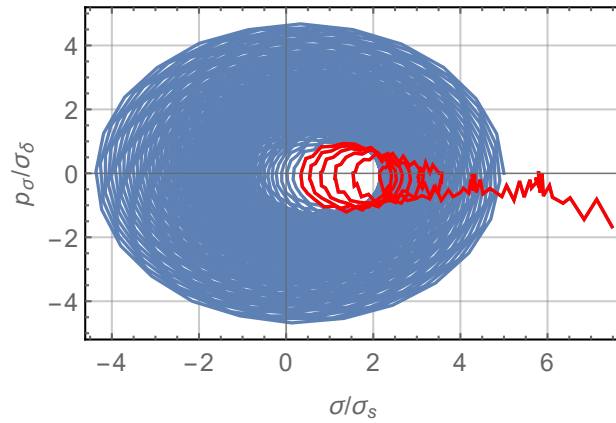


Рисунок 4.17 – Продольные фазовые траектории, полученные численным решением (4.49) и (4.50) с вертикальным действием в форме (4.74) соответствующим начальному условию  $y = 58\sigma_y$ . Последние 200 оборотов выделены красным. Сравните с нижним правым графиком на рисунке 4.11

На рисунке 4.18 приведено сравнение результатов моделирования и расчёта временной эволюции продольной координаты (синхронная фаза), начальные продольные условия были выбраны в соответствии с (4.52) и (4.51), чтобы исключить синхротронные колебания, для двух частиц с  $y = 50\sigma_y$  и  $y = 58\sigma_y$ .

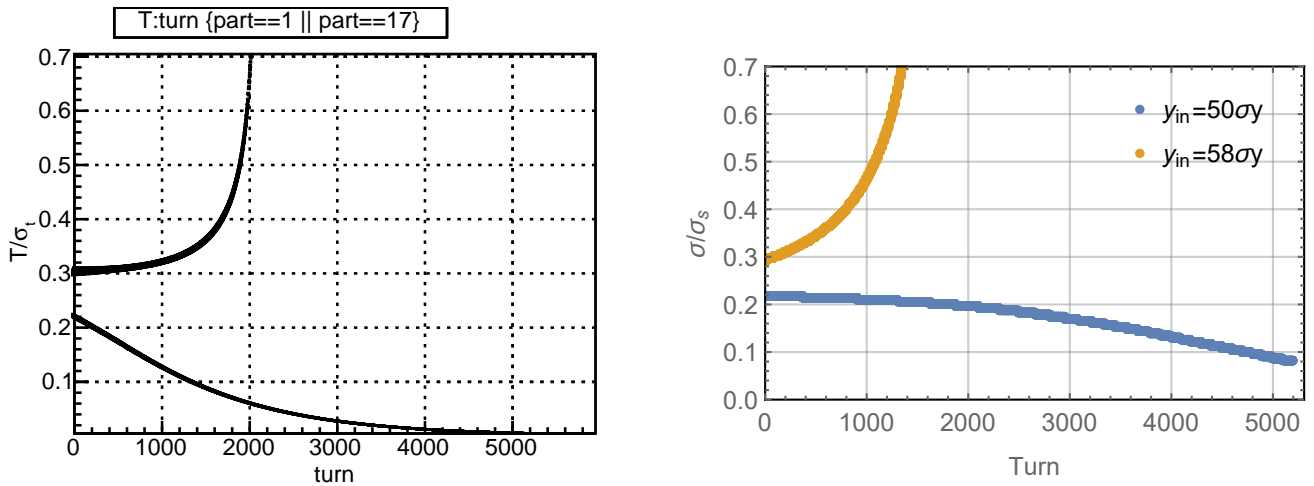


Рисунок 4.18 – Эволюция продольной координаты из моделирования (слева) и из расчётов по (4.51) и (4.52) (справа) для начальных условий  $y = 50\sigma_y$  и  $y = 58\sigma_y$  и соответствующими (4.51) и (4.52) продольными координатами

Спектры продольного и вертикального движения показаны на рисунке 4.19, доказывая существование в продольном движении гармоники на дробной части удвоенной бетатронной частоте. Расчитанная по (4.61) амплитуда гармони-

ки составляет  $p_\sigma = 2.8 \times 10^{-2} \sigma_\delta$ , что соответствует величине  $p_\sigma = 2.4 \times 10^{-2} \sigma_\delta$  на правом графике рисунка 4.19.

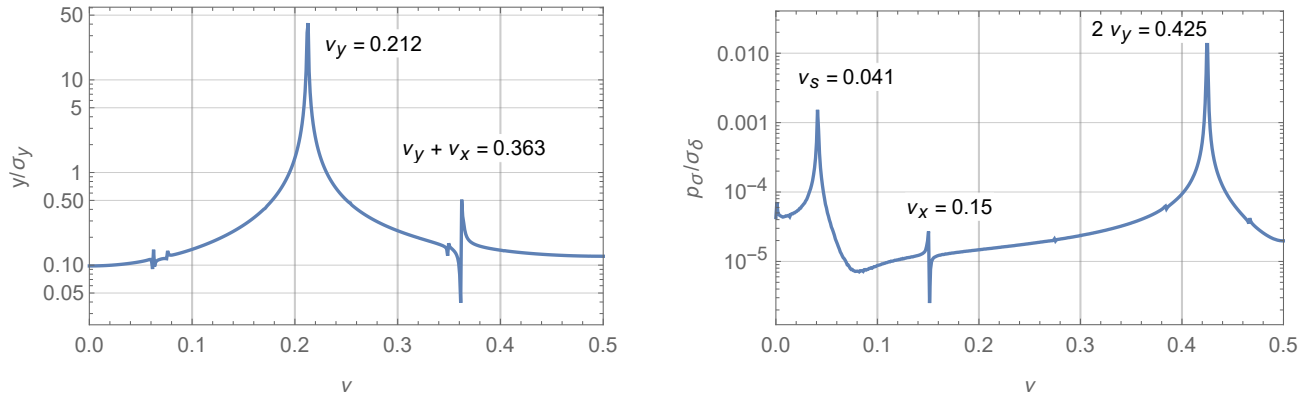


Рисунок 4.19 – Спектр вертикального (слева) и продольного (справа) движения, полученного в моделировании, с начальными условиями  $y = 58\sigma_y$ , продольные координаты соответствуют (4.51) и (4.52)

Сравнение моделирования и расчётов по (4.74) в эволюции вертикального действия приведено на рисунках 4.20 и 4.21. Граница области стабильного движения составляет  $57.5\sigma_y$  в моделировании и  $52.6\sigma_y$  в расчётах по (4.75).

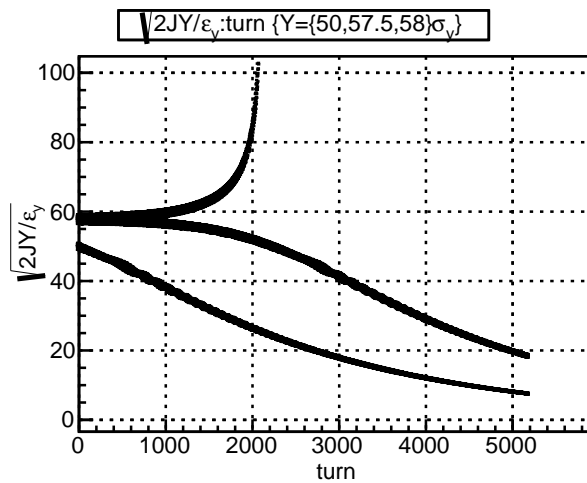


Рисунок 4.20 – Эволюция квадратного корня нормализованного вертикального действия в моделировании с начальными условиями  $y = 50\sigma_y$ ,  $y = 57.5\sigma_y$ ,  $y = 58\sigma_y$ , продольные координаты соответствуют (4.51) и (4.52)

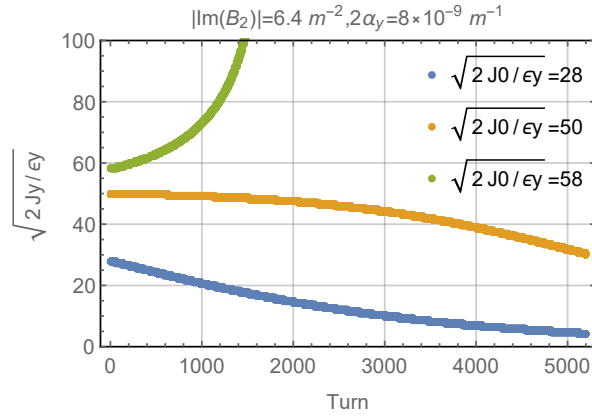


Рисунок 4.21 – Эволюция квадратного корня нормализованного вертикального действия в расчётах по (4.74) с начальными условиями  $y = 28\sigma_y$ ,  $y = 50\sigma_y$ ,  $y = 58\sigma_y$

### Горизонтальное действие

Для рассматриваемой структуры FCC-ее необходимые параметры есть  $n = -538$ ,  $\alpha_x = 1.8 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ ,  $k_s = 2.6 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$ . Величины гармоник (4.47), (4.48) и (4.62) составляют

$$\begin{aligned}
 F_{x,n} &= (-0.003, -1.5 \times 10^{-5}) \text{ m}^{-3} & |F_{x,n}| &= 0.003 \text{ m}^{-3} \\
 P_{x,n} &= (-0.004, -5 \times 10^{-4}) \text{ m}^{-1} & |P_{x,n}| &= 0.004 \text{ m}^{-1} \\
 c_n &= (-2.15, -214) \text{ m}^{-1} & |c_n| &= 214 \text{ m}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Гармоника  $|c_n|$  для горизонтального движения примерно в 30 раз меньше, чем для вертикального, поэтому модуляция продольного движения происходит на больших амплитудах, где частица уже неустойчива по причинам нелинейной динамики. Это подтверждается спектром горизонтального и продольного движения для частицы с начальным условием  $x = 95.5\sigma_x$  на рисунке 4.22.

#### 4.3.7 Выводы

Таким образом, в горизонтальной плоскости дополнительные потери энергии из-за излучения в квадрупольях сдвигают синхронную точку и возбуждают синхротронные колебания. Зависимость горизонтальной частоты от амплитуды поперечных колебаний и хроматизм этой зависимости сдвигают частоту к

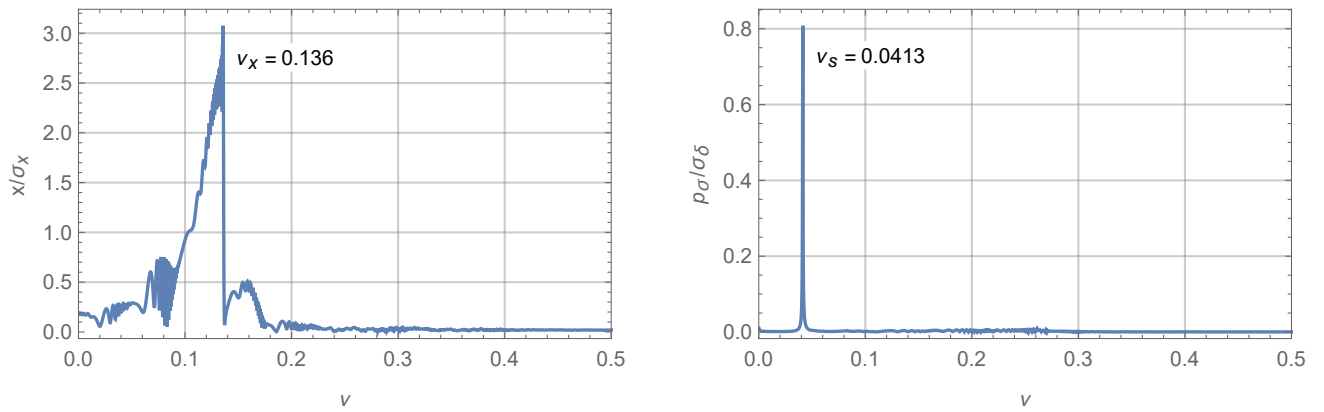


Рисунок 4.22 – Спектр горизонтального (слева) и продольного (справа) движения полученного в моделировании с начальным условием  $x = 95.5\sigma_x$ , и скорректированными продольными начальными условиями. Гармоника продольного движения на удвоенной бетатронной частоте слишком мала для наблюдения

целому резонансу, что приводит к потере частиц и ограничению динамической апертуры.

Ограничение динамической апертуры в вертикальной плоскости происходит из-за параметрического резонанса, с амплитудой модуляции пропорциональной квадрату амплитуды вертикальных колебаний. Излучение из квадруполь модулирует энергию частицы на удвоенной бетатронной частоте (дробная часть), поэтому и фокусирующая сила колеблется на удвоенной бетатронной частоте, создавая условия параметрического резонанса. Благодаря трению (радиационное затухание), частицы становятся неустойчивыми при превышении порога по амплитуде колебаний. Отличительное свойство этого резонанса — это его появление на любой частоте, а не только на удвоенной основной, своего рода “самонаводящийся параметрический резонанс”.

Порог неустойчивого движения определяется гармоникой (4.47) (см. также (4.75), (4.69), (4.62)). Так как для вертикального движения основной вклад в гармонику создаётся линзами финального фокуса, то расположение линз нескольких мест встречи через  $\pi/2$  набега вертикальной бетатронной фазы уменьшит величину гармоники, и увеличит величину порога.

## Глава 5

## Энергия и энергетическое разрешение в системе центра масс

Проведение экспериментов на установках со встречными пучками требует не только высокой светимости, но и знания энергии в системе центра масс (ЭЦМ). Светимость определяет статистическую ошибку результатов эксперимента, другими словами как много событий изучаемого эффекта будет зарегистрировано, а неопределённость знания средней ЭЦМ создаёт систематические ошибки, то есть как точно измерены свойства эффекта.

Для определения ЭЦМ проводят калибровку энергии одного или обоих пучков и вычисляют среднюю ЭЦМ, используя измеренные параметры распределения пучков. Каждый шаг этой процедуры имеет свои неточности, поэтому конечная ошибка ЭЦМ требует скрупулёзного анализа различных эффектов связанных с динамикой пучка в ускорителе. Автором был проведён такой анализ в кандидатской диссертации [171] на примере экспериментов по прецизионному измерению масс  $J/\Psi$ - и  $\Psi'$ - мезонов [58—61; 172] на ускорительном комплексе ВЭПП-4М.

Цикл экспериментов на низкой энергии завершён. По результатам этих экспериментов измерения масс  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  мезонов обладают рекордной в мире точностью, а относительная точность этих измерений сравнивается с измерениями масс  $\pi$  мезонов [173]. В таблице 5.1 приведены некоторые результаты экспериментов на коллайдере ВЭПП-4М с детектором КЕДР [174], наиболее точные измерения помечены звёздочкой.

В настоящее время начаты работы на более высокой энергии ВЭПП-4М с целью уточнения масс  $\Upsilon$ -мезонов. И в этих экспериментах знание ЭЦМ, анализ возможных погрешностей имеют первоочередное значение.

В этой главе приведены результаты такого анализа для экспериментов

Таблица 5.1 – Результаты экспериментов на коллайдера ВЭПП-4М с детектором КЕДР

Частица	Масса	$\Gamma$
$J/\psi$ -мезон	* $3096.900 \pm 0.002 \pm 0.006$ МэВ	* $92.45 \pm 1.40 \pm 1.48$ кэВ
$\eta_c$ -мезон	$2983.5 \pm 1.4_{-3.6}^{+1.6}$ МэВ	$27.2 \pm 3.1_{-2.6}^{+5.4}$ МэВ
$\psi(2S)$ -мезон	* $3686.099 \pm 0.004 \pm 0.009$ МэВ	$296 \pm 2 \pm 8 \pm 3$ кэВ
$\psi(3770)$ -мезон	$3779.8 \pm 0.6$ МэВ	$25.8 \pm 1.3$ МэВ
$\tau$ лептон	$1776.69_{-0.19}^{+0.17} \pm 0.15$ МэВ	
$D^\pm$ -мезон	* $1869.53 \pm 0.49 \pm 0.20$ МэВ	
$D^0$ -мезон	$1865.30 \pm 0.33 \pm 0.23$ МэВ	

по изучению  $\Upsilon$ -мезона на ВЭПП-4М (энергия пучка  $E = 4.75$  ГэВ). Обсуждение возможных ошибок калибровки энергии столкновений, рассмотрение их источников интересно и для экспериментов на FCC-ee (с энергиями пучка  $E = 45$  ГэВ и  $E = 80$  ГэВ).

## 5.1 Средневзвешенная по светимости энергия

Прецизионные эксперименты на сталкивающихся пучках требуют определения энергии в системе центра масс, то есть инвариантной массы  $M$ , которая зависит как от распределения частиц пучка по энергии и по углам, так и от параметров этих распределений: средних энергий пучков, среднеквадратичных значений углового и энергетического разбросов. Однако, этих величин не достаточно для определения энергии в системе центра масс (ЭЦМ), необходимо знание энергетического и пространственного распределения частиц в сталкивающихся пучках, которые обычно предполагаются нормальными. Увеличение светимости коллайдеров достигается путём уменьшения значений бета функций в месте встречи, что приводит к большому хроматизму бета функций (параграф 1.7). В результате, распределение пучка в месте встречи становится несимметричным, и значительно сдвигает среднюю по светимости инвариант-



ную массу столкновения частиц.

### Инвариантная масса

Для сталкивающихся частиц с четырёх-импульсом  $P_1^\mu = \{E_1, \mathbf{p}_1\}$  и  $P_2^\mu = \{E_2, \mathbf{p}_2\}$ ,  $P^\mu = P_1^\mu + P_2^\mu$  инвариантная масса записывается как

$$M^2 = P^\mu P_\mu = 2m_e^2 + 2E_1 E_2 - 2\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \quad (5.1)$$

где  $E_1, E_2$  и  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  – энергии и импульсы двух сталкивающихся частиц (электрона и позитрона),  $m_e$  – масса электрона. Пренебрегая массой электрона и полагая скорость света  $c = 1$ , имею равенство энергии и импульса  $E = |\mathbf{p}|$ . Усредняя по поперечным углам  $x' = p_x/p_0$  и  $y' = p_y/p_0$ , получаю средний квадрат и среднее значение инвариантной массы

$$\begin{aligned} \langle M^2 \rangle_{x', y'} &= 2E_0^2 (1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2) (1 + \cos(2\theta)) \\ &\quad - 2E_0^2 (\sigma_{x'}^2 + \sigma_{y'}^2) \cos(2\theta) + O(3), \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_{x', y'} &= 2E_0 \left[ 1 - \frac{(\delta_1 - \delta_2)^2}{8} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \right] \cos(\theta) \\ &\quad - \frac{E_0}{2} \sigma_{x'}^2 \cos(\theta) - \frac{E_0}{2} \sigma_{y'}^2 \frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)} + O(3), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $2\theta$  – полный угол пересечения,  $\delta_{1,2} = (E_{(1,2)} - E_0)/E_0$  – относительные отклонения энергии от среднего значения энергии пучка  $E_0$ ,  $\sigma_{x'}$  и  $\sigma_{y'}$  – среднеквадратичные значения угловых разбросов, которые считаю равными для обоих пучков,  $p_0$  – средний импульс частиц в пучке.

### Хроматизм бета функции и дисперсия

Хроматизм бета функции и дисперсия в месте встречи нарушают симметрию распределения плотности частиц по энергии. Следовательно и распределения светимости по энергии в системе центра масс не симметрично, и приводит к систематическому сдвигу средней инвариантной массы.

Для встречи под углом и при наличии горизонтальной  $\psi_x$  и вертикальной  $\psi_y$  дисперсий, распределения частиц по координатам и относительным отклонениям энергии для обоих пучков записываются как

$$n_1(x, y, s, t, \delta_1) = \frac{N_1}{(2\pi)^{4/2} \sigma_{x,1} \sigma_{y,1} \sigma_z \sigma_\delta} \exp \left[ -\frac{(x \cos \theta + s \sin \theta - \psi_{x,1} \delta_1)^2}{2\sigma_{x,1}^2} - \frac{(y - \psi_{y,1} \delta_1)^2}{2\sigma_{y,1}^2} - \frac{(-x \sin \theta + s \cos \theta - ct)^2}{2\sigma_z^2} - \frac{\delta_1^2}{2\sigma_\delta^2} \right], \quad (5.4)$$

$$n_2(x, y, s, t, \delta_2) = \frac{N_2}{(2\pi)^{4/2} \sigma_{x,2} \sigma_{y,2} \sigma_z \sigma_\delta} \exp \left[ -\frac{(x \cos \theta - s \sin \theta - \psi_{x,2} \delta_2)^2}{2\sigma_{x,2}^2} - \frac{(y - \psi_{y,2} \delta_2)^2}{2\sigma_{y,2}^2} - \frac{(-x \sin \theta + s \cos \theta + ct)^2}{2\sigma_z^2} - \frac{\delta_2^2}{2\sigma_\delta^2} \right], \quad (5.5)$$

где индексы 1 и 2 относятся к первому и второму пучкам соответственно, бетатронные размеры пучков включают хроматизм бета функции  $\beta_{x,y}' = d\beta_{x,y}^*/d\delta$

$$\sigma_{x,y}^2 = \varepsilon_{x,y} \beta_{x,y}^* + \beta_{x,y}'^* \delta. \quad (5.6)$$

Однопролётная светимость вычисляется по формуле (3.11) [133; 134]

$$\mathcal{L} = (1 + \cos(2\theta)) \int n_1(x, y, s, t, \delta_1) n_2(x, y, s, t, \delta_2) dx dy ds dt d\delta_1 d\delta_2. \quad (5.7)$$

Пренебрегая зависимостью размеров от азимута (hour-glass эффект), вычисляю интегралы по поперечным и продольным координатам, и получаю распределения светимости по относительным отклонениям энергии сталкивающихся частиц

$$\frac{d^2 \mathcal{L}}{d\delta_1 d\delta_2} = \frac{1}{4\pi^2 \sigma_\delta^2} \frac{1}{\Sigma_y \Sigma_x \sqrt{1 + \varphi^2}} \times \exp \left[ -\frac{(\psi_{y,1} \delta_1 - \psi_{y,2} \delta_2)^2}{2\Sigma_y^2} - \frac{(\psi_{x,1} \delta_1 - \psi_{x,2} \delta_2)^2}{2\Sigma_x^2 (1 + \varphi^2)} - \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{2\sigma_\delta^2} \right], \quad (5.8)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_{x,y}^2 &= 2\varepsilon_{x,y} \beta_{x,y}^* + \varepsilon_{x,y} \beta_{x,y}'^* (\delta_1 + \delta_2), \\ \varphi &= \frac{2\sigma_z}{\Sigma_x} \tan \theta. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Делая замену переменных

$$\begin{aligned} v &= \delta_1 - \delta_2, \\ \delta_t &= \delta_1 + \delta_2 = \frac{E_1 + E_2 - 2E_0}{E_0}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

и интегрируя по  $dv$ , получаю распределение светимости по  $\delta_t$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{d\delta_t} &= \frac{N_1 N_2}{4\pi\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sigma_\delta \Sigma_y \Sigma_x \sqrt{1+\varphi^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_\delta^2(\psi_{y,1} + \psi_{y,2})^2}{2\Sigma_y^2} + \frac{\sigma_\delta^2(\psi_{x,1} + \psi_{x,2})^2}{2\Sigma_x^2(1+\varphi^2)}}} \\ &\times \exp \left[ -\frac{\delta_t^2}{4\sigma_\delta^2} \right. \\ &\times \left. \frac{1 + \frac{\sigma_\delta^2(\psi_{y,1}^2 + \psi_{y,2}^2)}{\Sigma_y^2} + \frac{\sigma_\delta^2(\psi_{x,1}^2 + \psi_{x,2}^2)}{\Sigma_x^2(1+\varphi^2)} + \frac{\sigma_\delta^4(\psi_{x,2}\psi_{y,1} - \psi_{x,1}\psi_{y,2})^2}{\Sigma_x^2 \Sigma_y^2 (1+\varphi^2)}}{1 + \frac{\sigma_\delta^2(\psi_{y,1} + \psi_{y,2})^2}{2\Sigma_y^2} + \frac{\sigma_\delta^2(\psi_{x,1} + \psi_{x,2})^2}{2\Sigma_x^2(1+\varphi^2)}} \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Обычно в месте встречи дисперсии отсутствуют, но может присутствовать паразитная дисперсия, имеющая разные знаки для встречных пучков  $\psi_y = \psi_{y,1} = -\psi_{y,2}$  и  $\psi_x = \psi_{x,1} = -\psi_{x,2}$ , тогда выражение (5.11) частично упрощается

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{d\delta_t} &= \frac{N_1 N_2}{4\pi\sqrt{\pi}} \frac{1}{E_0 \sigma_\delta \Sigma_y \Sigma_x \sqrt{1+\varphi^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_\delta^2(\psi_{y,1} + \psi_{y,2})^2}{2\Sigma_y^2} + \frac{\sigma_\delta^2(\psi_{x,1} + \psi_{x,2})^2}{2\Sigma_x^2(1+\varphi^2)}}} \\ &\times \exp \left[ -\frac{\delta_t^2}{4\sigma_\delta^2} \left( 1 + \frac{2\sigma_\delta^2\psi_y^2}{\Sigma_y^2} + \frac{2\sigma_\delta^2\psi_x^2}{\Sigma_x^2(1+\varphi^2)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Довольно трудно аналитически сосчитать среднюю  $\delta_t$  из полученных распределений светимости (5.11) и (5.12) с учётом (5.9), поэтому проводилось Монте-Карло моделирование, а оценка сдвига средней инвариантной массы вычислялась в соответствии

$$M \approx E_0(2 + \delta_t), \quad (5.13)$$

где используется малость угла встречи  $\cos(\theta) \approx 1$ . Более точное вычисление должно проводиться с учётом сечения исследуемого процесса.

Для примера, на рисунке 5.1 показаны распределения светимости по  $\delta_t$  с нулевым и заданным хроматизмами бета функций для структуры FCCee

на энергии 45.6 ГэВ. Статистически достоверно смещение среднего значения энергии на величину  $\Delta M / E_0 = -1.1 \cdot 10^{-5} \pm 2 \cdot 10^{-7}$ .

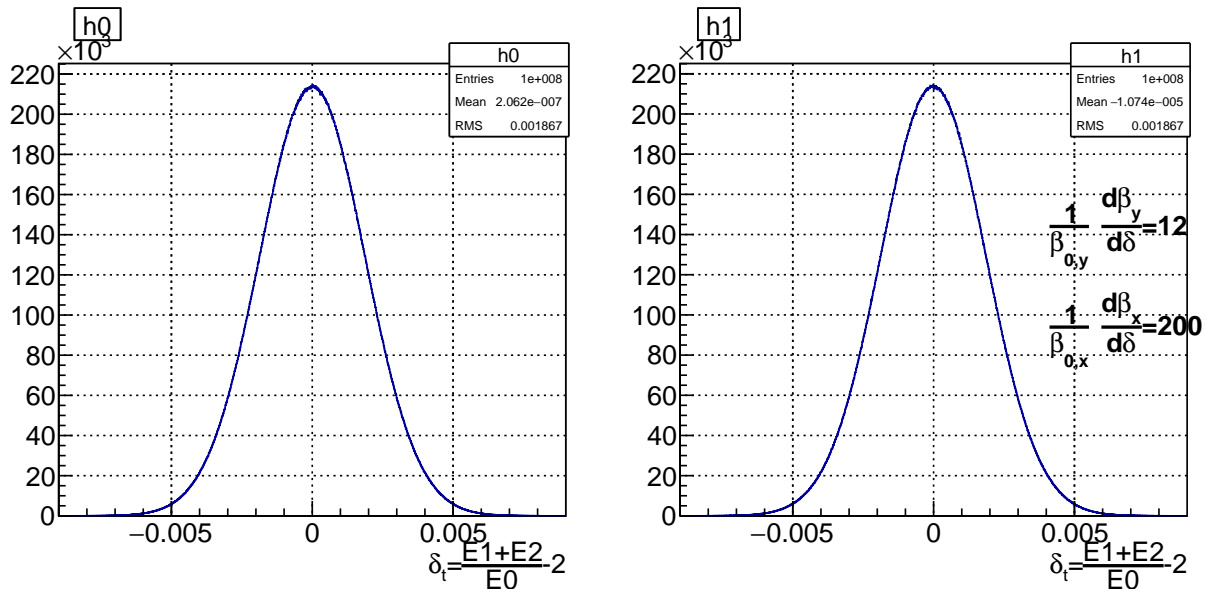


Рисунок 5.1 – Распределение светимости по  $\delta_t$  на FCC-ee при энергии пучка  $E_0 = 45.6$  ГэВ (структура FCCee\_z\_202\_nosol\_18)

## 5.2 Поправки энергии на FCC-ee в экспериментах на энергии 45 ГэВ и 80 ГэВ

Калибровка энергии пучка методом резонансной деполяризации (РД) [39; 40] запланирована в экспериментах по прецизионному измерению масс  $Z$  бозона (энергия пучка  $E_0 = 45.6$  ГэВ) с точностью лучшей 100 кэВ (относительная точность  $\Delta E/E_0 \lesssim 2 \cdot 10^{-6}$ ) и  $W$  бозона (энергия пучка  $E_0 = 80$  ГэВ) с точностью 500 кэВ ( $\Delta E/E_0 \lesssim 6 \cdot 10^{-6}$ ) [22]. Калибровка будет осуществляться на сгустках, не участвующих в столкновениях, что оказывается существенным для определения энергии пучка. В этом параграфе приведены основные эффекты определяющие запланированную точность калибровки энергии и определения ЭЦМ.

### 5.2.1 Хроматизм коэффициента уплотнения орбиты

В ускорителе с плоскими орбитами (что означает отсутствие электрических, радиальных, продольных полей на равновесной траектории) спин прецессирует вокруг направления вертикального ведущего поля с частотой

$$W = \Omega(1 + \gamma q'/q_0), \quad (5.14)$$

где  $\Omega$  — частота обращения частицы,  $\gamma$  — релятивистский фактор,  $q'/q_0 = 1.15965218091 \cdot 10^{-3} \pm 0.26 \cdot 10^{-12}$  — отношение аномальной и нормальной частей гиромангнитного отношения. Использование безразмерной частоты спиновой прецессии  $\nu = W/\Omega - 1 = \gamma q'/q_0$  позволяет написать простое выражение для энергии  $E$

$$E = \nu \frac{mc^2}{q'/q_0}, \quad (5.15)$$

$$E[\text{MeV}] = 440.64846 \cdot \nu,$$

где  $mc^2 = 0.5109989461 \pm 0.31 \cdot 10^{-8}$  MeV — масса электрона [175]. Точность этого выражения есть

$$\frac{\Delta E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\Delta(mc^2)}{mc^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(q'/q_0)}{q'/q_0}\right)^2} \simeq \frac{\Delta(mc^2)}{mc^2} = 7.8 \cdot 10^{-8}. \quad (5.16)$$

Коэффициент уплотнения орбиты  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \delta$  связывает частоту обращения частицы  $\Omega$  и её энергию  $E = E_0(1 + \delta)$ , как  $\Omega = \Omega_0(1 - \alpha \delta)$ , где индекс 0 обозначает величины, принадлежащие равновесной частице. Зависимость коэффициента уплотнения орбиты от энергии частицы создаёт несимметричное распределение частиц по частотам обращения и по энергии, нарушает соотношение (5.15). Решение нелинейных уравнений движения в продольной плоскости позволяет найти среднюю энергию пучка

$$\langle E \rangle = E_0 \left( 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sigma_\delta^2 \right), \quad (5.17)$$

и измеренную энергию, то есть вычисленную по измеренной частоте прецессии спина (5.15)

$$E_{meas} = E_0 \left( 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sigma_\delta^2 - \alpha_0 \sigma_\delta^2 \right). \quad (5.18)$$

Разница между средней и измеренной энергией составляет

$$\frac{\langle E \rangle - E_{meas}}{E_{meas}} = \frac{\alpha_0 \sigma_\delta^2}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sigma_\delta^2 - \alpha_0 \sigma_\delta^2} = 2 \cdot 10^{-12}. \quad (5.19)$$

где  $E_0 = 45.6 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_0 = 1.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\alpha_1 = -9.8 \cdot 10^{-6}$ ,  $\sigma_\delta = 3.8 \cdot 10^{-4}$  (параметры структуры FCCee\_z\_202\_nosol\_13). Сгустки, участвующие в столкновениях, имеют большой энергетический разброс  $\sigma_{\delta,bs} = 1.32 \cdot 10^{-3}$  из-за пучкового излучения (см. параграф 4.2), поэтому существует разница между измеренной энергией и средней энергией сталкивающегося сгустка на уровне

$$\frac{\langle E \rangle_{col} - E_{meas}}{E_{meas}} = \frac{\alpha_0 \sigma_\delta^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} (\sigma_\delta^2 - \sigma_{\delta,bs}^2)}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sigma_\delta^2 - \alpha_0 \sigma_\delta^2} = -9 \cdot 10^{-7}. \quad (5.20)$$

### 5.2.2 Искажения вертикальной орбиты

Радиальные магнитные поля нарушают соотношение (5.15). Главный источник таких полей – это ошибки выставки квадрупольей, который создают вертикальные искажения орбиты. Несколько авторов оценивали этот эффект [176–178], используя результаты последних работ, получаю средний сдвиг спиновой частоты прецессии  $\overline{\Delta\nu}$  и неопределённость этого сдвига  $\sigma_{\overline{\Delta\nu}}$

$$\overline{\Delta\nu} = \frac{\nu^2 \langle y^2 \rangle}{2 Q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k^4}{(\nu_y^2 - k^2)^2 (\nu - k)}, \quad (5.21)$$

$$\sigma_{\overline{\Delta\nu}} = \frac{\nu^2 \sqrt{3} \langle y^2 \rangle}{2 Q} \sqrt{2\nu \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k^8}{(\nu_y^2 - k^2)^4 (\nu - k)^2 (\nu + k)}}, \quad (5.22)$$

$$Q = \frac{\pi}{2\nu_y^3} \cot \pi\nu_y + \frac{\pi^2}{2\nu_y^2} \csc^2 \pi\nu_y, \quad (5.23)$$

где  $\langle \rangle$  – означает усреднение по периметру ускорителя,  $\bar{\phantom{x}}$  – усреднение по возможным орбитам,  $\nu_y$  – вертикальная бетатронная частота,  $\nu$  – невозмущённая частота прецессии спина, и предполагалось, что влияние прямолинейных промежутков мало, поэтому угол поворота спина пропорционален азимуту  $\Phi(\theta) = \nu\theta$ , вертикальная бета функции постоянна  $\beta_y = const = \langle \beta_y \rangle$ .

Сдвиг энергии полученный из сдвига спиновой частоты должен быть учтён при вычислении энергии пучка, неопределённость этой величины устанавливает точность определения энергии. В таблице 5.2 приведены возмущения вертикальной орбиты, и соответствующие сдвиги энергии, при желаемой точности определения энергии в  $10^{-6}$ .

Таблица 5.2 – Сдвиг энергии и её неопределённость из-за искажений вертикальной орбиты

$E, \text{ GeV}$	45.6	78.65	81.3
$\sqrt{\langle y^2 \rangle}, \text{ mm}$	0.6	0.28	0.27
$\nu_z$	269.22	269.2	269.2
$\Delta E, \text{ keV}$	-31	-54	-56
$\sigma_{\Delta E}, \text{ keV}$	46	82	85
$\frac{\Delta E}{E}$	$-7 \cdot 10^{-7}$	$-7 \cdot 10^{-7}$	$-7 \cdot 10^{-7}$
$\frac{\sigma_{\Delta E}}{E}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$

### 5.2.3 Горизонтальные бетатронные колебания

Частота прецессии спина, измеряемая в методе РД, пропорциональна интегралу вертикального магнитного поля вдоль траектории частицы. Неизбежные бетатронные колебания приводят к появлению дополнительного вертикального поля в секступолях  $B_{\perp} \propto x^2$ , среднее значение которого по частицам пучка (по бетатронным фазам) не равно нулю. Этот эффект сдвигает как значение средней частоты распределения, так и уширяет распределение по спиновым частотам. Сдвиг средней частоты прецессии спина пучка необходимо учесть при вычислении средней энергии пучка, а уширение распределения создаёт неопределённость этой поправки, которая оказывается равной сдвигу энергии.

Простейшая оценка этого эффекта была сделана в [179]

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{E_{meas} - E_0}{E_0} = -\frac{1}{2\pi} \oint (\varepsilon_x \beta_x(s) + \eta_x(s)^2 \sigma_\delta^2) K_2(s) ds, \quad (5.24)$$

где  $K_2 = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}$  – нормированная сила секступоля. Для параметров структуры FCCee\_z\_202\_nosol\_13 составляет

$$\frac{E_{meas} - E_0}{E_0} = -7 \cdot 10^{-7}. \quad (5.25)$$

Вторая более точная оценка добавляет в рассмотрение учёт удлинения траектории частиц, испытывающих бетатронные колебания, которые из-за постоянства частоты обращения дополнительно сдвигают энергию [180]

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{E_{meas} - E_0}{E_0} = & \varepsilon_x \left\langle \left( K_0^3 - 2K_0(K_0^2 + K_1) + \frac{K_2}{2} \right) \beta_x \eta_x + (1 + K_0 \eta_x) \gamma_x \right\rangle + \\ & + \frac{\sigma_\delta^2}{2} \left\langle \left( K_0^3 - 2K_0(K_0^2 + K_1) + \frac{K_2}{2} \right) \eta_x^3 + \frac{1}{2} (1 + K_0 \eta_x) \eta_x'^2 \right. \\ & \left. + \eta_x^2 \left( \frac{2K_0}{R} + K_1 \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где  $R = \Pi/2\pi$  – средний радиус орбиты,  $K_0 = \frac{B_y}{B\rho}$  – кривизна орбиты,  $K_1 = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x}$  – нормированная сила квадруполя,  $\beta_x, \gamma_x, \eta_x, \eta_x'$  – бета и гамма функции параметризации Твисса, и дисперсионные функции. Для параметров структуры FCCee\_z\_202\_nosol\_13 получаю

$$\frac{E_{meas} - E_0}{E_0} = -1 \cdot 10^{-6}. \quad (5.27)$$

#### 5.2.4 Хроматизм бета функций

Основываясь на результатах параграфа 5.1, в таблице 5.3 приведены численные значения хроматизма бета функций и соответствующие им сдвиги ЭЦМ. Можно сделать вывод, что для калибровки энергии в системе центра масс с относительной точностью  $10^{-6}$  необходимо иметь хроматизм вертикальной бета функции меньше 1.2, а горизонтальной меньше 200.



Таблица 5.3 – Хроматизм бета функции и соответствующий сдвиг инвариантной массы на FCC-ee при энергии пучка  $E_0 = 45.6$  ГэВ (структура FCCee\_z\_202\_nosol\_18)

$\frac{1}{\beta_x} \frac{d\beta_x}{d\delta}$	$\frac{1}{\beta_y} \frac{d\beta_y}{d\delta}$	$\Delta M, \text{ keV}$	$\frac{\Delta M}{E_0}$
0	1.2	$-51 \pm 8.5$	$-1.1 \cdot 10^{-6} \pm 1.9 \cdot 10^{-7}$
200	0	$-13 \pm 8.5$	$-2.8 \cdot 10^{-7} \pm 1.9 \cdot 10^{-7}$
200	1.2	$-61 \pm 8.5$	$-1.3 \cdot 10^{-6} \pm 2 \cdot 10^{-7}$
200	12	$-489 \pm 8.5$	$-1.1 \cdot 10^{-5} \pm 2 \cdot 10^{-7}$

### 5.3 Ошибки определения энергии в системе центра масс в эксперименте на $\Upsilon$ - мезоне на ВЭПП-4М

Калибровка энергии в экспериментах на ВЭПП-4М осуществляется с помощью метода резонансной деполяризации (РД) [39; 40]. Подробный анализ ошибок метода в экспериментах на ВЭПП-4М был сделан автором в кандидатской диссертации [171], этот параграф приводит наиболее значимые ошибки для экспериментов на ВЭПП-4М с энергией пучка  $E_0 = 4.75$  ГэВ.

Частота прецессии спина, измеряемая в методе РД, пропорциональна интегралу вертикального поля вдоль траектории частицы. Неизбежные бетатронные колебания приводят к отличиям частот прецессии спина для частиц пучка, которые не усредняются в ноль при квадратичной зависимости вертикального поля от координат (секступольные поля). Этот эффект вызывает как смещение частоты прецессии, которую можно учесть при вычислении энергии пучка, так и создаёт неопределённость этой поправки, которая принимается равной самому сдвигу энергии. Первые оценки этого эффекта были сделаны в [179; 180] и дают почти в три раза отличающиеся значения  $\Delta E = 17$  кэВ ( $\Delta E/E_0 = -3.5 \cdot 10^{-6}$ ) и  $\Delta E = -45$  кэВ ( $\Delta E/E_0 = -9.4 \cdot 10^{-6}$ ).

Хроматизм оптических функций нарушает симметрию распределения пучка по энергии, как описано в параграфе 5.1. Ожидаемые ошибки для экспериментов по изучению  $\Upsilon$  мезона ( $E_0 = 4.75$  ГэВ) приведены в таблице 5.4. Были

произведены прямые измерения хроматизма бета функций в месте встречи коллайдера ВЭПП-4М на энергии 4.75 ГэВ, измерения же хроматизма дисперсии имели ошибки превышающие величину самого хроматизма (несоответствующий модели режим) и поэтому не учитываются. Результаты измерений и соответствующие сдвиг и неопределённость приведены в последней строчке таблицы 5.4.

Таблица 5.4 – Поправки в определении ЭЦМ в области  $\Upsilon$  мезона ( $E_0 = 4.75$  ГэВ)

$\frac{1}{\beta_x} \frac{d\beta_x}{d\delta}$	$\frac{1}{\beta_y} \frac{d\beta_y}{d\delta}$	$\frac{1}{\eta_x} \frac{d\eta_x}{d\delta}$	$\Delta M, \text{ keV}$
0	60	0	$-88 \pm 0.5$
150	15	0	$-70 \pm 0.5$
150	15	3.5	$-86 \pm 0.5$
$37 \pm 7$	$-5 \pm 1$		$-20 \pm 10$

Любая коррекция орбиты приводит к удлинению траектории частицы, но период обращения задаётся внешним генератором ускоряющего поля, поэтому длина орбиты (замкнутой траектории) должна оставаться постоянной, что реализуется через изменение энергии частицы. В первом порядке это связано с наличием дисперсии в месте нахождения корректора, во втором порядке это связано с зависимостью длины траектории от квадрата амплитуды поперечных колебаний. В ускорителях обычно отсутствует вертикальная дисперсия, поэтому коррекция горизонтальной орбиты имеет наибольшее влияние на энергию пучка. Обозначая за  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  стандартное отклонение вариаций горизонтальной орбиты, получаю разброс энергий пучка для ВЭПП-4М

$$\sigma \left( \frac{\Delta E}{E_0} \right) = -3 \cdot 10^{-2} [\text{м}^{-1}] \cdot \sqrt{\langle x^2 \rangle} [\text{м}], \quad (5.28)$$

что для  $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = 1$  мм создаёт  $\sigma \left( \frac{\Delta E}{E_0} \right) = 3 \times 10^{-5}$  или  $\Delta E = 140$  кэВ. Таким образом, для стабильности энергии на уровне 50 кэВ, горизонтальная орбита должна быть постоянной на уровне 0.3 мм между калибровками.

Наличие паразитной вертикальной дисперсии, разного знака для электронов и позитронов  $\psi_y(e^\pm) = \pm\psi_y\delta$  и разведения пучков по вертикали  $2d_y$  (между центрами пучков) приводит к сдвигу средней по светимости ЭЦМ

$$\langle\delta_t\rangle = \frac{E^- + E^+ - 2E_0}{E_0} = -\frac{2\psi_y d_y \sigma_\delta^2}{\psi_y^2 \sigma_\delta^2 + \sigma_y^2}, \quad (5.29)$$

светимость же зависит от разведения как

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \exp\left(-\frac{d_y}{\sigma_y}\right). \quad (5.30)$$

Сдвиг средневзвешенной по светимости ЭЦМ и изменение светимости для разных величин дисперсии и разведения для ВЭПП-4М приведён в таблице 5.5. Величина паразитной вертикальной дисперсии слишком мала для достоверного измерения с помощью системы пикапов ВЭПП-4М, поэтому используется модельная величина. Источником же этой паразитной дисперсии разного знака являются пластины электростатического разведения пучков по вертикали, которые легко поддаются расчётам в моделирующих программах [171] и дают величину в диапазоне  $\psi_y \in [0.8; 1.6]$ .

Таблица 5.5 – Сдвиг средневзвешенной по светимости ЭЦМ на ВЭПП-4М в области  $\Upsilon$  мезона ( $E_0 = 4.75$  ГэВ)

$\Delta M$ [кэВ]	$\psi_y$ [мм]	$\frac{2d_y}{\sigma_y}$	$\frac{\Delta\mathcal{L}}{\mathcal{L}}$
-628	10	0.64	0.9
-74	1.1	0.64	0.9
-72	1.5	0.452	0.95
-75	3.6	0.2	0.99
-17	0.8	0.2	0.99
-38	0.8	0.452	0.95

Таким образом, самыми большими поправками и ошибками в определении энергии в системе центра масс на  $\Upsilon$  мезоне являются:

1. Квадратичная нелинейность (поправка и ошибка):  $\Delta E \lesssim -45$  кэВ и  $\sigma(\Delta E) \lesssim -45$  кэВ.
2. Разброс горизонтальных орбит (ошибка):  $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = 1$  мм создаёт  $\sigma(\Delta E) = 140$  кэВ.
3. Хроматизм оптических функций в IP (поправка):  $\Delta M \leq 90$  кэВ.
4. Вертикальная дисперсия разного знака (поправка):  $\Delta M \leq 80$  кэВ.

## Заключение

Перечислю основные результаты данной работы:

1. впервые сделаны аналитические расчёты динамической апертуры без приближения уединённого резонанса для секступольного возмущения, совпавшие в первом порядке теории возмущений с результатами численного моделирования одномерной (горизонтальной) динамической апертуры FODO ячейки, объяснившие пороговое уменьшение горизонтальной при переходе от одномерного движения к двумерному (т.е., появления вертикальной компоненты даже с бесконечно малой амплитудой) для Супер  $s - \tau$  фабрики,
2. впервые показана интерференция секступольного и октупольного возмущений, говорящая о том, что управление зависимостью частоты от амплитуды с помощью октуполей необходимо производить с определенной осторожностью, поскольку это меняет ширины резонансных зон и ДА,
3. впервые найдены простейшие наборы секступолей без квадратичных абберраций, помимо  $-I$  пары секступолей,
4. впервые для  $-I$  пары секступолей
  - a) показано искажение фазовых траекторий, не ограничивающее ДА, но приводящее к потерям частиц на границе физической апертуры,
  - b) рассчитано влияние толщины секступолей на ДА и предложен способ коррекции такого влияния,
  - c) аналитически оценены зависимость частоты от амплитуды и ДА,
  - d) найдена зависимость ДА от величины фазовой ошибки,
5. на примере FODO ячейки впервые прослежена связь между параметрами

- источника СИ: эмиттансом, размером кольца и ячейки, силы квадруполь и секступолей, динамической апертурой и нелинейным хроматизмом,
6. впервые найдены и исследованы четыре решения симметричной ячейки ТМЕ, прослежена связь с параметрами накопителя, построена структура источника СИ ЦКП “СКИФ”, демонстрирующая рекордное сочетания эмиттанса и динамической апертуры,
  7. впервые объяснено уменьшение динамической апертуры в проектах коллайдеров со встречей пучков по схеме крабовой перетяжки, получено преобразование до четвёртого порядка с учётом интерференции крабового секступоля и краёв финальных линз, проведено сравнение коэффициентов преобразования и динамических апертур для различных коллайдеров, показано, что там где коэффициенты больше, апертура меньше,
  8. впервые получена структура и параметры Супер  $s$ - $\tau$  фабрики со светимостью  $\mathcal{L} = 10^{35} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$  на энергиях 2.5 – 3.5 ГэВ, на энергии пучка 2 ГэВ светимость составила  $\mathcal{L} = 4 \times 10^{34} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$ , на энергии пучка 1.5 ГэВ  $\mathcal{L} = 2.9 \times 10^{34} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$  с током пучка в 3 А и временем жизни пучка за счёт эффекта Тушека  $\geq 300 \text{ с}$ ,
  9. впервые детально исследовано влияние многократного пучкового излучения на равновесные длину и энергетический разброс пучка, предложены параметры коллайдера со сверхвысокой энергией FCC,
  10. впервые обнаружен и исследован эффект ограничения динамической апертуры излучением из квадрупольных линз коллайдера со сверхвысокой энергией FCC-ee,
  11. получены формулы для нелинейного хроматизма частот и бета функций до третьего порядка в виде удобном для анализа и управления, а не в виде многомерных интегралов, предложены способы коррекции нелиней-

ного хроматизма, на примере структуры коллайдера FCC-ee показано увеличение энергетического акцептанса,

12. сосчитано влияние хроматизма бета функции на среднюю энергию встреч в коллайдере ВЭПП-4М и в структуре коллайдера FCC-ee,
13. сосчитаны ошибки и неточности определения энергии в системе центра масс для экспериментов по изучению  $\Upsilon$  мезона на ВЭПП-4М (энергия пучка  $E = 4.75$  ГэВ) и для экспериментов на FCC-ee (с энергиями пучка  $E = 45$  ГэВ и  $E = 80$  ГэВ).

В заключение, автор благодарит за многолетнее сотрудничество, поддержку в работе и многочисленные обсуждения Е.Б. Левичева и С.В. Синяткина. Мне было очень приятно обсуждать в свободной форме различные научные и ненаучные проблемы.

Я очень благодарен С.Е. Карнаеву за его отзывчивость и разностороннюю помощь в написании программ для системы управления комплексом ВЭПП-4М.

Выражаю свою благодарность Г.Н. Баранову за обсуждения и проверки различных идей при разработке источника СИ ЦКП “СКИФ”.

## Список литературы

1. Design Progress of ALS-U, the Soft X-ray Diffraction Limited Upgrade of the Advanced Light Source / C. Steier [и др.] // 10th International Particle Accelerator Conference. — 2019. — TUPGW097. — DOI: 10.18429/JACoW-IPAC2019-TUPGW097.
2. *Streun A.* SLS 2.0, the Upgrade of the Swiss Light Source // JACoW. — 2022. — T. IPAC2022. — TUPOST032. — DOI: 10.18429/JACoW-IPAC2022-TUPOST032.
3. *Karantzoulis E.* ELETTRA status & upgrade // (29th European Synchrotron Light Source (ESLS) Workshop). — 11.2021. — URL: [https://indico.esrf.fr/event/1/contributions/3/attachments/5/29/Elettra\\_status\\_ESLS29.pptx](https://indico.esrf.fr/event/1/contributions/3/attachments/5/29/Elettra_status_ESLS29.pptx).
4. *al. A. L. et.* TDR baseline lattice for SOLEIL II upgrade project // Proc. IPAC'23 (Venice, Italy). — JACoW Publishing, Geneva, Switzerland, 2023. — C. 1054—1056. — (IPAC'23 - 14th International Particle Accelerator Conference ; 14). — ISBN 978-3-95450-231-8. — DOI: 10.18429/JACoW-IPAC2023-MOPM031. — URL: <https://indico.jacow.org/event/41/contributions/874>.
5. *Bogomyagkov A.* SKIF project status // (29th European Synchrotron Light Source (ESLS) Workshop). — 11.2021. — URL: <https://indico.esrf.fr/event/1/contributions/18/attachments/6/46/Bogomyagkov-SKIF.pptx>.
6. Status of Sirius Operation / L. Lin [и др.] // 13th International Particle Accelerator Conference. — 2022. — TUPOMS002. — DOI: 10.18429/JACoW-IPAC2022-TUPOMS002.



7. Status of the MAX IV Accelerators / P. Tavares [и др.] // 10th International Particle Accelerator Conference. — 2019. — TUYPLM3. — DOI: 10.18429/JACoW-IPAC2019-TUYPLM3.
8. *Kallestrup J.* Diamond Light Source status upgrade // (29th European Synchrotron Light Source (ESLS) Workshop). — 11.2021. — URL: [https://indico.esrf.fr/event/1/contributions/2/attachments/9/20/Diamond\\_ESLS\\_2021.pptx](https://indico.esrf.fr/event/1/contributions/2/attachments/9/20/Diamond_ESLS_2021.pptx).
9. *Revol J.-L.* ESRF status development // (29th European Synchrotron Light Source (ESLS) Workshop). — 11.2021. — URL: [https://indico.esrf.fr/event/1/contributions/2/attachments/9/20/Diamond\\_ESLS\\_2021.pptx](https://indico.esrf.fr/event/1/contributions/2/attachments/9/20/Diamond_ESLS_2021.pptx).
10. *Fornek T. E.* Advanced Photon Source Upgrade Project Final Design Report. — 2019. — Май. — DOI: 10.2172/1543138. — URL: <https://www.osti.gov/biblio/1543138>.
11. The HEPS project / Y. Jiao [и др.] // J. Synchrotron Radiat. — 2018. — Т. 25, № 6. — С. 1611–1618. — DOI: 10.1107/s1600577518012110.
12. Modification and optimization of the storage ring lattice of the High Energy Photon Source / Y. Jiao [и др.] // Rad. Det. Tech. Meth. — 2020. — Т. 4, № 4. — С. 415–424. — DOI: 10.1007/s41605-020-00189-7.
13. SPring-8 Upgrade Project / H. Tanaka [и др.] // 7th International Particle Accelerator Conference. — 2016. — WEPOW019. — DOI: 10.18429/JACoW-IPAC2016-WEPOW019.
14. Status of the PETRA IV Machine Project / R. Bartolini [и др.] // JACoW. — 2022. — Т. IPAC2022. — TUPOMS029. — DOI: 10.18429/JACoW-IPAC2022-TUPOMS029.

15. Fourth-Generation Synchrotron Radiation Source with X-ray Free-Electron Laser SILA: Concept of Accelerator–Storage Complex / M. V. Kovalchuk [и др.] // *Crystallography Reports*. — 2022. — Т. 67, № 5. — С. 676–683. — DOI: 10.1134/S1063774522050078.
16. Lifetime and beam size in a storage ring / C. Bernardini [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* / под ред. C. Pellegrini, A. Sessler. — 1963. — Т. 10. — С. 407–409. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.10.407.
17. *Piwiniski A.* The Touschek effect in strong focusing storage rings. — 1998. — Ноябрь. — arXiv: physics/9903034.
18. *Raimondi P.* Status on Super-B Effort // *Conf. Proc.* — 2006. — URL: <http://www.lnf.infn.it/conference/superb06/talks/raimondi1.ppt>.
19. *Zobov M.* New generation electron-positron factories // *Phys. Part. Nucl.* — 2011. — Т. 42. — С. 782–799. — DOI: 10.1134/S1063779611050066. — arXiv: 1106.5329 [physics.acc-ph].
20. Simulations and experimental results of beam-beam effects in SuperKEKB / D. Zhou [и др.] // *Phys. Rev. Accel. Beams*. — 2023. — Т. 26, № 7. — С. 071001. — DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.26.071001. — arXiv: 2306.02681 [physics.acc-ph].
21. SuperB: A High-Luminosity Asymmetric  $e^+ e^-$  Super Flavor Factory. Conceptual Design Report / M. Bona [и др.]. — 2007. — arXiv: 0709.0451 [hep-ex].
22. FCC-ee: The Lepton Collider: Future Circular Collider Conceptual Design Report Volume 2 / A. Abada [и др.] // *Eur. Phys. J. ST*. — 2019. — Т. 228, № 2. — С. 261–623. — DOI: 10.1140/epjst/e2019-900045-4.
23. *Gao J.* CEPC Accelerator TDR Status and AC Power Consumptions // *JACoW*. — 2023. — Т. eeFACT2022. — С. 262–269. — DOI: 10.18429/JACoW-eeFACT2022-FRXAS0102.

24. Progress of Conceptual Study for the Accelerators of a 2-7GeV Super Tau Charm Facility at China / Q. Luo [и др.] // 10th International Particle Accelerator Conference. — 2019. — MOPRB031. — DOI: 10.18429/JACoW-IPAC2019-MOPRB031.
25. *Bogomyagkov A.* Super C-Tau factory status in Novosibirsk // (The 2022 International Workshop on the High Energy Circular Electron Positron Collider). — 10.2022. — URL: <https://indico.ihep.ac.cn/event/17020/contributions/118189/attachments/64353/75182/Bogomyagkov-ctau-CEPC-2022.pptx>.
26. DAFNE upgrade status / D. Alesini [и др.] // Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 2008. — Т. 181/182. — С. 385—389. — DOI: 10.1016/j.nuclphysbps.2008.09.070.
27. Present status of the DAFNE upgrade and perspectives / C. Milardi [и др.] // Int. J. Mod. Phys. — 2009. — Т. A24. — С. 360—368. — DOI: 10.1142/S0217751X09043687.
28. Accelerator design at SuperKEKB / Y. Ohnishi [и др.] // PTEP. — 2013. — Т. 2013. — 03A011. — DOI: 10.1093/ptep/pts083.
29. Project of a Super Charm-Tau factory at the Budker Institute of Nuclear Physics in Novosibirsk / A. E. Bondar [и др.] // Phys. Atom. Nucl. — 2013. — Т. 76. — С. 1072—1085. — DOI: 10.1134/S1063778813090032. — [Yad. Fiz.76,no.9,1132(2013)].
30. Design of beam optics for the Future Circular Collider  $e^+e^-$ -collider rings / K. Oide [и др.] // Physical Review Accelerators and Beams. — 2016. — Т. 19, № 11. — С. 111005. — DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.19.111005, 10.1103/PhysRevAccelBeams.20.049901. — eprint: 1610.07170 (physics.acc-ph).  
—  
[Addendum: Phys. Rev. Accel. Beams20,no.4,049901(2017)].

31. *Jowett J.* Dynamic aperture for LEP: Physics and calculations // Conf. Proc. — 1994. — Т. C9401174. — С. 47–71. — [47(1994)].
32. *Shamov A. G., Rezanova O. L.* Revision of results on  $\Upsilon(1S)$ ,  $\Upsilon(2S)$ , and  $\Upsilon(3S)$  masses // Phys. Lett. B. — 2023. — Т. 839. — С. 137766. — DOI: 10.1016/j.physletb.2023.137766. — arXiv: 2210.13930 [hep-ex].
33. High Precision Measurement of the  $\Upsilon$  Meson Mass / A. S. Artamonov [и др.] // Phys. Lett. B / под ред. P. Petiau, M. Porneuf. — 1982. — Т. 118. — С. 225. — DOI: 10.1016/0370-2693(82)90633-5.
34. New Measurement of the  $\Upsilon$  Meson Mass / S. E. Baru [и др.] // Z. Phys. C. — 1986. — Т. 30. — С. 551–558. — DOI: 10.1007/BF01571803. — [Erratum: Z.Phys.C 32, 622 (1986)].
35. The status of VEPP-4 / V. E. Blinov [и др.] // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2014. — Т. 11. — С. 620–631. — DOI: 10.1134/S1547477114050082.
36. Precision electroweak measurements on the  $Z$  resonance / S. Schael [и др.] // Phys. Rept. — 2006. — Т. 427. — С. 257–454. — DOI: 10.1016/j.physrep.2005.12.006. — arXiv: hep-ex/0509008.
37. *Group T. E. W.* 2012 Update of the Combination of CDF and D0 Results for the Mass of the  $W$  Boson. — 2012. — Apr. — arXiv: 1204.0042 [hep-ex].
38. Review of Particle Physics / M. Tanabashi [и др.] // Phys. Rev. D. — 2018. — Т. 98, № 3. — С. 030001. — DOI: 10.1103/PhysRevD.98.030001.
39. Absolute Calibration of Beam Energy in the Storage Ring. Phi-Meson Mass Measurement / A. Bukin [и др.] // International Symposium on High-Energy and Elementary Particle Physics. — 07.1975. — С. 138–147.
40. High precision energy calibration with resonant depolarization at the VEPP-4M collider / V. Blinov [и др.] // Nuclear and Particle Physics Proceedings / под ред. M. Aguilar-Benítez [и др.]. — 2016. — Т. 273–275. — С. 210–218. — DOI: 10.1016/j.nuclphysbps.2015.09.028.

41. *Bogomyagkov A., Levichev E., Shatilov D.* Beam-beam effects investigation and parameters optimization for a circular  $e^+e^-$  collider at very high energies // Phys. Rev. ST Accel. Beams. — 2014. — Apr. — Т. 17, вып. 4. — С. 041004. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.17.041004. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevSTAB.17.041004>.
42. *Bogomyagkov A. V.* Beam dynamics challenge in Novosibirsk Super C-Tau Factory // (XXVII Russian Particle Accelerator Conference). — 09.2021. — URL: <https://indico.jinr.ru/event/1956/contributions/14532/>.
43. *Bogomyagkov A.* BINP Super Charm-Tau Factory Status // (IAS Program on High Energy Physics (HEP 2021)). — High Energy Physics HKUST IAS (The Hong Kong University of Science, Technology), 01.2021. — URL: [https://indico.cern.ch/event/971970/contributions/4174483/attachments/2173723/3670109/Bogomyagkov\\_CTau\\_2021.pdf](https://indico.cern.ch/event/971970/contributions/4174483/attachments/2173723/3670109/Bogomyagkov_CTau_2021.pdf).
44. *Bogomyagkov A.* SKIF project status // (28th European Synchrotron Light Source (ESLS) Workshop). — 12.2020. — URL: <https://www.esrf.fr/home/events/conferences/2020/28th-esls-workshop.html>.
45. Dynamic aperture limitation in  $e^+e^-$  colliders due to synchrotron radiation in quadrupoles / A. Bogomyagkov [и др.] // (10th International Particle Accelerator Conference (IPAC19)). — 05.2019. — URL: <https://accelconf.web.cern.ch/ipac2019/papers/mopgw059.pdf>.
46. *Bogomyagkov A.* Resonant depolarization precision, relation between spin tune and beam energy // (FCC week 2018). — 04.2018. — URL: <https://indico.cern.ch/event/656491/contributions/2939096/>.
47. Review of interaction regions for future crab waist colliders / A. Bogomyagkov [и др.] // (38th International Conference on High Energy Physics). — 08.2016. — URL: <https://indico.cern.ch/event/432527/contributions/1072524/attachments/1320064/1979311/Bogomyagkov.pdf>.

48. *Bogomyagkov A., Levichev E.* Interaction region for crab waist scheme of the future electron-positron collider (CERN) // (6th International Particle Accelerator Conference (IPAC15)). — 05.2015. — URL: <https://accelconf.web.cern.ch/IPAC2015/papers/tupty018.pdf>.
49. *Bogomyagkov A., Levichev E., Piminov P.* Interaction Region Lattice for FCC-ee (TLEP) // (5th International Particle Accelerator Conference ). — 06.2014. — URL: <https://accelconf.web.cern.ch/IPAC2014/papers/thpri008.pdf>.
50. *Bogomyagkov A., Levichev E., Sinyatkin S.* Touschek lifetime and luminosity optimization for Russian Super Charm Tau factory // JINST. — 2024. — T. 19, № 02. — P02018. — DOI: 10.1088/1748-0221/19/02/P02018.
51. Lattice optimization of a fourth-generation synchrotron radiation light source in Novosibirsk / G. Baranov [и др.] // Physical Review Accelerators and Beams. — 2021. — T. 24, № 12. — C. 120704. — DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.24.120704.
52. Dynamic aperture limitation in  $e^+e^-$  colliders due to synchrotron radiation in quadrupoles / A. Bogomyagkov [и др.] // Physical Review Accelerators and Beams. — 2019. — T. 22, № 2. — C. 021001. — DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.22.021001. — arXiv: 1811.04554 [physics.acc-ph].
53. Dynamic Aperture of the NICA Collider Optimized with a Genetic Algorithm / A. V. Bogomyagkov [и др.] // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2019. — T. 16, № 1. — C. 21–29. — DOI: 10.1134/S1547477119010060.
54. Beam optics and dynamics in electron storage rings with ultralow emittance / G. N. Baranov [и др.] // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2016. — T. 13, № 7. — C. 884–889. — DOI: 10.1134/S1547477116070086.

55. *Bogomyagkov A., Levichev E., Piminov P.* Final focus designs for crab waist colliders // *Physical Review Accelerators and Beams*. — 2016. — Т. 19, № 12. — С. 121005. — DOI: [10.1103/PhysRevAccelBeams.19.121005](https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.19.121005).
56. Projects for ultra-high-energy circular colliders at CERN / A. Bogomyagkov [и др.] // *Physics of Particles and Nuclei Letters*. — 2016. — Т. 13, № 7. — С. 870–875. — DOI: [10.1134/S154747711607013X](https://doi.org/10.1134/S154747711607013X).
57. *Bogomyagkov A. V., Karyukina K. Y., Levichev E. B.* Reduction of the beam emittance in the charged-particle storage rings with the help of periodic magnetic wigglers // *Tech. Phys.* — 2016. — Т. 61, № 1. — С. 119–124. — DOI: [10.1134/S1063784216010060](https://doi.org/10.1134/S1063784216010060).
58. Final analysis of KEDR data on  $J/\psi$  and  $\psi(2S)$  masses / V. Anashin [и др.] // *Phys. Lett. B*. — 2015. — Т. 749. — С. 50–56. — DOI: [10.1016/j.physletb.2015.07.057](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2015.07.057).
59. Use of the methods of accelerator physics in precision measurements of particle masses at the VEPP-4 complex with the KEDR detector / O. V. Anchugov, V. E. Blinov, A. V. Bogomyagkov [и др.] // *Instruments and Experimental Techniques*. — 2010. — Т. 53, № 1. — С. 15–28. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S0020441210010021>.
60. Experiments on the physics of charged particle beams at the VEPP-4M electron-positron collider / O. V. Anchugov, V. E. Blinov, A. V. Bogomyagkov [и др.] // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 2009. — Т. 109, № 4. — С. 590–601. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063776109100057>.
61. Review of beam energy measurements at VEPP-4M collider: KEDR/VEPP-4M / V. E. Blinov [и др.] // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and*

- Associated Equipment. — 2009. — Т. 598. — С. 23—30. — DOI: 10.1016/j.nima.2008.08.078.
62. *Courant E. D., Snyder H. S.* Theory of the alternating gradient synchrotron // *Annals Phys.* — 1958. — Т. 3. — С. 1—48. — DOI: 10.1016/0003-4916(58)90012-5. — [Annals Phys.281,360(2000)].
63. *Sturrock P. A.* Non Linear Effects in Alternating Gradient Synchrotrons // *Annals Phys.* — 1958. — Т. 3. — С. 113—189. — DOI: 10.1016/0003-4916(58)90016-2.
64. *Коломенский А., Лебедев А.* Теория циклических ускорителей. — Москва, В-71, Ленинский проспект, 15 : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
65. *Б.В.Чириков.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности : дис. . . . канд. физ.-мат. наук / Б.В.Чириков. — Новосибирск : Академия Наук СССР, 1969. — 313 с.
66. *Hagel J., Moshhammer H.* Analytic approach of dynamic aperture by secular perturbation theory // 2nd ICFA Advanced Beam Dynamics Workshop. — 1988.
67. *Bengtsson J.* NONLINEAR TRANSVERSE DYNAMICS FOR STORAGE RINGS WITH APPLICATIONS TO THE LOW-ENERGY ANTI-PROTON RING (LEAR) AT CERN : дис. . . . канд. / Bengtsson Johan. — Lund U., 1988. — URL: <http://doc.cern.ch/cernrep/1988/1988-005/1988-005.html>.
68. Влияние нелинейностей на бетатронные колебания в накопителе : Препринт / Г.Н.Кулипанов [и др.] ; Институт Ядерной Физики Академии Наук СССР Сибирское отделение. — 1968. — № 251. — URL: [https://inr.nsk.su/images/preprint/1968\\_251.pdf](https://inr.nsk.su/images/preprint/1968_251.pdf).



69. Изучение прохождения частиц через область автофазировки бетатронных колебаний за счет радиационного затухания / Н.С.Диканский [и др.] // Conf. Proc. C / под ред. А.И.Алиханян. — 1969. — Т. 690827. — С. 308—315.
70. *Г.Н.Кулипанов, С.И.Мишнев, А.Н.Скринский.* Поведение пучка в накопителе при совместном действии двух резонансов бетатронных колебаний // Conf. Proc. C / под ред. А.И.Алиханян. — 1969. — Т. 690827. — С. 353—361.
71. *Г.Н.Кулипанов.* Экспериментальное исследование нелинейных резонансов : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Г.Н.Кулипанов. — Новосибирск : ИЯФ СО РАН, 1969.
72. DYNAMIC APERTURE MEASUREMENT ON ALADDIN / J. Bridges [и др.] // Part. Accel. / под ред. Y. Kimura [и др.]. — 1990. — Т. 28. — С. 1—10.
73. *Merminga N., Ng K.-Y.* Analytic Expressions for the Smear Due to Nonlinear Multipoles. — 1989. — Февр.
74. *Gareyte J., Hilaire A., Schmidt F.* Dynamic aperture and long term particle stability in the presence of strong sextupoles in the CERN SPS // Conf. Proc. C / под ред. F. Bennett, J. Kopta. — 1989. — Т. 8903201. — С. 1376.
75. *Gareyte J.* Experimental evidence of transverse nonlinear phenomena in accelerators // Part. Accel. / под ред. Y. Kimura [и др.]. — 1990. — Т. 27. — С. 187—196.
76. NONLINEAR DYNAMICS PROVIDED BY SEXTUPOLE MAGNETS FOR THE CHROMATICITY CORRECTION OF THE TRISTAN MAIN RING / S. Kamada [и др.] // Part. Accel. / под ред. Y. Kimura [и др.]. — 1990. — Т. 27. — С. 221—226.

77. *Levichev E., Sajaev V.* Nonlinear dynamics study of the SIBERIA-2 electron storage ring // AIP Conf. Proc. / под ред. S. Chattopadhyay, M. Cornacchia, C. Pellegrini. — 2008. — Т. 344. — С. 160—169. — DOI: 10.1063/1.48979.
78. Nonlinear beam dynamics study at the VEPP-4M / E. Levichev [и др.] // Conf. Proc. C. — 1997. — Т. 970512. — С. 1463.
79. Dynamic aperture study in the VEPP-4M storage ring / V. Sajaev [и др.] // Conf. Proc. C. — 1997. — Т. 970512. — С. 1466.
80. *CEPC*. <http://cepc.ihep.ac.cn> : тех. отч. — URL: <http://cepc.ihep.ac.cn>.
81. Project Nuclotron-based Ion Collider fAcility at JINR / V. Kekelidze [и др.] // Phys. Part. Nucl. — 2017. — Т. 48, № 5. — С. 727—741. — DOI: 10.1134/S1063779617050239.
82. *Lee S. Y.* Accelerator Physics, 4th edition. — Singapore : World Scientific, 2018. — URL: <https://library.oapen.org/handle/20.500.12657/50490>.
83. *Poincaré H.* Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Т. 3. — Gauthier-Villars et fils, 1899.
84. *Von Zeipel H.* Arkiv för Matematik // Astronomi och Fysik. — 1916. — Т. 11, № 1.
85. *А.Лухтенберг, М.Либерман.* Регулярная и стохастическая динамика. — Мир, 1984.
86. *Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.

87. *Kruskal M.* Asymptotic Theory of Hamiltonian and other Systems with all Solutions Nearly Periodic // Journal of Mathematical Physics. — 1962. — Т. 3, № 4. — С. 806—828. — DOI: 10.1063/1.1724285. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.1724285>.
88. *Lindstedt A.* Ergänzung // Astronomische Nachrichten. — 1882. — Т. 103, № 17. — С. 268—268. — DOI: <https://doi.org/10.1002/asna.18821031703>. — eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/asna.18821031703>. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/asna.18821031703>.
89. *Dragt A., Finn J.* Lie Series and Invariant Functions for Analytic Symplectic Maps // J. Math. Phys. — 1976. — Т. 17. — С. 2215—2227. — DOI: 10.1063/1.522868.
90. *Dragt A. J.* Lectures on nonlinear orbit dynamics // AIP Conf. Proc. — 1982. — Т. 87. — С. 147—313. — DOI: 10.1063/1.33615.
91. *Roy G. J.* Analysis of the Optics of the Final Focus Test Beam using Lie Algebra Based Techniques : дис. . . . канд. / Roy Ghislain J. — Orsay, LAL, 1992.
92. *Collins T. L.* Distortion Functions. — 1984.
93. *Ng K. Y.* Derivation of Collins Formulas for Beam Shape Distortion Due to Sextupoles Using Hamiltonian Method. — 1984.
94. *Ng K.-Y.* Simple derivation of distortion functions. — 1992.
95. *Crosbie E.* IMPROVEMENT OF THE DYNAMIC APERTURE IN CHASMAN-GREEN LATTICE DESIGN LIGHT SOURCE STORAGE RINGS // Proceedings of the 1987 IEEE Particle Accelerator Conference (PAC1987): Accelerator Engineering and Technology, March 16-19, 1987 Washington, D.C. — 1987. — С. 0443.

96. *Левичев Е.* Влияние нелинейностей магнитного поля на динамическую апертуру циклических ускорителей : дис. . . . д-ра физ.-мат. наук : 01.04.20 / Левичев Е.Б. — Новосибирск : Институт Ядерной Физики им. Г.И. Будкера СО РАН, 2004. — 234 с.
97. *Courant E. D., Ruth R. D., Weng W. T.* Stability in dynamical systems I // AIP Conf. Proc. / под ред. M. Month, P. F. Dahl, M. Dienes. — 1985. — Т. 127. — С. 294—343. — DOI: 10.1063/1.35189.
98. *Н.М.Крылов, Н.Н.Боголюбов.* Новые методы нелинейной механики. — Ленинград, Международный, 75а : Государственное технико-теоретическое издательство, 1934.
99. *Streun A.* SLS dynamic aperture optimisation // AIP Conf. Proc. / под ред. S. Chattopadhyay, M. Cornacchia, C. Pellegrini. — 1995. — Т. 344. — С. 190—195. — DOI: 10.1063/1.48985.
100. *Г.Корн, Т.Корн.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — Москва, издательство “Наука”, 1968.
101. *Murray J. J., Brown K. L., Fieguth T. H.* The Completed Design of the SLC Final Focus System // Conf. Proc. — 1987. — Т. C870316. — С. 1331.
102. *Brinkmann R.* Optimization of a final focus system for large momentum bandwidth. — 1990.
103. *Brown K. L., Servranckx R.* First- and second-order charged particle optics // AIP Conf. Proc. — 1985. — Т. 127. — С. 62—138. — DOI: 10.1063/1.35177.
104. *Xu G.* General conditions for self-cancellation of geometric aberrations in a lattice structure // Phys. Rev. ST Accel. Beams. — 2005. — Т. 8. — С. 104002. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.8.104002.
105. Effect of the Sextupole Finite Length on Dynamic Aperture in the Collider Final Focus / A. Bogomyagkov [и др.]. — 2009. — arXiv: 0909.4872.

106. *MADX*. <http://madx.web.cern.ch/madx>. — URL: <http://madx.web.cern.ch/madx>.
107. *Wan W.* Tune-shift with amplitude due to nonlinear kinematic effect // Conf. Proc. C / под ред. A. Luccio, W. MacKay. — 1999. — Т. 990329. — С. 395—397.
108. *Zimmermann F.* Tune shift with amplitude induced by quadrupole fringe fields. — 2000.
109. *Hardt W., Jäger J., Möhl D.* A General analytical expression for the chromaticity of accelerator rings : тех. отч. / CERN. — Geneva, 11.1982. — PS-LEA-Note-82-5. CERN-PS-LEA-Note-82—5. — URL: <https://cds.cern.ch/record/1037514>.
110. *Montague B. W. S. L.* Linear Optics For Improved Chromaticity Correction : тех. отч. / CERN. — Geneva, 1979. — CERN-LEP-Note-165. LEP-Note—165. — URL: <https://cds.cern.ch/record/443342>.
111. *Takao M.* Formulation of nonlinear chromaticity in circular accelerators by canonical perturbation method // Phys. Rev. — 2005. — Т. E72. — С. 046502. — DOI: 10.1103/PhysRevE.72.046502.
112. *Soutome K., Takao M., Tanaka H.* Higher order formula for nonlinear dispersion // Particle accelerator. Proceedings, 6th European conference, EPAC'98, Stockholm, Sweden, June 22-26, 1998. Vol. 1-3. — 1998. — С. 924—926. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/e98/PAPERS/THP11H.PDF>.
113. *Lee S., Teng L.* Theoretical minimum emittance lattice for an electron storage ring // Conf. Proc. C / под ред. L. Lizama, J. Chew. — 1991. — Т. 910506. — С. 2679—2681.

114. *Kolomenski A. A., Lebedev A. N.* The Effect Of Radiation On The Motion Of Relativistic Electrons In A Synchrotron // CERN Symposium on High-Energy Accelerators and Pion Physics. — 1956. — С. 447—455.
115. *Henry I. G.* Radiation Effects on Free Oscillations in Synchrotrons // Phys. Rev. — 1957. — Т. 106. — С. 1057—1061. — DOI: 10.1103/PhysRev.106.1057.
116. Evaluation of synchrotron radiation integrals / R. H. Helm [и др.] // IEEE Trans. Nucl. Sci. — 1973. — Т. 20. — С. 900—901. — DOI: 10.1109/TNS.1973.4327284.
117. *Helm R. H., Wiedemann H.* Emittance in a FODO Cell Lattice. — 1979. — Май.
118. *Cai Y.* Symplectic maps and chromatic optics in particle accelerators // Nucl. Instrum. Meth. A. — 2015. — Т. 797. — С. 172—181. — DOI: 10.1016/j.nima.2015.06.059.
119. *Einfeld D., Schaper J., Plesko M.* Design of a Diffraction Limited Light Source DIFL // Conf. Proc. C. — 1996. — Т. 950501. — С. 177.
120. *Raimondi P.* Hybrid Multi Bend Achromat: from SuperB to EBS // 8th International Particle Accelerator Conference. — 05.2017. — DOI: 10.18429/JACoW-IPAC2017-THPPA3.
121. ESRF Upgrade Phase II / J.-L. Revol [и др.] // 4th International Particle Accelerator Conference. — 2013. — TUOAB203.
122. *Inc. W. R.* Mathematica, Version 12.1. — Champaign, IL, 2020.
123. *Teng L.* Minimum emittance lattice for synchrotron radiation storage rings : тех. отч. / Argonne national laboratory. — 03.1985. — ANL-LS—17.

124. *Antoniou F., Papaphilippou Y.* Analytical considerations for linear and non-linear optimization of the theoretical minimum emittance cells: Application to the Compact Linear Collider predamping rings // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2014. — T. 17, № 6. — C. 064002. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.17.064002. — arXiv: 1310.5024 [physics.acc-ph].
125. *Cai Y.* Single-particle dynamics in theoretical minimum emittance cell // *Phys. Rev. Accel. Beams.* — 2018. — T. 21, № 11. — C. 114002. — DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.21.114002.
126. *Jiao Y., Cai Y., Chao A. W.* Modified theoretical minimum emittance lattice for an electron storage ring with extreme-low emittance // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2011. — T. 14. — C. 054002. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.14.054002.
127. *Riemann B., Streun A.* Low emittance lattice design from first principles: reverse bending and longitudinal gradient bends // *Phys. Rev. Accel. Beams.* — 2019. — T. 22, № 2. — C. 021601. — DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.22.021601. — arXiv: 1810.11286 [physics.acc-ph].
128. *Akai K., Furukawa K., Koiso H.* SuperKEKB Collider // *Nucl. Instrum. Meth. A.* — 2018. — T. 907. — C. 188–199. — DOI: 10.1016/j.nima.2018.08.017. — arXiv: 1809.01958 [physics.acc-ph].
129. SuperKEKB operation using crab waist collision scheme / Y. Ohnishi [и др.] // *Eur. Phys. J. Plus.* — 2021. — T. 136, № 10. — C. 1023. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-021-01979-8.
130. *Oide K.* KEKB B-factory, the luminosity frontier // *Prog. Theor. Phys.* — 2009. — T. 122. — C. 69–80. — DOI: 10.1143/PTP.122.69.
131. *Ohnishi Y.* Dynamic aperture optimization at SuperKEKB //. — 55th ICFA Advanced Beams Dynamics Workshop on High Luminosity Circular e+e-

- colliders  $\rightarrow$  Higgs factory, 10.2014. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/HF2014/papers/frt1b2.pdf>.
132. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.* Теория поля. — Москва : Наука, 1973.
  133. *Møller C.* On the theory of the characteristic matrix // Proceedings, International Conference on Fundamental Particles and Low Temperatures, vol.1, Cambridge, UK, 22-27 Jul 1946. — 1947. — С. 194—199.
  134. *Suzuki T.* General formulae of luminosity for various types of colliding beam machines : Preprint / National laboratory for high energy physics. — 07.1976. — KEK-76—3.
  135. *Napoly O.* The Luminosity for beam distributions with error and wake field effects in linear colliders // Part. Accel. — 1993. — Т. 40. — С. 181—203.
  136. *Raimondi P., Zobov M.* New generation electron-positron factories : Technical note / DAΦNE. — 04.2003. — G—58.
  137. *Raimondi P., Zobov M.* Tune shift in beam-beam collisions with a crossing angle. — 2003.
  138. *Shatilov D., Zobov M.* Beam-beam collisions with an arbitrary crossing angle: analytical tune shifts, tracking algorithm without Lorentz boost, crab-crossing // ICFA Beam Dyn. Newslett. — 2005. — Т. 37. — С. 99—109.
  139. *Piwinski A.* Satellite Resonances Due to Beam-Beam Interaction // IEEE Trans. Nucl. Sci. — 1977. — Т. 24. — С. 1408—1410. — DOI: 10.1109/TNS.1977.4328960.
  140. *Pestrikov D. V.* Vertical synchrotron resonances due to beam-beam interaction with horizontal crossing // Nucl. Instrum. Meth. — 1993. — Т. A336. — С. 427—437. — DOI: 10.1016/0168-9002(93)91254-K.
  141. *Raimondi P., Shatilov D. N., Zobov M.* Beam-Beam Issues for Colliding Schemes with Large Piwinski Angle and Crabbed Waist. — 2007. — arXiv: physics/0702033 [PHYSICS].



142. *Raimondi P., Zobov M., Shatilov D.* Suppression of beam-beam resonances in crab waist collisions // Conf. Proc. — 2008. — Т. C0806233. — WEPP045.
143. Application of frequency map analysis to beam-beam effects study in crab waist collision scheme / D. Shatilov [и др.] // Phys. Rev. ST Accel. Beams. — 2011. — Т. 14. — С. 014001. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.14.014001. — arXiv: 1002.3733 [physics.acc-ph].
144. Analysis of the Non-linear Fringe Effects of Large Aperture Triplets for the HL LHC Project / A. Bogomyagkov [и др.] // Proceedings, 4th International Particle Accelerator Conference (IPAC 2013): Shanghai, China, May 12-17, 2013. — 2013. — WEPEA049. — URL: <http://JACoW.org/IPAC2013/papers/wepea049.pdf>.
145. *A.Bogomyagkov, E.Levichev, P.Piminov.* Nonlinear Perturbations for High Luminosity e+e- Collider Interaction Region //. — IAS HEP Conference, Hong Kong, 01.2016. — URL: [http://ias.ust.hk/program/shared\\_doc/2016/201601hep/20160118\\_Bogomyagkov\\_LT.pdf](http://ias.ust.hk/program/shared_doc/2016/201601hep/20160118_Bogomyagkov_LT.pdf).
146. Супер Charm-Tau фабрика : Концептуальный проект / В.В.Анашин [и др.] ; Институт Ядерной Физики имени Г.И.Будкера СО РАН. — 2011. — URL: <https://ctd.inp.nsk.su/c-tau/>.
147. *Mezzadri G., Spataro S.* XYZ states: An experimental point-of-view // Reviews in Physics. — 2022. — Т. 8. — С. 100070. — ISSN 2405-4283. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.revip.2022.100070>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405428322000028>.
148. The XYZ states: Experimental and theoretical status and perspectives / N. Brambilla [и др.] // Physics Reports. — 2020. — Т. 873. — С. 1–154. — ISSN 0370-1573. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.05.001>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article>

- /pii/S0370157320301915 ; The XYZ states: experimental and theoretical status and perspectives.
149. *Raimondi P., Seryi A.* A Novel final focus design for future linear colliders // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Т. 86. — С. 3779—3782. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.3779.
  150. *Oide K.* Machine layout and beam optics //. — 2nd FCC week, Rome, 05.2016. — URL: <http://fccw2016.web.cern.ch/fccw2016>.
  151. *M. Borland.* elegant: A Flexible SDDS-Compliant Code for Accelerator Simulation : тех. отч. / Advanced Photon Source. — 09.2000. — LS—287.
  152. *Shatilov D.* Beam-beam Effects at High Energy  $e^+e^-$  Colliders // 62nd ICFA Advanced Beam Dynamics Workshop on High Luminosity Circular  $e^+e^-$  Colliders. — 2019. — TUYBA02. — DOI: 10.18429/JACoW-eeFACT2018-TUYBA02.
  153. *Shatilov D.* Luminosity and Beam-Beam Effects for Novosibirsk SCTF // 2019 Joint Workshop on Future charm-tau Factory, 24-28 September 2019, Russian Academy of Sciences. — 2019. — URL: <https://mosphys.ru/indexico/event/3/contributions/201/>.
  154. <http://cern.ch/fcc>. — URL: <http://cern.ch/fcc>.
  155. CEPC Conceptual Design Report: Volume 1 - Accelerator. — 2018. — Сент. — arXiv: 1809.00285 [physics.acc-ph].
  156. FCC Physics Opportunities: Future Circular Collider Conceptual Design Report Volume 1 / A. Abada [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Т. 79, № 6. — С. 474. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6904-3.
  157. CEPC Conceptual Design Report: Volume 2 - Physics & Detector / M. Dong [и др.]. — 2018. — Ноябрь. — arXiv: 1811.10545 [hep-ex].
  158. *Chen P.* An Introduction to Beamstrahlung and Disruption // Lect. Notes Phys. / под ред. M. Month, S. Turner. — 1988. — Т. 296. — С. 495.

159. *Chen P.* THE NATURE OF BEAMSTRAHLUNG // Conf. Proc. C. — 1987. — T. 870107. — C. 314.
160. *Telnov V. I.* Restriction on the energy and luminosity of  $e^+e^-$  storage rings due to beamstrahlung // Phys. Rev. Lett. — 2013. — T. 110. — C. 114801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.114801. — eprint: 1203.6563.
161. Limitations on Performance of  $e^+ e^-$  Storage Rings and Linear Colliding Beam Systems at High Energy / J. E. Augustin [и др.] // eConf. — 1978. — T. C781015. — C. 009.
162. *Benedikt M.* Future Circular Collider Study: status and parameter update // — 2nd FCC week, Rome, 05.2016. — URL: <http://fccw2016.web.cern.ch/fccw2016>.
163. *Zholents A. A.* Beam-beam effects in electron - positron storage rings // Lect. Notes Phys. — 1992. — T. 400. — C. 321—362. — DOI: 10.1007/3-540-55250-2\_35.
164. *Schwinger J. S.* On the classical radiation of accelerated electrons // Phys. Rev. — 1949. — T. 75. — C. 1912. — DOI: 10.1103/PhysRev.75.1912. — [332(1949)].
165. *Shatilov D.* Beam-beam simulations at large amplitudes and lifetime determination // Part. Accel. — 1996. — T. 52. — C. 65—93.
166. *SAD.* <http://acc-physics.kek.jp/SAD/index.html>. — URL: <http://acc-physics.kek.jp/SAD/index.html>.
167. 6D Tracking with Compute Unified Device Architecture (CUDA) Technology / S. Glukhov [и др.] // Proceedings of ICAP2015, Shanghai, China, 2015 (Shanghai, China). — Geneva, Switzerland : JACoW, 02.2016. — C. 115—117. — (International Computational Accelerator Physics Conference ; 12). — ISBN 978-3-95450-136-6. — DOI: doi:10.18429/JACoW-ICAP2015-WEP34

- . — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/ICAP2015/papers/wep34.pdf>.
168. *Forest E., Milutinovic J.* Leading Order Hard Edge Fringe Fields Effects Exact  $(1 + \Delta)$  and Consistent With Maxwell's Equations for Rectilinear Magnets // Nucl. Instrum. Meth. — 1988. — Т. А269. — С. 474. — DOI: 10.1016/0168-9002(88)90123-4.
169. *Jowett J. M.* Introductory Statistical Mechanics for Electron Storage Rings // AIP Conf. Proc. — 1987. — Т. 153. — С. 864—970. — DOI: 10.1063/1.36374.
170. *Jowett J. M.* Electron dynamics with radiation and nonlinear wigglers // CERN Accel.School 1985:0570. — 1986. — URL: <http://www-public.slac.stanford.edu/sciDoc/docMeta.aspx?slacPubNumber=slac-ap-053.html>.
171. *А. Богомяков.* Определение энергии в системе центра масс в прецизионных экспериментах на ВЭПП-4М : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.04.20 / А. Богомяков. — Новосибирск : Институт Ядерной Физики им. Г. И. Будкера СО РАН, 2007. — 127 с.
172. New precision measurement of the J / psi and psi-prime meson masses / V. M. Aulchenko [и др.] // Physics Letters B. — 2003. — Т. В573. — С. 63—79. — DOI: 10.1016/j.physletb.2003.08.028. — eprint: hep-ex/0306050.
173. *Workman R. L.* [и др.]. Review of Particle Physics // PTEP. — 2022. — Т. 2022. — С. 083C01. — DOI: 10.1093/ptep/ptac097.
174. Experiments with the KEDR Detector at the  $e^+e^-$  Collider VEPP-4M in the Energy Range  $\sqrt{s} = 1.84\text{--}3.88$  GeV / V. V. Anashin [и др.] // Phys. Part. Nucl. — 2023. — Т. 54, № 1. — С. 185—226. — DOI: 10.1134/S1063779623010033.

175. Review of Particle Physics / C. Patrignani [и др.] // *Chin. Phys.* — 2016. — Т. C40, № 10. — С. 100001. — DOI: 10.1088/1674-1137/40/10/100001.
176. *Assmann R., Koutchouk J. P.* Spin tune shifts due to optics imperfections. — 1994.
177. *Bogomyagkov A. V., Nikitin S. A., Shamov A. G.* Influence of the vertical closed orbit distortions on accuracy of the energy calibration done by resonant depolarization technique // *Proceedings of RUPAC 2006, Novosibirsk, Russia.* — 2006. — С. 153—155.
178. *Bogomyagkov A. V., Nikitin S. A., Shamov A. G.* Influence of the vertical closed orbit distortions on accuracy of the energy calibration done by resonant depolarization technique. — 2018. — arXiv: 1801.01227 [physics.acc-ph].
179. Accurate calibration of the beam energy in a storage ring based on measurement of spin precession frequency of polarized particles / Y. Derbenev [и др.] // *Particle Accelerators.* — 1980. — Т. 10. — С. 177—180.
180. Investigation of the spin precession tune spread in the storage ring / I. Koop [и др.] // *8th International Symposium on High-energy Spin Physics.* — 1988. — С. 1023—1027.
181. *Lee-Whiting G.* Third-order aberrations of a magnetic quadrupole lens // *Nucl. Instrum. Meth.* — 1970. — Т. 83. — С. 232—244. — DOI: 10.1016/0029-554X(70)90465-9.
182. *Deprit A.* Canonical transformations depending on a small parameter // *Celestial mechanics.* — 1969. — Т. 1. — С. 12—30. — DOI: 10.1007/BF01230629.
183. *Cary J. R.* Lie transform perturbation theory for hamiltonian systems // *Phys. Rept.* — 1981. — Т. 79. — С. 131—159. — DOI: 10.1016/0370-1573(81)90175-7.

184. *Dewar R.* Renormalized Canonical Perturbation Theory for Stochastic Propagators // J. Phys. A. — 1976. — T. 9. — C. 2043–2057. — DOI: 10.1088/0305-4470/9/12/010.
185. *Steffen K. G.* High energy beam optics. — New York (N.Y.) : Interscience publishers, 1965.
186. *Baartman R.* Intrinsic Third Order Aberrations in Electrostatic and Magnetic Quadrupoles // Conf. Proc. C. — 1997. — T. 970512. — C. 1415.
187. *Krejčík P.* Nonlinear quadrupole end-field effects in the CERN antiproton accumulators. — 1987. — Март. — URL: <https://cds.cern.ch/record/175880>.

## Приложение А

### Гамильтониан частицы в циклическом ускорителе

Функция Гамильтона для частицы в поле имеет вид

$$\mathcal{H} = e\varphi + c\sqrt{m^2c^2 + \left(\mathbb{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}, \quad (\text{A.1})$$

где  $e$  – заряд частицы,  $m$  – масса покоя,  $\mathbb{P}$  – вектор обобщённого импульса,  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  – скалярный и векторный потенциалы внешнего поля. Криволинейная система координат для базисной кривой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s)$ , где  $s$  это длина пути вдоль кривой, построена на векторах главной внешней нормали  $\mathbf{n}$ , касательной  $\tau$  и бинормали  $\mathbf{b}$  (рисунок А.1)

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \mathbf{n} = -\frac{1}{K} \frac{d^2\mathbf{r}_0}{ds^2} \\ \mathbf{e}_s = \tau = \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \\ \mathbf{e}_y = \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \tau = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_s. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Производные этих векторов связаны соотношениями Серре – Френе

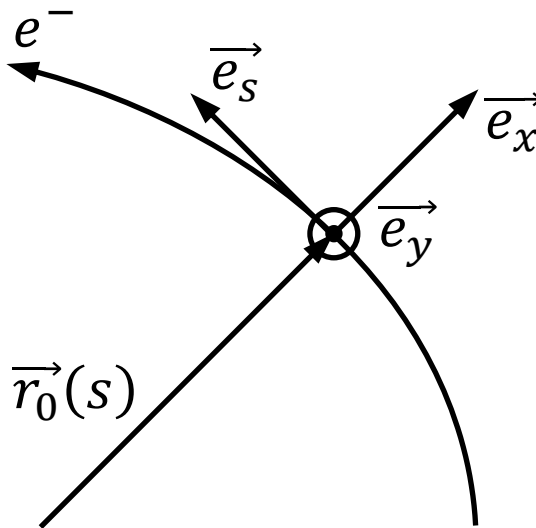


Рисунок А.1 – Сопутствующая система координат

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_x = K\mathbf{e}_s - \chi\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}'_s = -K\mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}'_y = \chi\mathbf{e}_x, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

где  $' = d/ds$ ,  $K$  – кривизна орбиты,  $\chi$  – кручение. Радиус вектор любой точки, удалённой от орбиты меньше чем на радиус кривизны, представляется в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s) + x\mathbf{n}(s) + y\mathbf{b}(s). \quad (\text{A.4})$$

Контравариантным координатам  $u^i = \{x, s, y\}$  соответствует базис

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = (1 + Kx)\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad (\text{A.5})$$

с метрическим тензором

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + Kx)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{g} = (1 + Kx). \quad (\text{A.6})$$

Для перехода в новую криволинейную систему координат воспользуюсь производящей функцией вида

$$F = -\mathbb{P}\mathbf{r} = -\mathbb{P}(\mathbf{r}_0(s) + x\mathbf{n}(s) + y\mathbf{b}(s)), \quad (\text{A.7})$$

где  $\mathbb{P}$  – старые импульсы,  $\mathbf{r}$  – новые координаты. Новые канонические импульсы есть

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 = -\frac{\partial F}{\partial x} = \mathbb{P}\mathbf{n} \\ \mathcal{P}_2 = -\frac{\partial F}{\partial s} = \mathbb{P}(\tau(1 + Kx) + \chi(y\mathbf{n} - x\mathbf{b})) \\ \mathcal{P}_3 = -\frac{\partial F}{\partial y} = \mathbb{P}\mathbf{b}. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Аналогично изменятся и компоненты векторного потенциала

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1 = \mathbf{A}\mathbf{n} \\ \mathcal{A}_2 = \mathbf{A}(\tau(1 + Kx) + \chi(z\mathbf{n} - x\mathbf{b})) \\ \mathcal{A}_3 = \mathbf{A}\mathbf{b}. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$



Рассматривая случай только плоских орбит, то есть с нулевым кручением  $\chi = 0$ , записываю гамильтониан в новых переменных

$$H_0(x, s, y, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3; t) = e\varphi + \left[ m^2 c^2 + \left( \mathcal{P}_1 - \frac{e}{c} \mathcal{A}_1 \right)^2 + \frac{1}{(1 + Kx)^2} \left( \mathcal{P}_2 - \frac{e}{c} \mathcal{A}_2 \right)^2 + \left( \mathcal{P}_3 - \frac{e}{c} \mathcal{A}_3 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.10})$$

Переходя к переменной  $s$  как к новому времени и  $\mathcal{P}_2$  — новому гамильтониану, получаю

$$H_1(x, t, y, \mathcal{P}_1, -H_0, \mathcal{P}_3; s) = -\frac{e}{c} \mathcal{A}_2 - (1 + Kx) \left[ \frac{(H_0 - e\varphi)^2}{c^2} - m^2 c^2 - \left( \mathcal{P}_1 - \frac{e}{c} \mathcal{A}_1 \right)^2 - \left( \mathcal{P}_3 - \frac{e}{c} \mathcal{A}_3 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.11})$$

где  $H_0 = E$  это полная энергия частицы, которая является интегралом движения, если скалярный  $\varphi$  и векторный  $\mathcal{A}$  потенциалы не зависят явно от времени  $t$ . Предполагая в дальнейшем независимость потенциалов от времени, возможно нормировать импульсы на модуль кинетического (не обобщённого) импульса равновесной частицы  $P_0 = |\mathbf{P}_0|$  или на модуль кинетического импульса самой частицы  $P = |\mathbf{P}|$ , причём два получающихся гамильтониана удобны для использования в различных задачах.

### А.0.1 Нормировка на $P_0$

Нормируя импульсы на модуль кинетического импульса равновесной частицы  $P_0$  и вводя новые обозначения

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\mathcal{P}_1}{P_0}, & E_2 &= \frac{E}{P_0 c}, & H_2 &= \frac{H_1}{P_0}, & \mathcal{A}_1 &= A_x, \\ p_y &= \frac{\mathcal{P}_3}{P_0}, & t_2 &= ct, & \mathcal{A}_2 &= A_s(1 + Kx), & \mathcal{A}_3 &= A_y, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

получаю вместо (A.11) гамильтониан в виде

$$H_2(x, ct, y, p_x, -\frac{E}{P_0c}, p_y; s) = -\frac{e}{P_0c}A_s(1 + Kx) - (1 + Kx) \left[ \left( \frac{E}{P_0c} - \frac{e\varphi}{P_0c} \right)^2 - \frac{m^2c^2}{P_0^2} - \left( p_x - \frac{e}{P_0c}A_x \right)^2 - \left( p_y - \frac{e}{P_0c}A_y \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.13})$$

где энергия и импульс равновесной частицы связаны известным соотношением  $E_0^2 = P_0^2c^2 + m^2c^4$ .

Переход к относительному отклонению энергии частицы  $p_\sigma = (E - E_0)/p_0c = \Delta E/p_0c$  осуществляется с помощью производящей функции старых координат и новых импульсов

$$F(x, ct, y, p_{x,3}, p_\sigma, p_{y,3}) = -ct \left( \frac{E_0}{p_0c} + p_\sigma \right) + xp_{x,3} + yp_{y,3},$$

и новый гамильтониан есть

$$H_3(x_3, -ct, y_3, p_{x,3}, p_\sigma, p_{y,3}; s) = -\frac{e}{P_0c}A_s(1 + Kx_3) - (1 + Kx_3) \left[ \left( \frac{1}{\beta_0} + p_\sigma - \frac{e\varphi}{P_0c} \right)^2 - \frac{1}{\gamma_0^2\beta_0^2} - \left( p_{x,3} - \frac{e}{P_0c}A_x \right)^2 - \left( p_{y,3} - \frac{e}{P_0c}A_y \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.14})$$

где  $\gamma_0$  и  $\beta_0$  это лоренц-фактор и безразмерная скорость равновесной частицы. Последний шаг это переход от абсолютного времени  $ct$  к запаздыванию частицы относительно равновесной  $\sigma = s - ct$ . Производящая функция для этого преобразования

$$F(x_3, -ct, y_3, p_{x,4}, p_{\sigma,4}, p_{y,4}) = x_3p_{x,4} + y_3p_{y,4} + p_{\sigma,4}(s - ct) + \frac{s}{\beta_0}.$$

Опуская числовые индексы в новом гамильтониане имею

$$\begin{aligned}
 H(x, \sigma, y, p_x, p_\sigma, p_y; s) = & -\frac{e}{P_0 c} A_s (1 + Kx) + p_\sigma + \frac{1}{\beta_0} \\
 & - (1 + Kx) \left[ \left( \frac{1}{\beta_0} + p_\sigma - \frac{e\varphi}{P_0 c} \right)^2 - \frac{1}{\gamma_0^2 \beta_0^2} \right. \\
 & \left. - \left( p_x - \frac{e}{P_0 c} A_x \right)^2 - \left( p_y - \frac{e}{P_0 c} A_y \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.15})
 \end{aligned}$$

### А.0.2 Нормировка на $P$

Нормируя импульсы на модуль кинетического импульса самой частицы  $P$  и вводя новые обозначения

$$\begin{aligned}
 p_x = \frac{\mathcal{P}_1}{P}, \quad E_2 = \frac{E}{Pc}, \quad H_2 = \frac{H_1}{P}, \quad \mathcal{A}_1 = A_x, \\
 p_y = \frac{\mathcal{P}_3}{P}, \quad t_2 = ct, \quad \mathcal{A}_2 = A_s(1 + Kx), \quad \mathcal{A}_3 = A_y,
 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

получаю вместо (A.11) гамильтониан в виде

$$\begin{aligned}
 H_2(x, ct, y, p_x, -E_2, p_y; s) = & -\frac{e}{Pc} A_s (1 + Kx) \\
 & - (1 + Kx) \left[ \left( \frac{E}{Pc} - \frac{e\varphi}{Pc} \right)^2 - \frac{m^2 c^2}{P^2} \right. \\
 & \left. - \left( p_x - \frac{e}{Pc} A_x \right)^2 - \left( p_y - \frac{e}{Pc} A_y \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.17})
 \end{aligned}$$

Для перехода от  $E_2 = E/Pc$  к относительному отклонению импульса частицы  $\delta = (P - P_0)/P_0$  использую соотношение

$$\frac{E}{Pc} = \sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{P_0^2 (1 + \delta)^2}}$$

и производящую функцию

$$F(x, ct, y, p_{x,3}, \delta, p_{y,3}) = -ct \sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{P_0^2 (1 + \delta)^2}} + x p_{x,3} + y p_{y,3}.$$

Полагая скалярный потенциал равным нулю  $\varphi = 0$ , получаю новый гамильтониан

$$H_3(x_3, ct_3, y_3, p_{x,3}, p_t, p_{y,3}; s) = -\frac{e}{P_0 c} \frac{A_s}{(1 + \delta)} (1 + Kx_3) - (1 + Kx_3) \left[ 1 - \left( p_{x,3} - \frac{e}{P_0 c} \frac{A_x}{(1 + \delta)} \right)^2 - \left( p_{y,3} - \frac{e}{P_0 c} \frac{A_y}{(1 + \delta)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.18})$$

где  $P_0 = \gamma_0 m c \beta_0$  и

$$ct_3 = \frac{ct}{\gamma_0^2 \beta_0^2} \frac{1}{(1 + \delta)^3} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma_0^2 \beta_0^2 (1 + \delta)^2}}}.$$

В отсутствии продольного поля и в пренебрежении краевыми полями (куратно-постоянное приближение) векторный потенциал составляет

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(x, y, s) = & K_0(s)x + K_0^2(s) \frac{x^2}{2} + K_1(s) \frac{x^2 - y^2}{2} + K_2(s) \frac{x^3 - 3xy^2}{6} \\ & + K_3(s) \frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{24}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{A}_1(x, y, s) = 0,$$

$$\mathcal{A}_3(x, y, s) = 0.$$

Используя выражения для векторного потенциала и раскладывая гамильтониан (A.18) по всем переменным до пятого порядка, получаю

$$\begin{aligned} H_1 = & -1 + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{(p_x^2 + p_y^2)^2}{8} + K_0^2 \frac{x^2}{2} + K_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + K_2 \frac{x^3 - 3xy^2}{6} \\ & + K_3 \frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{24} + K_0 x \left( \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{(p_x^2 + p_y^2)^2}{8} \right) \\ & + \delta \left( -K_0 x - K_0^2 \frac{x^2}{2} - K_1 \frac{x^2 - y^2}{2} - K_2 \frac{x^3 - 3xy^2}{6} - K_3 \frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{24} \right) \\ & + \delta^2 \left( K_0 x + K_0^2 \frac{x^2}{2} + K_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + K_2 \frac{x^3 - 3xy^2}{6} \right) \\ & + \delta^3 \left( -K_0 x - K_0^2 \frac{x^2}{2} - K_1 \frac{x^2 - y^2}{2} \right) + \delta^4 x K_0. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

### А.0.3 Гармоническое разложение гамильтониана

Используется функция Гамильтона (А.20), в которой ввиду малости опущены слагаемые диполей пропорциональные  $K_0$  и рассматривается частица с равновесной энергией  $\delta = 0$ . Первым действием является переход к переменным действия фазы  $\{j_{x,y}, \psi_{x,y}\}$ , связанных со старыми координатами соотношениями

$$x = \sqrt{2j_x\beta_x} \cos\left(\psi_x + \varphi_x(s) - \frac{\nu_x s}{R}\right), \quad (\text{A.21})$$

$$p_x = -\frac{x}{\beta_x} \left(\alpha_x + \tan\left(\psi_x + \varphi_x(s) - \frac{\nu_x s}{R}\right)\right), \quad (\text{A.22})$$

$$y = \sqrt{2j_y\beta_y} \cos\left(\psi_y + \varphi_y(s) - \frac{\nu_y s}{R}\right), \quad (\text{A.23})$$

$$p_y = -\frac{y}{\beta_y} \left(\alpha_y + \tan\left(\psi_y + \varphi_y(s) - \frac{\nu_y s}{R}\right)\right), \quad (\text{A.24})$$

где  $\varphi_{x,y}(s) = \int_0^s d\tau / \beta_{x,y}(\tau)$ ,  $\nu_{x,y}$  – бетатронная частота. Производящая функция такой замены переменных есть

$$F(x, y, \psi_x, \psi_y, s) = -\frac{x^2}{2\beta_x} \left(\alpha_x + \tan\left(\psi_x + \varphi_x(s) - \frac{\nu_x s}{R}\right)\right) - \frac{y^2}{2\beta_y} \left(\alpha_y + \tan\left(\psi_y + \varphi_y(s) - \frac{\nu_y s}{R}\right)\right). \quad (\text{A.25})$$

В новом гамильтониане сразу перейду ко времени  $\theta = s/R$ , где  $R = \Pi/2\pi$  – средний радиус ускорителя с периметром  $\Pi$ , это осуществляется заменой  $s \rightarrow \theta$  и умножением гамильтониана на  $R$ , так что новая функция гамильтона

от переменных  $(\psi_x, \psi_y, j_x, j_y, \theta)$  есть

$$\begin{aligned}
H &= \nu_x j_x + \nu_y j_y + \frac{RK_2}{6\sqrt{2}} j_x^{\frac{3}{2}} \beta_x^{\frac{3}{2}} \left( 3 \cos[\phi_x] + \cos[3\phi_x] \right) \\
&\quad - \frac{RK_2}{2\sqrt{2}} j_y \beta_y j_x^{\frac{1}{2}} \beta_x^{\frac{1}{2}} \left( 2 \cos[\phi_x] + \cos[\phi_x - 2\phi_y] + \cos[\phi_x + 2\phi_y] \right) \\
&\quad + \frac{RK_3}{48} j_x^2 \beta_x^2 \left( 3 + 4 \cos[2\phi_x] + \cos[4\phi_x] \right) \\
&\quad + \frac{RK_3}{48} j_y^2 \beta_y^2 \left( 3 + 4 \cos[2\phi_y] + \cos[4\phi_y] \right) \\
&\quad - \frac{RK_3}{8} j_x j_y \beta_x \beta_y \left( 2 + 2 \cos[2\phi_x] + 2 \cos[2\phi_y] \right. \\
&\quad \quad \left. + \cos[2\phi_x - 2\phi_y] + \cos[2\phi_x + 2\phi_y] \right) \\
&= H_0(\psi_x, \psi_y, j_x, j_y; \theta) + \varepsilon H_1(\psi_x, \psi_y, j_x, j_y; \theta),
\end{aligned} \tag{A.26}$$

где  $\phi_{x,y}$  обозначает функции

$$\phi_{x,y} = \psi_{x,y} + \varphi_{x,y}(\theta) - \nu_{x,y}\theta, \tag{A.27}$$

и

$$\varphi_{x,y}(\theta) = \int_0^\theta \frac{R d\tau}{\beta_{x,y}(\tau)}. \tag{A.28}$$

Следующим шагом гамильтониан (A.26) раскладывается в ряд Фурье по периодической переменной  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Разложение функций, входящих в гамильтониан, осуществляется следующим образом ( $i$  — мнимая единица)

$$\begin{aligned}
&f(\theta) \cos[\psi_x + \varphi_x(\theta) - \nu_x \theta] = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos[\psi_x + \varphi_x(\tau) - \nu_x \tau] e^{-im\tau} d\tau \right) e^{im\theta} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos[\varphi_x(\tau) - \nu_x \tau - m\tau] d\tau \right) \cos[\psi_x + m\theta] \\
&\quad - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \sin[\varphi_x(\tau) - \nu_x \tau - m\tau] d\tau \right) \sin[\psi_x + m\theta].
\end{aligned} \tag{A.29}$$

В случае симметричной ячейки  $f(\theta) = f(-\theta)$ , вторая сумма, с синусами, равняется нулю, такая симметричная ячейка и рассматривается далее.

Секступольные гармоники в симметричной ячейке:

$$A_{1,m} = \frac{1}{48\pi} \int_0^{2\pi} RK_2(\tau) \beta_x^{3/2}(\tau) \cos[\varphi_x(\tau) - \nu_x \tau - m\tau] d\tau, \quad (\text{A.30})$$

$$A_{3,m} = \frac{1}{48\pi} \int_0^{2\pi} RK_2(\tau) \beta_x^{3/2}(\tau) \cos[3(\varphi_x(\tau) - \nu_x \tau) - m\tau] d\tau, \quad (\text{A.31})$$

$$B_{1,m} = \frac{1}{48\pi} \int_0^{2\pi} RK_2(\tau) \beta_x^{1/2}(\tau) \beta_y(\tau) \cos[\varphi_x(\tau) - \nu_x \tau - m\tau] d\tau, \quad (\text{A.32})$$

$$B_{+,m} = \frac{1}{48\pi} \int_0^{2\pi} RK_2(\tau) \beta_x^{1/2}(\tau) \beta_y(\tau) \quad (\text{A.33})$$

$$\times \cos[\varphi_x(\tau) - \nu_x \tau + 2(\varphi_y(\tau) - \nu_y \tau) - m\tau] d\tau, \quad (\text{A.34})$$

$$B_{-,m} = \frac{1}{48\pi} \int_0^{2\pi} RK_2(\tau) \beta_x^{1/2}(\tau) \beta_y(\tau) \quad (\text{A.35})$$

$$\times \cos[\varphi_x(\tau) - \nu_x \tau - 2(\varphi_y(\tau) - \nu_y \tau) - m\tau] d\tau, \quad (\text{A.36})$$

Октупольные гармоники в симметричной ячейке:

$$C_{0,m} = \frac{1}{384\pi} \int_0^{2\pi} RK_3(\tau) \beta_x^2(\tau) \cos[m\tau] d\tau, \quad (\text{A.37})$$

$$C_{2,m} = \frac{1}{384\pi} \int_0^{2\pi} RK_3(\tau) \beta_x^2(\tau) \cos[2(\varphi_x(\tau) - \nu_x\tau) - m\tau] d\tau, \quad (\text{A.38})$$

$$C_{4,m} = \frac{1}{384\pi} \int_0^{2\pi} RK_3(\tau) \beta_x^2(\tau) \cos[4(\varphi_x(\tau) - \nu_x\tau) - m\tau] d\tau, \quad (\text{A.39})$$

$$D_{0,m} = \frac{1}{384\pi} \int_0^{2\pi} RK_3(\tau) \beta_x(\tau) \beta_y(\tau) \cos[m\tau] d\tau, \quad (\text{A.40})$$

$$D_{2,0,m} = \frac{1}{384\pi} \int_0^{2\pi} RK_3(\tau) \beta_x(\tau) \beta_y(\tau) \cos[2(\varphi_x(\tau) - \nu_x\tau) - m\tau] d\tau, \quad (\text{A.41})$$

$$D_{0,2,m} = \frac{1}{384\pi} \int_0^{2\pi} RK_3(\tau) \beta_x(\tau) \beta_y(\tau) \cos[2(\varphi_y(\tau) - \nu_y\tau) - m\tau] d\tau, \quad (\text{A.42})$$

$$D_{2,2,m} = \frac{1}{384\pi} \int_0^{2\pi} RK_3(\tau) \beta_x(\tau) \beta_y(\tau) \quad (\text{A.43})$$

$$\times \cos[2(\varphi_x(\tau) - \nu_x\tau) + 2(\varphi_y(\tau) - \nu_y\tau) - m\tau] d\tau, \quad (\text{A.44})$$

$$D_{2,-2,m} = \frac{1}{384\pi} \int_0^{2\pi} RK_3(\tau) \beta_x(\tau) \beta_y(\tau) \quad (\text{A.45})$$

$$\times \cos[2(\varphi_x(\tau) - \nu_x\tau) - 2(\varphi_y(\tau) - \nu_y\tau) - m\tau] d\tau, \quad (\text{A.46})$$

$$E_{0,m} = \frac{1}{384\pi} \int_0^{2\pi} RK_3(\tau) \beta_y^2(\tau) \cos[m\tau] d\tau, \quad (\text{A.47})$$

$$E_{2,m} = \frac{1}{384\pi} \int_0^{2\pi} RK_3(\tau) \beta_y^2(\tau) \cos[2(\varphi_y(\tau) - \nu_y\tau) - m\tau] d\tau, \quad (\text{A.48})$$

$$E_{4,m} = \frac{1}{384\pi} \int_0^{2\pi} RK_3(\tau) \beta_y^2(\tau) \cos[4(\varphi_y(\tau) - \nu_y\tau) - m\tau] d\tau. \quad (\text{A.49})$$



Разложенный по гармоникам гамильтониан

$$\begin{aligned}
H &= \nu_x j_x + \nu_y j_y \\
&+ (2j_x)^{\frac{3}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( 3A_{1,m} \cos[\psi_x + m\theta] + A_{3,m} \cos[3\psi_x + m\theta] \right) \\
&- 3(2j_x)^{\frac{1}{2}}(2j_y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( 2B_{1,m} \cos[\psi_x + m\theta] + B_{1,2,m} \cos[\psi_x + 2\psi_y + m\theta] \right. \\
&\quad \left. + B_{1,-2,m} \cos[\psi_x - 2\psi_y + m\theta] \right) \\
&+ (2j_x)^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( 3C_{0,m} \cos[m\theta] + 4C_{2,m} \cos[2\psi_x + m\theta] + C_{4,m} \cos[4\psi_x + m\theta] \right) \\
&- 6(2j_x)(2j_y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( 2D_{0,m} \cos[m\theta] + 2D_{2,0,m} \cos[2\psi_x + m\theta] \right. \\
&\quad \left. + 2D_{0,2,m} \cos[2\psi_y + m\theta] + D_{2,2,m} \cos[2\psi_x + 2\psi_y + m\theta] \right. \\
&\quad \left. + D_{2,-2,m} \cos[2\psi_x - 2\psi_y + m\theta] \right) \\
&+ (2j_y)^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( 3E_{0,m} \cos[m\theta] + 4E_{2,m} \cos[2\psi_y + m\theta] + E_{4,m} \cos[4\psi_y + m\theta] \right).
\end{aligned} \tag{A.50}$$

## Приложение Б

### Решение уравнений движения методом рядов

Дифференциальные уравнения движения второго порядка удобно решать с помощью степенных рядов по  $s$ :

$$x(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{s^i}{i!}, \quad y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{s^i}{i!}. \quad (\text{Б.1})$$

Подстановка этих выражений в уравнения позволяет найти рекуррентные соотношения для коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$ , начиная с

$$a_0 = x(0) \quad b_0 = y(0) \quad (\text{Б.2})$$

$$a_1 = x'(0) \quad b_1 = y'(0) \quad (\text{Б.3})$$

Решение уравнений методом рядов похоже на предложенное ранее с помощью операторов Ли [90]

$$x(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} \frac{d^i x}{ds} \Big|_{s=0} = e^{s:-H:} x \Big|_{x(0), x'(0)}, \quad (\text{Б.4})$$

где  $H$  — это гамильтониан, а  $: \_ :$  обозначает скобки Пуассона. Метод рядов не требует нахождения экспоненциальных операторов, а рекурсивные соотношения дают абберационные члены нужных порядков. Также нет необходимости разбиения протяжённых элементов на тонкие, обрамлённые линейными транспортными матрицами.

#### Б.1 Квадруполь

Уравнения движения для квадруполя есть

$$x'' = -K_1 x, \quad y'' = K_1 y. \quad (\text{Б.5})$$

Подстановка (Б.1) в (Б.5) даёт рекуррентные соотношения для коэффициентов

$$a_{i+2} = -K_1 a_i, \quad b_{i+2} = K_1 b_i. \quad (\text{Б.6})$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 \left( 1 - K_1 \frac{s^2}{2!} + K_1^2 \frac{s^4}{4!} - \dots \right) + x'_0 \left( s - K_1 \frac{s^3}{3!} + K_1^2 \frac{s^5}{5!} - \dots \right) \\ &= x_0 \cos \left( \sqrt{K_1} s \right) + \frac{x'_0}{\sqrt{K_1}} \sin \left( \sqrt{K_1} s \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

Аналогичная процедура повторяется и для  $y(s)$ , давая в результате хорошо известное решение для квадруполья.

## Б.2 Секступоль

Уравнения движения для секступоля есть

$$x'' = -\frac{K_2}{2} (x^2 - y^2), \quad y'' = K_2 xy. \quad (\text{Б.8})$$

Подстановка (Б.1) в (Б.8) и использование формулы Коши

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^j a_j b_{i-j} \quad (\text{Б.9})$$

даёт рекуррентные соотношения для коэффициентов

$$a_{i+2} = -\frac{K_2}{2} \sum_{j=0}^i C_i^j (a_j a_{i-j} - b_j b_{i-j}), \quad b_{i+2} = K_2 \sum_{j=0}^i C_i^j a_j b_{i-j}, \quad (\text{Б.10})$$

где  $C_i^j = i! / j!(i-j)!$  — биномиальный коэффициент. Первые восемь коэффициентов приведены ниже

$$a_0 = x_0 \quad b_0 = y_0 \quad (\text{Б.11})$$

$$a_1 = x'_0 = p_{x0} \quad b_1 = y'_0 = p_{y0} \quad (\text{Б.12})$$

$$a_2 = -\frac{K_2}{2} (x_0^2 - y_0^2) \quad b_2 = K_2 x_0 y_0 \quad (\text{Б.13})$$

$$a_3 = -K_2 (x_0 p_{x0} - y_0 p_{y0}) \quad b_3 = K_2 (x_0 p_{y0} + p_{x0} y_0) \quad (\text{Б.14})$$

$$a_4 = \frac{K_2}{2} (-2p_{x0}^2 + 2p_{y0}^2 + K_2x_0 (x_0^2 + y_0^2)) \quad (\text{Б.15})$$

$$b_4 = \frac{K_2}{2} (4p_{x0}p_{y0} + K_2y_0 (x_0^2 + y_0^2)) \quad (\text{Б.16})$$

$$a_5 = \frac{K_2^2}{2} (5p_{x0}x_0^2 + 6p_{y0}x_0y_0 - p_{x0}y_0^2) \quad (\text{Б.17})$$

$$b_5 = \frac{K_2^2}{2} (5p_{y0}y_0^2 + 6p_{x0}x_0y_0 - p_{y0}x_0^2) \quad (\text{Б.18})$$

$$a_6 = K_2^2 \left( (5p_{x0}^2 + 3p_{y0}^2) x_0 + 2p_{x0}p_{y0}y_0 - \frac{K_2}{4} (5x_0^4 - 18x_0^2y_0^2 + y_0^4) \right) \quad (\text{Б.19})$$

$$b_6 = K_2^2 ((5p_{y0}^2 + 3p_{x0}^2) y_0 + 2p_{x0}p_{y0}x_0 - 2K_2 (x_0^3y_0 - 2x_0y_0^3)) \quad (\text{Б.20})$$

$$a_7 = K_2^2 (5p_{x0} (p_{x0}^2 + p_{y0}^2) - 2K_2x_0p_{x0} (5x_0^2 - 8y_0^2) + 14K_2x_0^2y_0p_{y0}) \quad (\text{Б.21})$$

$$b_7 = K_2^2 (5p_{y0} (p_{x0}^2 + p_{y0}^2) - 7K_2y_0p_{x0} (x_0^2 - y_0^2) - K_2x_0p_{y0} (3x_0^2 - 23y_0^2)) \quad (\text{Б.22})$$

$$a_8 = \frac{K_2^3}{2} (140x_0p_{x0}y_0p_{y0} + p_{y0}^2 (23x_0^2 + 5y_0^2) - p_{x0}^2 (75x_0^2 - 47y_0^2) + 2K_2x_0 (5x_0^4 + x_0^2y_0^2 + 8y_0^4)) \quad (\text{Б.23})$$

$$b_8 = \frac{K_2^3}{2} (x_0y_0 (-18p_{x0}^2 + 122p_{y0}^2) - p_{x0}p_{y0} (42x_0^2 - 98y_0^2) + K_2y_0 (x_0^4 + 32x_0^2y_0^2 + 7y_0^4)) \quad (\text{Б.24})$$

Для того, чтобы описать aberrации до третьего порядка по начальным условиям достаточно использовать первые восемь коэффициентов (до  $L^7$ ).

### Б.3 Октуполь

Уравнения движения для секступоля есть

$$x'' = -\frac{K_3}{6} (x^3 - 3xy^2), \quad y'' = \frac{K_3}{6} (3x^2y - y^3). \quad (\text{Б.25})$$

Подстановка (Б.1) в (Б.25) даёт рекуррентные соотношения для коэффициентов

$$a_{k+2} = -\frac{K_3}{6} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} C_k^i C_{k-i}^j (a_i a_j a_{k-i-j} - 3a_i b_j b_{k-i-j}), \quad (\text{Б.26})$$

$$b_{k+2} = \frac{K_3}{6} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} C_k^i C_{k-i}^j (3b_i a_j a_{k-i-j} - b_i b_j b_{k-i-j}). \quad (\text{Б.27})$$

Для описания аберраций до третьего порядка по начальным условиям достаточно использовать первые шесть коэффициентов (до  $L^5$ ), которые приведены ниже

$$a_0 = x_0 \quad b_0 = y_0 \quad (\text{Б.28})$$

$$a_1 = x'_0 = p_{x0} \quad b_1 = y'_0 = p_{y0} \quad (\text{Б.29})$$

$$a_2 = -\frac{K_3}{6} (x_0^3 - 3x_0 y_0^2) \quad b_2 = \frac{K_3}{6} (3x_0^2 y_0 - y_0^3) \quad (\text{Б.30})$$

$$a_3 = \frac{K_3}{2} (2x_0 y_0 p_{y0} - p_{x0} (x_0^2 - y_0^2)) \quad b_3 = \frac{K_3}{2} (2x_0 y_0 p_{x0} + p_{y0} (x_0^2 - y_0^2)) \quad (\text{Б.31})$$

$$a_4 = K_3 \left( -x_0 (p_{x0}^2 - p_{y0}) + 2y_0 p_{y0} p_{x0} + \frac{K_3}{12} x_0 (x_0^2 + y_0^2)^2 \right) \quad (\text{Б.32})$$

$$b_4 = K_3 \left( y_0 (p_{x0}^2 - p_{y0}) + 2x_0 p_{y0} p_{x0} + \frac{K_3}{12} y_0 (x_0^2 + y_0^2)^2 \right) \quad (\text{Б.33})$$

$$a_5 = K_3 \left( -p_{x0} (p_{x0}^2 - 3p_{y0}^2) + K_3 x_0 y_0 p_{y0} (x_0^2 + y_0^2) + \frac{K_3}{4} (3x_0^4 + 2x_0^2 y_0^2 - y_0^4) \right) \quad (\text{Б.34})$$

$$b_5 = K_3 \left( p_{y0} (3p_{x0}^2 - p_{y0}^2) + K_3 x_0 y_0 p_{x0} (x_0^2 + y_0^2) + \frac{K_3}{4} (-x_0^4 + 2x_0^2 y_0^2 + 3y_0^4) \right). \quad (\text{Б.35})$$

## Б.4 Край квадруполя

Уравнения движения в краевом поле линзы записываются как

$$\begin{cases} x' = p_x + K_1' \frac{xy^2}{4} + \frac{p_x^3}{2} + \frac{p_x p_y^2}{2} \\ p_x' = -K_1 x - K_1' \frac{(p_x y^2 - 2p_y xy)}{4} + K_1'' \frac{x^3}{12} \\ y' = p_y - K_1' \frac{x^2 y}{4} + \frac{p_y^3}{2} + \frac{p_x p_y^2}{2} \\ p_y' = K_1 y - K_1' \frac{(2p_x xy - p_y x^2)}{4} - K_1'' \frac{y^3}{12}, \end{cases} \quad (\text{Б.36})$$

а уравнения на вторые производные координат с точностью до третьего порядка есть [181]

$$\begin{aligned} x'' &= -K_1 \left( x - x'y'y + \frac{3}{2}xx'^2 + \frac{1}{2}xy'^2 \right) + \frac{K_1''}{12}(x^3 + 3xy^2) + K_1'xyy', \\ y'' &= K_1 \left( y - x'y'x + \frac{3}{2}yy'^2 + \frac{1}{2}yx'^2 \right) - \frac{K_1''}{12}(y^3 + 3x^2y) - K_1'xyx'. \end{aligned} \quad (\text{Б.37})$$

Подстановка (Б.1) в (Б.37) даёт рекуррентные соотношения для коэффициентов

$$\begin{aligned}
 a_{k+2} = & -K_1 \left[ a_k + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} C_k^i C_{k-i}^j \left( -b_i a_{j+1} b_{k-i-j+1} + \frac{3}{2} a_i a_{j+1} a_{k-i-j+1} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} a_i b_{j+1} b_{k-i-j+1} \right) \right] \\
 & + \frac{K_1''}{12} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} C_k^i C_{k-i}^j (a_i a_j a_{k-i-j} + 3a_i b_j b_{k-i-j}) \\
 & + K_1' \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} C_k^i C_{k-i}^j b_{i+1} a_j b_{k-i-j} \tag{Б.38}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{k+2} = & K_1 \left[ b_k + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} C_k^i C_{k-i}^j \left( -a_i a_{j+1} b_{k-i-j+1} + \frac{3}{2} b_i b_{j+1} b_{k-i-j+1} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} b_i a_{j+1} a_{k-i-j+1} \right) \right] \\
 & - \frac{K_1''}{12} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} C_k^i C_{k-i}^j (b_i b_j b_{k-i-j} + 3b_i a_j a_{k-i-j}) \\
 & - K_1' \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} C_k^i C_{k-i}^j a_{i+1} b_j a_{k-i-j} \tag{Б.39}
 \end{aligned}$$

## Приложение В

### Теория возмущений с преобразованиями Ли

В канонической теории возмущения Пуанкаре–вон Цейпеля [83–85] ищется преобразование к новым переменным действия фазы  $\{\phi_{1,(x,y)}, J_{1,x,y}\}$  для которых гамильтониан является функцией только переменных действия, что делает его, с точностью до найденного порядка, интегрируемым. При этом производящая функция представляется в виде ряда по степеням малого параметра и является функцией старых и новых переменных, что значительно затрудняет поиск преобразования от старых переменных к новым в порядках выше первого. Теория преобразований Ли, описанная в [89; 182; 183], идентична по цели теории Пуанкаре–вон Цейпеля, но позволяет получить преобразования как функции одного набора переменных. Далее, кратко изложена теория непрерывных преобразований Ли, подробное описание которых содержится в [183].

Для динамической системы с вектором обобщённых координат  $Z = \{q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N\}$ , подчинённой гамильтониану

$$H(Z, t) = H_0(Z; t) + \varepsilon H_1(Z; t), \quad (\text{B.1})$$

состоящему из интегрируемой части  $H_0$  и возмущения  $\varepsilon H_1$ , эволюция во времени описывается  $2N$  уравнениями движения

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \equiv \dot{Z}_i = \{Z_i, H\}, \quad (\text{B.2})$$

где  $\{, \}$  обозначают скобки Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_i^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (\text{B.3})$$

Дальнейшие вычисления упрощаются в операторных обозначениях Девара [184],



поэтому вводится оператор Ли представляющий скобки Пуассона

$$L(f)g = L_f g = \{f, g\}. \quad (\text{B.4})$$

Оператор канонического преобразования  $T$  от старых переменных  $z$  к новым  $Z$  определяется как

$$(Tf)(z, t) = f(Z(z, t)), \quad (\text{B.5})$$

где  $t$  – это время. Иными словами, действие этого оператора состоит в вычислении функции в новых координатах, в частности если  $f(z, t) = z$ , то  $Tz = Z$ . Искомое каноническое преобразование от старых переменных  $z$  к новым  $Z(z, t, \varepsilon)$ , зависит от параметра  $\varepsilon$ , с условием вырождения (единичность преобразования) при  $\varepsilon = 0$ :  $Z(z, t, 0) = z$ . Канонические преобразования порождаются одной функцией  $W(z, t, \varepsilon)$ , которая будучи непрерывный по  $t$  и  $\varepsilon$  подчиняется уравнениям

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \varepsilon} = \{Z_i, W(Z(z, t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}, \quad (\text{B.6})$$

что позволяет написать уравнения для оператора  $T$

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = -TL_W \quad (\text{B.7})$$

и для обратного преобразования  $T^{-1}$

$$\frac{\partial T^{-1}}{\partial \varepsilon} = L_W T^{-1}. \quad (\text{B.8})$$

Новый гамильтониан  $K$  связан со старым соотношением [184]

$$K = T^{-1}H + T^{-1} \int_0^\varepsilon T(\varepsilon') \frac{\partial W(\varepsilon')}{\partial t} d\varepsilon'. \quad (\text{B.9})$$

## Ряды Дебри

Разложение  $W$ ,  $T$ ,  $H$ ,  $K$  в ряд Тейлора по малому параметру  $\varepsilon$  позволяет решить уравнения (B.7), (B.8), (B.9) в соответствующих порядках малости.

Итак,

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n H_n, \quad K = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathcal{K}_n, \quad T = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n T_n, \quad (\text{B.10})$$

при этом  $T_0(\varepsilon = 0) = I$  – единичное преобразование и  $\mathcal{K}_0 = H_0$ . Для  $W$  разложение имеет другую форму

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n W_{n+1}, \quad (\text{B.11})$$

причина этого в том, что интегрирование в (B.9) увеличивает порядок малости. Так как оператор скобок Пуассона  $L_W$  линеен, то его разложение по степеням  $\varepsilon$

$$L(W) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n L(W_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n L_n \quad (\text{B.12})$$

позволяет решить уравнение (B.7)

$$T_n = -\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} T_m L_{n-m}. \quad (\text{B.13})$$

Для обратного оператора  $T^{-1}$  получается аналогичное соотношение

$$T_n^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} L_{n-m} T_m^{-1}. \quad (\text{B.14})$$

Подстановка полученных рядов в соотношение (B.9) позволяет найти уравнения на производящую функцию и новый гамильтониан

$$\frac{\partial W_n}{\partial \theta} + \{W_n, H_0\} = n\mathcal{K}_n - nH_n - \sum_{m=1}^{n-1} (L_{n-m}\mathcal{K}_m + mT_{n-m}^{-1}H_m). \quad (\text{B.15})$$

Первые три порядка прямого и обратного преобразования составляют

$$T_0 = I, \quad (\text{B.16})$$

$$T_1 = -L_1, \quad (\text{B.17})$$

$$T_2 = -\frac{L_2}{2} + \frac{L_1^2}{2}, \quad (\text{B.18})$$

$$T_3 = -\frac{L_3}{3} + \frac{L_1 L_2}{3} + \frac{L_2 L_1}{6} - \frac{L_1^3}{6}, \quad (\text{B.19})$$

$$T_0^{-1} = I, \quad (\text{B.20})$$

$$T_1^{-1} = L_1, \quad (\text{B.21})$$

$$T_2^{-1} = \frac{L_2}{2} + \frac{L_1^2}{2}, \quad (\text{B.22})$$

$$T_3^{-1} = \frac{L_3}{3} + \frac{L_2 L_1}{3} + \frac{L_1 L_2}{6} + \frac{L_1^3}{6}. \quad (\text{B.23})$$

Уравнения для нового гамильтониана и производящей функции до третьего порядка следующие

$$\mathcal{K}_0 = H_0 \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial \theta} + \{W_1, H_0\} = \mathcal{K}_1 - H_1, \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial \theta} + \{W_2, H_0\} = 2(\mathcal{K}_2 - H_2) - L_1(\mathcal{K}_1 + H_1), \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_3}{\partial \theta} + \{W_3, H_0\} = 3(\mathcal{K}_3 - H_3) - L_1(\mathcal{K}_2 + 2H_2) \\ - L_2(\mathcal{K}_1 + \frac{H_1}{2}) - \frac{L_1^2}{2}H_1. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

При решении этих уравнений  $W_n$  должны быть периодическими, а новый гамильтониан  $K_n$  выбирается чтобы устранить расходящиеся (секулярные) члены.

Для гамильтониана (A.26) с  $H_0 = \nu_x j_x + \nu_y j_y$  уравнение (B.25) превращается в

$$\frac{\partial W_1}{\partial \theta} + \nu_x \frac{\partial W_1}{\partial \psi_x} + \nu_y \frac{\partial W_1}{\partial \psi_y} = \mathcal{K}_1 - H_1, \quad (\text{B.28})$$

и чтобы исключить секулярные члены, добавка первого порядка к новому гамильтониану должна быть

$$\mathcal{K}_1 = \iint_0^{2\pi} H_1 \frac{d\psi_x}{2\pi} \frac{d\psi_y}{2\pi} = \langle H_1 \rangle_{\psi_x, \psi_y}, \quad (\text{B.29})$$

что есть усреднение по угловым переменным  $\psi_{x,y}$ . Таким образом, новый гамильтониан в первом порядке

$$K = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1 = \nu_x J_{1,x} + \nu_y J_{1,y} + \langle H_1 \rangle_{\psi_x, \psi_y} \quad (\text{B.30})$$

является функцией только новых переменных действия  $J_{1,x,y}$ , которые инварианты в первом порядке теории возмущений. Зависимость частоты от действия вычисляется как

$$\nu_{1,x,y} - \nu_{x,y} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial J_{1,x,y}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \langle H_1 \rangle_{\psi_x, \psi_y}}{\partial j_{x,y}} d\theta. \quad (\text{B.31})$$

Для нахождения производящей функции  $W_1$ , необходимо найти периодическое решение уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial \theta} + \nu_x \frac{\partial W_1}{\partial \psi_x} + \nu_y \frac{\partial W_1}{\partial \psi_y} = f(\theta) \cos [n(\psi_x + \varphi_x(\theta) - \nu_x \theta) \\ + m(\psi_y + \varphi_y(\theta) - \nu_y \theta)] \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

с периодической  $f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$ . Прямой подстановкой можно убедиться, что такое решение есть

$$W_1 = \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{f(\tau)}{2} \frac{\sin[\Phi(n, m)]}{\sin[n\pi\nu_x + m\pi\nu_y]} d\tau, \quad (\text{B.33})$$

где

$$\Phi(n, m) = n(\psi_x + \varphi_x(\tau) - \pi\nu_x - \nu_x \theta) + m(\psi_y + \varphi_y(\tau) - \pi\nu_y - \nu_y \theta). \quad (\text{B.34})$$

Вычисления в следующих порядках проводятся аналогично: поправка к гамильтониану второго порядка

$$\mathcal{K}_2 = \iint_0^{2\pi} \left( H_2 + \frac{1}{2} L_1(\mathcal{K}_1 + H_1) \right) \frac{d\psi_x}{2\pi} \frac{d\psi_y}{2\pi}, \quad (\text{B.35})$$

Для нахождения производящей функции  $W_2$ , необходимо найти периодическое решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_2}{\partial \theta} + \nu_x \frac{\partial W_2}{\partial \psi_x} + \nu_y \frac{\partial W_2}{\partial \psi_y} = \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\tau f(\theta) f(\tau) \\ \times \cos \left[ n_x(\psi_x + \varphi_x(\theta) - \nu_x \theta) + m_x(\varphi_x(\theta) - \varphi_x(\tau) + \pi\nu_x) \right. \\ \left. + n_y(\psi_y + \varphi_y(\theta) - \nu_y \theta) + m_y(\varphi_y(\theta) - \varphi_y(\tau) + \pi\nu_y) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Такое решение есть

$$\begin{aligned}
 W_2 = & \int_{\theta}^{\theta+2\pi} dt_2 \int_{t_2}^{t_2+2\pi} dt_1 \frac{f(t_2)f(t_1)}{2 \sin[n_x \pi \nu_x + n_y \pi \nu_y]} \\
 & \times \sin \left[ n_x (\psi_x + \varphi_x(t_2) - \pi \nu_x - \nu_x \theta) + m_x (\varphi_x(t_2) - \varphi_x(t_1) + \pi \nu_x) \right. \\
 & \left. + n_y (\psi_y + \varphi_y(t_2) - \pi \nu_y - \nu_y \theta) + m_y (\varphi_y(t_2) - \varphi_y(t_1) + \pi \nu_y) \right], \quad (\text{B.37})
 \end{aligned}$$

Поправка к гамильтониану третьего порядка составляет

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_3 = & \iint_0^{2\pi} \left( H_3 + \frac{1}{3} L_1 (\mathcal{K}_2 + 2H_2) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{3} L_2 \left( \mathcal{K}_1 + \frac{H_1}{2} \right) + \frac{L_1^2}{6} H_1 \right) \frac{d\psi_x}{2\pi} \frac{d\psi_y}{2\pi}. \quad (\text{B.38})
 \end{aligned}$$

## Приложение Г

### Краевые поля квадруполья

#### Г.1 Поле, векторный потенциал и гамильтониан

Разложение поля  $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ , обладающего квадрупольной симметрией

$$\begin{aligned} B_y(x, s, -y) &= B_y(x, s, y), & B_y(-x, s, y) &= -B_y(x, s, y), \\ B_x(x, s, -y) &= -B_x(x, s, y), & B_x(-x, s, y) &= B_x(x, s, y), \\ B_s(x, s, -y) &= -B_y(x, s, y), & B_s(-x, s, y) &= -B_y(x, s, y), \end{aligned} \quad (\text{Г.1})$$

получено в [185]

$$\left\{ \begin{aligned} B_x(s) &= y \sum_{i,k=0}^{\infty} y^{2i} x^{2k} a_{ki}(s) = \frac{\partial A_y}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial y}, \\ B_y(s) &= x \sum_{i,k=0}^{\infty} y^{2i} x^{2k} a_{ik}(s) = \frac{\partial A_s}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial s}, \\ B_s(s) &= xy \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{y^{2i} x^{2k} a'_{ik}(s)}{2i+1} = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}, \end{aligned} \right. \quad (\text{Г.2})$$

где коэффициенты  $a_{ik}$  удовлетворяют следующим соотношениям, ( $'$  обозначает производную по  $s$ ):

$$a_{ik} = \frac{2i+1}{2k+1} a_{ki}, \quad (\text{Г.3})$$

$$a''_{ik} + (2i+1)(2i+2)a_{i+1,k} + (2k+2)(2k+3)a_{i,k+1} = 0. \quad (\text{Г.4})$$

Векторный потенциал, удовлетворяющий условию калибровки

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{\partial A_y}{\partial x}, \quad (\text{Г.5})$$

есть

$$\begin{cases} A_x(s) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{y^{2i+2} x^{2k+1} a'_{ik}(s)}{(2i+1)(2i+2)}, \\ A_y(s) = -\frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{y^{2i+1} x^{2k+2} a'_{ik}(s)}{(2i+1)(2k+2)}, \\ A_s(s) = \sum_{i,k=0}^{\infty} \left[ \frac{y^{2i} x^{2k+2} a_{ik}(s)}{2k+2} - \frac{y^{2i+2} x^{2k} a_{ki}(s)}{2i+2} \right]. \end{cases} \quad (\Gamma.6)$$

Раскрывая суммы до 5-ого порядка и вводя определение градиента

$$G = \left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{x=0, y=0}, \quad (\Gamma.7)$$

получаю выражения для компонент поля и векторного потенциала

$$\begin{cases} B_x(s) = Gy - \frac{G''}{12}(3x^2y + y^3) + O(5), \\ B_y(s) = Gx - \frac{G''}{12}(3xy^2 + x^3) + O(5), \\ B_s(s) = G'xy - \frac{G'''}{12}(xy^3 + x^3y) + O(6), \end{cases} \quad (\Gamma.8)$$

$$\begin{cases} A_x(s) = \frac{G'xy^2}{4} - \frac{G'''}{12} \left( \frac{y^2x^3}{4} + \frac{xy^4}{8} \right) + O(7), \\ A_y(s) = -\frac{G'x^2y}{4} + \frac{G'''}{12} \left( \frac{yx^4}{8} + \frac{x^2y^3}{4} \right) + O(7), \\ A_s(s) = \frac{G(x^2 - y^2)}{2} - \frac{G''}{12} \frac{(x^4 - y^4)}{4} + O(6). \end{cases} \quad (\Gamma.9)$$

Подставляя полученные выражения векторного потенциала в гамильтониан (А.18) и опуская константу, имею [186]

$$\begin{aligned} H = & \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{(p_x^2 + p_y^2)^2}{8} + \frac{K_1}{1+\delta} \frac{(x^2 - y^2)}{2} \\ & + \frac{K'_1}{1+\delta} \frac{(p_xxy^2 - p_yx^2y)}{4} - \frac{K''_1}{1+\delta} \frac{(x^4 - y^4)}{48} \\ & + \frac{K_3}{1+\delta} \frac{(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)}{24} + O(5), \end{aligned} \quad (\Gamma.10)$$

где третье слагаемое  $(p_x^2 + p_y^2)^2/8$  называют кинематическим членом,  $K_1$  — нормированная сила квадруполья,  $K_3$  — нормированная сила октуполья.

### Г.1.1 Модели для поля линзы

#### Поле линзы в модели двух парабол

Представление краевого поля линзы в виде двух парабол [187] позволяет получить кусочно-постоянную вторую производную градиента (рисунок Г.1), что удобно для аналитических оценок. Учитывая гладкость градиента  $g$  и его первой производной от продольной координаты  $s$ , записываю

$$g(s) = \begin{cases} \frac{g}{2r^2}s^2 & , 0 \leq s \leq r, \\ g - \frac{g}{2r^2}(s - 2r)^2 & , r < s \leq 2r, \\ g & , 2r < s \leq L, \\ g - \frac{g}{2r^2}(s - L)^2 & , L < s \leq L + r, \\ \frac{g}{2r^2}(s - L - 2r)^2 & , L + r < s \leq L + 2r. \end{cases} \quad (\text{Г.11})$$

где  $L$  длина линзы,  $2r$  протяжённость краевой области. Первая производная градиента линзы

$$g'(s) = \begin{cases} \frac{g}{r^2}s & , 0 \leq s \leq r, \\ -\frac{g}{r^2}(s - 2r) & , r < s \leq 2r \\ 0 & , 2r < s \leq L, \\ -\frac{g}{r^2}(s - L) & , L < s \leq L + r, \\ \frac{g}{r^2}(s - L - 2r) & , L + r < s \leq L + 2r. \end{cases} \quad (\text{Г.12})$$

Вторая производная выглядит следующим образом:

$$g''(s) = \begin{cases} \frac{g}{r^2} & , 0 \leq s \leq r, \\ -\frac{g}{r^2} & , r < s \leq 2r, \\ 0 & , 2r < s \leq L, \\ -\frac{g}{r^2} & , L < s \leq L + r, \\ \frac{g}{r^2} & , L + r < s \leq L + 2r. \end{cases} \quad (\text{Г.13})$$



## Поле линзы в модели полинома 7-ой степени

Модель поля линзы в виде двух парабол обладает ступенчатой второй производной и разрывами посередине склонов, это не удобно для решения уравнений движения. Поэтому более удобно представить вывал поля в виде полинома  $f(s)$ , удовлетворяющего условиям непрерывности до третьей производной для левого и правого краёв соответственно:

$$f(0) = 0 \quad f(2r) = g \quad f(L) = g \quad f(L + 2r) = 0 \quad (\Gamma.14)$$

$$f'(0) = 0 \quad f'(2r) = 0 \quad f'(L) = 0 \quad f'(L + 2r) = 0 \quad (\Gamma.15)$$

$$f''(0) = 0 \quad f''(2r) = 0 \quad f''(L) = 0 \quad f''(L + 2r) = 0 \quad (\Gamma.16)$$

$$f'''(0) = 0 \quad f'''(2r) = 0 \quad f'''(L) = 0 \quad f'''(L + 2r) = 0. \quad (\Gamma.17)$$

Минимально возможная степень такого полинома есть семь (см. рисунок Г.1).

$$g(s) = \begin{cases} -\frac{5}{32} \frac{g}{r^7} s^7 + \frac{35}{32} \frac{g}{r^6} s^6 - \frac{21}{8} \frac{g}{r^5} s^5 + \frac{35}{16} \frac{g}{r^4} s^4 & , 0 \leq s \leq 2r, \\ g & , 2r < s \leq L, \\ \frac{5}{32} \frac{g}{r^7} (s-L)^7 - \frac{35}{32} \frac{g}{r^6} (s-L)^6 & , L \leq s \leq L + 2r, \\ + \frac{21}{8} \frac{g}{r^5} (s-L)^5 - \frac{35}{16} \frac{g}{r^4} (s-L)^4 + g & \end{cases} \quad (\Gamma.18)$$

Вторая производная градиента есть

$$g''(s) = \begin{cases} -\frac{105}{16} \frac{g}{r^7} s^5 + \frac{525}{16} \frac{g}{r^6} s^4 - \frac{105}{2} \frac{g}{r^5} s^3 + \frac{105}{4} \frac{g}{r^4} s^2 & , 0 \leq s \leq 2r, \\ 0 & , 2r < s \leq L, \\ \frac{105}{16} \frac{g}{r^7} (s-L)^5 - \frac{525}{16} \frac{g}{r^6} (s-L)^4 & , L \leq s \leq L + 2r, \\ + \frac{105}{2} \frac{g}{r^5} (s-L)^3 - \frac{105}{4} \frac{g}{r^4} (s-L)^2 & \end{cases} \quad (\Gamma.19)$$

Сравнение двух моделей распределения градиента приведено на рисунке Г.1.

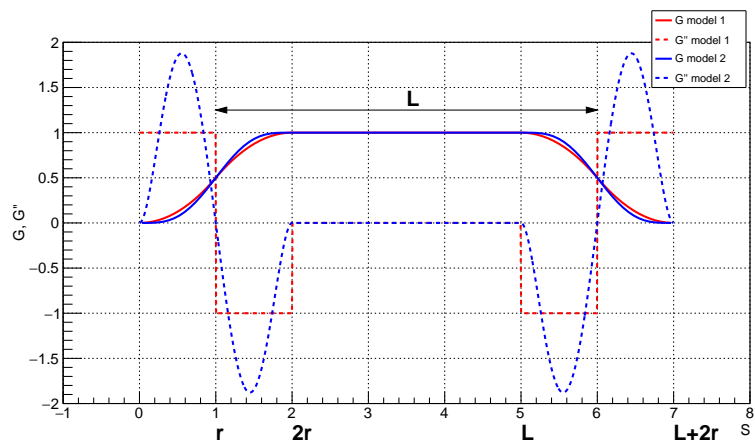


Рисунок Г.1 – Две модели, описывающие поведение градиента на краю квадрупольной линзы: две параболы – красные кривые, полином 7-ой степени – синие кривые. Сплошные кривые – градиенты, пунктирные – вторые производные градиента

## Приложение Д

### Параметрический резонанс

#### Д.1 Параметрический резонанс без затухания и с независимой от амплитуды модуляцией

Уравнение (4.65) без затухания

$$y'' - (K_1 - (K_1 - K_2\eta)p_\sigma)y = 0, \quad (\text{Д.1})$$

где модуляция не зависит от амплитуды

$$p_\sigma = g_n e^{i\alpha_y s} + g_n^* e^{-i\alpha_y s} = 2 |g_n| \cos(\alpha_y s + \chi_0), \quad (\text{Д.2})$$

и  $\chi_0 = \arg(g_n)$ ,  $g_n = c_n(50\sqrt{\varepsilon_y}/2)^2 = \text{const}$  превращается в уравнение обычного параметрического маятника. Однако вариация параметра происходит точно на резонансе  $\alpha_y = \{2\nu_y\}$ . Усреднённые уравнения есть

$$A_y = iB_2 A_y^*, \quad (\text{Д.3})$$

$$a'_y = -a_y |B_2| \sin(-2\varphi_y + \varphi_2), \quad (\text{Д.4})$$

$$\varphi'_y = |B_2| \cos(-2\varphi_y + \varphi_2), \quad (\text{Д.5})$$

где

$$B_2 = \frac{1}{2} g_n \left\langle (K_1 - K_2\eta) \beta_y e^{i(-2\psi_y + \alpha_y s)} \right\rangle, \quad (\text{Д.6})$$

и  $A_y = a_y e^{i\varphi_y}$ ,  $B_2 = |B_2| e^{i\varphi_2}$ . Уравнения (Д.4) и (Д.5) имеют две стационарные точки  $\varphi'_y = 0$

$$\varphi_y = \frac{\varphi_2}{2} \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad (\text{Д.7})$$

где  $n$  целое. В этих точках модуль амплитуды зависит от времени как

$$a_y(s) = a_{y,0} e^{\pm |B_2| s}. \quad (\text{Д.8})$$

На рисунке Д.1 показано численное решение уравнений (Д.4) и (Д.5) на плоскости усреднённых траекторий (амплитуд)  $y/\sigma_y = 2|A_y| \cos(\varphi_y)/\sqrt{\varepsilon_y}$  и  $p_y/\sigma_{py} = 2|A_y| \sin(\varphi_y)/\sqrt{\varepsilon_y}$ , где начальные условия  $a_y(0) = 50\sqrt{\varepsilon_y}/2$ , а  $\varphi_y$  однородно распределена в диапазоне  $(0; 2\pi)$ . Как и ожидалось, все траектории расходятся.

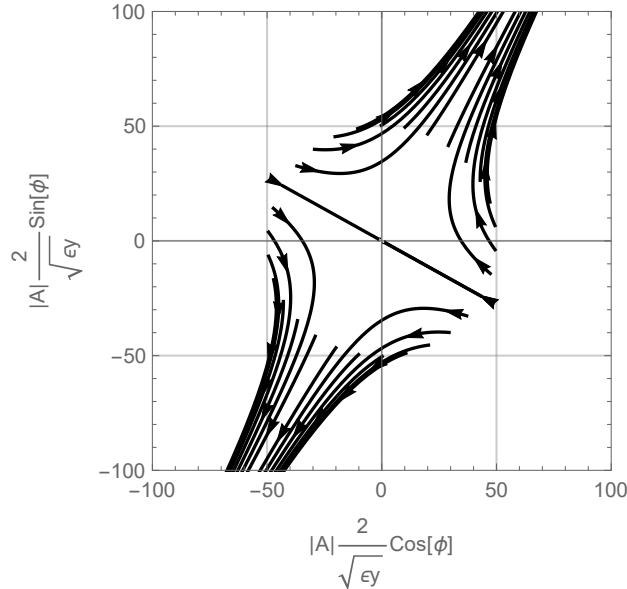


Рисунок Д.1 – Эволюция усреднённых траекторий, решений уравнений (Д.4) и (Д.5) с одинаковой начальной амплитудой  $y_0(\varphi_y = 0) = 50\sigma_y$  и различными фазами

## Д.2 Параметрический резонанс с затуханием и с независимой от амплитуды модуляцией

Уравнение с добавленным слагаемым, ответственным за затухание, записывается как

$$y'' - (K_1 - (K_1 - K_2\eta)p_\sigma) y + \Gamma K_0^2 y' = 0. \quad (\text{Д.9})$$

Усреднённые уравнения есть

$$A_y = -B_1 A_y + i B_2 A_y^*, \quad (\text{Д.10})$$

$$a'_y = -a_y |B_1| \cos(\varphi_1) - a_y |B_2| \sin(-2\varphi_y + \varphi_2), \quad (\text{Д.11})$$

$$\varphi'_y = -|B_1| \sin(\varphi_1) + |B_2| \cos(-2\varphi_y + \varphi_2), \quad (\text{Д.12})$$

где

$$B_1 = \frac{1}{2} \langle \Gamma K_0^2 (1 + i\alpha_y) \rangle \quad (\text{Д.13})$$

$$B_2 = \frac{1}{2} g_n \langle (K_1 - K_2 \eta) \beta_y e^{i(-2\psi_y + \alpha_y s)} \rangle, \quad (\text{Д.14})$$

и  $A_y = a_y e^{i\varphi_y}$ ,  $B_1 = |B_1| e^{i\varphi_1}$ ,  $B_2 = |B_2| e^{i\varphi_2}$ . Пренебрегая  $|B_1| \sin(\varphi_1)$ , замечаю что уравнения (Д.11) и (Д.12) имеют две стационарные точки  $\varphi'_y = 0$

$$\varphi_y = \frac{\varphi_2}{2} \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad (\text{Д.15})$$

где  $n$  целое. В этих точках модуль амплитуды составляет

$$a_y(s) = a_{y,0} e^{-|B_1| \cos(\varphi_1) \pm |B_2| s}. \quad (\text{Д.16})$$

На рисунках Д.2 и Д.3 показаны численные решения уравнений (Д.11) и (Д.12) на плоскости усреднённых траекторий  $y/\sigma_y = 2 |A_y| \cos(\varphi_y) / \sqrt{\varepsilon_y}$  и  $p_y/\sigma_{py} = 2 |A_y| \sin(\varphi_y) / \sqrt{\varepsilon_y}$ , где начальные условия  $a_y(0) = 50 \sqrt{\varepsilon_y} / 2$ , а  $\varphi_y$  однородно распределена в диапазоне  $(0; 2\pi)$ . Из-за затухания, имеется различное поведение в зависимости от амплитуды модуляции: если амплитуда модуляции мала, то все траектории стабильны (рисунок Д.2), если амплитуда модуляции велика, то все траектории расходятся (рисунок Д.3).

### Д.3 Параметрический резонанс с затуханием и с зависящей от амплитуды модуляцией

В реалистичном случае уравнения (4.65) с коэффициентами (4.68) и (4.69), амплитуда модуляции зависит от квадрата амплитуды колебаний. Поэтому, в зависимости от начальной амплитуды либо все траектории стабильны, либо только некоторые стабильны, или все нестабильны. На рисунках Д.4 (все траектории стабильны), Д.5 (некоторые траектории нестабильны) и Д.6 (большинство траекторий нестабильны) показаны численные решения уравнений (4.70) и (4.71) на плоскости усреднённых траекторий  $y/\sigma_y = 2 |A_y| \cos(\varphi_y) / \sqrt{\varepsilon_y}$  и

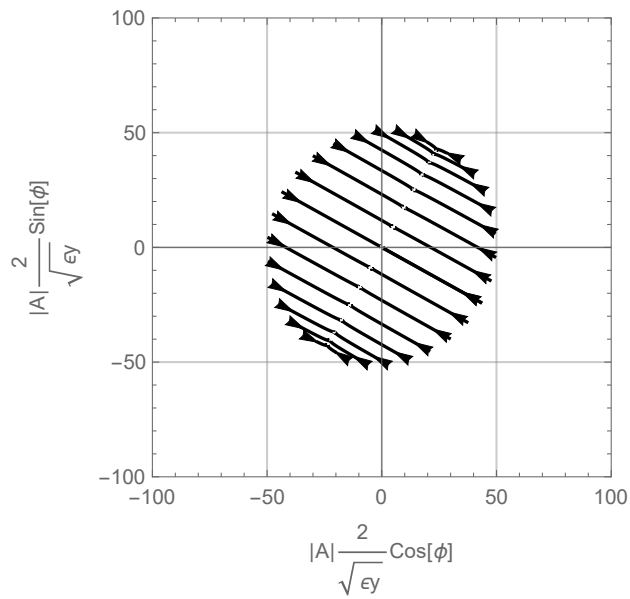


Рисунок Д.2 – Эволюция усреднённых траекторий, решений уравнений (Д.11) и (Д.12) с одинаковой начальной амплитудой  $y_0(\varphi_y = 0) = 50\sigma_y$  и различными фазами, малая амплитуда модуляции

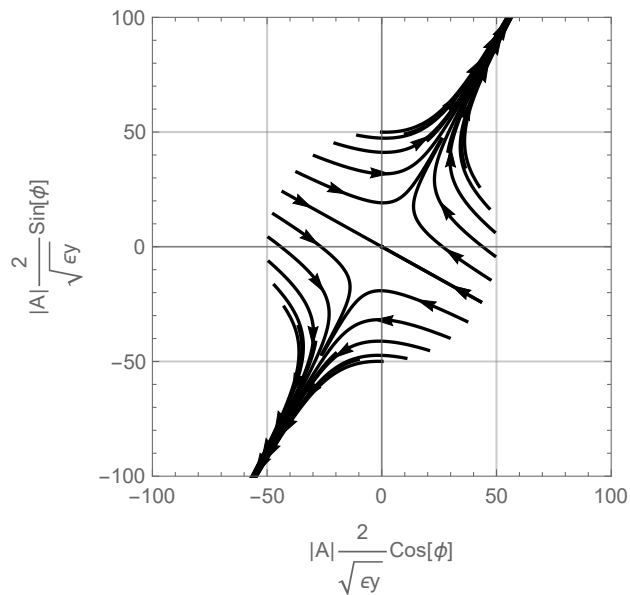


Рисунок Д.3 – Эволюция усреднённых траекторий, решений уравнений (Д.11) и (Д.12) с одинаковой начальной амплитудой  $y_0(\varphi_y = 0) = 50\sigma_y$  и различными фазами, большая амплитуда модуляции

$p_y/\sigma_{py} = 2|A_y|\sin(\varphi_y)/\sqrt{\varepsilon_y}$  для трёх различных начальных амплитуд и однородно распределённых фаз  $\varphi_y$  в диапазоне  $(0; 2\pi)$ . Все траектории стабильны для  $y_0(\varphi_y = 0) = 37\sigma_y$ , и с увеличением начальной амплитуды, число нестабильных траекторий растёт. Как видно на рисунке Д.6 стабильность траек-

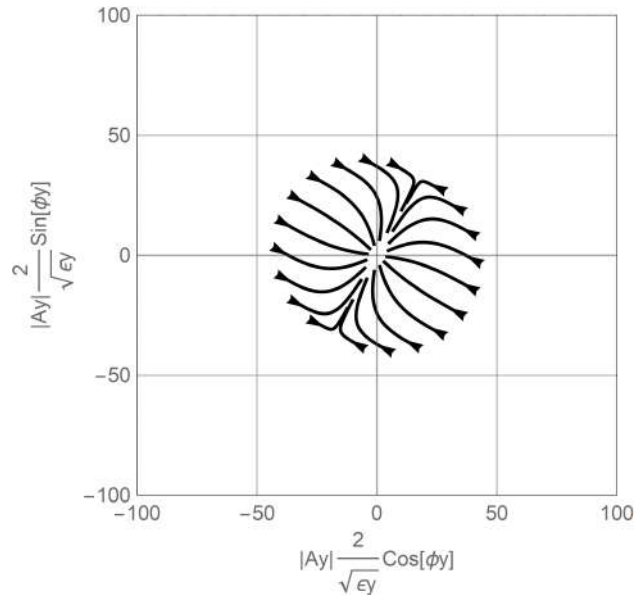


Рисунок Д.4 – Эволюция усреднённых траекторий, решений уравнений (4.70) и (4.71) с одинаковой начальной амплитудой  $y_0(\varphi_y = 0) = 37\sigma_y$  и различными фазами

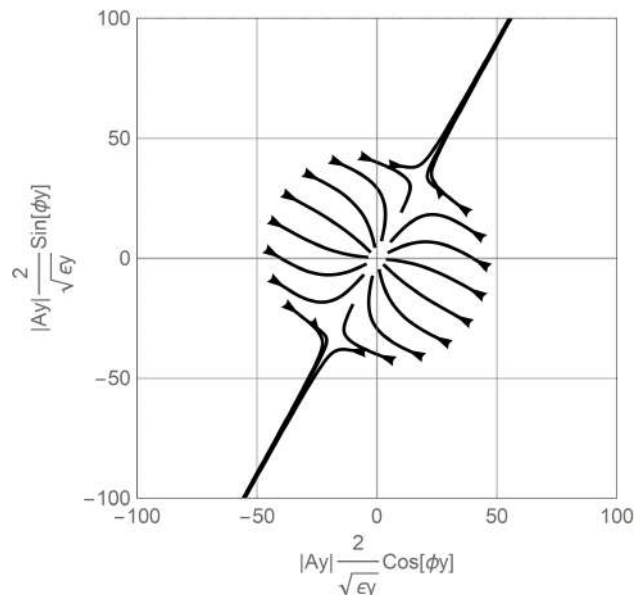


Рисунок Д.5 – Эволюция усреднённых траекторий, решений уравнений (4.70) и (4.71) с одинаковой начальной амплитудой  $y_0(\varphi_y = 0) = 40\sigma_y$  и различными фазами

тории зависит не только от начальной амплитуды, но и от начальной фазы.

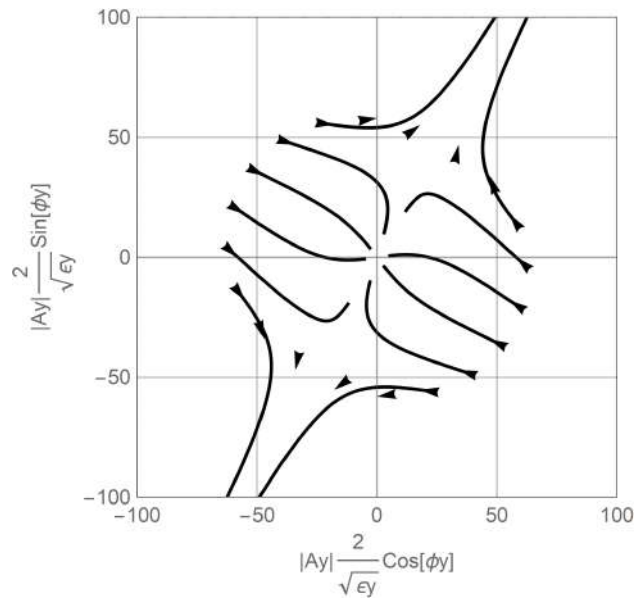


Рисунок Д.6 – Эволюция усреднённых траекторий, решений уравнений (4.70) и (4.71) с одинаковой начальной амплитудой  $y_0(\varphi_y = 0) = 58\sigma_y$  и различными фазами

Компьютерное моделирование с помощью MADX РТС подтверждает этот результат (рисунок Д.7).

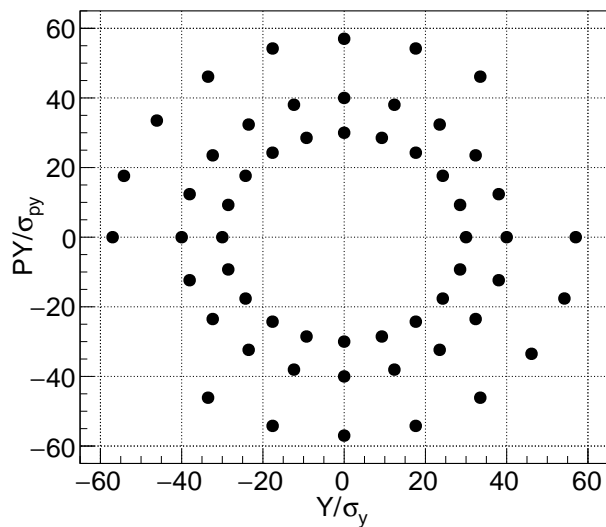


Рисунок Д.7 – Вертикальная динамическая апертура полученная в моделировании с помощью MADX РТС на плоскости  $Y, PY$  для структуры FCC-ee



## Приложение Е

### Гамильтониан движения в поле встречного пучка

#### Е.0.1 Потенциал пучка

В сопутствующей системе координат  $\{x', y', s'\}$ , все штрихованные величины относятся к ней, пучок имеет нормальное распределение плотности заряда по трём координатам

$$\rho(x', y', s') = \frac{N_1 e_1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_{x'} \sigma_{y'} \sigma_{s'}} \exp \left[ -\frac{x'^2}{2\sigma_{x'}^2} - \frac{y'^2}{2\sigma_{y'}^2} - \frac{s'^2}{2\sigma_{s'}^2} \right], \quad (\text{E.1})$$

где  $N_1$  – число частиц в пучке,  $e_1$  – заряд частиц пучка. Фурье образ плотности составляет

$$\begin{aligned} \rho(k_x, k_y, k_s) &= \int \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} \frac{dy'}{\sqrt{2\pi}} \frac{ds'}{\sqrt{2\pi}} \rho(x', y', s') \exp[-ik_x x' - ik_y y' - ik_s s'] \\ &= \frac{N_1 e_1}{(2\pi)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{k_x^2 \sigma_{x'}^2}{2} - \frac{k_y^2 \sigma_{y'}^2}{2} - \frac{k_s^2 \sigma_{s'}^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Решая уравнение Лапласа  $\Delta \varphi'(x', y', s') = -4\pi \rho(x', y', s')$  в Фурье гармониках, получаю фурье образ потенциала

$$\varphi'(k_x, k_y, k_s) = \frac{4\pi \rho(k_x, k_y, k_s)}{k_x^2 + k_y^2 + k_s^2}, \quad (\text{E.3})$$

и сам потенциал

$$\begin{aligned} \varphi'(x', y', s') &= \frac{N_1 e_1}{2\pi^2} \int \frac{dk_x dk_y dk_s}{k_x^2 + k_y^2 + k_s^2} \\ &\times \exp \left[ -\frac{k_x^2 \sigma_{x'}^2}{2} + ik_x x' - \frac{k_y^2 \sigma_{y'}^2}{2} + ik_y y' - \frac{k_s^2 \sigma_{s'}^2}{2} + ik_s s' \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Четырёх-вектор потенциала есть  $A^i = \{\varphi', 0, 0, 0\}$ .

В лабораторной системе координат  $\{x_1, y_1, s_1\}$  пучок движется вдоль оси  $s_1$  со скоростью  $v$  близкой к скорости света  $c$  ( $\beta_1 = v/c \approx 1$ ), координаты и

размеры пучка связаны как

$$\begin{aligned} x' &= x_1, & y' &= y_1, & s' &= \gamma_1(s_1 + \beta_1 ct), & ct' &= \gamma_1(ct + \beta_1 s_1), \\ \sigma_{x'} &= \sigma_x, & \sigma_{y'} &= \sigma_y, & \sigma_{s'} &= \gamma \sigma_s, \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

где  $\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - \beta_1^2}$  – Лоренц фактор,  $t$  – время. Компоненты 4-х потенциала составляют

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, y_1, s_1) = \gamma_1 \varphi' \\ A_{x1}(x_1, y_1, s_1) = A'_x = 0 \\ A_{y1}(x_1, y_1, s_1) = A'_y = 0 \\ A_{s1}(x_1, y_1, s_1) = \gamma_1(A'_s - \beta_1 \varphi') = -\gamma_1 \beta_1 \varphi' = -\beta_1 \varphi_1. \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, y_1, s_1) &= \frac{\gamma_1 N_1 e_1}{2\pi^2} \int \frac{dk_x dk_y dk_s}{k_x^2 + k_y^2 + k_s^2} \exp \left[ -\frac{k_x^2 \sigma_x^2}{2} + ik_x x_1 \right. \\ &\quad \left. -\frac{k_y^2 \sigma_y^2}{2} + ik_y y_1 - \frac{k_s^2 \gamma^2 \sigma_s^2}{2} + ik_s \gamma (s_1 + ct) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Следующим шагом перехожу в систему координат тестовой частицы  $\{x, y, s\}$ , летящей под горизонтальным углом  $2\theta \ll 1$  к оси  $x_1$  встречного пучка. Координаты и векторный потенциал связаны следующими преобразованиями, скалярный потенциал не изменяется,

$$\begin{cases} x_1 = x \cos(2\theta) + s \sin(2\theta) \approx x + s2\theta \\ y_1 = y \\ s_1 = -x \sin(2\theta) + s \cos(2\theta) \approx s, \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{cases} A_x = A_{x1} \cos(2\theta) - A_{s1} \sin(2\theta) = -A_{s1} \sin(2\theta) = \beta_1 \varphi_1 \sin(2\theta) \\ A_y = A_{y1} = 0 \\ A_s = A_{x1} \sin(2\theta) + A_{s1} \cos(2\theta) = A_{s1} \cos(2\theta) = -\beta_1 \varphi_1 \cos(2\theta). \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

### Е.0.2 Гамильтониан частицы в поле встречного пучка

Подставляя в гамильтониан (А.15) скалярный и векторный потенциалы (Е.9), считая, что  $\beta_0 = \beta = 1$ ,  $p_\sigma = 0$ ,  $\theta \ll 1$  и разлагая квадратный корень, получаю

$$H(x, \sigma, y, p_x, p_\sigma, p_y; s) \approx -1 + U + \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2}, \quad (\text{Е.10})$$

где

$$\begin{aligned} U &= \frac{e_2}{p_0 c} \varphi_1 (1 + \cos(2\theta)) \approx 2 \frac{e_2}{p_0 c} \varphi_1 \\ &= -\frac{N r_e}{\pi^2} \int \frac{dk_x dk_y dk_s}{k_x^2 + k_y^2 + k_s^2} \exp \left[ -\frac{k_x^2 \sigma_x^2}{2} + ik_x (x + s2\theta) \right. \\ &\quad \left. -\frac{k_y^2 \sigma_y^2}{2} + ik_y y - \frac{k_s^2 \gamma^2 \sigma_s^2}{2} + ik_s \gamma_1 (2s - \sigma) \right], \end{aligned} \quad (\text{Е.11})$$

где  $r_e = -\gamma_1 e_2 e_1 / (p_0 c)$  – классический радиус электрона, энергии тестовой частицы и пучка считаются одинаковыми, использовано определение  $\sigma = s - ct$ , чтобы написать  $s + ct = 2s - \sigma$ .