

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЕ УНИВЕРСИТЕТ»
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)**

Физический факультет

Выпускная квалификационная бакалаврская работа

Кафедра Физики Плазмы

Волчок Евгения Павловна

Название работы:

**Теория генерации электромагнитного
излучения пучково-плазменной антенной**

Научный руководитель:

Канд. физ.-мат. наук, Тимофеев Игорь Валериевич

Новосибирск – 2016

Содержание

Введение	2
1. Механизм излучения плоской пучково- плазменной антенны	4
1.1 Излучение поперёк плазменного слоя	6
1.2 Сравнение с результатами численного моделирования	8
2. Излучение цилиндрического плазменного столба	10
3. Обобщение на случай произвольного периода возмущения плотности	13
3.1 Излучение в плоском случае	13
3.2 Излучение в цилиндрическом случае	18
Заключение	21
Литература	23

Введение

Вопрос о генерации электромагнитного излучения вблизи плазменной частоты и её второй гармоники активно изучается на протяжении уже десятков лет. Данная задача до сих пор представляет интерес для исследований различных астрофизических явлений таких, как солнечные радиовсплески II и III типов [1,2], излучение в магнитосферах планет [3] и т.д.. Понимание процессов, приводящих к электромагнитному излучению из плазмы, важно также при интерпретации результатов лабораторных пучково-плазменных экспериментов [4, 5]. Наш интерес к этой проблеме связан с экспериментами на открытой ловушке ГОЛ-3, в которых поперечные размеры плазмы сопоставимы с длинами плазменных колебаний [6–8]. Было показано, что именно этот экспериментальный режим соответствует наиболее эффективной конверсии мощности пучка в мощность излучения.

На данный момент существует множество теоретических подходов к задаче о генерации электромагнитного излучения в пучково-плазменной системе. Среди них рассматривались концепция слабой и сильной турбулентности [9, 10], а также такие механизмы, как линейная конверсия мод [11], нелинейная пучково-плазменная неустойчивость [12], излучение запертых мод и т.д. [13]. Большая часть из этих подходов описывает достаточно широкую плазму, характерные размеры которой значительно превышают длину волны генерируемого излучения. В тонкой же плазме действуют несколько иные механизмы электромагнитной эмиссии. Например, в системе, поперечные размеры которой сравнимы с длиной волны излучения, электромагнитные волны могут излучаться непосредственно в вакуум, минуя промежуточную стадию генерации собственных колебаний плазмы. Механизм излучения такой системы можно сравнить с излучением обыкновенной антенны [14]. Его суть состоит в следующем. В результате развития двухпоточковой неустойчивости, возникающей в процессе инжекции пучка в плазму, в ней формируется квазистационарная продольная волна. Для того чтобы она могла резонансно взаимодействовать с вакуумными электромагнитными волнами её фазовая скорость должна превышать скорость света. В силу

того, что волна находится в черенковском резонансе с пучком, это условие не может быть выполнено в однородной плазме. Если же плотность плазмы промодулирована вдоль магнитного поля гармоническим образом, то рассеяние на неоднородностях плотности будет генерировать сверхсветовые возмущения поля, которые могут эффективно взаимодействовать с вакуумными электромагнитными волнами. Таким образом, необходимым условием для появления излучения в такой системе является наличие продольных возмущений плотности.

Целью данной работы является построение теоретической модели, описывающей процессы генерации излучения вблизи плазменной частоты в тонкой пучково-плазменной системе. Такая модель позволила бы провести интерпретацию упомянутых ранее экспериментов по регистрации излучения из турбулентной плазмы. Как правило, плазменная турбулентность характеризуется широким спектром возмущений плотности $\delta n \propto \sum_q n_q e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$, который можно представить набором гармоник с разными волновыми числами \mathbf{q} . Таким образом, необходимым элементом построения данной модели должно стать вычисление мощности излучения от отдельного периодического возмущения плотности. Именно эта задача составляет содержание данной работы. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего обобщения теории на случай турбулентной плазмы, если просуммировать вклады в излучение от гармоник с разными \mathbf{q} . Кроме того, задача о генерации электромагнитных волн в системе с выделенным периодическим возмущением плотности представляет самостоятельный интерес с точки зрения поиска режима эффективной генерации терагерцового излучения высокой мощности.

В первой главе рассмотрена упрощённая двумерная задача излучения поперек плазменного слоя, проведено сравнение с результатами моделирования методом частиц в ячейках (Particle-In-Cell). На основе результатов сравнения во второй главе делается обобщение модели на случай более реалистичной цилиндрической геометрии. В третьей главе рассматривается случай излучения под произвольным углом. В заключении формулируются основные результаты работы.

1. Механизм излучения плоской пучково-плазменной антенны

Для начала рассмотрим идеализированный двумерный случай, который удобен для сравнения с результатами численного моделирования методом частиц в ячейках. Пучок и плазма равномерно заполняют плоский бесконечный слой толщиной $2l$, помещённый во внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 , по которому распространяется электронный пучок (рис. 1).

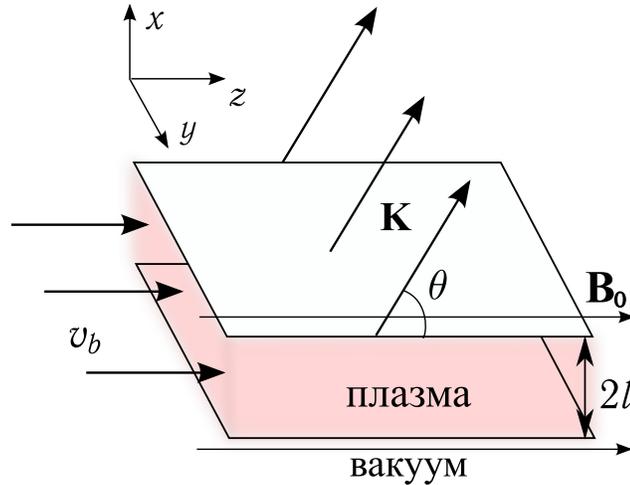


Рисунок 1: Геометрия задачи.

В процессе инжекции электронного пучка в плазме возникают потоки частиц, избыточная энергия которых может тратиться на возбуждение неустойчивых колебаний плазмы — развивается двухпотоковая неустойчивость. В гидродинамическом режиме ($n_b \ll n_p$) частота и инкремент нарастания неустойчивой волны определяются выражениями:

$$\hat{\omega}_b = \frac{\omega_b}{\omega_p} = 1 - \frac{(n_b/n_p)^{1/3}}{2^{4/3}\gamma_b}, \quad (1)$$

$$\hat{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\omega_p} = \frac{\sqrt{3}(n_b/n_p)^{1/3}}{2^{4/3}\gamma_b}, \quad (2)$$

где γ_b — релятивистский фактор пучка, движущегося со скоростью v_b , а $\omega_p = \sqrt{4\pi n_p e^2 / m_e}$ — плазменная частота. Конечной стадией развития неустой-

чивости является захват пучка и формирование квазистационарной волны Бернштейна-Грина-Крускала (БГК-волны) [15]. Если магнитное поле, удерживающее плазму, не слишком мало, то в насыщении такую волну можно приближённо представить в виде

$$E_z(t, z) \approx E_0 \cos(k_{\parallel} z - \omega_b t).$$

Будем считать, что амплитуда поля однородна внутри плазмы, а её величина определяется из условия равенства частоты баунс-колебаний захваченных частиц пучка и инкремента нарастания неустойчивости:

$$\widehat{E}_0 = \frac{eE_0}{m_e c \omega_p} = \gamma_b^3 \widehat{\Gamma}^2 \widehat{v}_b.$$

Здесь инкремент неустойчивости измеряется в единицах ω_p , а скорость пучка в единицах скорости света c .

При распространении в однородной плазме такая волна не может быть источником вакуумных электромагнитных волн, поскольку их фазовая скорость вдоль плазмы превышает скорость света. Если же промодулировать плотность плазмы по гармоническому закону вдоль магнитного поля, то при рассеянии БГК-волны на таком возмущении плотности возникает сверхсветовая волна тока

$$\delta j = -\frac{ie^2 \delta n E_0}{2m_e \omega_b} \exp(i(k_{\parallel} - q)z - \omega_b t) \quad (3)$$

с продольной компонентой волнового вектора $\mathcal{K}_{\parallel} = (k_{\parallel} - q)$ и фазовой скоростью $\omega_b / \mathcal{K}_{\parallel} > c$. Такая волна может эффективно накачивать электромагнитные волны в вакууме.

Необходимость выполнения граничных условий на границе плазма-вакуум

$$\omega = \sqrt{\mathcal{K}_{\perp}^2 + \mathcal{K}_{\parallel}^2} c = \omega_b, \quad \mathcal{K}_{\parallel} = k_{\parallel} - q$$

накладывает ограничение на пространственный период модуляции:

$$1 - \widehat{v}_b < \frac{q}{k_{\parallel}} < 1 + \widehat{v}_b$$

При этом угол, под которым распространяется излучение, определяется выражением:

$$\theta = \arctan \sqrt{\frac{\widehat{v}_b^2}{(1 - q/k_{\parallel})^2} - 1}. \quad (4)$$

1.1 Излучение поперёк плазменного слоя

Рассмотрим случай, когда пространственный период модуляции совпадает с длиной наиболее неустойчивой пучковой волны ($k_{\parallel}=q$), что соответствует излучению строго поперёк плазмы. В этом случае компонента тока неоднородно распределённых электронов, колеблющихся в поле волны, становится независимой от продольной координаты (3), а уравнения Максвелла сводятся к простому виду:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varkappa^2 \right) E_z = \frac{4\pi\omega_b}{c^2} j_0 \cos \omega_b t, \quad (5)$$

где $\varkappa^2 = \omega_p^2/c^2(1 - \widehat{\omega}_b^2)$ — величина, обратная квадрату глубины скин-слоя, а $j_0 = -e^2 \delta n E_0 / (2m_e \omega_b)$ — амплитуда тока. Так как частота наиболее неустойчивой пучковой волны оказывается ниже плазменной, то уравнение (5) описывает вынужденные плазменные колебания. Это значит, что электромагнитные волны, резонансные с накачкой, могут проникать в плазму только на глубину скин-слоя. Решение уравнения внутри плазмы выглядит следующим образом:

$$E_z^{in} = \left(C_1 e^{-\varkappa x} + C_2 e^{\varkappa x} - \frac{E_0 \delta \widehat{n}}{4(1 - \widehat{\omega}_b^2)} \right) e^{-i\omega_b t}, \quad (6)$$

где $\widehat{\delta n} = \delta n/n_p$ — относительная глубина модуляции. В вакууме решением будут плоские электромагнитные волны:

$$E_z = C_3 e^{iK_\perp(x-l) - i\omega_b t}, \quad x > l, \quad (7)$$

$$E_z = C_4 e^{-iK_\perp(x+l) - i\omega_b t}, \quad x < -l. \quad (8)$$

Сшивая на границе электрические и магнитные поля, найдём константы C_i и вычислим мощность излучения из единицы объёма плазмы

$$P_{rad} = \frac{S_x}{l} = \omega_p n_p m_e c^2 \frac{\widehat{E}_0^2 \widehat{\delta n}^2 F}{8\sqrt{1 - \widehat{\omega}_b^2}}, \quad (9)$$

где S_x — компонента вектора потока энергии, фактор F описывает зависимость от толщины плазменного слоя

$$F = \frac{\sinh^2(\chi l)}{\chi l \left(\omega_b^2 + \sinh^2(\chi l) \right)}. \quad (10)$$

Из рисунка 2 видно, что максимальная удельная мощность излучения достигается тогда, когда полутолщина плазмы равняется глубине скин-слоя. При дальнейшем увеличении толщины эта мощность спадает как $1/l$. Это соответствует тому, что в генерации по-прежнему участвуют тонкие приграничные слои, в которые способны проникать электромагнитные волны.

Для того чтобы оценить эффективность генерации электромагнитных волн с помощью такой плазменной антенны, необходимо вычислить, какую долю от мощности пучка составляет мощность излучения. В реальной задаче об инжекции пучка через плазменную границу область интенсивной накачки вдоль направления его движения ограничена длиной, на которой происходит захват пучка ($L \approx 3v_b/\Gamma$). В этой области электроны пучка наиболее эффективно отдают свою энергию волне, поэтому именно эта область даёт основной вклад в излучение. Таким образом, мощность, вносимую пучком в единицу объёма плазмы, можно определить как $P_b = (\gamma_b - 1)n_b m_e c^2 v_b/L$. Тогда в качестве показателя эффективности генерации излучения можно рас-

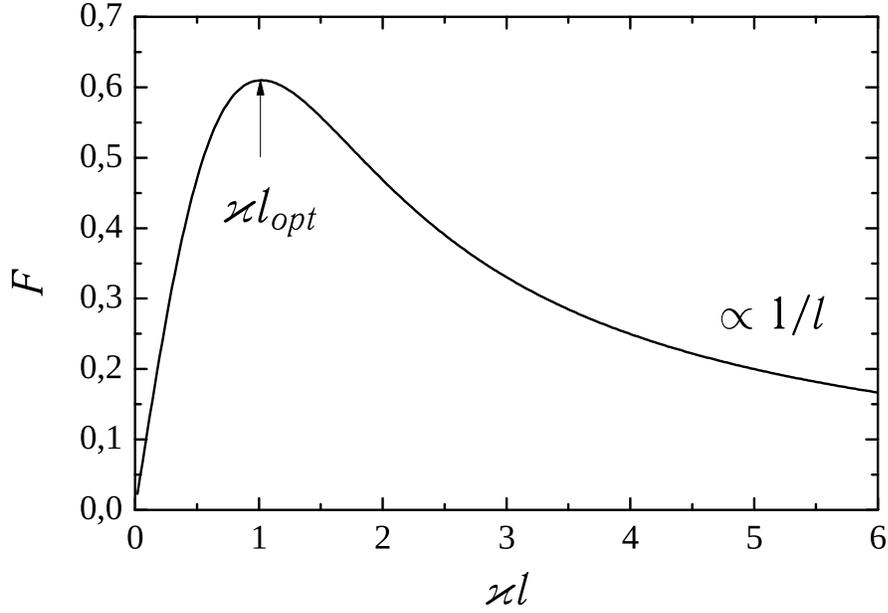


Рисунок 2: Зависимость F от толщины плазменного слоя для $\hat{\omega}_b = 0.94$.

смаатривать величину

$$\frac{P_{rad}}{P_b} \approx \frac{3\hat{E}_0^2 \delta\hat{n}^2 F}{8(\gamma_b - 1)\hat{n}_b \hat{\Gamma} \sqrt{1 - \hat{\omega}_b^2}}. \quad (11)$$

1.2 Сравнение с результатами численного моделирования

Чтобы убедиться в справедливости сделанных предположений, сравним предсказания модели с результатами численного моделирования. Для этого в вычислениях используются следующие параметры: $\hat{v}_b = 0.9$, $\hat{n}_b = 0.02$, $\delta\hat{n} = 0.2$. Величина магнитного поля определяется соотношением $\Omega_e/\omega_p = 0.6$, а температуры пучка и плазмы выбираются равными $T_b = 10$ кэВ и $T_e = 80$ эВ, соответственно. Частота и инкремент нарастания для наиболее неустойчивой моды, вычисляемые по формулам (1)-(2), составляют $\hat{\omega}_b = 0.944$ и $\hat{\Gamma} = 0.081$. В случае бесконечной плазмы уровень насыщения данной волны достигает значения $\hat{E}_0 \approx 0.071$. Будем считать сначала, что этот уровень не зависит от толщины плазменного слоя.

На рисунке 3а видно, что положение и величина максимума эффективности генерации, полученного при численных расчётах, совпадает с теоретически предсказанным. Однако в области малых и больших l наблюдается

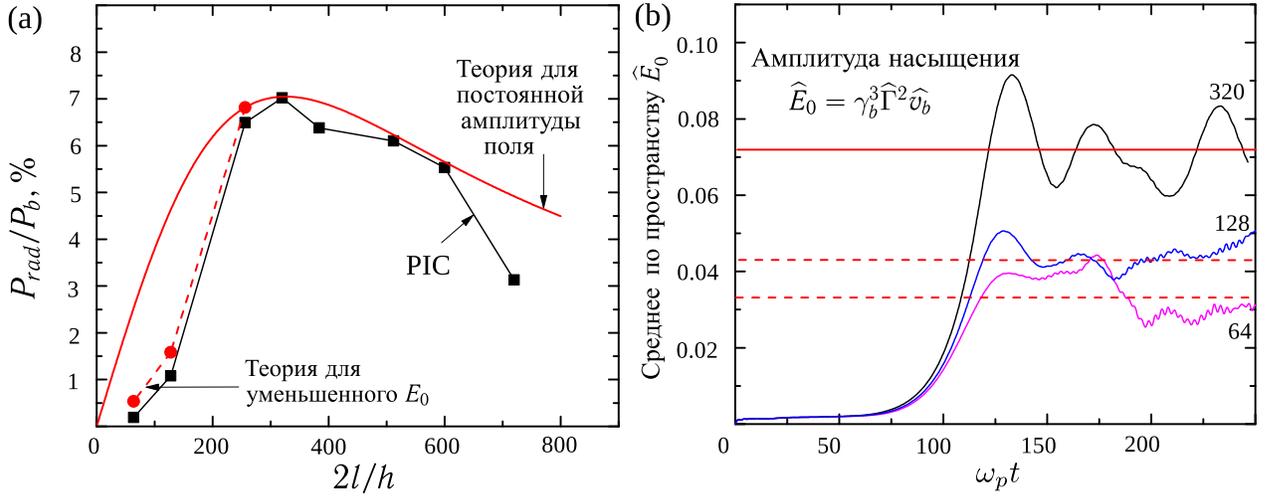


Рисунок 3: Зависимость эффективности генерации излучения (P_{rad}/P_b) от толщины плазменного слоя (a) и эволюция пространственно усреднённой амплитуды доминирующей пучковой волны E_0 в однородном плазменном слое (b) [16].

более быстрый спад эффективности излучения. В случае малых l это можно объяснить следующим образом. На рисунке 3b показано снижение уровня насыщения БГК-волны тогда, когда толщина плазмы оказывается меньше длины пучковой волны ($\lambda_b = L_x/3 \approx 284h$, где $h = 0.02/\omega_p$ —размер ячейки), то есть нарушается сделанное выше предположение о независимости уровня насыщения от толщины плазменного слоя. Если учесть этот факт, подставив реальную амплитуду поля в формулу (11), то результаты численных расчётов по-прежнему хорошо согласуются с теоретической зависимостью (красные точки на графике 3a). Основной причиной расхождения в области больших l может быть нарушение предположения о квазиодномерности волны, используемое в теории.

Таким образом, можем сделать вывод о том, что теоретическая модель пригодна для описания эффективности генерации вблизи наиболее оптимальной толщины плазменного слоя и позволяет получить оценку максимальной мощности излучения, которая может быть достигнута в эксперименте по инъекции пучка в плазму.

2. Излучение цилиндрического плазменного столба

Согласие предсказаний теоретической модели с результатами PIC- моделирования в плоском случае позволяет обобщить подход на случай более реалистичной цилиндрической геометрии, пригодной для оценки мощности излучения, которая могла бы быть получена в эксперименте благодаря этому механизму.

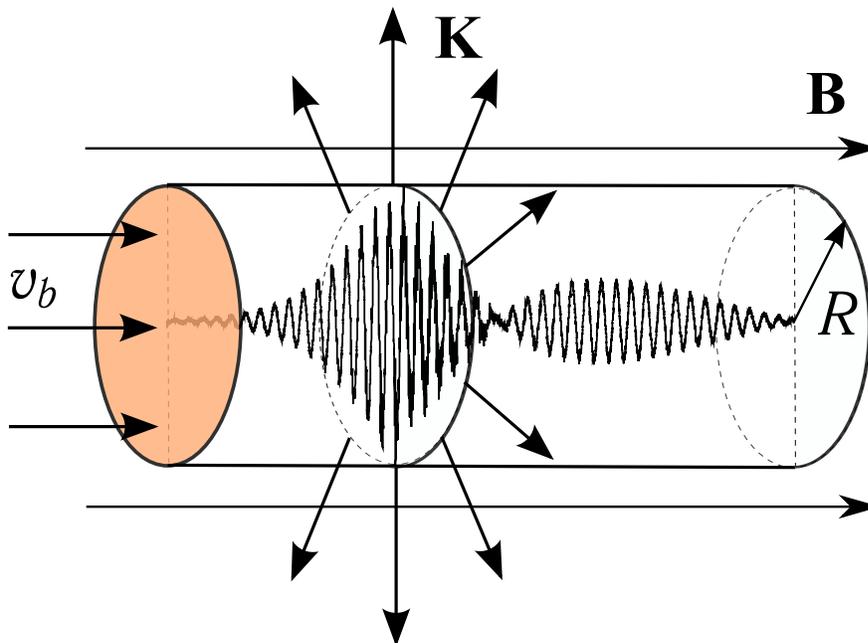


Рисунок 4: Геометрия задачи в цилиндрическом случае

При инжекции пучка в цилиндрический плазменный столб происходит его захват полем наиболее неустойчивой волны, что приводит к пространственной локализации области накачки, так что вблизи инжектора формируется когерентный волновой пакет с характерной длиной $L = 3v_b/\Gamma$. Результаты PIC-моделирования подтверждают наличие области локализации [17], а также показывают, что мощность, теряемая пучком в этой области стабилизируется на постоянном уровне [18], который определяется только процессами нелинейного взаимодействия пучка с регулярной резонансной волной и не зависит от деталей турбулентного спектра. Таким образом, для оценок по

порядку величины будем считать, что область наиболее интенсивной пучковой накачки ограничена размером когерентного волнового пакета L , в котором происходит захват пучка, а амплитуду поля в нём можно оценить как $\widehat{E}_0 \simeq \gamma_b^3 \widehat{\Gamma}^2 \widehat{v}_b$. Здесь мы по-прежнему считаем, что период модуляции плотности совпадает с волновым вектором наиболее неустойчивой пучковой волны ($q = k_{\parallel}$). Запишем уравнения Максвелла для этого случая:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \varkappa^2 \right) E_z = \frac{4\pi\omega_b}{c^2} j_0 \cos \omega_b t. \quad (12)$$

Решение этого уравнения в плазме записывается следующим образом:

$$E_z^{in} = \left(C_1 I_0(\varkappa r) - \frac{E_0 \delta \widehat{n}}{4(1 - \widehat{\omega}_b^2)} \right) e^{-i\omega_b t}, \quad (13)$$

где $I_0(\varkappa r)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. В вакууме решение выглядит как расходящаяся цилиндрическая волна

$$E_z^{out} = \frac{C_2}{\sqrt{r}} e^{i\mathcal{K}_{\perp}(r-R) - i\omega_b t}. \quad (14)$$

На границе плазмы ($r = R$) эти решения сшиваются в виду условия непрерывности тангенциальных компонент электрических и магнитных полей. Вычислив мощность излучения из единицы объёма плазмы $P_{rad} = 2S_r/r$, получаем, что зависимость мощности от радиуса плазменного столба выглядит аналогично предыдущему случаю, а фактор F имеет вид:

$$F = \frac{2}{\varkappa R} \frac{I_1^2(\varkappa R)}{\left[(1 - \widehat{\omega}_b^2) \left(I_1(\varkappa R) + \frac{I_0(\varkappa R)}{2\varkappa R} \right)^2 + \widehat{\omega}_b^2 I_0^2(\varkappa R) \right]}. \quad (15)$$

Из рисунка 5 видно, что максимум F достигается при $R_{opt} \approx 2/\varkappa$. Так как зависимость эффективности генерации от радиуса также определяется параметром F , то она достигает максимума при $R = R_{opt}$. Если считать, что основной вклад в излучение цилиндрической плазменной антенны даёт область наиболее интенсивной пучковой накачки с объёмом $\pi R^2 L$, то полную

мощность излучения, получаемую при оптимальной толщине плазмы, можно записать как

$$\mathcal{P}_{rad} \simeq \omega_p m_e c^2 n_p R_{opt}^2 L \frac{\pi \hat{E}_0^2 \delta \hat{n}^2 F_{max}}{8 \sqrt{1 - \hat{\omega}_b^2}}. \quad (16)$$

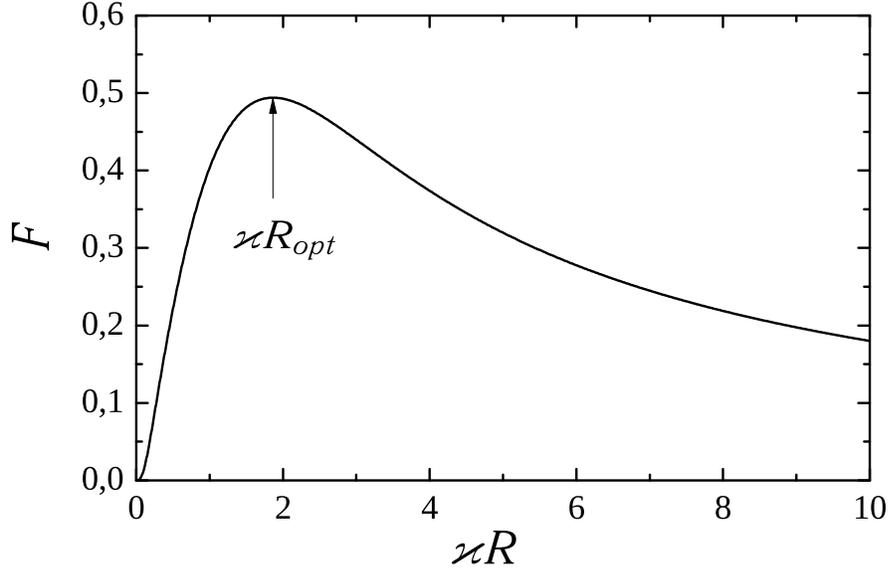


Рисунок 5: Зависимость F от радиуса плазменного столба при $\hat{\omega}_b = 0.94$

Оценим мощность излучения, которая может быть получена благодаря механизму пучково-плазменной антенны в условиях, близких к экспериментальным. Если электронный пучок с плотностью $n_b = 7 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ и скоростью $v_b = 0.93c$ инжектируется в газ с плотностью $n_p = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, в возникающей плазме будет раскачиваться волна с частотой $f_b = \omega_b/(2\pi) = 124 \text{ ГГц}$ и длиной волны $\lambda_b = 2.2 \text{ мм}$. Оптимальный радиус плазмы, согласно формуле (15), составляет $R_{opt} = 3.4 \text{ мм}$, а область наиболее интенсивной накачки $L = 2.7 \text{ см}$. Если плотность плазмы промодулировать с периодом, совпадающим с длиной пучковой волны λ_b и глубиной $\delta \hat{n} = 20\%$, то мощность излучения на частоте f_b должна достигать $\mathcal{P}_{rad} \simeq 110 \text{ МВт}$. Учитывая, что полная мощность инжектируемого пучка составляет $\mathcal{P}_b \approx 1 \text{ ГВт}$, эффективность генерации излучения достигает 11%. Из формулы (16) следует, что ещё более высокая эффективность могла бы достигаться за счёт увеличения глубины модуляции плотности плазмы, однако стоит помнить, что предложенная теория предполагает малость δn и не учитывает влияния

неоднородности плотности на инкремент раскачки пучковой неустойчивости и глубину проникновения в плазму вакуумных электромагнитных волн.

Таким образом, благодаря высокой эффективности излучения, такая тонкая пучково-плазменная система с продольной модуляцией плотности может представлять интерес как схема генерации мощного субтерагерцового излучения.

3. Обобщение на случай произвольного периода возмущения плотности

Для лабораторных экспериментов характерна турбулентная плазма, в которой возбуждается широкий спектр флуктуаций плотности. Такое возмущение можно представить в виде набора гармоник с разным периодом модуляции: $\delta n \propto \sum_q n_q e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$. Для вычисления полной мощности излучения необходимо просуммировать вклады от гармоник с разными \mathbf{q} . Для этого описанную выше модель следует обобщить на случай произвольной величины волнового вектора возмущения ($q \neq k_{\parallel}$). Стоит отметить, что если в случае $q = k_{\parallel}$ магнитное поле не фигурировало в задаче, так как все процессы происходили вдоль него, то здесь магнитное поле существенно усложняет решение.

3.1 Излучение в плоском случае

Как и прежде, будем действовать по принципу от простого к сложному: для начала рассмотрим данную задачу в плоской геометрии. Случай произвольного волнового вектора возмущения плотности соответствует излучению под некоторым углом θ , определяемому по формуле (4). Запишем безразмерные уравнения Максвелла для $\mathcal{K}_{\parallel} = 1 - q/k_{\parallel} \neq 0$:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + a_1 E_z - a_2 \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{i\mathcal{J}}{\omega_b \varepsilon} (\varepsilon - \mathcal{K}_{\parallel}^2), \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + a_3 E_y + a_4 \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0. \quad (18)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a_1 = \eta/\varepsilon \left(\varepsilon - \mathcal{K}_{\parallel}^2 \right), \quad a_2 = \mathcal{K}_{\parallel} g/\varepsilon,$$

$$a_3 = \varepsilon - \mathcal{K}_{\parallel}^2 - \frac{g^2}{\varepsilon - \mathcal{K}_{\parallel}^2}, \quad a_4 = \frac{\mathcal{K}_{\parallel} g}{\varepsilon - \mathcal{K}_{\parallel}^2},$$

$\mathcal{J} = j_0/(en_p c)$ – безразмерная амплитуда плотности тока, а ε, η, g – компоненты тензора диэлектрической проницаемости холодной замагниченной плазмы:

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{\omega_b^2 - \Omega_e^2}, \quad g = \frac{\Omega_e/\omega_b}{\omega_b^2 - \Omega_e^2}, \quad \eta = 1 - \frac{1}{\omega_b^2}.$$

Решение этой системы для электрического поля вида $\mathbf{E}^{in} = \mathbf{E}^{in}(x) \exp(i\mathcal{K}_{\parallel} z - i\omega t) + c.c.$ записывается следующим образом:

$$E_z^{in} = (a_3 - \varkappa_1^2) (C_1 e^{i\varkappa_1 x} + C_2 e^{-i\varkappa_1 x}) + i\varkappa_2 a_2 (C_3 e^{i\varkappa_2 x} - C_4 e^{-i\varkappa_2 x}) - \frac{i\mathcal{J}}{\eta\omega} =$$

$$= b_1 (C_1 e^{i\varkappa_1 x} + C_2 e^{-i\varkappa_1 x}) + b_2 (C_3 e^{i\varkappa_2 x} - C_4 e^{-i\varkappa_2 x}) - \frac{i\mathcal{J}}{\eta\omega}, \quad (19)$$

$$E_y^{in} = -i\varkappa_1 a_4 (C_1 e^{i\varkappa_1 x} - C_2 e^{-i\varkappa_1 x}) + (a_1 - \varkappa_2^2) (C_3 e^{i\varkappa_2 x} + C_4 e^{-i\varkappa_2 x}) =$$

$$= b_3 (C_1 e^{i\varkappa_1 x} - C_2 e^{-i\varkappa_1 x}) + b_4 (C_3 e^{i\varkappa_2 x} + C_4 e^{-i\varkappa_2 x}), \quad (20)$$

где

$$\varkappa_{1,2}^2 = \frac{a_1 + a_3 + a_2 a_4 \mp \sqrt{(a_1 + a_3 + a_2 a_4)^2 - 4a_1 a_3}}{2}.$$

Согласно полученному решению (19)-(20), вакуумное электромагнитное поле может проникать в плазму в виде двух собственных мод с различными поперечными компонентами волнового вектора. Обе эти моды соответствуют необыкновенной ветви электромагнитных колебаний. На границе плазменного слоя поля должны сшиваться с вакуумными:

$$E_z^{out} = C_5 e^{i\mathcal{K}_{\perp}(x-l)}, \quad E_z^{out} = C_7 e^{-i\mathcal{K}_{\perp}(x+l)}, \quad (21)$$

$$E_y^{out} = C_6 e^{i\mathcal{K}_{\perp}(x-l)}, \quad E_y^{out} = C_8 e^{-i\mathcal{K}_{\perp}(x+l)}. \quad (22)$$

Находя константы из условия непрерывности тангенциальных компонент полей, можем записать плотность потока энергии, переносимой этими волнами

$$\mathcal{S} = \frac{S_x}{n_0 m_e c^3} = 2\mathcal{K}_\perp \left[\frac{|C_5|^2}{\mathcal{K}_\perp^2} + |C_6|^2 \right].$$

Как было показано в разделе (1.2), уровень насыщения пучковой волны в случае тонкой плазмы оказывается неоднородным по её длине. Чтобы учесть этот факт, проинтегрируем E_0 по области локализации пучковой накачки: $\sim \int E_0^2 dz$. Тогда эффективность генерации излучения из плазмы можно записать в виде:

$$\frac{P_{rad}}{P_b} = \frac{2\mathcal{K}_\perp \omega_b^3 (F_1 + F_2)}{(\gamma_b - 1) \widehat{n}_b \widehat{v}_b l (\omega^2 - 1)^2} \int_0^{L_z} |\mathcal{J}|^2 dz. \quad (23)$$

F_1 и F_2 соответствуют вкладу мод с разными \varkappa :

$$F_1 = \left| \frac{b_5 \sin(\varkappa_1 l) + G b_6 \sin(\varkappa_2 l)}{Z} \right|^2, \quad F_2 = \left| \frac{b_3 \sin(\varkappa_1 l) + G b_4 \sin(\varkappa_2 l)}{Z} \right|^2,$$

где

$$\begin{aligned} Z &= b_1 \cos(\varkappa_1 l) + i\mathcal{K}_\perp b_5 \sin(\varkappa_1 l) + G (b_2 \cos(\varkappa_2 l) + i\mathcal{K}_\perp b_6 \sin(\varkappa_2 l)), \\ b_5 &= -\varkappa_1 b_1 - i\mathcal{K}_\parallel b_3 (\epsilon - \mathcal{K}_\parallel^2 - \varkappa_1^2) / g, \\ b_6 &= -\varkappa_2 b_2 - i\mathcal{K}_\parallel b_4 (\epsilon - \mathcal{K}_\parallel^2 - \varkappa_2^2) / g, \\ G &= -\frac{b_3}{b_4} \left(\frac{\varkappa_1 \cos(\varkappa_1 l) - i\mathcal{K}_\perp \sin(\varkappa_1 l)}{\varkappa_2 \cos(\varkappa_2 l) - i\mathcal{K}_\perp \sin(\varkappa_2 l)} \right). \end{aligned}$$

Подставляя выражение для амплитуды тока, получаем

$$\frac{P_{rad}}{P_b} = \frac{\delta n^2 \mathcal{F}_1(l)}{8(\gamma_b - 1) \widehat{n}_b \widehat{v}_b \sqrt{1 - \omega_b^2}} \int_0^{L_z} E_0^2 dz, \quad (24)$$

где фактор $\mathcal{F}_1(l)$, как и прежде, определяет зависимость эффективности ге-

нерации от толщины плазмы и имеет следующий вид:

$$\mathcal{F}_1(l) = \frac{\mathcal{K}_\perp \omega_b (F_1 + F_2)}{l(1 - \omega_b^2)^{3/2}}. \quad (25)$$

При переходе к случаю излучения поперёк плазменного слоя вклад от второй моды зануляется ($F_2 = 0$), а вклад от первой моды приводится к виду

$$\mathcal{F}_1(l) = \frac{\sinh^2(\varkappa_1 l)}{\varkappa_1 l \left[\omega_b^2 + \sinh^2(\varkappa_1 l) \right]},$$

где $\varkappa_1 = \sqrt{-\eta}$ по-прежнему определяет глубину проникновения поля.

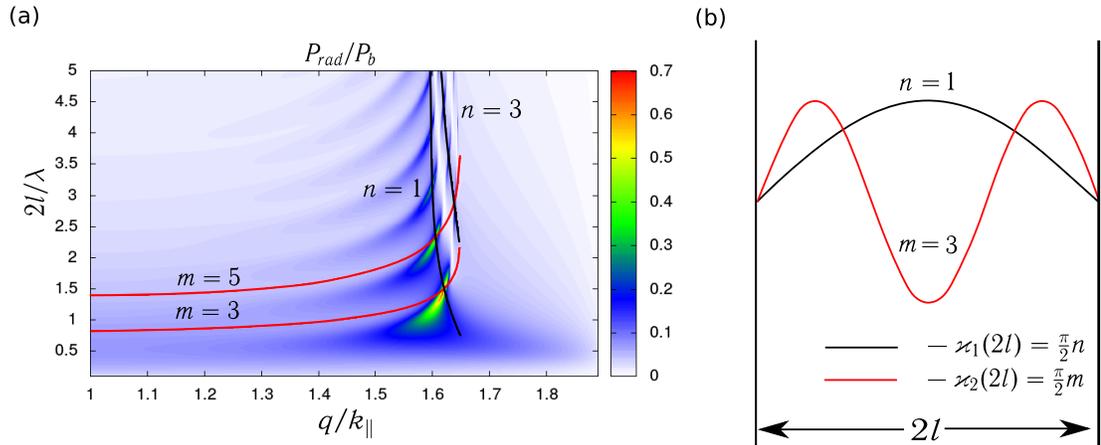


Рисунок 6: (а) Зависимость эффективности генерации излучения от периода модуляции плотности и толщины плазмы в плоском случае. (б) Схематическое изображения условия того, что на толщине плазмы укладывается нечётное число поперечных длин полуволен плазменных колебаний.

На рисунке 6(а) изображён график зависимости эффективности генерации излучения от периода модуляции и толщины плазменного слоя для постоянной амплитуды пучковой волны. Видно, что существует диапазон параметров, в котором наблюдается существенное увеличение эффективности конверсии мощности пучка в мощность излучения. Чтобы объяснить этот факт, построим реальную и мнимую части поперечной компоненты волнового вектора каждой из мод плазменных колебаний в зависимости от периода модуляции плотности (рис. 7). Согласно этим графикам, \varkappa_1 в широком

диапазоне q является чисто мнимой величиной, что соответствует тому, что в этой области вакуумные волны не могут проникать в плазму в виде данной моды дальше глубины скин-слоя. Вторая же мода может существовать в плазме почти на всём интервале q . Усиление мощности излучения наблюдается именно в той области, где плазма становится прозрачной для обеих мод собственных колебаний. Это означает, что в этой области в генерации излучения участвуют уже не только тонкие приграничные слои, но и весь объём плазмы.

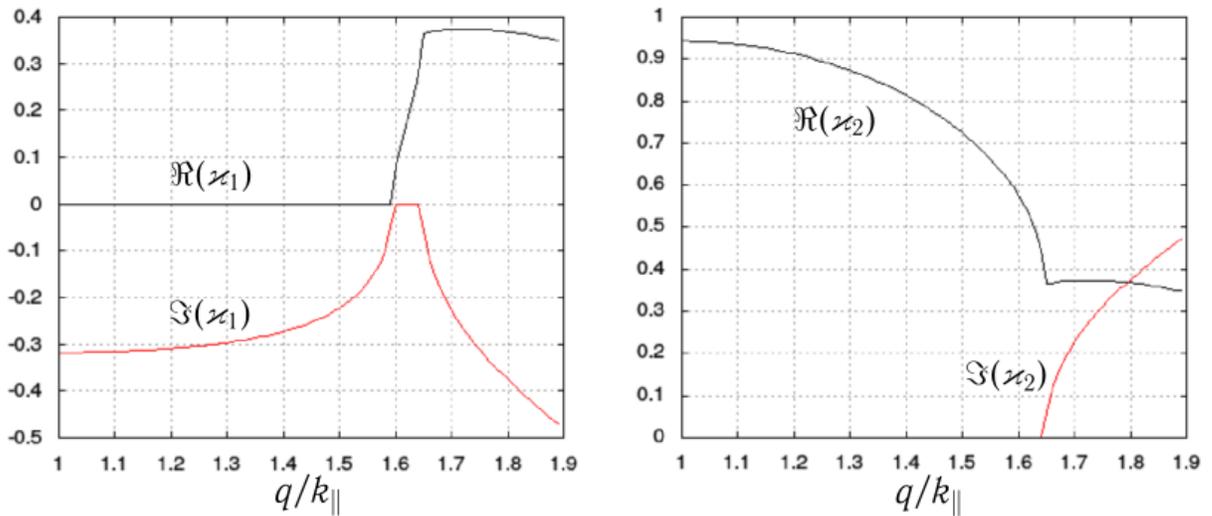


Рисунок 7: Реальная и мнимая части $\kappa_{1,2}$ в зависимости от периода модуляции плотности.

Кроме того, в этой же области наблюдается чередование минимумов и максимумов генерации излучения. Наличие этих колебаний мощности связано с тем, что в данном диапазоне параметров на толщину плазмы укладывается чётное/нечётное число поперечных длин полуволн. На рисунке б(а) линиями показаны условия $\kappa_1(2l) = \frac{\pi}{2}n$ и $\kappa_2(2l) = \frac{\pi}{2}m$. Пересечение этих линий предсказывает положение максимумов излучения. Положение наибольшего максимума соответствует тому, что на толщине плазмы укладываются одна полуволна первой моды плазменных колебаний и три полуволны второй моды, что схематично изображено на рисунке б(б). Именно такое условие соответствует наиболее эффективной генерации, потому как при усреднении по толщине плазмы в этом случае величина мощности накачки

оказывается максимальной.

Для построения графика, изображённого на рисунке 6(а), были выбраны те же параметры, что и в случае $q \neq k_{\parallel}$. Это было сделано для того, чтобы продемонстрировать относительное влияние величины периода возмущения плотности. Правильное же абсолютное значение эффективности генерации предложенная теория может предсказывать только при достаточно малой глубине модуляции плотности, при которой эффективность излучения не превышает 10-15%. При большем δn в системе начинают играть роль нелинейные эффекты, которые в данной теории не учитываются.

3.2 Излучение в цилиндрическом случае

Аналогичные действия можно проделать и для цилиндрической геометрии. В таком случае уравнения Максвелла будут иметь вид:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + a_1 E_z + a_2 \left(\frac{E_\phi}{r} + \frac{\partial E_\phi}{\partial r} \right) = -\frac{i\mathcal{J}}{\omega_b \varepsilon} \left(\varepsilon - \mathcal{K}_{\parallel}^2 \right), \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\phi}{\partial r} - \frac{E_\phi}{r^2} + a_3 E_\phi - a_4 \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0, \quad (27)$$

где введены те же обозначения, что и в предыдущем случае. В плазме решение этой системы (28)–(29) выражается через функции Бесселя. Как и в плоском случае, оно содержит две моды собственных колебаний плазмы, одно из которых для широкого диапазона q может проникать в плазму только на глубину скин-слоя, другое же может существовать в плазме почти для всех q .

$$\begin{aligned} E_z^{in} &= (a_3 - \varkappa_1^2) C_1 J_0(\varkappa_1 r) - a_2 \varkappa_2 C_2 J_0(\varkappa_2 r) - \frac{i\mathcal{J}}{\eta\omega} = \\ &= d_1 C_1 J_0(\varkappa_1 r) + d_2 C_2 J_0(\varkappa_2 r) - \frac{i\mathcal{J}}{\eta\omega}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} E_\phi^{in} &= -a_4 \varkappa_1 C_1 J_1(\varkappa_1 r) + (a_1 - \varkappa_2) C_2 J_1(\varkappa_2 r) = \\ &= d_3 C_1 J_1(\varkappa_1 r) + d_4 C_2 J_1(\varkappa_2 r). \end{aligned} \quad (29)$$

В вакууме это решение сшивается с расходящимися цилиндрическими волнами вида

$$E_z^{out} = \frac{C_3}{\sqrt{r}} e^{i\mathcal{K}_\perp(r-R)}, \quad (30)$$

$$E_\phi^{out} = \frac{C_4}{\sqrt{r}} e^{i\mathcal{K}_\perp(r-R)}. \quad (31)$$

Плотность потока энергии, переносимая этими волнами:

$$\mathcal{S} = \frac{S_r}{n_0 m_e c^3} = \frac{\mathcal{K}_\perp}{r} \left(|C_4|^2 + |C_3|^2 \frac{1 + 4r^2}{1 + 4\mathcal{K}_\perp^2 r^2} \right).$$

Эффективность конверсии энергии пучка в излучение:

$$\frac{P_{rad}}{P_b} = \frac{\delta n^2 \mathcal{F}_2(l)}{4(\gamma_b - 1) \hat{n}_b \hat{v}_b \sqrt{1 - \omega_b^2}} \int_0^{L_z} E_0^2 dz, \quad (32)$$

где

$$\mathcal{F}_2(l) = \frac{\mathcal{K}_\perp \omega_b (4R^2 + 1) ((4R^2 + 1)F_1 + 4R^2 F_2)}{R(1 - \omega_b^2)^{3/2}} \quad (33)$$

Здесь F_1 и F_2 , как и прежде, соответствуют вкладу каждой моды плазменных колебаний

$$F_1 = \left| \frac{d_5 J_1(\varkappa_1 R) + V d_6 J_1(\varkappa_2 R)}{D} \right|^2, \quad F_2 = \left| \frac{d_3 J_1(\varkappa_1 R) + V d_4 J_1(\varkappa_2 R)}{D} \right|^2,$$

где

$$\begin{aligned} D &= 2R(1 + 2i\mathcal{K}_\perp R) d_5 J_1(\varkappa_1 R) + i(4R^2 + 1) d_1 J_0(\varkappa_1 R) + \\ &\quad + V (2R(1 + 2i\mathcal{K}_\perp R) d_6 J_1(\varkappa_2 R) + i(4R^2 + 1) d_2 J_0(\varkappa_2 R)), \\ d_5 &= -i\varkappa_1 d_1 - i\mathcal{K}_\parallel d_3 (\varkappa_1^2 + \mathcal{K}_\parallel^2 - \epsilon)/g, \\ d_6 &= -i\varkappa_2 d_2 - i\mathcal{K}_\parallel d_4 (\varkappa_1^2 + \mathcal{K}_\parallel^2 - \epsilon)/g, \\ V &= -\frac{b_3}{b_4} \left(\frac{2\varkappa_1 R J_0(\varkappa_1 R) - (1 + 2i\mathcal{K}_\perp R) J_1(\varkappa_1 R)}{2\varkappa_2 R J_0(\varkappa_2 R) - (1 + 2i\mathcal{K}_\perp R) J_1(\varkappa_2 R)} \right). \end{aligned}$$

Построив график зависимости доли конвертируемой в излучение мощности от радиуса плазменного столба и периода модуляции, получаем картину, аналогичную той, что была получена в плоском случае.

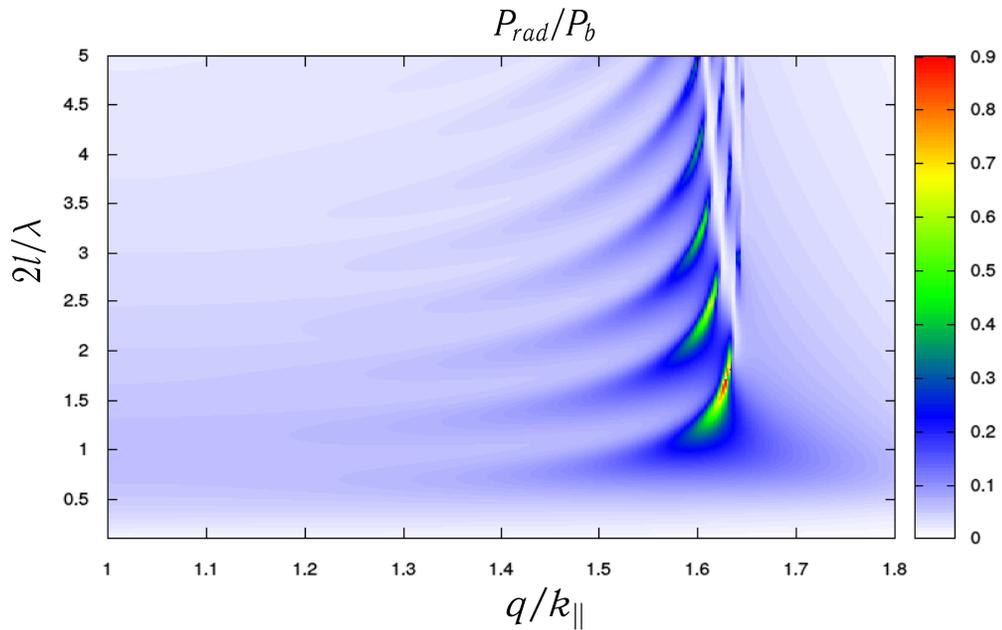


Рисунок 8: Зависимость эффективности генерации излучения от периода модуляции плотности и толщины плазмы в цилиндрическом случае.

Заключение

В работе построена теоретическая модель, описывающая новый механизм генерации электромагнитного излучения тонкой пучково-плазменной системой вблизи первой гармоники плазменной частоты. Необходимым условием генерации излучения в такой системе является наличие продольного периодического возмущения плотности плазмы. Рассеяние доминирующей пучковой волны на таком возмущении приводит к формированию сверхсветовой волны тока, способной эффективно взаимодействовать с вакуумными электромагнитными волнами. При малых поперечных размерах излучение такой системы можно сравнить с излучением антенны, конвертирующей энергию пучка в энергию электромагнитных волн. В случае, когда период возмущения плотности совпадает с длиной наиболее неустойчивой пучковой волны, излучение направлено строго поперёк плазменного слоя, а в его генерации участвуют лишь тонкие приграничные слои. Следовательно, наиболее эффективный режим генерации достигается в условиях, когда полутолщина плазмы равна глубине скин-слоя. Выводы теории об оптимальной толщине плазмы и соответствующей ей мощности излучения подтверждаются результатами РС-моделирования. В случае цилиндрической геометрии эта модель позволяет сделать оценку эффективности излучения, которая может быть достигнута в экспериментах по инъекции мощного электронного пучка в замагниченную плазму на установке ГОЛ-3. Согласно этим оценкам, при характерных экспериментальных параметрах мощность субтерагерцового излучения может достигать $\sim 10\%$ от полной мощности пучка [16]. Столь высокий уровень эффективности делает схему с выделенным возмущением плотности привлекательной для генерации субтерагерцового излучения гигаватного уровня мощности.

В случае произвольного периода модуляции теория предсказывает режим эффективной генерации излучения в более толстой плазме. В этом режиме плазма становится прозрачной для излучения, поэтому в генерации участвуют не только приграничные слои, но и весь её объём. Установлено, что наиболее эффективная конверсия происходит тогда, когда на толщине

плазмы укладывается нечётное число поперечных длин полуволн плазменных колебаний. Такая теория необходима для интерпретации экспериментов по регистрации излучения в турбулентном режиме пучково-плазменного взаимодействия.

Литература

1. Gurnett Donald A., Anderson Roger R. Electron plasma oscillations associated with type III radio bursts // *Science*. — 1976. — Vol. 194, no. 4270. — P. 1159–1162.
2. A comparison of weak-turbulence and particle-in-cell simulations of weak electron-beam plasma interaction / Heather Ratcliffe, Christopher S Brady, MB Che Rozenan, Valery M Nakariakov // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2014. — Vol. 21, no. 12. — P. 122104.
3. Kim Eun-Hwa, Cairns Iver H, Johnson Jay R. Linear mode conversion of Langmuir/z-mode waves to radiation in plasmas with various magnetic field strength // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2013. — Vol. 20, no. 12. — P. 122103.
4. Collective Microwave Emission from Intense Electron-Beam Interactions: Theory and Experiment / Gregory Benford, David Tzach, Keith Kato, Dean F. Smith // *Physical Review Letters*. — 1980. — Vol. 45, no. 14. — P. 1182.
5. Burdakov A.V. et al. Concept of fusion reactor based on multiple-mirror trap // *Fusion Science and Technology*. — 2011. — Vol. 59, no. 1T. — P. 9–16.
6. Burdakov A.V. et al. Microwave Generation during 100 keV Electron Beam Relaxation in GOL-3 // *Fusion Science and Technology*. — 2013. — Vol. 63, no. 1T. — P. 286–288.

7. MM-wave emission by magnetized plasma during sub-relativistic electron beam relaxation / I.A. Ivanov, A.V. Arzhannikov, A.V. Burdakov et al. // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2015. — Vol. 22, no. 12. — P. 122302.
8. Temporal structure of double plasma frequency emission of thin beam-heated plasma / V.V. Postupaev, A.V. Burdakov, I.A. Ivanov et al. // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2013. — Vol. 20, no. 9. — P. 092304.
9. Dynamics of fundamental electromagnetic emission via beam-driven Langmuir waves / B. Li, A.J. Willes, P.A. Robinson, I.H. Cairns // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2005. — Vol. 12, no. 5. — P. 052324.
10. Брейзман Б. Н. Коллективное взаимодействие релятивистских электронных пучков с плазмой // *Вопросы теории плазмы*. — 1986. — № 15.
11. Kim Eun-Hwa, Cairns Iver H., Robinson Peter A. Extraordinary-mode radiation produced by linear-mode conversion of Langmuir waves // *Physical review letters*. — 2007. — Vol. 99, no. 1. — P. 015003.
12. Yoon Peter H. Plasma emission by a nonlinear beam instability // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 1995. — Vol. 2, no. 2. — P. 537–548.
13. Malaspina David M., Cairns Iver H., Ergun Robert E. Antenna radiation near the local plasma frequency by Langmuir wave eigenmodes // *The Astrophysical Journal*. — 2012. — Vol. 755, no. 1. — P. 45.
14. Timofeev I.V., Annenkov V.V., Arzhannikov A.V. Regimes of enhanced electromagnetic emission in beam-plasma interactions // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2015. — Vol. 22, no. 11. — P. 113109.
15. Timofeev I.V. Two-dimensional simulations of nonlinear beam-plasma interaction in isotropic and magnetized plasmas // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2012. — Vol. 19, no. 4. — P. 042108.
16. Annenkov V.V., Volchok E.P., Timofeev I.V. Generation of high-power electromagnetic radiation by a beam-driven plasma antenna // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2016. — Vol. 58, no. 4. — P. 045009.

17. Annenkov V.V., Timofeev I.V., Volchok E.P. Simulations of electromagnetic emissions produced in a thin plasma by a continuously injected electron beam // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2016. — Vol. 23, no. 5. — P. 053101.
18. Timofeev I.V., Terekhov A.V. Simulations of turbulent plasma heating by powerful electron beams // *Physics of Plasmas* (1994-present). — 2010. — Vol. 17, no. 8. — P. 083111.