

Избранные вопросы нелинейной и хаотической динамики

О.В. Жиров

5 июня 2014 г.

Аннотация

Цель курса — введение в принципы хаотической динамики нелинейных систем. После краткого напоминания основ гамильтоновой механики обсуждаются и иллюстрируются на простых примерах основные проявления динамического хаоса. Центральная часть курса посвящена гамильтоновой динамике хаотических систем. Кроме того, рассмотрены вопросы динамики диссипативных систем, а также — связь хаотической динамики и механизмов возникновения неупорядоченных структур в твердом теле.

Вторая часть курса посвящена обсуждению квантовой динамики систем, хаотических в классическом пределе. В отличие от наивных ожиданий, квантовые эффекты способствуют подавлению классического динамического хаоса, приводя к устойчивости и обратимости квантовой эволюции. Обсуждается принцип соответствия квантовой и классической динамики, рассмотрены особенности динамики на различных этапах квантовой эволюции.

Содержание

1	Классическая динамика нелинейных систем.	10
1.1	Введение в основы гамильтоновой динамики. . .	10
1.1.1	Уравнения Гамильтона.	13
1.1.2	Скобки Пуассона.	17
1.1.3	Канонические преобразования.	19
1.1.4	Уравнение Гамильтона-Якоби.	22
1.1.5	Разделение переменных. Интегрируемые системы. Переменные действие – угол. Интегралы движения.	24
1.2	Фазовое пространство многомерных систем. . .	29
1.2.1	Основные свойства траекторий в фазовом пространстве. Теорема Лиувилля	30
1.2.2	Интегральные инварианты Пуанкаре . . .	32

1.2.3	Расширенное фазовое пространство. Связь нестационарных и консервативных систем. Бильярд Синая.	33
1.2.4	Интеграл действия	36
1.2.5	Сечение Пуанкаре. Инвариантные кривые.	39
1.2.6	Системы с разделяющимися переменными. Инвариантный тор.	42
1.2.7	Финитное и инфинитное движение, сепаратриса.	43
1.2.8	Бифуркации. Области регулярного и хаотического движения.	45
1.3	Гамильтоновы системы и канонические отображения.	46
1.3.1	Стандартное отображение Чирикова-Тейлора.	48
1.3.2	Регулярная и хаотическая динамика. Теория КАМ.	51
1.4	Линеаризованные уравнения.	55

1.4.1	Экспоненциальное разбегание траекторий, показатель Ляпунова. Неустойчивость хаотической динамики.	57
1.4.2	КС-энтропия.	61
1.4.3	Понятие динамического хаоса.	63
1.4.4	Этапы хаотической динамики, баллистический и диффузионный режимы.	64
1.4.5	Эргодичность.	65
1.4.6	Практическая необратимость хаотической динамики.	66
1.5	Случайность и ее численное моделирование.	67
1.5.1	Теория больших флуктуаций, обратимость во времени.	68
1.5.2	T-инвариантность гамильтоновой динамики и второй закон термодинамики.	71
1.6	Диссипативный хаос, аттракторы.	71
1.6.1	Модель Лоренца, реакция Белоусова.	71

1.6.2	Странные аттракторы.	71
1.7	Нелинейная динамика многочастичных систем. .	71
1.7.1	Несоизмеримые структуры, модель Френкеля- Конторовой.	71
1.7.2	Связь со стандартным отображением. Фа- зовый переход Обри.	71
1.7.3	Энергетический спектр, экспоненциальное вырождение основного состояния.	71
2	Квантовая динамика систем, хаотических в клас- сическом пределе.	71
2.1	Квантовый аналог стандартного отображения. . .	71
2.1.1	Квантовые резонансы.	71
2.1.2	Этапы квантовой эволюции. Квантовая диф- фузия и квантовая локализация.	71
2.1.3	Принцип соответствия квантовой и клас- сической динамики.	71

2.2	Вероятностное описание хаотических систем. Уравнение Лиувилля.	71
2.3	Квантовое уравнение Лиувилля.	71
2.3.1	Функция Вигнера и ее связь с классической плотностью в фазовом пространстве.	71
2.3.2	Дискретность фазового пространства.	71
2.4	Устойчивость и обратимость квантовой динамики.	71
2.4.1	Пороговый характер устойчивости по отношению к возмущениям.	71
2.4.2	Связь устойчивости со сложностью текущего квантового состояния.	71
2.4.3	Влияние на устойчивость и обратимость квантовой эволюции непрерывного шума.	71
2.4.4	Этапы квантовой эволюции, информационная энтропия Шеннона и энтропия фон Неймана.	71

2.5	Эргодичность квантовой эволюции и теория случайных матриц.	71
-----	--	----

Список литературы

- [1] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*, Теоретическая физика, т.1
Механика
- [2] *А. Лихтенберг, М. Либерман*, Регулярная и стохастическая динамика.
- [3] Г. Голдстейн, Классическая механика

1 Классическая динамика нелинейных систем.

1.1 Введение в основы гамильтоновой динамики.

Начнем с краткого напоминания элементарных основ гамильтонового подхода к описанию механических систем. Мы будем в значительной степени следовать классической монографии Лихтенберга и Либермана [2], более подробное изложение некоторых вопросов можно также найти в [1, 3].

Уравнения движения механической системы могут быть получены из принципа наименьшего действия

$$\delta \left(\int_{t_a}^{t_b} L(\dot{q}, q, t) dt \right) = 0, \quad (1)$$

где функция Лагранжа

$$L(\dot{q}, q, t) = T(\dot{q}) - U(q, t) \quad (2)$$

$T(\dot{q})$ и $U(q, t)$ – соответственно, кинетическая и потенциальная энергии, \dot{q}, q (вектора) скоростей и координат системы, t_a и t_b – начало и конец траектории системы $q(t)$. Равенство нулю для вариации действия (1) дает лагранжеву форму уравнений движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (3)$$

Определим гамильтониан как функцию переменных p, q, t

$$H(p, q, t) = p\dot{q} - L(\dot{q}, q, t). \quad (4)$$

Его полный дифференциал

$$\begin{aligned}dH &= \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) d\dot{q} + \dot{q} dp - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) d\dot{q} + \dot{q} dp - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt,\end{aligned}$$

при переходе от второй строки к третьей использовано уравнение (3). Приравнявая нулю коэффициент при $d\dot{q}$, получим

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad (5)$$

сравнение же коэффициентов при дифференциалах dp , dq и dt даст

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (6)$$

и уравнения движения, называемые *каноническими* уравнениями Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (7)$$

Переменные p, q называются обобщенными (каноническими) импульсами и координатами.

1.1.1 Уравнения Гамильтона.

В общем случае гамильтониан частицы в N -мерном пространстве является функцией $2N + 1$ переменных:

$$H(p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N; t), \quad (8)$$

N пар обобщенных импульсов и координат (p_i, q_i) и времени t . Уравнения, описывающие временную эволюцию системы (*кано-*

ические уравнения Гамильтона) имеют вид:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (9)$$

Переменные (p_i, q_i) , удовлетворяющие уравнениям (9) называются *каноническими*.

Интегрирование этих уравнений дает траекторию системы $\{q_i, p_i\}$, для однозначного определения которой достаточно задание $2N$ начальных условий $q_i(t = 0) = q_i^0, p_i(t = 0) = p_i^0, i = 1, N$.

В частном случае *гармонического осциллятора*

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + k\frac{q^2}{2} \quad (10)$$

и соответствующие уравнения движения принимают вид

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -kq. \quad (11)$$

откуда получим

$$\ddot{q} = -\frac{k}{m}q,$$

общее решение $q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, и для $p(t) = m\dot{q} = -m\omega A \sin(\omega t) + m\omega B \cos(\omega t)$. Отметим, что частота колебаний гармонического осциллятора

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (12)$$

не зависит от амплитуды колебаний. Приравнивая общее решение при $t = 0$ соответствующим начальным значениям $\{p^0, q^0\}$,

получим $A = q^0$, $B = p^0/m\omega$, в результате чего решение принимает вид

$$q(t) = q^0 \cos(\omega t) + \frac{p^0}{m\omega} \sin(\omega t), \quad p(t) = -m\omega q^0 \sin(\omega t) + p^0 \cos(\omega t) \quad (13)$$

1.1.2 Скобки Пуассона.

Для произвольной функции импульсов и координат $f(p, q, t)$ полная производная по времени

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}\end{aligned}\tag{14}$$

где использованы уравнения Гамильтона (9) и обозначение для *скобок Пуассона*

$$\{Hf\} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right)\tag{15}$$

Функция, значение которой остается постоянным при движении системы

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\} = 0$$

называется *интегралом движения*. Если она не зависит от времени явно $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, то ее скобки Пуассона равны нулю: $\{Hf\} = 0$.

Свойства скобок Пуассона:

1. $\{fg\} = -\{gf\}$, $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1g\} + \{f_2g\}$,
 $\{f_1f_2, g\} = f_1\{f_2g\} + f_2\{f_1g\}$.
2. Тождество Якоби: $\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0$.
3. $\{fq_i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$, $\{fp_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$.
4. $\{q_iq_k\} = 0$, $\{p_ip_k\} = 0$, $\{p_iq_k\} = \delta_{ik}$

Упражнение 1 Пусть функции f и g – интегралы движения. Доказать, что функция $h = \{fg\}$ также является интегралом движения.

1.1.3 Канонические преобразования.

Пусть мы хотим перейти от переменных p, q к другим каноническим переменным \bar{p}, \bar{q} . Новые переменные со старыми можно связать при помощи функции от одной старой и одной новой переменной, называемой *производящей функцией*. Запишем вариационный принцип для лагранжиана

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q; t) \right)}_{L(q, \dot{q}; t)} \right] = 0 \quad (16)$$

В новых переменных вариационный принцип так же справедлив, поэтому соответствующие лагранжианы могут отличаться лишь на полную производную по времени:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q; t) = \sum_i \bar{p}_i \dot{\bar{q}}_i - H(\bar{p}, \bar{q}; t) + \frac{d}{dt} F_1(q, \bar{q}, t) \quad (17)$$

где нами выбрана *производящая функция* $F(q, \bar{q}, t)$, зависящая от q, \bar{q} . Раскрывая полную производную

$$\frac{d}{dt}F_1(q, \bar{q}, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial \bar{q}_i} \dot{\bar{q}}_i, \quad (18)$$

полагая переменные в (18) независимыми и требуя, чтобы соответствующие слагаемые при \dot{q} и $\dot{\bar{q}}$ были равны нулю, получим

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad (19)$$

$$\bar{p}_i = \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_i} \quad (20)$$

$$\bar{H}(\bar{p}, \bar{q}, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (21)$$

Аналогично можно определить производящие функции, зависящие и от других пар переменных:

$$F_2(q, \bar{p}, t), \quad F_3(p, \bar{q}, t), \quad F_4(p, \bar{p}, t).$$

Вводя F_2 с помощью преобразований Лежандра

$$F_2(q, \bar{p}, t) = F_1(q, \bar{q}, t) + \sum_i \bar{p}_i \bar{q}_i$$

получим

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \tag{22}$$

$$\bar{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_i} \tag{23}$$

$$\bar{H}(\bar{p}, \bar{q}, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{24}$$

1.1.4 Уравнение Гамильтона-Якоби.

Канонические преобразования позволяют, по крайней мере, формально решить уравнения движения системы следующим образом.

Рассмотрим случай гамильтониана, явно зависящего от времени. Положим новый гамильтониан $\bar{H} = 0$. Тогда в силу уравнений движения новые переменные не зависят от времени: $p_i = \text{const}$, $q_i = \text{const}$ и могут интерпретироваться в качестве начальных условий. Таким образом каноническое преобразование может рассматриваться как решение, определяющее координаты и импульсы в произвольный момент времени в зависимости от их начальных значений. Подставляя (22) в (24) получим уравнение на производящую функцию

$$H \left(\frac{\partial F_2}{\partial q}, q, t \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0, \quad (25)$$

которое называется уравнением Гамильтона-Якоби.

В случае, когда гамильтониан не зависит от времени явно, достаточно положить его равным константе, что дает “укороченное” уравнение Гамильтона-Якоби

$$H \left(\frac{\partial F_2}{\partial q}, q, t \right) = E. \quad (26)$$

Если переменные не разделяются, то решить уравнения Гамильтона-Якоби не проще, чем исходные уравнения движения.

1.1.5 Разделение переменных. Интегрируемые системы. Переменные действие – угол. Интегралы движения.

В системе с одной степенью свободы и гамильтонианом, не зависящим от времени, интеграл движения существует всегда. В случае, когда число степеней свободы $N > 1$, а переменные в уравнении Гамильтона-Якоби полностью разделяются, можно найти N интегралов движения, развязывающих все N степеней свободы. Обозначая производящую функцию F_2 через S , примем, что в результате полного разделения переменных она принимает вид

$$S = \sum_i^N S_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_N) \quad (27)$$

где α_i – новые импульсы, связанные с N интегралами движения. Если, кроме того гамильтониан может быть представлен в

виде суммы

$$H = \sum_i^N H_i \left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i}, q_i \right),$$

уравнение Гамильтона-Якоби распадается на N уравнений

$$H_i \left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i}, q_i \right) = \alpha_i \quad (28)$$

в силу независимости q_i . Решив их, найдем зависимость S_i от q_i .
Связь между старыми и новыми переменными дается (22-24)

$$\alpha_i = \frac{\partial S_i}{\partial q_i} \quad (29)$$

$$\bar{q}_i = \frac{\partial S_i}{\partial \alpha_i} \quad (30)$$

$$\bar{H}(\alpha) = \sum_i \alpha_i = H_0 \quad (31)$$

Новые импульсы α_i оказываются при этом константами разделения и удовлетворяют соотношению $\sum_i \alpha_i = H_0$.

$$\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i} = \omega_i(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

$$\bar{q}_i(t) = \omega_i t + \bar{q}_i^{(0)}$$

В случае финитного движения новые переменные являются *циклическими* и имеют смысл углов, а сопряженные им импульсы являются соответствующими *действиями*.

Упражнение 2 Для гармонического осциллятора с одной степенью свободы

$$H = \frac{p^2}{2m} + k\frac{q^2}{2} \quad (32)$$

найти решение методом Гамильтона-Якоби.

Решение. Перейдем к новой паре канонических переменных (α, β) таких, чтобы новый гамильтониан был функцией только нового импульса α : $\bar{H} = \bar{H}(\alpha)$. Соответствующая производящая функция $S(q, \alpha)$, где α – новый импульс удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + mkq^2 = 2mE(\alpha) = 2m\alpha \quad (33)$$

где мы положили $E(\alpha) = \alpha$. Интегрирование дает

$$S = \int^q [2m(\alpha - kq^2/2)]^{1/2} dq \quad (34)$$

Из производящей функции для прежнего импульса имеем

$$p = \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right) = [2m(\alpha - kq^2/2)]^{1/2} \quad (35)$$

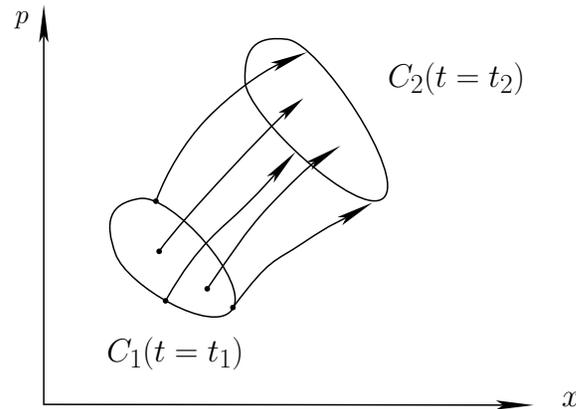
Поскольку новый гамильтониан $\bar{H}(\alpha) = H(p, q) = \alpha$ не зависит от β , то из уравнений Гамильтона, как и ожидалось, $\dot{\alpha} = -(\partial\bar{H}/\partial\beta) = 0$ и $\alpha = \text{const}$. В свою очередь, $\dot{\beta} = (\partial\bar{H}/\partial\alpha) = 1$, и $\beta = t - t_0$. Из производящей функции для новой координаты имеем

$$\begin{aligned}
 \beta &= \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) = \int_{q_0}^q [m/2 (\alpha - kq^2/2)]^{1/2} dq = \\
 &= \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\arcsin(\sqrt{2\alpha} q) - \arcsin(\sqrt{2\alpha} q_0) \right) = \\
 &= \frac{1}{\omega} \left(\arcsin(\sqrt{2\alpha} q) - \arcsin(\sqrt{2\alpha} q_0) \right). \tag{36}
 \end{aligned}$$

откуда получим известное решение $q - q_0 = \sqrt{\alpha/2k} \sin[\omega(t - t_0)]$

1.2 Фазовое пространство многомерных систем.

Решение уравнений Гамильтона $p_i(t), q_i(t)$, $i = 1, N$ определяет *траекторию* в объединенном $2N$ -мерном пространстве обобщенных координат и импульсов, называемых *фазовым пространством* системы:



Траектории в фазовом пространстве

В общем случае топология фазовых траекторий может быть весьма нетривиальна. Геометрическая визуализация этой топологии весьма конструктивна для понимания динамики системы.

1.2.1 Основные свойства траекторий в фазовом пространстве. Теорема Лиувилля

1. В любой заданный момент времени траектории в *фазовом* пространстве не пересекаются (требование единственности решения уравнений гамильтона). Если гамильтониан не зависит от времени *явно*, то траектории не пересекаются вообще.
2. Любая граница C_1 , охватывающая в момент времени t_1 в фазовом пространстве некое множество начальных условий к моменту t_2 трансформируется в границу C_2 охватывающее то же множество траекторий. Т.е. для понимания временной эволюции подмножества достаточно знать поведение его границы.

3. **Теорема Лиувилля.** Пусть $f(p, q, t)$ - плотность вероятности ансамбля траекторий, нормированная условием $\int f(p, q, t) \prod_i dp_i dq_i = 1$. Из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i}(\dot{p}_i f) + \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}(\dot{q}_i f) = 0 \quad (37)$$

имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i f \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i f \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = 0 \quad (38)$$

откуда, используя ур-я Гамильтона, получим *теорему Лиувилля*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \equiv \frac{df}{dt} = 0. \quad (39)$$

Плотность вероятности вдоль траектории сохраняется
(*несжимаемость потока*)

1.2.2 Интегральные инварианты Пуанкаре

Из (39) следует также что вычисленный в фиксированный момент времени интеграл

$$\int \prod_i dp_i dq_i \quad (40)$$

является *инвариантом движения* (см. также [1, 3]). Существует N таких инвариантов Пуанкаре, последний из них имеет вид

$$\int \int \sum_i dp_i dq_i = const. \quad (41)$$

Применяя теорему Стокса, получим

$$\oint \sum_i p_i dq_i = const. \quad (42)$$

1.2.3 Расширенное фазовое пространство. Связь нестационарных и консервативных систем. Бильярд Синая.

Пусть гамильтониан H явно зависит от времени. Вариационный принцип из которого получаются ур. Гамильтона можно записать как

$$\delta \int \left(\sum_{i=1}^N p_i \frac{dq}{d\zeta} - H \frac{dt}{d\zeta} \right) d\zeta. \quad (43)$$

Введем новые переменные $\bar{q}_i = q_i$, $\bar{p}_i = p_i$, $i = 1, \dots, N$, и $\bar{q}_{N+1} = t$, $\bar{p}_{N+1} = -H$, где t и $-H$ рассматриваются как координата и импульс в $(2N + 2)$ -мерном фазовом пространстве, а параметр ζ играет роль нового “времени”. Тогда вариационный принцип примет вид

$$\delta \int \sum_{i=1}^{N+1} \bar{p}_i \frac{d\bar{q}}{d\zeta} d\zeta. \quad (44)$$

(напомним, что подинтегральное выражение определено с точностью до полной производной по ζ !).

Новый гамильтониан $\bar{H}(\bar{p}, -H, \bar{q}, t)$ получается с помощью производящей функции

$$F_2(\bar{p}, q, t) = \sum_{i=1}^N \bar{p}_i q_i + \bar{p}_{N+1} t \quad (45)$$

и равен $\bar{H}(\bar{p}, \bar{q}) = H(p, q, t) - H$. Соответствующие уравнения движения

$$\frac{d\bar{p}_i}{d\zeta} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i}, \quad \frac{d\bar{q}_i}{d\zeta} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_i}, \quad (46)$$

причем новый гамильтониан не зависит явно от времени! Заметим, что при $i = N + 1$ $t(\zeta) = t$.

Таким образом, задача с гамильтонианом, явно зависящим от времени сводится к консервативной задаче, но в *расширенном фазовом пространстве* размерности $(2N + 2)$.

Обратное верно тоже. Пусть гамильтониан системы не зависит от времени

$$H(p, q) = H_0. \quad (47)$$

Выбираем $\bar{p}_i = p_i$, $\bar{q}_i = q_i$, $i = 1, \dots, N - 1$, и разрешим (47) относительно $p_N = p_N(\bar{p}, \bar{q})$. Выбирая новый гамильтониан $\bar{H} = -p_N$, а новое “время” $\zeta = q_N$, получим ур-я Гамильтона с гамильтонианом, зависящим от времени.

Таким образом, результаты для неконсервативных систем могут быть перенесены на консервативные системы, и наоборот.

1.2.4 Интеграл действия

Рассмотрим связь между относительным интегральным инвариантом 42 вычисляемым в фиксированный момент времени, и интегралом действия, вычисляемым по одному периоду движения одномерной системы:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint pdq \quad (48)$$

В терминах расширенного фазового пространства инвариант 42 может быть записан в виде

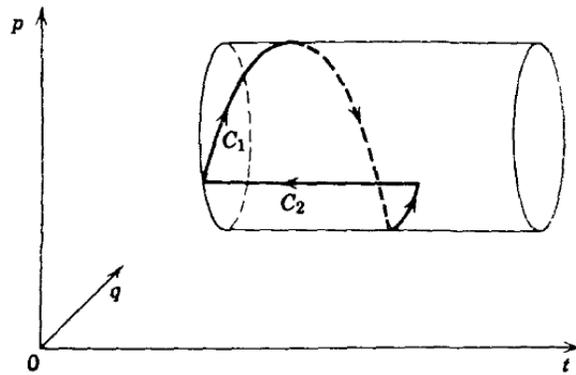
$$\oint (pdq - Hdt) = const. \quad (49)$$

Поскольку выбор ζ произволен, выберем его так, чтобы часть контура интегрирования проходила по пути, по которому вычисляется действие. В случае, когда $H = const$, вклад второго

слагаемого по замкнутому контуру обратится в нуль, и мы получим

$$\oint pdq = const \quad (50)$$

Выбирая пучок траекторий, как показано на рисунке



Контур интегрирования для вычисления переменной действия.

получим

$$\oint pdq = \int_{C_1} pdq + \int_{C_2} pdq \quad (51)$$

Координаты q концах контура C_1 *совпадают* в силу периодичности движения, и выбирая $C_2: q = const$, имеем

$$\int_{C_1} pdq = const = 2\pi J \quad (52)$$

Интеграл действия оказывается интегралом движения.

Кроме того, он приближенно сохраняется при медленном изменении параметров осциллятора - оказывается *адиабатическим инвариантом*.

1.2.5 Сечение Пуанкаре. Инвариантные кривые.

Метод сечения Пуанкаре – один из основных методов анализа гамильтоновой динамики.

Для примера рассмотрим автономную систему с двумя степенями свободы, соответствующее ей фазовое пространство 4-мерно: (p_1, p_2, q_1, q_2) .

Рассмотрим пересечения траектории системы с 2-мерной поверхностью Σ_R , выбранной описанным ниже способом.

Ввиду автономности системы ее траектория лежит на 3-мерной изоэнергетической поверхности, определяемой уравнением $H(p_1, p_2, q_1, q_2) = H_0$, откуда

$$p_2 = p_2(p_1, q_1, q_2) \quad (53)$$

Рассмотрим проекцию траектории на 3-мерный объем (p_1, q_1, q_2) и выберем *внутри* этого объема плоскость $\Sigma_R: q_2 = const$.

Если движение финитно, то траектория будет все время пересекать Σ_R произвольным образом, в общем случае образуя 2-мерное подмножество.

Наличие *дополнительного* (помимо H_0) интеграла движения

$$I(p_1, p_2, q_1, q_2) = const \quad (54)$$

позволяет разрешить уравнения и относительно оставшегося импульса

$$p_1 = p_1(q_1, q_2) \quad (55)$$

и вместо 2-мерного подмножества при фиксированном $q_2 = const$ точки пересечения образуют 1-мерную *инвариантную кривую*.

Наличие дополнительных интегралов движения понижает размерность подмножества точек пересечения с плоскостью Σ_R .
Т.е.

сечения Пуанкаре – неплохой инструмент для выявления скрытых интегралов движения.

Если число степеней свободы $N > 2$, то размерность изоэнергетической поверхности $2N - 1$.

- Исключим, как и раньше, один из импульсов, например $p_N = p_N(p_1, \dots, p_{N-1}, q_1, \dots, q_N)$
- рассмотрим проекцию траектории на пространство размерности $2N - 1$ $(p_1, \dots, p_{N-1}, q_1, \dots, q_N)$
- рассмотрим пересечения с Σ_R размерности $(2N - 2)$

В общем случае размерность множества точек пересечения $(2N - 2)$. При наличии одного или нескольких интегралов движения размерность $< (2N - 2)$

1.2.6 Системы с разделяющимися переменными. Инвариантный тор.

Рассмотрим автономную систему с N степенями свободы, в которой имеются N интегралов движения. Тогда переменные разделяются полностью, и решение может быть представлено в виде

$$\theta_i(t) = \omega_i(J_1, \dots, J_N)t + \theta_i^{(0)}, \quad J_i(t) = \text{const} = J_i^{(0)}; \quad i = 1, \dots, N \quad (56)$$

В переменных (p, q) : $p_i = \sqrt{J_i} \cos(\theta_i)$, $q_i = \sqrt{J_i} \sin(\theta_i)$, для каждой пары канонических (p_i, q_i) это отвечает движению по замкнутой круговой траектории в плоскости (p_i, q_i) . С геометрической точки зрения такая траектория заполняет поверхность *инвариантного тора* в $2N$ -мерном фазовом пространстве (p, q) .

В случае соизмеримости частот (отношение ω_i/ω_j рационально для любой пары i, j) траектория превращается в линию, навивающуюся на поверхность тора.

1.2.7 Финитное и инфинитное движение, сепаратриса.

Рассмотрим в качестве примера нелинейный маятник

$$H = \frac{J^2}{2} + K(1 - \cos \theta) \quad (57)$$

При малых отклонениях от равновесия $\theta \ll 1$ гамильтониан сводится к гамильтониану гармонического осциллятора

$$H \approx \frac{J^2}{2} + K \frac{\theta^2}{2} \quad (58)$$

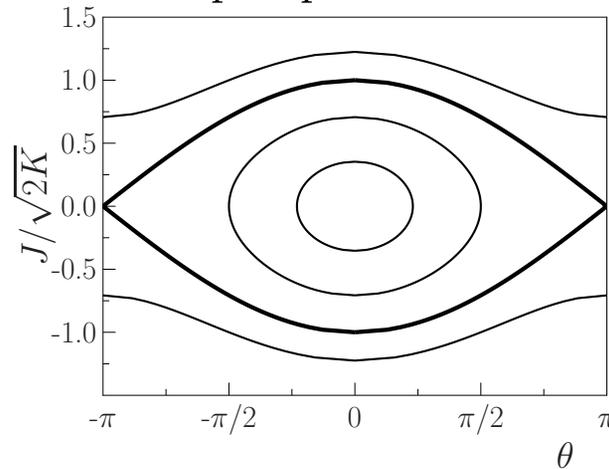
и движение финитно, с постоянной частотой $\omega = \sqrt{K}$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t + \frac{J_0}{\omega} \sin \omega t, \quad J(t) = -\theta_0 \omega \sin \omega t + J_0 \cos \omega t \quad (59)$$

что отвечает круговому движению в плоскости (J, θ) вокруг точки $J = 0, \theta = 2\pi M$, M - любое целое.

С ростом амплитуды (и энергии E) колебаний частота начинает зависеть от амплитуды и при $E = 2K$ обращается в бесконечность.

При $E > 2K$ движение перестает быть финитным и становится инфинитным. Пограничная траектория, отвечающая $J_0 = 2\sqrt{K}$ называется *сепаратрисой*



Небольшое изменение энергии вблизи сепаратрисы качественно меняет характер движения.

Для любого сколь угодно слабого зависящего от времени воздействия всегда найдется область траекторий вблизи сепаратрисы.

ратрисы, для которых зависящее от времени (например, периодическое) возмущение изменит характер движения *радикальным образом*. Фактически это означает, что в окрестности сепаратрисы движение становится стохастическим - вдоль сепаратрисы возникают так называемые *стохастические слои*.

1.2.8 Бифуркации. Области регулярного и хаотического движения.

Рассмотрим движение системы вблизи точек $\theta = \pm\pi + 2\pi M$, где M - произвольное целое. В зависимости от того, ниже или выше сепаратрисы располагается траектория системы, ее движение оказывается либо финитным, либо инфинитным. Такая особая точка называется *точкой бифуркации*.

Особая роль точек бифуркации состоит в том, что вблизи них даже очень слабое возмущение способно радикальным образом изменить траекторию движения.

1.3 Гамильтоновы системы и канонические отображения.

Временная эволюция гамильтоновой системы является по сути своей *каноническим отображением*, сохраняющим фазовый объем:

$$\begin{aligned}p(t + \Delta) &= P_{\Delta}(p(t), x(t), t) \\x(t + \Delta) &= X_{\Delta}(p(t), x(t), t)\end{aligned}$$

здесь Δ - соответствующий шаг по времени.

Изучение канонических отображений, дающих эволюцию гамильтоновой системы за конечный интервал времени, приобретает особую ценность в условиях *экспоненциально неустойчивой динамики* – наивное же приближенное интегрирование (особенно численное) уравнений движения приводит к *несохранению фазового объема*, т.е. – к существенно *негамильтоновой* динамике.

Для консервативной системы с гамильтонианом $H(p, x)$ простейшее отображение, сохраняющее фазовый объем, может быть построено с помощью производящей функции

$$G(x, \bar{p}) = x\bar{p} + \Delta \cdot H(x, \bar{p}) \quad (60)$$

Само отображение из $\bar{x} = \partial G / \partial \bar{p}$ $p = \partial G / \partial x$ принимает вид

$$\bar{p} = p - \Delta \cdot \frac{\partial H(x, \bar{p})}{\partial x} \quad (61)$$

$$\bar{x} = x + \Delta \cdot \frac{\partial H(x, \bar{p})}{\partial p} \quad (62)$$

В пределе $\Delta \rightarrow 0$ отображение переходит в уравнения Гамильтона

Упражнение 3 Показать явным вычислением якобиана, что это отображение сохраняет фазовый объем.

1.3.1 Стандартное отображение Чирикова-Тейлора.

Для гамильтониана

$$H(x, \bar{p}) = H_0(\bar{p}) + \frac{k}{\Delta} V(x) \quad (63)$$

H_0 - невозмущенный гамильтониан, $V(x)$ - возмущение с параметром k . Пусть возмущение периодически зависит от времени, с периодом $T = \Delta$:

$$\mathcal{H}(x, p, t) = H_0(p) + \frac{k}{T} V(x) \delta_T(t) \quad (64)$$

где периодическая δ -функция

$$\delta_T(t) \equiv T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \cos(\omega_l t) \quad (65)$$

есть сумма статического возмущения и гармоник с частотами $\omega_l = (2\pi/T) \cdot l$.

Упражнение 4 Показать, что в пределе $T \rightarrow 0$ работает лишь статическая часть возмущения, и система эффективно описывается не зависящим от времени гамильтонианом $H = H_0(p) + k \cdot V(x)/T$.

Для случая $V(x) = \cos x$ и $H_0(p) = p^2/2$ получим стандартное отображение Чирикова-Тейлора:

$$\bar{p} = p + k \sin x; \quad \bar{x} = x + T\bar{p} \quad (66)$$

Вводя $P = Tp$ видим, что классическое отображение зависит лишь от одного параметра $K = kT$:

$$\bar{P} = P + K \sin x; \quad \bar{x} = x + P \quad (67)$$

(Впервые это отображение рассматривалось Векслером в 1944 году для исследования регулярного ускорения вблизи микротронного резонанса при $K = 2\pi n$.)

Периодические свойства стандартного отображения:

Очевидная

1) периодичность по x : сдвиг на $2\pi n$ не меняет отображения.

(следует непосредственно из гамильтониана и отражает компактность пространственной переменной x : например, x – угловая переменная для маятника в поле тяжести).

и – менее очевидная (!)

2) периодичность по p , с периодом $2\pi n/T$.

(между толчками маятник может совершить n оборотов !)

Тем самым, стандартное отображение явным образом описывает *систему* резонансов, называемых основными или первичными, с расстоянием между ними $(\delta p)_1 = 2\pi/T$.

Кроме того, существует также огромное количество высших резонансов.

1.3.2 Регулярная и хаотическая динамика. Теория КАМ.

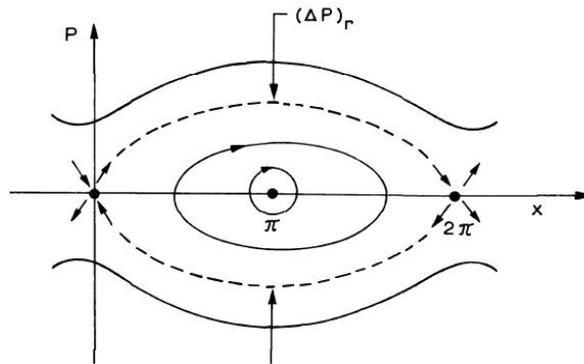
Поведение отображения радикально зависит от параметра K .

При $k \rightarrow 0$, $\Delta p = |\bar{p} - p| \ll 1$ и $\Delta x = |\bar{x} - x| \ll 1$ стандартное отображение сводится к уравнениям Гамильтона с гамильтонианом, не зависящим от времени

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{k}{T} \cos x \quad (68)$$

Очевидно, что такое движение интегрируемо и следовательно – регулярно.

Последовательные точки, даваемые отображением, ложатся на гладкие *инвариантные кривые*: поведение отображения *регулярно*, за исключением областей вблизи сепаратрисы, где под действием остаточных возмущений образуются *стохастические слои*.



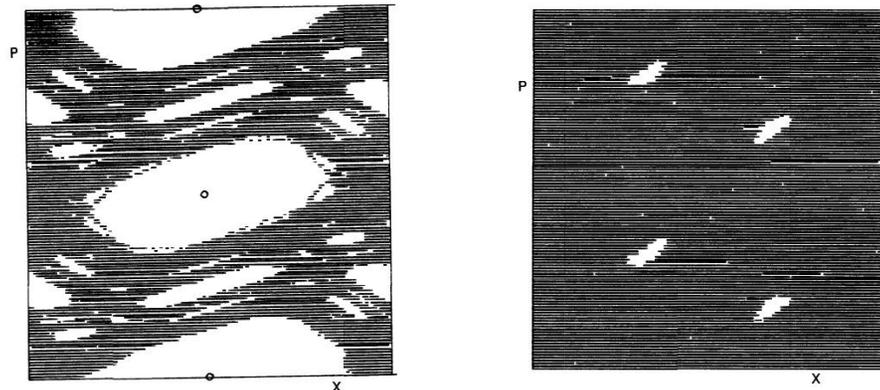
Ширина резонанса (при $x = \pi$) $(\Delta p)_r = 4\sqrt{k/T}$ и мала по сравнению с величиной возмущения $\Delta p \sim k$

Теорема КАМ (Колмогорова-Арнольда-Мозера): При достаточно малом возмущении движение в большей части фазового пространства остается регулярным и может быть описано в рамках теории возмущений.

С ростом величины возмущения k ширина резонанса $(\Delta p)_r = 4\sqrt{k/T}$ растет. Рассмотрим отношение ширины резонанса к расстоянию до соседнего (первичного) резонанса $(\delta p)_1 = 2\pi/T$.

$$S = \frac{(\Delta p)_r}{(\delta p)_1} = \frac{2}{\pi} K^{-1/2} \quad (69)$$

При $S > 1$ резонансы перекрываются и движение становится стохастическим (*критерий Чирикова*)



Слева: $K = 1.13$ (начальное перекрытие резонансов), справа: $K = 5$ (тотальный хаос - за исключением малых островков регулярного движения)

Из условия $S \sim 1$ критическое значение $K_c = \pi^2/4 \approx 2.5$. Более точный анализ, учитывающий влияние и высших резонансов, дает $K_c \approx 1$.

Перекрытие резонансов объединяет стохастические слои, принадлежащие различным резонансам. Это позволяет траектории переходить от одного резонанса к другому, блуждая по всему доступному фазовому пространству – движение при этом становится неустойчивым, приобретая случайный характер.

1.4 Линеаризованные уравнения.

Локальная неустойчивость может быть исследована линеаризацией стандартного отображения

$$\bar{\eta} = \eta + \xi k \cos x^0, \quad \bar{\xi} = \xi + \bar{\eta}T \quad (70)$$

где x^0 - изучаемая траектория, ξ и η - инфинитезимальные отклонения от нее.

Локальные собственные значения отображения

$$\lambda_{\pm}(x^0) = 1 + \frac{K \cos x^0}{2} \pm \sqrt{K \cos x^0 \left(1 + \frac{K \cos x^0}{4} \right)} \quad (71)$$

зависят не только от K но и от x^0 .

Легко убедиться, что $\lambda_+ \cdot \lambda_- = 1$, как и должно быть ввиду сохранения фазового объема. Когда оба собственных значения вещественны, по одному из направлений в фазовом пространстве отображение является *растягивающим* с фактором

$\max(|\lambda_+|, |\lambda_-|)$, по другому – *сжимающим* с соответствующим обратным фактором. В случае, когда они комплексны, отображение отвечает повороту в фазовом пространстве. Поведение отображения вдоль траектории зависит не только от K , но и от x_0 , на практике для выяснения характера разбегания близких траекторий требуется усреднение вдоль обсуждаемой траектории на протяжении многих периодов.

1.4.1 Экспоненциальное разбегание траекторий, показатель Ляпунова. Неустойчивость хаотической динамики.

Наличие в отображении составляющей с растягивающим фактором $\lambda > 1$ приводит к тому, что две траектории с близкими начальными данными $\{x(t), p(t)\}$ и $\{x'(t), p'(t)\}$ начинают “разбегаться” и расстояние между ними в фазовом пространстве $\rho = \sqrt{(p - p')^2 + (x - x')^2}$ растет экспоненциально во времени $\rho(t) \propto \exp(\Lambda t)$, где показатель экспоненциального разбегания Λ называется *показателем Ляпунова*.

Если неустойчивость однородна, показатель Ляпунова получить усреднением логарифма максимального из собственных значений линеаризованного отображения

$$\Lambda = \frac{1}{T} \overline{\ln |\lambda|} = \frac{1}{T} \langle \ln |\lambda| \rangle \quad (72)$$

где $(\bar{\cdot})$ и $\langle (\dots) \rangle$ обозначает, соответственно, усреднение по вре-

мени и по ансамблю траекторий – результат совпадает при наличии эргодичности движения.

В практических численных оценках обычно рассматриваются две близких траектории и показатель Ляпунова определяется как

$$\Lambda = \frac{1}{t - t_0} \ln(\rho(t)/\rho(t_0)), \quad (73)$$

затем полученный результат усредняется по ансамблю траекторий.

При $K \gg 1$ усреднение максимального собственного значения линеаризованного отображения дает

$$\Lambda = \frac{1}{T} \langle \ln(|\lambda|) \rangle \approx \ln(K/2) \quad (74)$$

что неплохо работает при $K > 4$.

При $K \gg 1$ фазу x можно считать случайными, и для изменения импульса $\Delta p = \bar{p} - p = k \sin x$ имеем

$$\langle \Delta p \rangle = 0, \quad \langle (\Delta p)^2 \rangle = k^2/2 \quad (75)$$

откуда средний квадрат импульса

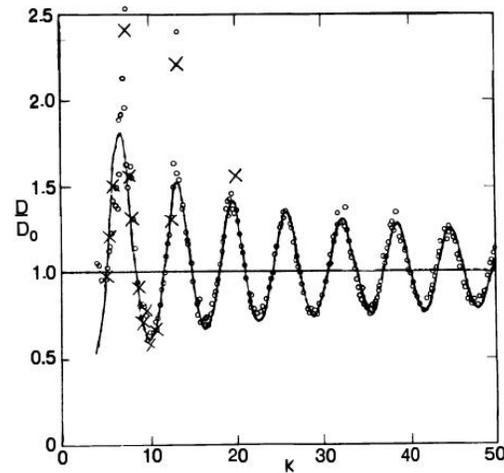
$$\langle (p(t) - p(0))^2 \rangle = \frac{k^2}{2}(t/T) \quad (76)$$

Соответственно, занимаемый фазовый объем диффузионно растет во времени с коэффициентом диффузии

$$D_p \equiv \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{t} = \frac{k^2}{2T} C(K) \quad (77)$$

где $C(K) \approx 1$

Более аккуратное вычисление, с учетом корреляций во времени, предсказывает наличие осцилляций $C(K)$:



Упражнение 5 Рассматривая две последовательные итерации, показать, что (\underline{x} и \bar{x} значения x в предшествующую и последующую итерации):

$$\begin{aligned} C(K) &\approx 1 + 4\langle \sin \bar{x} \sin \underline{x} \rangle & (78) \\ &= 1 - 2\langle \cos(2x + K \sin x) \rangle = 1 - 2J_2(K) \end{aligned}$$

(сплошная кривая на рисунке)

1.4.2 КС-энтропия.

Максимальный из показателей Ляпунова называется *энтропией Колмогорова-Синая* (КС-энтропией)

$$h = \max\{\Lambda\} \quad (79)$$

В случае неподвижной точки (аттрактора - случай негамильтоновой динамики): $h < 0$.

В случае регулярной динамики $h = 0$.

В случае хаотической динамики $h > 0$.

Аналогия с датчиком (псевдо)случайных чисел

$$a_{i+1} = a_i b \pmod{1}, \quad b > 1. \quad (80)$$

в данном случае $h = \ln b$,

эспоненциальное разбегание близких “траекторий” характеризуется $\Lambda = \ln b$

КС-энтропия характеризует скорость “забывания” начальных условий.

Пусть

$$p_0 = a_1 a_2 \dots a_k \dots x_0 = b_1 b_2 \dots b_k \dots \quad (81)$$

число описываемых состояний экспоненциально растет с числом значащих цифр.

Рассмотрим две близкие траектории – в разницу дают вклад лишь младшие разряды, начиная с номера k : чем ближе - тем младше!

Начнут забываться через время $\propto k/h$!

1.4.3 Понятие динамического хаоса.

Насколько хаотично движение в хаотическом режиме?

- роль начальных условий
- роль возмущений в процессе эволюции.

Движение хаотично в меру его неконтролируемости (непредсказуемости) — в частности, из-за неконтролируемых влияний со стороны внешнего мира.

Понятие изолированной системы лишено смысла *на уровне траекторий ее движения.*

Однако описание на уровне статистических свойств ансамбля остается устойчивым.

(несколько слов о дискретных системах и их квазипериодичности)

1.4.4 Этапы хаотической динамики, баллистический и диффузионный режимы.

Баллистический этап:

$$t < t_{\Lambda} = \Lambda^{-1} \ln(L/\delta) \quad (82)$$

На этом этапе движение вполне *предсказуемо*.

Размер области, занимаемой в фазовом пространстве, растет со временем экспоненциально!

Диффузионный этап ($t > t_{\Lambda}$):

На примере стандартного отображения: фаза x случайна, система диффузионно распространяется вдоль оси p :

$$\langle (p(t) - p(0))^2 \rangle = \frac{k^2}{2} (t/T) \quad (83)$$

1.4.5 Эргодичность.

Пусть размер фазового пространства вдоль p равен $L_p = 2\pi M/T$:

$$-L_p/2 < p < L_p/2 \quad (84)$$

Тогда на временах

$$t < t_L = T \frac{L_p^2}{2k^2} \quad (85)$$

движение будет оставаться *неэргодичным*. Полная эргодичность наступит (при $K \gg 1$) лишь на временах $t \gg t_L$.

1.4.6 Практическая необратимость хаотической динамики.

Сохранение фазового объема (гамильтонова динамика) подразумевает попарную упорядоченность факторов растяжения и сжатия. В частности, для стандартного отображения

$$\lambda_+ \cdot \lambda_- = 1 \quad (86)$$

что, кстати, отражает его *T-инвариантность*.

При обращении времени роль этих факторов лишь поменяется местами, и любое слабое возмущение (например, ошибки численного счета) снова приведет к *разбеганию* траекторий

1.5 Случайность и ее численное моделирование.

Отображение кота Арнольда

$$\begin{aligned}\bar{p} &= p + x \pmod{1} \\ \bar{x} &= \bar{p} + x \pmod{1}\end{aligned}$$

показатель Ляпунова $\Lambda \approx 0.96$

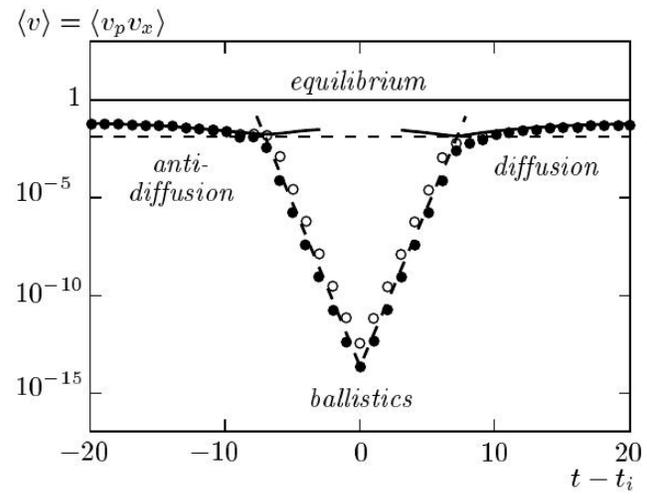
1.5.1 Теория больших флуктуаций, обратимость во времени.

Модифицированное отображение кота Арнольда

$$\begin{aligned}\bar{p} &= p + x - 1/2 \pmod{C} (= 15) \\ \bar{x} &= \bar{p} + x - C/2 \pmod{1}\end{aligned}$$

Коэффициент диффузии $D_p = 1/12$, время релаксации $t_p = 4D_p$.

размеры занимаемого фазового объема: $\sigma_p = (p - p_0)^2$, $\sigma_x = (x - x_0)^2$



1.5.2 T-инвариантность гамильтоновой динамики и второй закон термодинамики.

1.6 Диссипативный хаос, аттракторы.

1.6.1 Модель Лоренца, реакция Белоусова.

1.6.2 Странные аттракторы.

1.7 Нелинейная динамика многочастичных систем.

1.7.1 Несоизмеримые структуры, модель Френкеля-Конторовой.

1.7.2 Связь со стандартным отображением. Фазовый переход Обри.

1.7.3 Энергетический спектр, экспоненциальное вырождение основного состояния.

2 Квантовая динамика систем, хаотических в классическом пределе.

2.1 Квантовый аналог стандартного отобра-