

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет ФИЗИЧЕСКИЙ

Кафедра ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

Направление подготовки 03.04.02 ФИЗИКА

Образовательная программа МАГИСТРАТУРА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Спицына Романа Игоревича  
(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
ЛАЗЕРНОГО ДРАЙВЕРА ДЛЯ ПЛАЗМЕННОГО  
КИЛЬВАТЕРНОГО УСКОРЕНИЯ

«К защите допущена»

Заведующий кафедрой  
д.ф.-м.н., Зам. Директора  
ИЯФ СО РАН по научной работе  
Иванов А.А./.....  
(Фамилия, И., О.)/(подпись, МП)  
«...».....20...Г

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., доцент  
г.н.с. ИЯФ СО РАН  
Лотов К.В./.....  
(Фамилия, И., О.)/(подпись, МП)  
«...».....20...Г

Дата защиты «...».....20...Г

Новосибирск, 2016 год

## Аннотация

к выпускной квалификационной работе  
(магистерской диссертации)

Спицына Романа Игоревича

### **Численная реализация квазистатической модели лазерного драйвера для плазменного кильватерного ускорения**

Данная работа посвящена реализации алгоритма численного решения уравнения эволюции лазерного импульса в рамках квазистатического приближения лазерного кильватерного ускорения. В кильватерных волнах в плазме на малых масштабах могут генерироваться электрические ускоряющие поля, которые на порядки выше полей в традиционных высокочастотных резонаторах. Для подробного изучения процессов плазменного кильватерного ускорения необходимо численное моделирование. Квазистатическое приближение позволяет отдельно выделить процессы, которые происходят медленнее по сравнению с периодом плазменной волны. Это позволяет избежать численного решения уравнений Максвелла напрямую, в результате чего алгоритм работает гораздо быстрее метода частиц в ячейках. Реализованный алгоритм проверен на тестовых задачах, численное решение совпадает с теоретическими представлениями с очень хорошей точностью. Было смоделировано распространение лазерного импульса в плазменном канале с параболическим профилем плотности, а также на одной тестовой задаче проведено сравнение с кодом «Wake». Работа относится к области кильватерного ускорения и вычислительной физики.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1. Лазерный импульс как драйвер для плазменного кильватерного ускорения</b>	<b>6</b>
1.1 Пондеромоторная сила . . . . .	6
1.2 Уравнение эволюции лазерного импульса . . . . .	9
<b>2. Численная реализация модели</b>	<b>12</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	12
2.2 Алгоритм численного решения . . . . .	14
2.3 Граничные условия . . . . .	21
<b>3. Анализ численного решения</b>	<b>27</b>
3.1 Групповая скорость лазерного импульса . . . . .	28
3.2 Поперечное расплывание лазерного импульса . . . . .	31
3.3 Параболический профиль плотности плазмы . . . . .	34
3.4 Сравнение с кодом «Wake» . . . . .	36
<b>Заключение</b>	<b>38</b>
<b>Приложение 1</b>	<b>39</b>
<b>Список литературы</b>	<b>43</b>

# Введение

Ускорение заряженных частиц сейчас занимает особую нишу как в фундаментальной физике, в качестве метода изучения строения мира на масштабах фемтометров, так и в промышленности и медицине, например, как источники высокоэнергичных пучков заряженных частиц. При этом для прикладных задач требуются, по возможности, более компактные ускорители при требуемой энергии частиц, а в фундаментальной физике — ускорители на очень большую энергию частиц, которые обычно являются циклическими, чтобы ускоряемые частицы многократно пролетали одни и те же ускоряющие секции, получая добавку к энергии.

Достижению высоких энергий пучков препятствуют множество проблем как физического, так и технического характера. В первую очередь, это связано с ускоряющими высокочастотными резонаторами, которые используются в современных ускорителях. Металлические структуры могут выдерживать электрические поля в сотни мегавольт на метр, но выше этой границы возможен электрический пробой внутри резонатора, что приведёт к его поломке.

Другой серьезной проблемой при ускорении легких лептонов (электронов и позитронов) является синхротронное излучение. Потери энергии частиц на излучение очень быстро растут с увеличением энергии. Лептонной «пределной машиной» был Большой электрон-позитронный коллайдер (Large Electron-Positron collider, LEP), который ускорял пучки до 104,5 гигаэлектронвольт (209 гигаэлектронвольт в системе отсчёта центра масс). При этом на такой энергии за один оборот частицы теряли почти 3 гигаэлектронвольта, поэтому для восполнения одних только потерь требовалось подводить мощность 25 мегаватт. Этот ускоритель располагался в ЦЕРНе и представлял из себя кольцо длиной 27 километров. Сейчас в этом тоннеле располагается Большой адронный коллайдер (Large Hadron Collider, LHC).

При ускорении тяжелых частиц синхротронное излучение не столь критично, поскольку потери энергии быстро убывают с ростом массы излучающей частицы. Однако столкновения происходят между элементарными частицами (кварками), поэтому эффективная энергия пучка

частиц будет в три раза меньше (в случае мезонов — в два раза), чем энергия пучка адронов. При этом серьезной проблемой становится удержание пучков в кольце: требуется поддержание сильного магнитного поля на всей длине циклического ускорителя, с чем могут справиться только высокоточные сверхпроводящие магнитные системы. Кроме того, в кольцо ускорителя нужно установить еще ускоряющие секции, поэтому размер установки снова получается огромным.

Очевидным решением проблемы по достижению высокой энергии пучков частиц является строительство всё более и более крупных циклических ускорителей. При этом стоимость установки возрастает гораздо быстрее, чем её размер, поэтому такой проект, как ЛНС, финансово не смогло «потянуть» ни одно государство, этот ускоритель был построен коллективом стран-участниц.

Можно вернуться к ускорению лептонов, но только строить не циклические, а линейные ускорители. В этом случае потери на синхротронное излучения пренебрежимо малы, но повышение энергии снова упирается в размер установки, а следовательно, в финансовые возможности. Например, проектируемый Международный линейный коллайдер (International Linear Collider, ILC) должен будет ускорять пучки электронов и позитронов до энергии 500 гигаэлектронвольт. Проектная длина установки составляет 31 километр, а стоимость оценивается почти в 8 млрд. долларов.

Другим путем решения проблемы высоких энергий является использование принципиально новых методов ускорения. Одним из них является плазменное кильватерное ускорение, то есть ускорение заряженных частиц в плазменных волнах. Движущийся в плазме быстрый сгусток электронов или протонов кулоновскими силами воздействует на легкие электроны плазмы (ионы, как минимум, в 1800 раз тяжелее электронов, поэтому они остаются практически неподвижны), создавая, тем самым, неравномерное распределения заряда в плазме. Такой сгусток называется драйвером. Электрическое поле, возникающее при таком распределении зарядов на малых масштабах, имеет характерную величину  $E_0 = \sqrt{4\pi n_0 m c^2}$ , что составляет несколько гигаВольт на метр. Если следом за драйвером в правильной фазе будет двигаться другой сгусток

электронов (так называемый витнесс), то в таком электрическом поле от плазменных волн он может ускориться (рис.1).

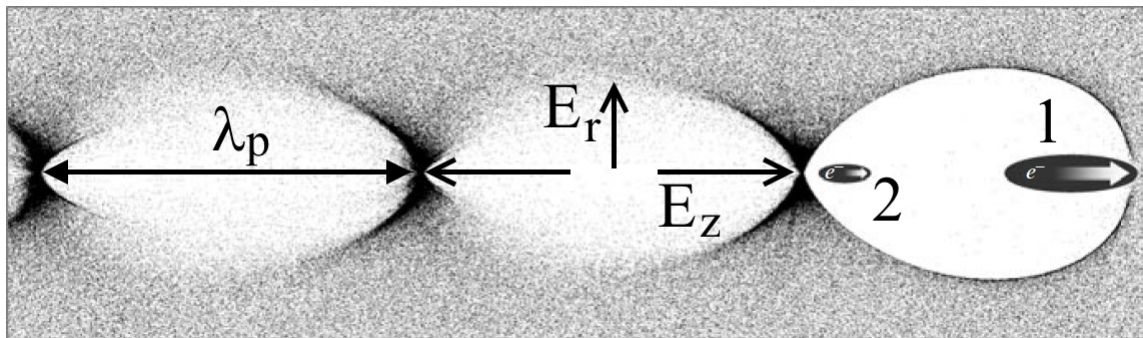


Рис. 1: Принцип кильватерного ускорения. Окно движется со скоростью света направо. Драйвер (1) создает кильватерную волну, витнесс (2) ускоряется в этой волне. (Рисунок взят из работы [1]).

Драйверами для кильватерного ускорения могут быть не только пучки заряженных частиц. Согласно работе [2], в качестве драйвера может использоваться мощный короткий лазерный импульс, который воздействует на частицы плазмы посредством пондеромоторной силы, о чем подробно будет сказано в дальнейшем. Лазерное кильватерное ускорение представляет большой интерес в связи с существованием мощных лазерных установок. По данным ICUIL (International Committee on Ultra-High Intensity Lasers) за 2011 год, в мире порядка 70-ти крупных лазерных лабораторий, и почти каждая лаборатория имеет свою научную программу по кильватерному ускорению с лазерными драйверами.

Непосредственно «заглянуть» в плазму невозможно, сведения о происходящих в ней процессах можно получить только из анализа «вторичных» эффектов, поэтому численное моделирование очень важно для понимания плазменного кильватерного ускорения. С его помощью можно как воссоздать процессы, происходящие в плазме, так и определить область наиболее интересных параметров, в которой лучше всего проводить лабораторные эксперименты.

Универсальным средством численного решения электродинамических задач является метод частиц в ячейках (**P**article-**i**n-**C**ell, PIC-метод), при котором на всей счётной области, разбитой на маленькие ячейки, решаются уравнения Максвелла. Такие коды требуют больших вычислительных мощностей и долго решают поставленные задачи (недели счётного

времени), но всё равно применяются для моделирования задач кильватерного ускорения, например, «OSIRIS» ([3]), «VORPAL» ([4]) или «VLPL» ([5]).

С помощью некоторых упрощений, в частности, квазистатического приближения, о котором будет подробно сказано в следующем разделе, можно реализовать компьютерный код, который будет работать быстрее, в сравнении с PIC-кодами. В ИЯФ СО РАН разработан код LCODE, который уже много лет применяется для моделирования и исследования пучково-плазменных взаимодействий с очень высокой точностью получаемого численного решения. В этом заключается его серьёзное преимущество в сравнении с другими квазистатическими кодами, например, «Wake» ([6]) или «QuickPIC» ([7]), в которых, однако, реализована модель лазерного драйвера. Данная работа посвящена реализации квазистатической модели лазерного импульса в качестве функционального блока программы LCODE.

# 1. Лазерный импульс как драйвер для плазменного кильватерного ускорения

Еще в 1979 году в работе [2] было высказано предположение, что короткий лазерный импульс можно использовать как драйвер для плазменного кильватерного ускорения. Электромагнитное поле лазерного импульса должно за счет пондеромоторной силы расталкивать лёгкие электроны на оси движения, тем самым создавая кильватерную волну. К сожалению, в то время еще не была изобретена технология создания коротких и мощных лазерных импульсов. Технология усиления чирпированных импульсов (Chirped Pulse Amplification — CPA), совершившая прорыв в лазерной физике по получению коротких тераваттных лазерных импульсов, была предложена только в 1985 году [8].

## 1.1 Пондеромоторная сила

Пондеромоторная сила возникает только в неоднородной электромагнитной волне и по-другому еще называется силой высокочастотного давления или силой Миллера ([9]). Появление этой силы легко понять по следующим соображениям.

Попавшая в плоскую электромагнитную волну заряженная частица под действием электрического поля в первом приближении (без учета силы Лоренца от магнитного поля) будет совершать колебания. Поскольку в каждой точке плоскости одинаковой фазы величина электрического поля одинакова, после каждого периода волны заряженная частица возвращается в ту же самую начальную точку (рис.2). Усредненная за период волны сила, действующая на заряженную частицу, в этом случае равна нулю.

Если же волна неоднородна в пространстве, как, например, лазерный импульс, который локализован в пространстве, то заряженная частица после каждого периода электромагнитной волны будет возвращаться не в ту же самую начальную точку, а всё в более удаленную от оси точку (поле волны максимально на оси движения и радиально спадает). Получается, что, совершая колебания, частица будет постепенно выталкивать-



ся в область меньшего по величине электрического поля, что изображено на рис.3. В этом случае, сила, усредненная за период электромагнитной волны, не равна нулю.

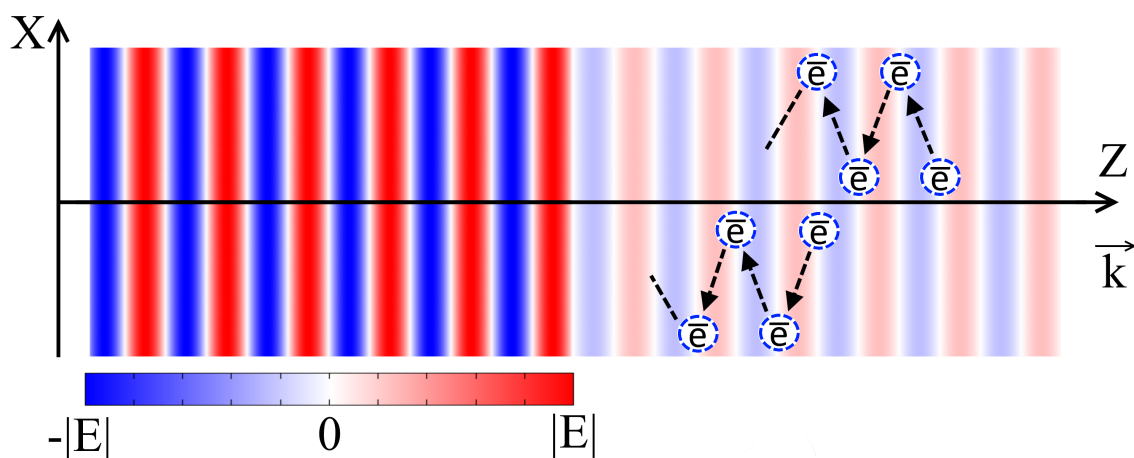


Рис. 2: Движение заряженной частицы в плоской электромагнитной волне. Изображение движется направо со скоростью света.

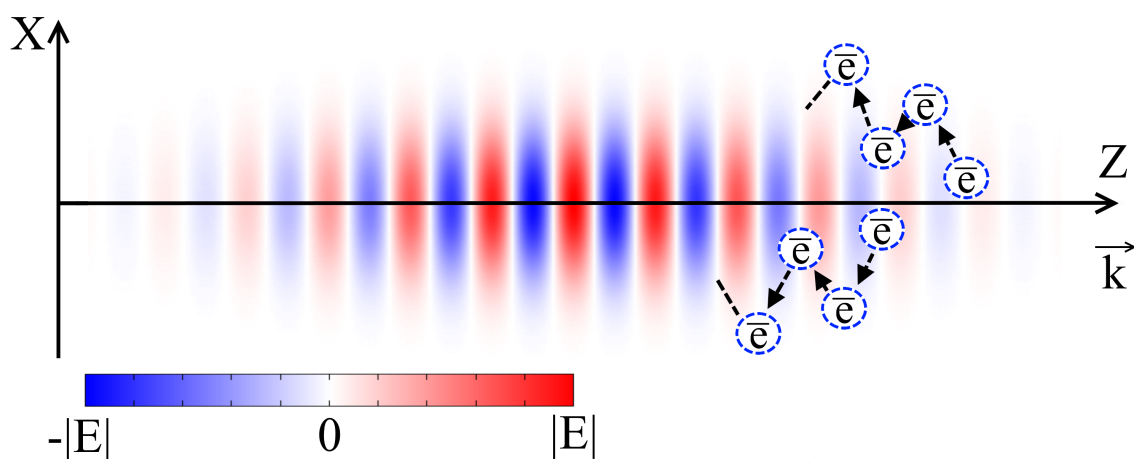


Рис. 3: Движение заряженной частицы в электромагнитном поле лазерного импульса. Электрическое поле волны  $E \sim e^{-x^2}$ . Изображение движется направо со скоростью света.

В первом приближении из уравнения движения заряженной частицы  $q$  с массой  $m$  в поле неоднородной электромагнитной волны

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}(\vec{r}, t) + q \left[ \frac{\vec{r}}{c} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \quad (1)$$

можно исключить второе слагаемое по порядку малости, отвечающее за

силу Лоренца от магнитного поля. Решением получающегося уравнения

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2)$$

при начальной неподвижности частицы ( $v_0 = 0$ ) является выражение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 - q \frac{\vec{E}(\vec{r}_0, t)}{m\omega^2} = \vec{r}_0 - \vec{\delta r}, \quad (3)$$

где  $\omega$  — частота электромагнитной волны.

При действии на частицу необходимо учитывать электрическое поле в точке нахождения частицы, а не в начальной точке, поэтому электрическое поле в точке  $\vec{r}_0 - \vec{\delta r}$  представляется в виде

$$\vec{E}(\vec{r}_0 + \vec{\delta r}, t) = \vec{E}(\vec{r}_0, t) + (\vec{\delta r} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}_0, t). \quad (4)$$

Во втором приближении следует подставить в уравнение (1) решение (3):

$$m \left( \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{\delta r}} \right) = q\vec{E}(\vec{r}_0 + \vec{\delta r}, t) + q \left[ \frac{(\dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{\delta r}})}{c} \times \vec{B}(\vec{r}_0 + \vec{\delta r}, t) \right]. \quad (5)$$

С учетом разложения (4), а также отбрасывая слагаемые следующего порядка малости из магнитной составляющей силы, получается уравнение

$$m\ddot{\vec{r}}_0 = q \left( \vec{\delta r} \cdot \nabla \right) \vec{E} + \frac{q}{c} \left[ \dot{\vec{\delta r}} \times \vec{B} \right]. \quad (6)$$

Электрическое поле волны задается в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \left( \vec{E}_0(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} + c.c. \right), \quad (7)$$

где выражение  $\vec{k}\vec{r} - \omega t$  для удобства будет обозначено скалярным произведением «четырехвекторов»:  $\vec{\eta}\vec{\xi}$ . Тогда из уравнений Максвелла (закона индукции Фарадея)

$$\left[ \nabla \times \vec{E} \right] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8)$$

можно выразить магнитное поле волны в виде

$$\vec{B} = \frac{c}{i\omega} [\nabla \times \vec{E}] = \frac{c}{2\omega} \left( \frac{1}{i} [\nabla \times \vec{E}] \cdot e^{i\vec{\eta}\vec{\xi}} + [i\vec{k} \times \vec{E}_0] \cdot e^{i\vec{\eta}\vec{\xi}} + c.c. \right). \quad (9)$$

Скорость частицы  $\dot{\delta\vec{r}}$  при этом равна

$$\dot{\delta\vec{r}} = \frac{q}{2m\omega} \left( i\vec{E}_0 e^{i\vec{\eta}\vec{\xi}} + c.c. \right). \quad (10)$$

После подстановки выражений (7),(9),(10) в уравнение (6) и усреднения по времени получается значение пондеромоторной силы

$$\vec{F}_p = \langle m\ddot{\delta\vec{r}} \rangle = -\frac{q^2}{4m\omega^2} \nabla |E_0|^2, \quad (11)$$

которая на частицы любого знака заряда действует одинаково: выталкивает их из области сильного электрического поля.

## 1.2 Уравнение эволюции лазерного импульса

Лазер-плазменные взаимодействия не сводятся только к возникновению пондеромоторной силы от электромагнитной волны лазерного импульса, которая влияет на плазму, создавая в ней кильватерные волны (следовательно, создавая некоторый профиль плотности плазмы). Сам импульс тоже изменяется определенным образом из-за распространения в среде.

Задачи кильватерного ускорения удобнее рассматривать в системе отсчета, которая движется со скоростью драйвера (в ультрарелятивистском приближении — со скоростью света). В такой сопутствующей системе отсчета для лазерного импульса можно ввести упрощение, которое называется квазистатическим приближением. Оно основывается на идее, что характерное время изменения формы лазерного импульса намного больше периода плазменной волны. Если плазменная частота равна  $\omega_p$  ( $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_e}$ , где  $n_0$  — плотность плазмы,  $e$  и  $m_e$  — заряд и масса электрона), а частота лазерного импульса равна  $\omega_0$ , то малый параметр, характеризующий данное приближение, равен  $\epsilon = \omega_p / \omega_0$ .

Использование такого упрощения оправданно, поскольку частоты ис-

пользуемых в экспериментах по кильватерному ускорению лазеров обычно больше плазменной частоты. Это позволяет представить поперечную составляющую вектор-потенциала лазерного импульса  $\hat{A}_\perp$ , которая характеризует электрическое поле, входящее в выражение (11) на ponderomotorную силу, в виде произведения медленно изменяющейся огибающей функции  $A_\perp$  на быстро осциллирующую фазу

$$\hat{A}_\perp(\xi, x_\perp, t) = A_\perp(\xi, x_\perp, t) \exp(ik_0\xi) + c.c., \quad (12)$$

где введена продольная координата  $\xi = z - ct$ , если  $z$  — ось распространения лазерного импульса.

С учётом этих приближений непосредственно из уравнений Максвелла можно вывести уравнение эволюции лазерного импульса, впервые полученное в работе [6] в 1996 году:

$$\left[ \frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( ik_0 + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_\perp^2} \right] A_\perp(\xi, x_\perp, t) = k_p^2 \frac{\bar{n}}{n_0 \bar{\gamma}} A_\perp(\xi, x_\perp, t), \quad (13)$$

где  $k_0 = \omega_0/c$  — волновое число лазерного импульса,  $k_p = \omega_p/c$  — волновое число плазменной волны,  $\bar{n}$  — плотность плазмы, усредненная по периоду лазерного импульса, а  $\bar{\gamma}$  — гамма-фактор электронов плазмы, тоже усредненный по периоду лазерного импульса и равный

$$\bar{\gamma} = \sqrt{1 + \frac{1}{m_e^2 c^2} \left( |\vec{p}|^2 + \left| \frac{e}{c} A_\perp \right|^2 \right)}. \quad (14)$$

Данная задача позволяет проводить масштабирование величин по плазменным параметрам  $\omega_p$  и  $k_p$ , поэтому уравнение (13) можно записать в безразмерных переменных, измеряя координаты в единицах  $k_p^{-1}$ , а времена — в единицах  $\omega_p^{-1}$ . Соответственно, под  $k_0$  теперь подразумевается отношение волновых чисел лазерного импульса и плазменной волны ( $k_0/k_p$ ), а  $\hat{n}$  характеризует возмущение плотности плазмы ( $\bar{n}/n_0$ ). Для удобства в дальнейшем будет опущен символ  $\perp$ . Уравнение (13) в таких безразмерных величинах записывается в виде

$$2ik_0 \frac{\partial A(\xi, x, t)}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial A(\xi, x, t)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 A(\xi, x, t)}{\partial x^2} = \frac{\hat{n}}{\bar{\gamma}} A(\xi, x, t). \quad (15)$$

В результате такого обезразмеривания плотность невозмущенной плазмы перестает входить в уравнение в явном виде, поскольку все параметры пересчитываются в величинах  $\omega_p$  и  $k_p$ . Другими словами, каждому набору безразмерных параметров отвечает множество вариантов с разными плотностями невозмущенной плазмы.

Каждое слагаемое уравнения (15) определенным образом характеризует эволюцию лазерного импульса. Первые две слагаемых отвечают за распространение лазерного импульса, третье слагаемое описывает поперечную расходимость лазерного импульса за счёт дифракционного расплывания в среде, а в правой части уравнения (15) содержится отклик плазмы.

Таким образом, непосредственная задача, которой посвящена данная работа, — создание алгоритма численного решения этого уравнения, который должен быть реализован в виде функционального блока программы LCODE.

Значения плотности плазмы и импульсов электронов плазмы с очень хорошей точностью рассчитываются в основной программе LCODE и передаются в программу, которая численно решает уравнение эволюции лазерного импульса (15). Через амплитуду вектор-потенциала проэволюционировавшего на один шаг по времени лазерного импульса вычисляется «лазерная» добавка к электромагнитным полям плазмы, которая передается обратно в LCODE для расчета движения частиц в результирующих полях на следующем шаге по времени.

## 2. Численная реализация модели

### 2.1 Постановка задачи

В данный момент программа LCODE позволяет моделировать только двумерные задачи (одна продольная координата и одна поперечная), поэтому численная квазистатическая модель лазерного импульса тоже создана для двумерного случая. При этом следует отметить, что алгоритм численного решения, описываемый в этой работе, достаточно легко расширяется на трехмерный случай, о чем будет более подробно сказано ниже.

Лапласиан в третьем слагаемом уравнения (15) для двумерной геометрии можно расписать как в декартовой системе координат, полагая зависимость величин только от одной поперечной координаты  $x$ , так и в цилиндрической системе координат с поперечной координатой  $r$ , рассматривая, своего рода, сечение цилиндрической области при полярном угле  $\phi = 0$ .

Для построения численного решения счётная область разбивается сеткой по пространственным координатам (рис.4).

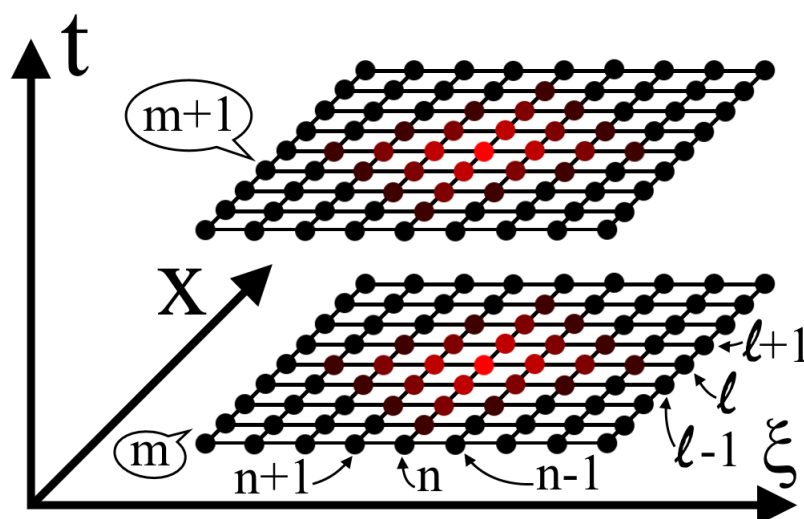


Рис. 4: Сеточное разбиение пространства

Шаг сетки по продольной координате  $\xi$  обозначается буквой  $h$ , номер узла сетки в продольном направлении — индексом  $n$ , а совокупность узлов с одинаковым индексом  $n$  будет называться столбцом. В поперечном направлении узлы обозначаются индексом  $l$ , а шаг по поперечной

координате —  $g$ . Такое сеточное разбиение создается на каждый момент времени, и в дальнейшем будет называться слоем. Номер слоя обозначается индексом  $m$ , а шаг по времени —  $\tau$ .

Вектор-потенциал лазерного импульса представляется в виде суммы действительной и мнимой частей

$$A(\xi, x, t) = \Re A(\xi, x, t) + i \Im A(\xi, x, t). \quad (16)$$

Как было отмечено в работе [10], такой способ наиболее просто позволяет расписать разностную схему для уравнения (15), поскольку представление «модуль/фаза»

$$A(\xi, x, t) = a(\xi, x, t) \cdot e^{i\phi(\xi, x, t)} \quad (17)$$

дает произведение производных от разных функций во втором и третьем слагаемых уравнения (15). Таким образом, в каждом узле сетки (рис.4) содержатся два числа: значения действительной и мнимой частей искомого вектор-потенциала лазерного импульса.

В уравнении (15) имеются две основные проблемы для создания численного алгоритма. В первую очередь, нелинейность, которая заложена в усредненном гамма-факторе электронов плазмы (14) в правой части. По этой причине использование быстрого преобразования Фурье для построения численного решения было отвергнуто, поскольку выполнение прямого и обратного преобразования Фурье на каждый момент времени в каждой точке сетки могло серьезно замедлить вычислительный процесс и лишить LCDOE его серьезного преимущества перед другими кодами — быстродействия. Поэтому, в конечном счете, предпочтение было отдано именно методу конечных разностей.

Второй проблемой является смешанная производная по времени и продольной координате  $\xi$  во втором слагаемом уравнения (15). Такая комбинация приводит к неявной схеме по продольной координате  $\xi$ , ведь придется вычислять продольную производную и на известном слое по времени, и на неизвестном. В то же время, в работе [10] было отмечено, что простые разностные схемы для продольной производной (правая, левая или симметричная) дают неустойчивые численные решения.

## 2.2 Алгоритм численного решения

Для производной по времени используется обычная правая разностная схема

$$\frac{\partial A(\xi_n, x_l, t_m)}{\partial t} = \frac{A_{n,l}^{m+1} - A_{n,l}^m}{\tau}. \quad (18)$$

Для выбора разностных схем остальных производных требуется использование не только чисто математических формулировок, но и физических идей.

Прежде всего, это специальная теория относительности, согласно которой передача информации из одной точки в другую не может происходить быстрее скорости света. Поскольку эволюция лазерного импульса рассматривается в системе отсчета, движущейся со скоростью света, то тогда вполне логично ожидать, что значение какой-либо функции в некоторой точке зависит только от значений в точках, которые находятся «перед» ней, а не «после» неё (рис.5).

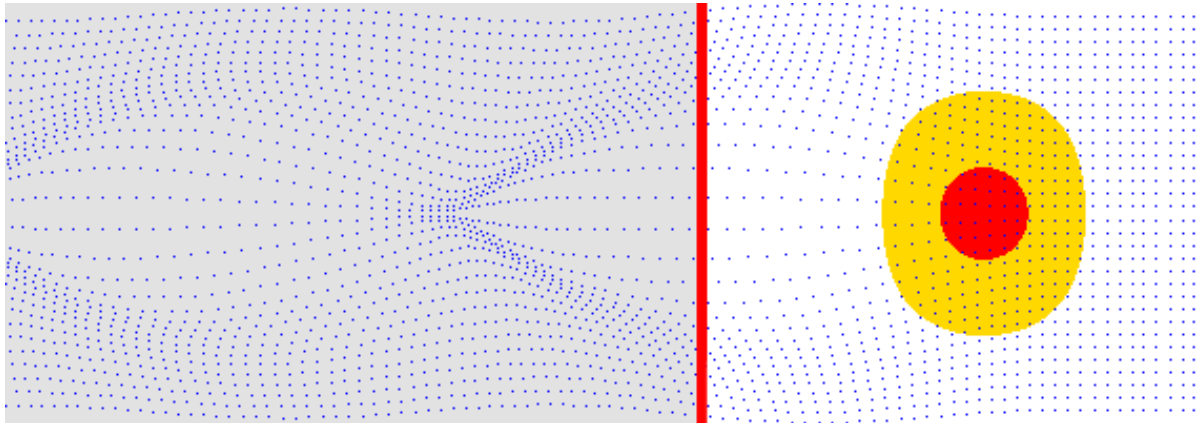


Рис. 5: Окно движется в системе отсчета лазерного импульса со скоростью света слева направо. На физические величины, расположенные на красной линии, могут влиять только процессы, происходящие справа от нее (впереди по ходу движения окна), но никак не процессы, которые происходят уже позади линии, ведь информация не может передаваться быстрее скорости света.

Таким образом, эта идея накладывает ограничение на разностные схемы для производной по продольной координате  $\xi$ : «физическими» являются только односторонние разностные схемы. В частности, для алго-



ритма, которому посвящен этот раздел, была выбрана разностная схема

$$\frac{\partial A(\xi_n, x_l, t_m)}{\partial \xi} = \frac{-3A_{n,l}^m + 4A_{n-1,l}^m - A_{n-2,l}^m}{2h}. \quad (19)$$

Из этого же ограничения следует, что перед лазерным импульсом плазма всегда невозмущенная. Тогда в самом начале счётного окна можно задать граничное условие: вектор-потенциал лазерного импульса тождественно равен нулю, а плазма с заданной постоянной плотностью является невозмущенной. Тогда разностная схема, получаемая с помощью формулы (19), преобразуется в явную схему, поскольку первые две точки можно задать известными (например, они находятся там, где точно нет лазерного импульса — первые два столбца сетки), и тогда одна точка на новом слое по времени вычисляется по семи известным точкам (рис.6).

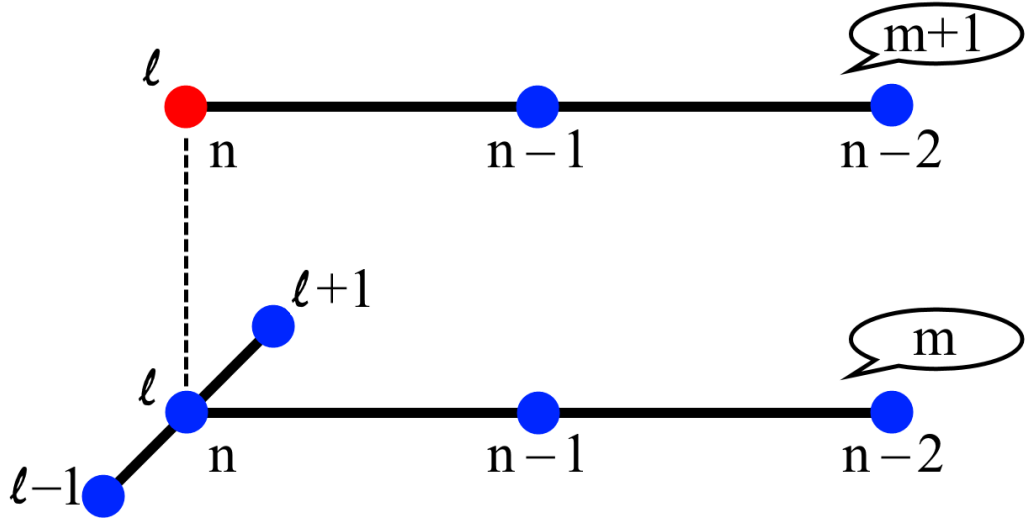


Рис. 6: Явная разностная схема. Неизвестное значение искомой функции в одной точке (красный узел сетки) вычисляется по известным значениям в семи точках (синие узлы сетки).

Как известно, явные схемы просты для численных расчетов, но устойчиво работают только в определенной области параметров.

Если теперь в уравнении (15) расписать поперечный лапласиан (например, для декартовой системы координат) по схеме Кранка-Николсона

$$\frac{\partial^2 A(\xi_n, x_l, t_m)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{A_{n,l-1}^m - 2A_{n,l}^m + A_{n,l+1}^m}{g^2} + \frac{1}{2} \frac{A_{n,l-1}^{m+1} - 2A_{n,l}^{m+1} + A_{n,l+1}^{m+1}}{g^2}, \quad (20)$$

то можно получить неявную схему, которая очень похожа на аналогичную схему уравнения теплопроводности. Теперь три точки на новом слое по времени вычисляются по семи точкам с предыдущего известного слоя (рис.7).

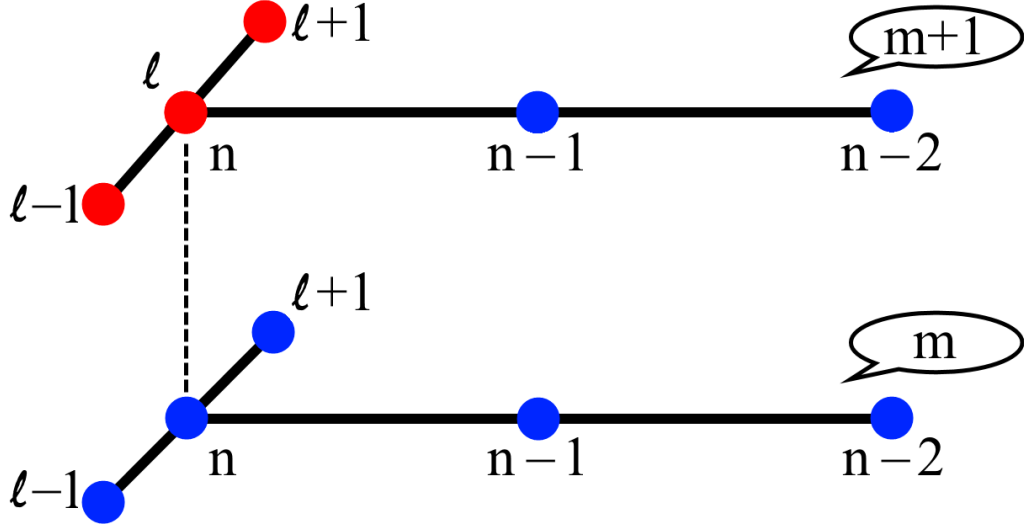


Рис. 7: Неявная разностная схема. Вычисление неизвестных значений искомой функции в трех точках (красные узлы сетки) производится по известным значениям в семи точках (синие узлы сетки).

Если каждый столбец сетки, представленной на рис.4, состоит из  $Nl$  узлов, то такая неявная схема приводит к системе из  $Nl - 2$  уравнений. Для существования единственного решения системы требуются еще два уравнения, которые можно получить из граничных условий на верхней и нижней границах счѐтного окна

$$a_{l-1}A_{n,l-1}^{m+1} + c_l A_{n,l}^{m+1} + b_{l+1}A_{n,l+1}^{m+1} = RHS_l(A^m), \quad (21)$$

с коэффициентами  $a_l, b_l, c_l$ , которые равны

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{1}{2g^2}, \\ b_l &= \frac{1}{2g^2}, \\ c_l &= -\frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} - \frac{1}{g^2} + i\frac{2k_0}{\tau}, \end{aligned}$$

а правая часть  $RHS_l(A^m)$  является комплексным выражением, которое полностью приведено в приложении 1.

Решается получаемая система уравнений методом комплексной прогонки, который описан в работе [10] (для данной задачи метод подробно расписан в приложении 1). Матрица системы уравнений является трехдиагональной, с коэффициентами  $c_l$  на центральной диагонали. Как известно, достаточным условием для устойчивости метода прогонки является диагональное преобладание матрицы

$$|c_l| \geq |a_l| + |b_l|. \quad (22)$$

При работе с комплексными функциями следует отдельно рассматривать это условие для действительной и мнимой частей матрицы. В данном случае эти условия выражаются в виде

$$\frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} + \frac{3}{h\tau} \geq 0, \quad (23)$$

$$\frac{2k_0}{\tau} \geq 0, \quad (24)$$

что верно всегда, независимо от параметров сетки, плазмы или лазерного импульса. Следовательно, алгоритм является абсолютно устойчивым.

Кроме того, следует сразу упомянуть про возможную реализацию алгоритма в трехмерной геометрии. Точно так же по схеме Кранка-Николсона можно расписать вторую производную по второй поперечной координате, входящую в лапласиан в третьем слагаемом уравнения (15). После этого можно применить метод прогонки по двум перпендикулярным направлениям, когда сначала прогонкой по одной координате вычисляется промежуточный слой  $[m + \frac{1}{2}]$  по данным с известного слоя  $[m]$ , а затем прогонкой по второй координате вычисляется новый слой  $[m + 1]$  по данным с известного слоя  $[m]$  и промежуточного слоя  $[m + \frac{1}{2}]$ . Поскольку обе поперечные координаты равноценны между собой, следует ожидать, что свойство абсолютной устойчивости численного алгоритма сохранится и в трехмерном случае.

Другой важной характеристикой алгоритма, помимо устойчивости, является порядок аппроксимации, который характеризует зависимость ошибки численного решения от величины шага сетки. Предположим, что численное решение  $A$  отличается от точного решения  $A^*$  на некоторую

величину, зависящую от величины шага  $h$ , и выражается в виде

$$A(h) = A^* + C_1 h^p + o(\dots), \quad (25)$$

где  $C_1$  — некоторый коэффициент, а  $p$  — порядок аппроксимации. Соответственно, численное решение при других шагах равно

$$A(h/2) = A^* + C_1 h^p 2^{-p} + o(\dots), \quad (26)$$

$$A(h/4) = A^* + C_1 h^p 2^{-2p} + o(\dots). \quad (27)$$

Теперь, обозначив через  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  разности

$$\epsilon_1 = A(h) - A(h/2) = C_1 h^p (1 - 2^{-p}), \quad (28)$$

$$\epsilon_2 = A(h/2) - A(h/4) = C_1 h^p 2^{-p} (1 - 2^{-p}), \quad (29)$$

можно получить отношение

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{C_1 h^p (1 - 2^{-p})}{C_1 h^p 2^{-p} (1 - 2^{-p})} = 2^p, \quad (30)$$

откуда порядок аппроксимации  $p$  выражается как

$$p = \log_2 |\epsilon_1| - \log_2 |\epsilon_2|. \quad (31)$$

Таким образом, для определения порядка аппроксимации достаточно получить три численных решения с соответствующими величинами шагов и проделать вышеуказанные вычисления. Такая проверка подтвердила, что созданный алгоритм имеет второй порядок аппроксимации по поперечной координате  $x$  и третий порядок по продольной координате  $\xi$ , что соответствует разностным схемам, по которым расписаны соответствующие производные. Однако расчеты для шага по времени показали, что алгоритм имеет второй порядок точности по времени, хотя использовалась простая правая разностная схема, которая имеет первый порядок аппроксимации. Для проверки были построены графики зависимости величины  $\epsilon$ , которая характеризует ошибку численного решения, от величины шагов в логарифмическом масштабе, а экспериментально полученные точки наложены на степенные кривые (рис.8, 9 и 10).

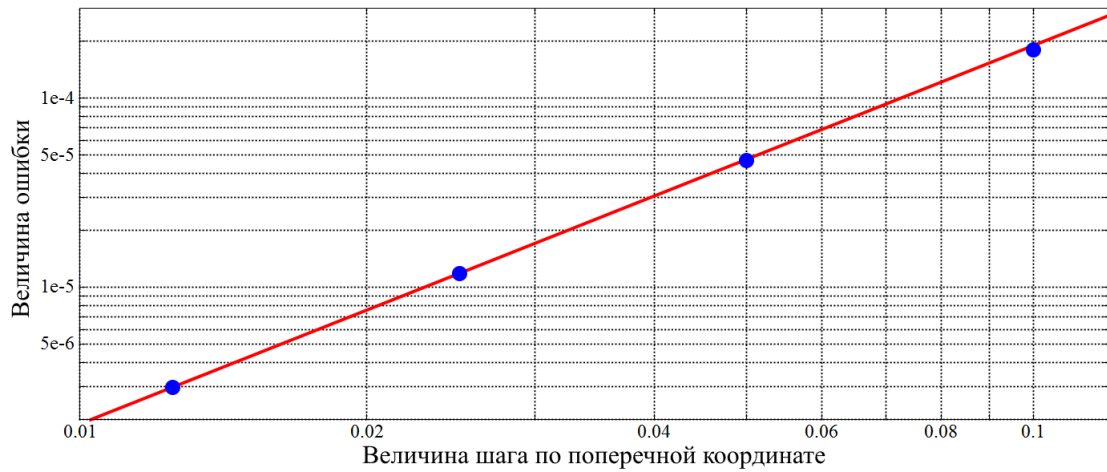


Рис. 8: Зависимость ошибки от величины шага по поперечной координате  $x$ . Красная линия соответствует  $g^2$ .

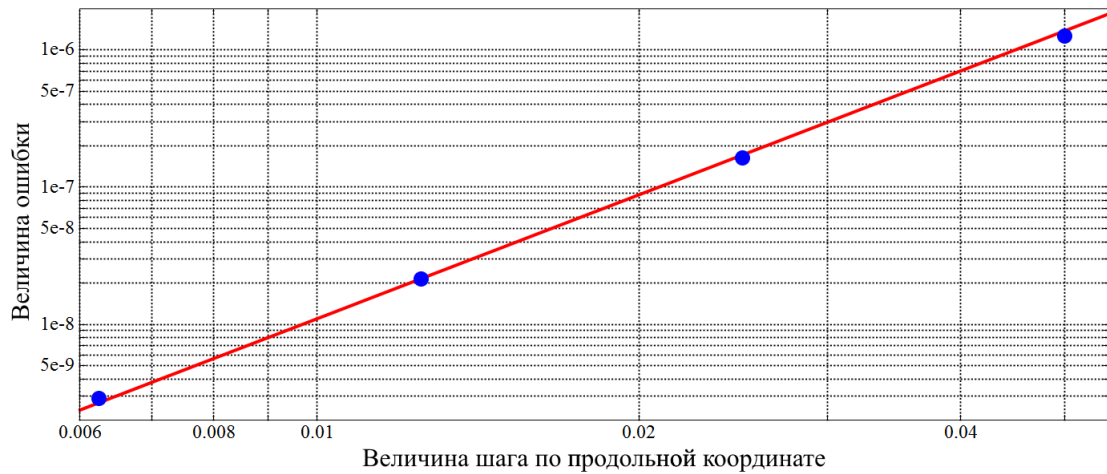


Рис. 9: Зависимость ошибки от величины шага по продольной координате  $\xi$ . Красная линия соответствует  $h^3$ .

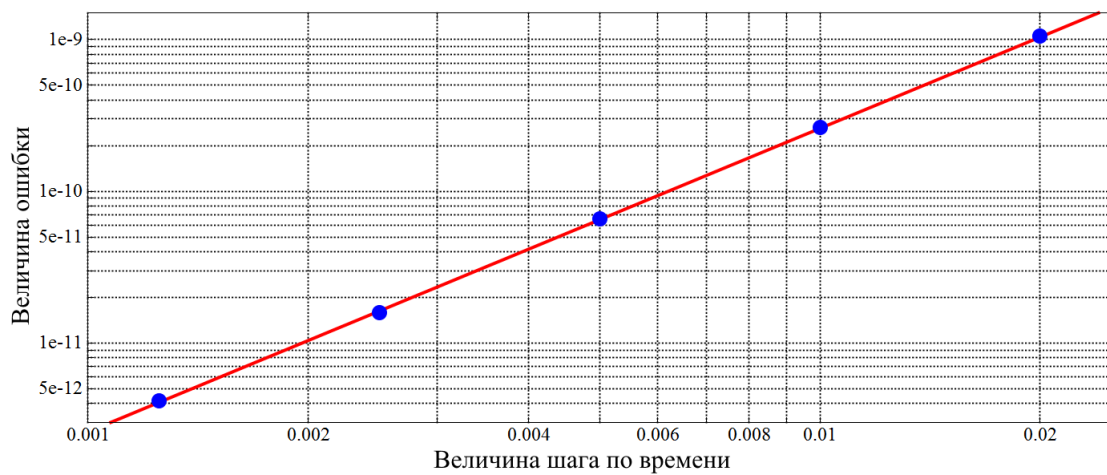


Рис. 10: Зависимость ошибки от величины шага по времени  $t$ . Красная линия соответствует  $\tau^2$ .

Еще одним достоинством полученной численной схемы является возможность распараллеливания вычислений. Как видно из рис.7, для вычисления одного столбца  $[n]$  сетки на новом слое  $[m + 1]$  методом комплексной прогонки (трех точек) требуются значения вектор-потенциала из двух предыдущих столбцов —  $[n - 1]$  и  $[n - 2]$  (две точки), а также значения с трех столбцов ( $[n]$ ,  $[n - 1]$  и  $[n - 2]$ ) с предыдущего слоя по времени  $[m]$  (пять точек). Это означает, что после вычисления уже одного столбца  $[n]$  с нового слоя  $[m + 1]$  можно вычислять не только столбец  $[n + 1]$  со слоя  $[m + 1]$ , но и столбец  $[n]$  со слоя  $[m + 2]$ . Графически этот процесс распараллеливания представлен на рис.11.

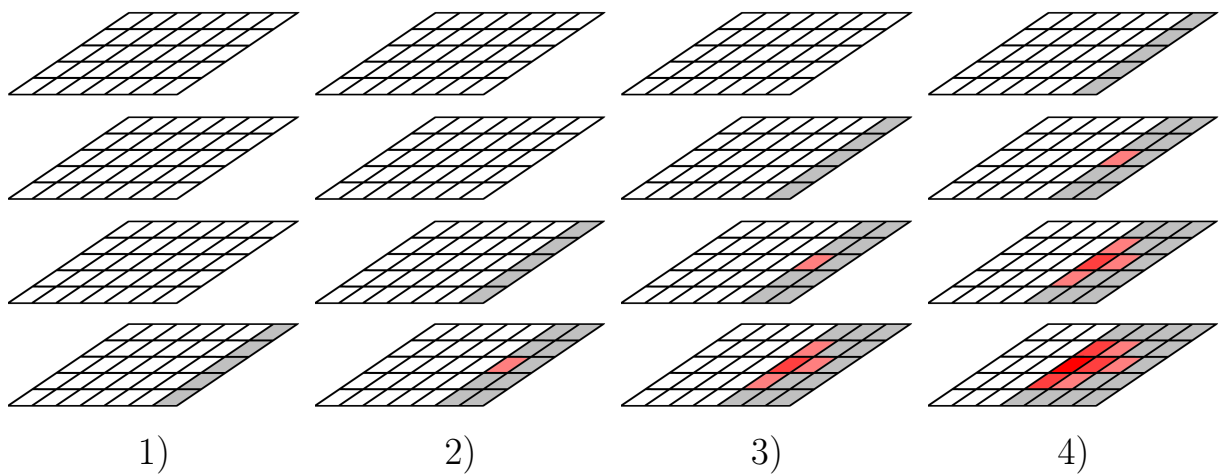


Рис. 11: Параллельное вычисление столбцов на разных слоях по времени. Разными цветами схематично представлены значения вычисляемого вектор-потенциала лазерного импульса с гауссовым профилем. Первая итерация алгоритма вычисляет значения неизвестной функции на первом столбце первого слоя. На второй итерации могут параллельно проводиться вычисления уже на двух слоях, на следующей итерации — уже на трех слоях и т.д.

## 2.3 Граничные условия

За счет дифракционного расплывания импульс рано или поздно достигнет границ счетной области, поэтому требуется задавать корректные граничные условия. Если в моделируемой задаче имеется ограничение на ширину окна, например, радиус металлической секции экспериментальной установки, в которой удерживается плазма, то и граничные условия должны вести себя как поверхность металла, то есть быть отражающими. Для искомой поперечной компоненты вектор-потенциала лазерного импульса такому граничному условию отвечает равенство нулю первой производной по поперечной координате

$$\left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{\text{boundary}} = 0. \quad (32)$$

При моделировании такого отражения лазерного импульса от металлических стенок возникает подобие интерференции (рис.12).

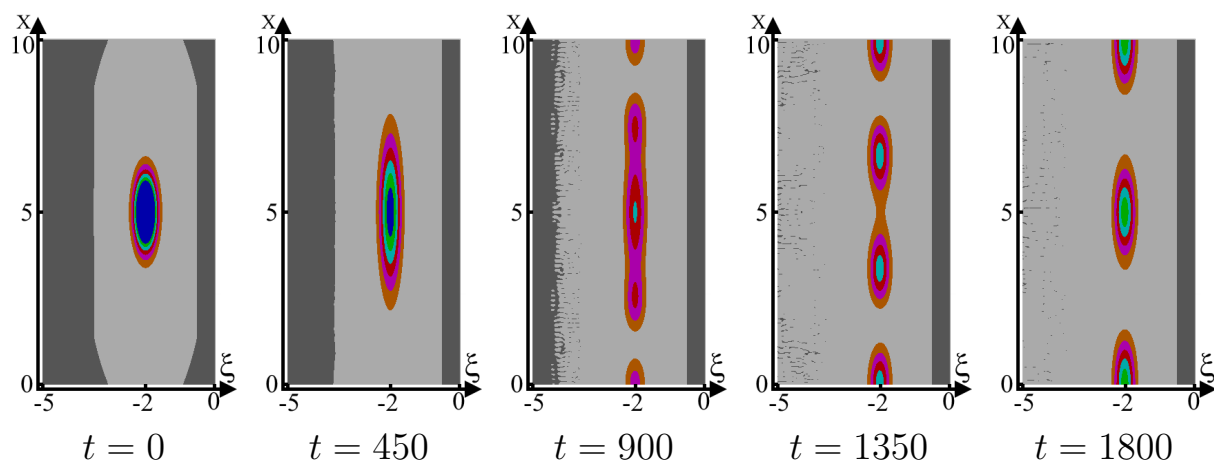


Рис. 12: «Интерференция» лазерного импульса за счет отражающих стенок в декартовой геометрии. Волновое число моделируемого гауссова лазерного импульса  $k_0 = 250$ . Окно летит вместе с лазерным импульсом направо со скоростью света. Отражающие стенки — верхняя и нижняя границы окна.

Возникновение этой интерференционной картины можно понять с помощью рис.13. В каждой точке требуется учитывать помимо прямой «волны» также и отраженную «волну». Условие на интерференционные

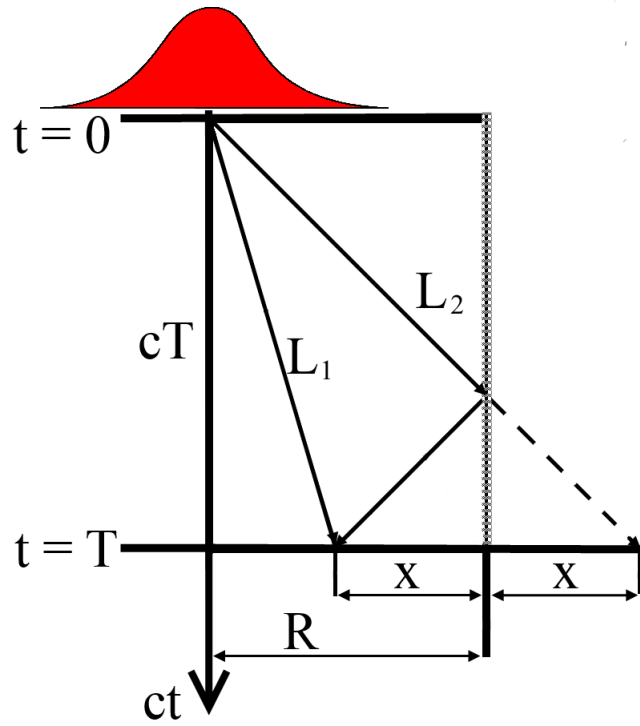


Рис. 13: К пояснению возникновения «интерференции».

максимумы и минимумы можно получить из разности хода этих «волн»

$$\Delta = L_2 - L_1 = \sqrt{(cT)^2 + (R + x)^2} - \sqrt{(cT)^2 + (R - x)^2}. \quad (33)$$

В случае, изображенном на рис.12, расстояние от оси до стенки  $R = 5$ , а эффект наблюдается на временах  $cT = 900$ , поэтому величины  $L_1$  и  $L_2$  можно разложить:

$$L_1 = cT \sqrt{1 + \frac{(R - x)^2}{(cT)^2}} \approx cT \left( 1 + \frac{(R - x)^2}{2(cT)^2} \right), \quad (34)$$

$$L_2 = cT \sqrt{1 + \frac{(R + x)^2}{(cT)^2}} \approx cT \left( 1 + \frac{(R + x)^2}{2(cT)^2} \right), \quad (35)$$

откуда разность хода получается равной

$$\Delta = \frac{1}{2cT} ((R + x)^2 - (R - x)^2) = \frac{2Rx}{cT}. \quad (36)$$

Интерференционные максимумы будут наблюдаться в точках, в которых приходящие волны синфазны. Для этого разность хода  $\Delta$  должна быть



кратна длине волны  $\lambda_0$ :

$$\Delta = \pm m \lambda_0 = \pm m \frac{2\pi}{k_0}, \quad (37)$$

где  $m$  — целое число. Соответственно, для интерференционного минимума волны должны приходить в точку в противофазе, то есть разность хода  $\Delta$  должна быть кратна нечётному числу половин длин волн:

$$\Delta = \pm(2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} = \pm(2m + 1) \frac{\pi}{k_0}. \quad (38)$$

Из соотношений (37) и (38) с учетом (36) можно выразить положение максимумов/минимумов (все переменные записаны в безразмерных величинах)

$$x_{max} = m \frac{\pi T}{k_0 R}, \quad (39)$$

$$x_{min} = (2m + 1) \frac{\pi T}{k_0 2R}. \quad (40)$$

Измерение положений на больших временах осложняется тем, что максимумы и минимумы высоких порядков начинают накладываться друг на друга, создавая более сложную картину. В качестве примера проверки этой теории смоделировано расплывание гауссова лазерного импульса с  $k_0 = 250$ . Расстояние от оси движения до отражающих стенок  $R = 5$ , шаг сетки выбран  $h = g = 0.02$ . На рис.14 отмечены положения интерференционного минимума первого порядка, измеренные по численному решению, в зависимости от времени. Точность измерения положения определяется шагом сетки.

Несмотря на то, что подобное отражение — вполне физическое явление, в некоторых задачах моделирования оно будет нежелательным эффектом, например, если особый интерес представляет именно центральная часть импульса (где интенсивность выше, чем на краях). В этом случае придется увеличивать ширину счётного окна, что, конечно же, увеличит число узлов вычислительной сетки для сохранения той же точности, следовательно, замедлит алгоритм. Другой вариант решения проблемы — использование поглощающих граничных условий, то есть создание приграничной области, в которой численное решение бу-

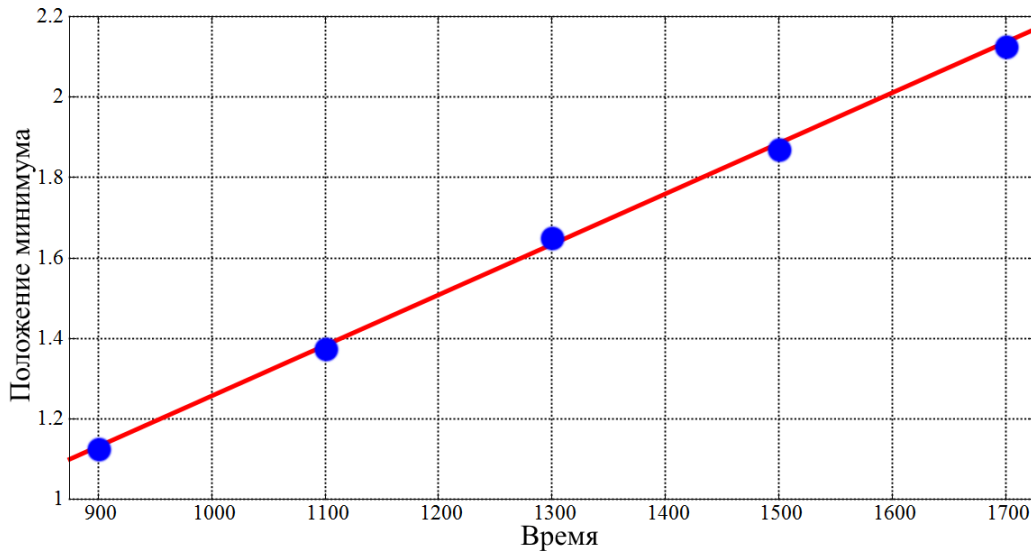


Рис. 14: Зависимость положения интерференционного минимума (отсчёт идёт от границы) первого порядка от времени. Синие точки соответствуют численному решению, красная линия — теоретическая зависимость (формула 40).

дет быстро затухать, не влияя на центральную часть.

Описанный в начале данного раздела эффективный алгоритм численного решения уравнения (15) был найден не сразу, до этого предполагались другие различные попытки нахождения устойчивого численного решения. Во многих случаях от границ начинали отражаться численные шумы, что приводило к неустойчивости. В связи с этим потребовалось создание поглощающих граничных условий, которые при этом не сильно бы замедляли быстродействие алгоритма.

Решение было создано на основе идеи метода «идеально согласованных слоев» (PML — Perfectly Matched Layers, [11]). Этот метод сейчас широко используется при численном решении уравнений Максвелла и обеспечивает очень хорошее поглощение в приграничных областях, хоть он и достаточно сложен в реализации. Суть идеи сводится к созданию приграничной области, в которой производные по пространственным координатам дополняются искусственно введенным поглощением  $\sigma(x)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1 + i \frac{\sigma(x)}{\omega}}. \quad (41)$$

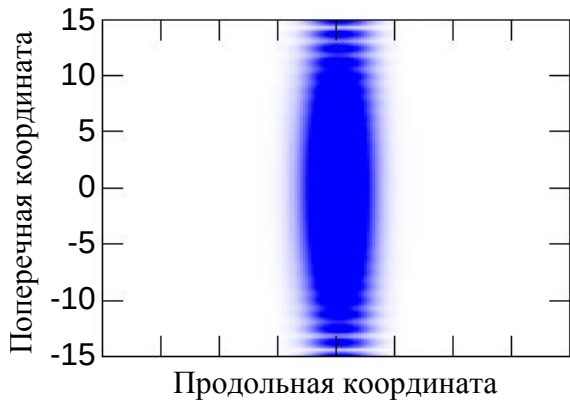
Для уравнения эволюции лазерного импульса (15) поглощение в среде можно создать гораздо проще: в отклик плазмы, находящийся в правой

части уравнения, добавляется мнимое слагаемое, которое определенным образом зависит от координат

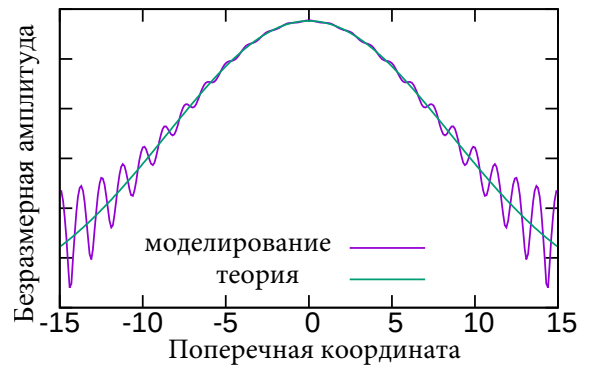
$$2ik_0 \frac{\partial A}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \left( \frac{\bar{n}}{\bar{\gamma}} + i\epsilon(\xi, x) \right) A. \quad (42)$$

Такое измененное уравнение решается только в приграничных областях, в центральной же части счётной области решается основное неизмененное уравнение (15).

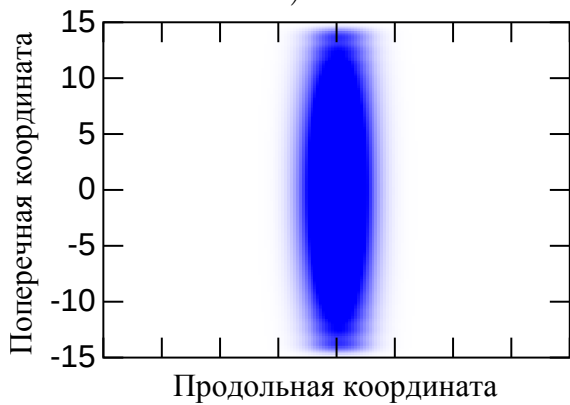
Результаты тестового моделирования лазерного импульса с начальным гауссовым профилем и  $k_0 = 250$  на сетке с  $h = g = 0.05$  представлены на рис.15. Использование обычных отражающих граничных условиях приводит к возникновению интерференционной картины, когда импульс, расплываясь со временем, достигает границ счётной области, что изображено на рис. 15а). Моделирование точно такого же лазерного импульса, но с поглощающими граничными условиями, изображено на рис. 15с). Графики 15b) и 15d) являются сечениями рисунков 15а) и 15с) по красным пунктирным линиям. Численное решение (фиолетовая линия) сравнивается с теоретическими (зеленая кривая), построенным на основе расплывания лазерного импульса в изотропной среде (подробнее об этой теории — в разделе 4.2 данной работы). Как видно, с применением поглощающих граничных условий численное решение в центральной части счётной области практически не искажается отражениями.



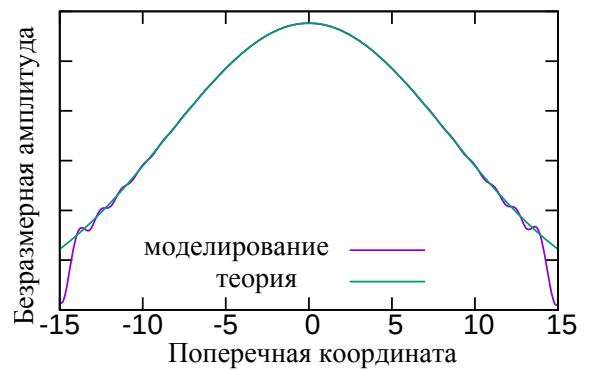
a)



b)



c)



d)

Рис. 15: Сравнение результатов обычного численного моделирования — a),b), и моделирования с поглощающими граничными условиями — c),d).

### 3. Анализ численного решения

Этот раздел посвящен анализу численного решения, получаемого с помощью описанного выше алгоритма.

В работе [10] был рассмотрен случай с постоянной величиной  $\tilde{C} = \bar{n}/\bar{\gamma}$  в правой части уравнения (15), то есть плотность плазмы считается постоянной (можно задать любой профиль плотности  $n(\xi, x)$ , но он будет постоянен во времени), нелинейность уравнения исключается из рассмотрения и усредненный гамма-фактор электронов плазмы тогда тоже постоянен. В такой постановке задачу можно решить с помощью преобразования Фурье. Сначала производится прямое преобразование Фурье по пространственным координатам, тогда получающееся из (15) уравнение на Фурье-образ искомой функции

$$2i(k_0 - k_\xi) \frac{\partial A(k_\xi, k_x, t)}{\partial t} = (\tilde{C} + k_x^2) A(k_\xi, k_x, t) \quad (43)$$

является обыкновенным дифференциальным уравнением. Сложности возникают при обратном преобразовании Фурье полученного решения: потребуется численное интегрирование для вычисления значения вектор-потенциала в каждой конкретной точке сетки. Поэтому такое решение можно назвать «полуаналитическим».

Поскольку теперь плотность плазмы  $\bar{n}$  и импульсы электронов плазмы вычисляются в программе LCODE и передаются в алгоритм для расчёта эволюции лазерного импульса, то можно рассматривать и нелинейность уравнения (15) (квадрат вектор-потенциала лазерного импульса входит в выражение для усредненного гамма-фактора электронов плазмы  $\bar{\gamma}$ ). В таком виде, однако, уравнение (15) не имеет аналитического решения, с которым можно сравнить получающееся численное решение.

В связи с этим необходимо было разработать контрольные тестовые задачи, по которым можно будет проверить, насколько корректным с точки зрения физики является численное решение уравнения эволюции лазерного импульса. Именно об этих тестах и пойдет речь далее.

### 3.1 Групповая скорость лазерного импульса

В среде с дисперсией локализованная электромагнитная волна будет двигаться с некоторой групповой скоростью (перенос энергии волной происходит именно с этой скоростью). Значение групповой скорости получается дифференцированием дисперсионного соотношения:

$$v_{group} = \frac{d\omega(k)}{dk}. \quad (44)$$

В случае однородной плазмы групповая скорость получается равной

$$v_{group} = \frac{d}{dk} \sqrt{k^2 c^2 + \omega_p^2} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2}}}, \quad (45)$$

В безразмерных величинах (в единицах скорости света) это выражение записывается следующим образом:

$$v_{group} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2}}}. \quad (46)$$

Поскольку эволюция лазерного импульса рассматривается в окне, которое движется со скоростью света, то проявление групповой скорости лазерного импульса при численном моделировании будет заключаться в постепенном смещении лазерного импульса к концу счётной области. Эта проверка алгоритма может показаться тривиальной, однако это важный тест при сравнении с PIC-кодами, в которых часто возникают проблемы при моделировании объектов, распространяющихся со скоростью света либо близкой к ней.

Величину групповой скорости при численном моделировании можно измерить по движению точки максимума амплитуды импульса — его центру. Как следует из формулы (46), с уменьшением безразмерного волнового числа  $k_0$  групповая скорость  $v_{group}$  будет тоже уменьшаться, то есть скорость движения импульса относительно счётного окна ( $c - v_{group}$ ) будет увеличиваться.

Ниже приведен расчет скорости смещения лазерного импульса (в еди-

ницах скорости света) для трех значений  $k_0$  (250, 100 и 50).

$$1 - v_{group} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{250^2}}} = 1 - 0.999992 = 8 \cdot 10^{-6},$$

$$1 - v_{group} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{100^2}}} = 1 - 0.99995 = 5 \cdot 10^{-5},$$

$$1 - v_{group} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{50^2}}} = 1 - 0.9998 = 2 \cdot 10^{-4}.$$

Как видно, в системе отсчета, движущейся со скоростью света, это очень малые величины. Какое-либо смещение с такими скоростями внутри счётного окна будет происходить очень медленно. Поэтому для измерения групповой скорости лазерного импульса по численному решению, требуется, во-первых, следить за эволюцией лазерного импульса на больших временах (чтобы он значительно сместился на сетке), во-вторых, создать сетку с очень мелким разбиением (с малыми величинами шагов  $h$  и  $g$  по пространственным координатам), чтобы точно фиксировать положение максимума вектор-потенциала.

Результаты моделирования лазерного импульса с гауссовым профилем и тремя разными значениями  $k_0$  в декартовой геометрии представлены на рис.16. Границы счётного окна были установлены далеко от оси движения, чтобы отражения от границ при дифракционном расплывании не возникали как можно дольше. На графиках отмечены положения максимума вектор-потенциала лазерного импульса в различные моменты времени. Угол наклона линейно аппроксимирующей кривой характеризует значение групповой скорости лазерного импульса.

Как видно, значение групповой скорости, определенное по численному решению, хорошо совпадает с теоретическими предположениями.

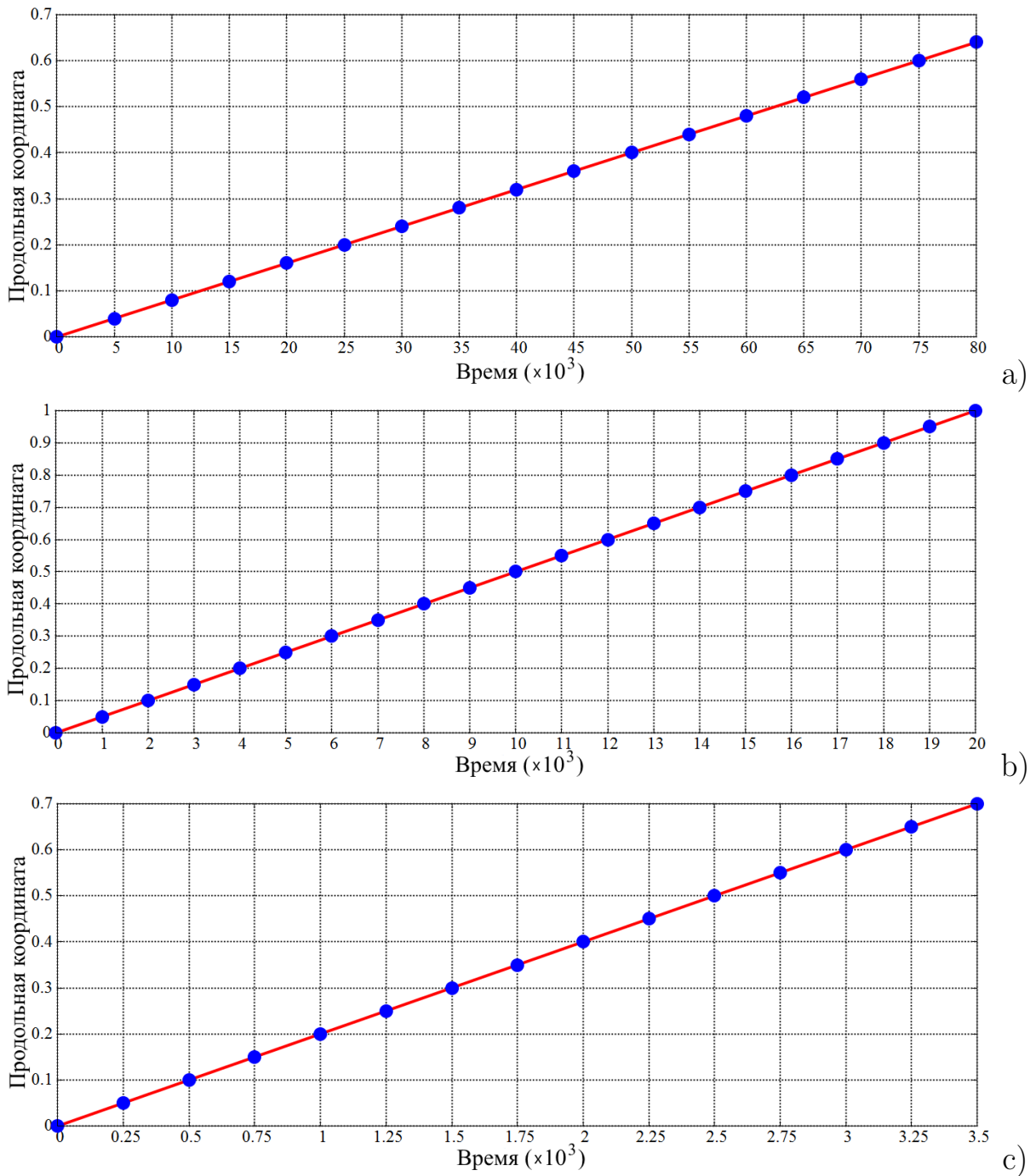


Рис. 16: График зависимости продольной координаты центра лазерного импульса от времени. Результаты численного моделирования отмечены синими точками, красная линия соответствует теоретически посчитанной скорости. а):  $k_0 = 250$ , б):  $k_0 = 100$  и в):  $k_0 = 50$ .



## 3.2 Поперечное расплывание лазерного импульса

С помощью классической электродинамики можно достаточно просто описать расплывание лазерного импульса. Из уравнений Максвелла, исключив заряды и токи, можно вывести волновое уравнение на каждую компоненту вектор-потенциала электромагнитной волны

$$\Delta A = \frac{\eta^2}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}, \quad (47)$$

где  $\eta$  - показатель преломления среды. В случае монохроматической волны временная зависимость содержится в  $e^{-i\omega t}$ , а уравнение (47) с введением волнового числа  $k = \eta \frac{\omega}{c}$  преобразуется в приведённое волновое уравнение Гельмгольца

$$\Delta A + k^2 A = 0. \quad (48)$$

Лазерный импульс, в отличие от плоской электромагнитной волны, в пространстве имеет неоднородное распределение интенсивности, поэтому решение уравнения (48) следует искать в виде

$$A = \phi(x, y, z) e^{ikz}. \quad (49)$$

Подстановка решения (49) в уравнение (48) приводит к уравнению

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \phi}{\partial z} - k^2 \phi \right) e^{ikz} + k^2 \phi e^{ikz} = 0. \quad (50)$$

Функция  $\phi(x, y, z)$  является медленно меняющейся, поэтому вторую производную по  $z$  можно отбросить по сравнению с первой производной, и тогда получается параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (51)$$

Решением этого уравнения является гауссов пучок

$$\phi = a \cdot e^{i(P + \frac{k}{2q} r^2)}, \quad (52)$$

где  $P$  — продольный фазовый сдвиг. Его действительная часть описы-

вает разницу фаз между гауссовым пучком и плоской волной, а мнимая часть характеризует уменьшение интенсивности на оси за счет расплывания. Параметр  $q$  связывает кривизну волнового фронта  $\chi$ , длину волны  $\lambda$  и радиус импульса  $w$  соотношением

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\chi} + i \frac{\lambda}{\pi w^2}. \quad (53)$$

Подстановка выражения (52) в уравнение (51) приводит к уравнению

$$2k \left( \frac{\partial P}{\partial z} + i \frac{1}{q} \right) + \frac{kr^2}{q} \left( 1 - \frac{\partial q}{\partial z} \right) = 0, \quad (54)$$

которое разбивается на два более простых уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 1, \quad (55)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -i \frac{1}{q}. \quad (56)$$

Из представления (53) и формы гауссова пучка (52) следует, что существует момент, при котором волновой фронт становится плоским ( $\chi \rightarrow \infty$ ), а радиус пучка  $w$  — минимальным. Этот минимальный радиус называется перетяжкой («beam waist») и обозначается  $w_0$ . От этого положения принято отсчитывают продольную координату  $z$ , поэтому решение уравнения (55) можно записать в виде

$$q = q_0 + z = \frac{\pi w_0^2}{i\lambda}. \quad (57)$$

Комбинация этого выражения с представлением (53) позволяет получить зависимости радиуса пучка и кривизны фронта от координаты  $z$ :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z\lambda}{\pi w_0^2} \right)^2}, \quad (58)$$

$$\chi(z) = z \left( 1 + \left( \frac{\pi w_0^2}{z\lambda} \right)^2 \right). \quad (59)$$

Коэффициент преломления плазмы  $\eta$  для волны с частотой  $\omega_0$  равен

$$\eta = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{1 - \frac{4\pi n e^2}{m_e \omega_0^2}}, \quad (60)$$

В безразмерных величинах эта формула преобразуется в

$$\eta = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 - \frac{1}{k_0^2}}. \quad (61)$$

При моделировании лазерного импульса с большим волновым числом  $k_0$  показатель преломления становится почти равным единице.

По получаемому численному решению можно определить радиус импульса можно с очень хорошей точностью. Полагая, что в начальный момент времени импульс с волновым числом  $k_0 = 250$  находится в перетяжке  $w_0 = 0.565$  и измеряя радиус расплывающегося импульса, можно получить его зависимость от времени и сравнить с формулой (58), что и представлено на рис.17. Моделирование проводится в декартовой геометрии, границы счётного окна установлены далеко от оси движения импульса, шаг сетки равен  $h = g = 0.005$ .

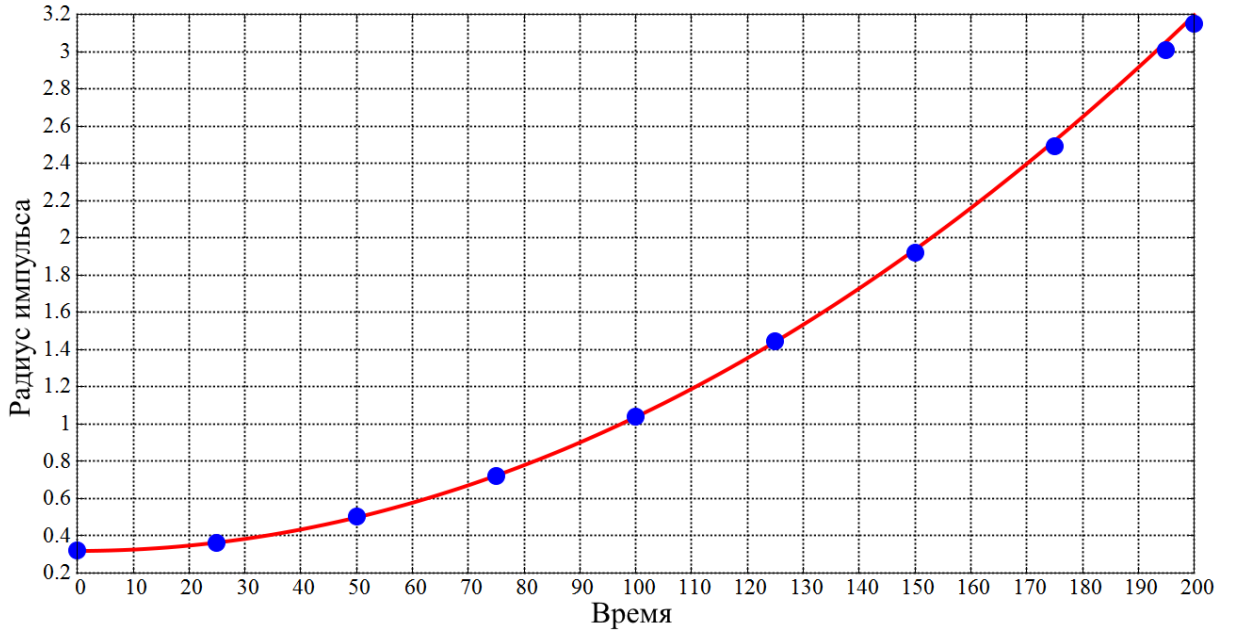


Рис. 17: Зависимость квадрата ширины импульса от времени. Результаты численного моделирования отмечены синими точками, красная линия соответствует теоретической кривой, построенной по уравнению (58).

### 3.3 Параболический профиль плотности плазмы

Из формулы (58) следует, что характерное расстояние вдоль оси, на котором проявляется поперечное расплывание лазерного импульса, равно Рэлеевской длине

$$Z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (62)$$

В безразмерных переменных эта величина равна

$$Z_R = \frac{k_0 w_0^2}{2}. \quad (63)$$

Получается, что на расстоянии всего в несколько Рэлеевских длин (что соответствует всего нескольким миллиметрам) лазерный импульс создает достаточно сильную кильватерную волну. После этого он уже становится сильно расфокусированным и имеет низкую интенсивность.

В работах [12] и [13] показано, что лазерный импульс в параболическом поперечном профиле плотности плазмы распространяется на гораздо большие расстояния без значительного расплывания. Такой профиль в цилиндрической геометрии задается в виде

$$n(r) = n_0 + \Delta \frac{r^2}{R_{ch}^2}, \quad (64)$$

где  $n_0$  — плотность плазмы на оси,  $\Delta$  — скачок плотности, а  $R_{ch}$  — ширина плазменного канала. Такой радиальный профиль плотности приводит к аналогичной зависимости для показателя преломления  $\eta$ , который, наоборот, в соответствии с формулой (60), имеет максимум на оси. Распространение лазерного импульса в среде с таким показателем преломления приводит к искривлению волнового фронта импульса и его фокусировке.

В этом случае, на радиальный профиль лазерного импульса будут влиять два эффекта. Во-первых, это дефокусировка, возникающая из-за дифракционного расплывания, во-вторых, фокусировка, появляющаяся за счёт уменьшающегося по величине от оси показателя преломления. Тогда ширина лазерного импульса в таком профиле плотности плазмы будет осциллировать. При этом, согласно работе [13], существует такой начальный радиус импульса  $r_m$ , что гауссов пучок с  $w_0 = r_m$  не будет

ни расходиться, ни сжиматься, поскольку обе упомянутые выше силы будут уравновешены в каждый момент времени. Этот радиус называется равновесным радиусом (в англоязычной литературе — «matched radius») и равен

$$r_m = \sqrt[4]{\frac{R_{ch}^2 m_e c^2}{e^2 \pi \Delta}}. \quad (65)$$

На основе этой теории можно реализовать еще один тест для проверки корректности численного решения — смоделировать распространение лазерного импульса с равновесным радиусом в плазме с параболическим профилем плотности (64). В безразмерных величинах формулы (64) и (65) записываются как

$$\frac{n(r)}{n_0} = 1 + \tilde{\Delta} \frac{r^2}{R_{ch}^2}, \quad (66)$$

$$r_m = \sqrt[4]{\frac{4R_{ch}^2}{\tilde{\Delta}}}. \quad (67)$$

В качестве примера можно подставить  $R_{ch} = 25$  и  $\tilde{\Delta} = 24$ , что дает значение равновесного радиуса  $r_m = 3.195$ . Результаты моделирования лазерного импульса с начальным значением  $w_0 = r_m$  представлены на рис.18 красной линией.

Если же  $w_0$  немного отличается от равновесного ( $|w_0 - r_m| \ll r_m$ ), то, согласно [13], радиус импульса будет осциллировать с определенным периодом

$$T_{osc} = \frac{\pi^2 r_m^2}{c\lambda}, \quad (68)$$

В безразмерных переменных период равен

$$T_{osc} = \frac{\pi k_0 r_m^2}{2}. \quad (69)$$

Следует отметить, что если  $w_0 > r_m$ , то лазерный импульс будет сначала фокусироваться, а если  $w_0 < r_m$ , то, наоборот, расходиться. Этот процесс очень похож на малые колебания пружинного маятника в поле тяжести. На рис.18 результаты моделирования импульсов с такими начальными радиусами  $w_0$  представлены синей и зеленой линией.

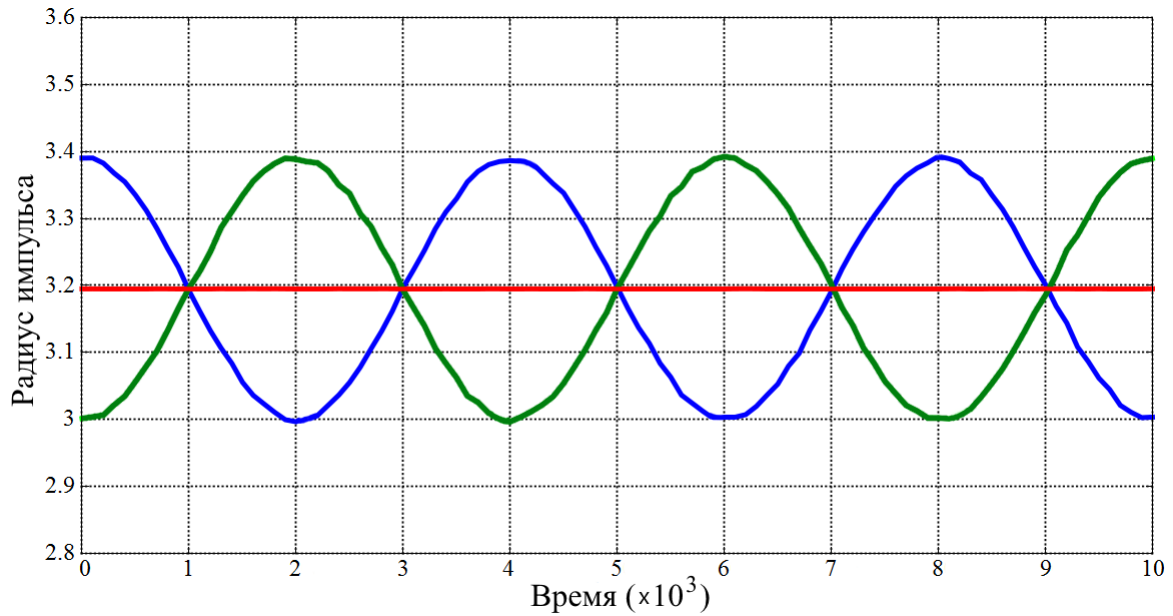


Рис. 18: Зависимость радиуса гауссова лазерного импульса от времени. Волновое число лазерного импульса равно  $k_0 = 250$ . Красная линия соответствует начальному равновесному радиусу  $w_0 = 3.195$ , синяя ( $w_0 = 3.389$ ) и зеленая ( $w_0 = 3.000$ ) линии — начальному радиусу, чуть отличающемуся от равновесного. Точность измерения радиуса связана с величиной шага сетки, который равен  $g = 0.01$ .

Для этих параметров плазменного канала и лазерного импульса можно по формуле (69) рассчитать период колебаний ширины импульса:  $T_{osc} = 4008.68$ . Результаты численного моделирования дают величину  $T = 4000 \pm 10$ , где погрешность связана с частотой вывода данных из кода (при этом моделировании данные из программы выводились каждые 10 безразмерных единиц времени).

### 3.4 Сравнение с кодом «Wake»

Серьезными проверками численного решения являются сравнения с результатами моделирования конкретных задач с помощью других кодов. Для одного такого теста был выбран код «Wake» ([6]). Моделируемый в декартовой геометрии лазерный импульс имеет начальный профиль  $A = a \cdot f(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{\sigma_x^2}}$ , где  $f(\xi)$  является кусочно-заданной «трапецие-

видной» функцией

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{80+\xi}{30} & : \xi \in [-80; -50) \\ 1 & : \xi \in [-50; -30] \\ -\frac{\xi}{30} & : \xi \in (-30; 0] \end{cases} \quad (70)$$

Начальный радиус лазерного импульса  $\sigma_x = 9$ , амплитуда  $a = 0.375$ , а волновое число  $k_0 = 5$ . На рис. 19 представлена амплитуда вектор-потенциала лазерного импульса в разные моменты времени (результаты моделирования кодом «Wake» взяты из статьи ([6])). Шаг цветовой шкалы для LCODE составляет  $a_0/7$ , для «Wake» шкала неизвестна.

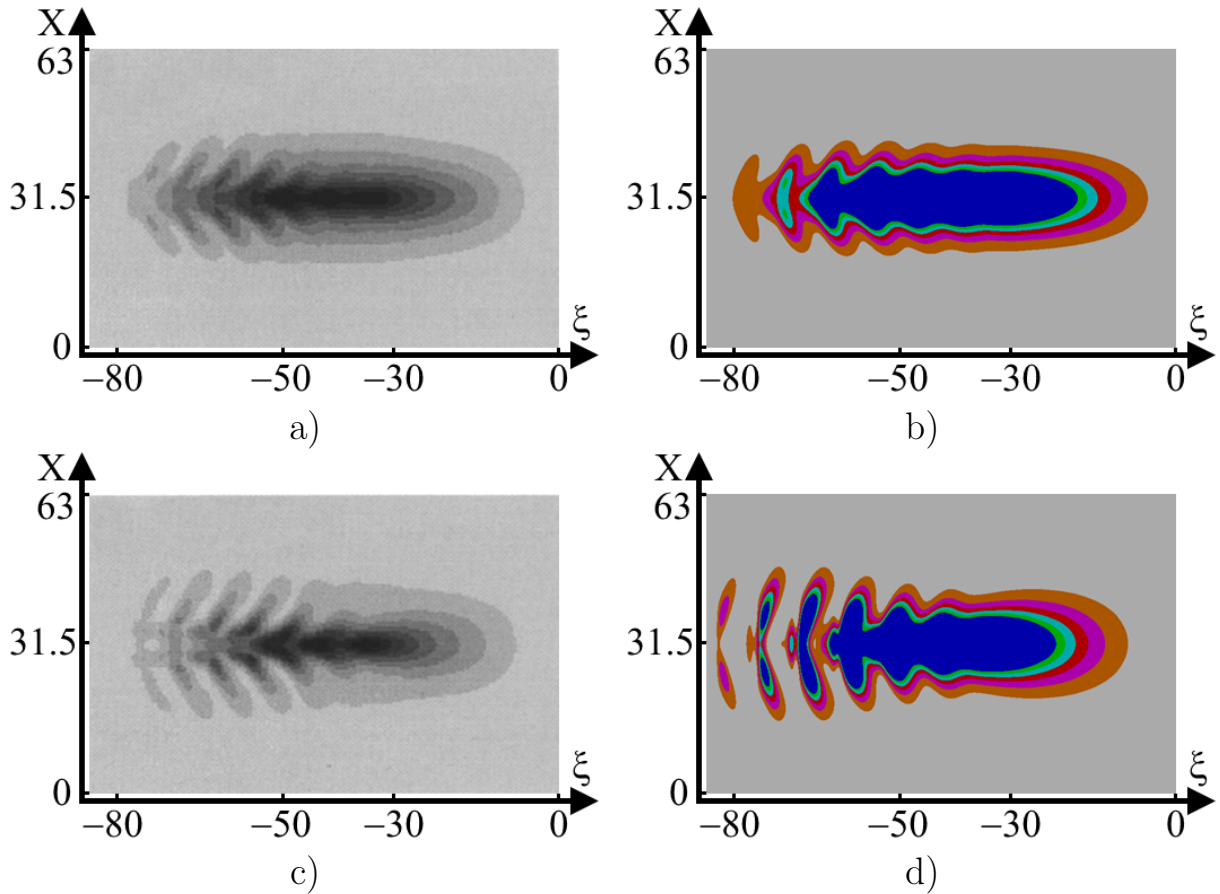


Рис. 19: Профили амплитуды вектор-потенциала лазерного импульса в разные моменты времени: а) Wake,  $t = 100$ ; б) LCODE,  $t = 100$ ; в) Wake,  $t = 150$ ; г) LCODE,  $t = 150$ .

## Заключение

Реализован алгоритм численного решения уравнения эволюции лазерного импульса (15), который встроен в программу LCODE в качестве функционального блока. Ранее программа LCODE успешно конкурировала с другими кодами при моделировании задач с электронными драйверами, теперь же возможно моделирование экспериментов по кильватерному ускорению с лазерным импульсом в качестве драйвера.

В будущем планируется создание новой версии программы LCODE для моделирования плазменного кильватерного ускорения в трехмерной геометрии, поэтому одна из дальнейших задач — реализация описанного в работе алгоритма в трехмерном случае. Кроме того, будет проводиться тестирование кода на многих задачах, которые ранее уже моделировались с помощью других кодов.



# Приложение 1

## Алгоритм метода комплексной прогонки

Замена производных в уравнении

$$2ik_0 \frac{\partial f(\xi, x, t)}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f(\xi, x, t)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 f(\xi, x, t)}{\partial x^2} = \frac{\hat{n}}{\bar{\gamma}} f(\xi, x, t)$$

их разностными аналогами

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\xi_n, x_l, t_m)}{\partial t} &= \frac{f_{n,l}^{m+1} - f_{n,l}^m}{\tau}, \\ \frac{\partial f(\xi_n, x_l, t_m)}{\partial \xi} &= \frac{-3f_{n,l}^m + 4f_{n-1,l}^m - f_{n-2,l}^m}{2h}, \\ \frac{\partial^2 f(\xi_n, x_l, t_m)}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \frac{f_{n,l-1}^m - 2f_{n,l}^m + f_{n,l+1}^m}{g^2} + \frac{1}{2} \frac{f_{n,l-1}^{m+1} - 2f_{n,l}^{m+1} + f_{n,l+1}^{m+1}}{g^2}, \end{aligned}$$

а также запись правой части в виде

$$\frac{\bar{n}}{\bar{\gamma}} f(\xi_n, x_l, t_m) = \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} f_{n,l}^{m+1} + \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} f_{n,l}^m$$

преобразует изначальное уравнение в систему разностных уравнений

$$a_{l-1} f_{n,l-1}^{m+1} + c_l f_{n,l}^{m+1} + b_{l+1} f_{n,l+1}^{m+1} = RHS_l(f^m),$$

где  $RHS_l(f^m)$  — комплексная функция, действительная часть которой равна

$$\begin{aligned} \Re RHS_l &= \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \Re f_{n,l}^m - \frac{1}{2g^2} (\Re f_{n,l-1}^m + \Re f_{n,l+1}^m) - \\ &- \frac{1}{h\tau} (\Re f_{n-2,l}^m - 4\Re f_{n-1,l}^m) - \frac{1}{h\tau} (4\Re f_{n-1,l}^{m+1} - \Re f_{n-2,l}^{m+1}) - \frac{2k_0}{\tau} \Im f_{n,l}^m. \end{aligned}$$

а мнимая

$$\begin{aligned} \Im RHS_l &= \left( \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} + \frac{1}{g^2} \right) \Im f_{n,l}^m - \frac{1}{2g^2} (\Im f_{n,l-1}^m + \Im f_{n,l+1}^m) - \\ &- \frac{1}{h\tau} (\Im f_{n-2,l}^m - 4\Im f_{n-1,l}^m) - \frac{1}{h\tau} (4\Im f_{n-1,l}^{m+1} - \Im f_{n-2,l}^{m+1}) + \frac{2k_0}{\tau} \Re f_{n,l}^m. \end{aligned}$$

Для каждого вычисляемого столбца  $[n]$  на слое  $[m + 1]$  столбцы  $[n - 1]$  и  $[n - 2]$  на слоях  $[m]$  и  $[m + 1]$  считаются известными (что объяснялось в разделе 2.2), поэтому они были перенесены в правую часть как известные значения.

Коэффициенты в левой части при неизвестных значениях равны

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{1}{2g^2}, \\ b_l &= \frac{1}{2g^2}, \\ c_l &= -\frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} - \frac{1}{g^2} + i\frac{2k_0}{\tau}, \end{aligned}$$

где только коэффициент  $c_l$ , соответствующий главной диагонали матрицы, имеет отличную от нуля мнимую часть.

Если столбец содержит  $Nl$  узловых точек ( $l \in [0; Nl - 1]$ ), система уравнений содержит  $Nl - 2$  уравнения. Еще два уравнения для однозначного решения получаются из поперечных граничных условий (на верхней и нижней границах счетной области). Трехдиагональную систему уравнений можно переписать в матричном виде

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} c_0 & b_0 & 0 & 0 & & & & \\ a_1 & c_1 & b_1 & 0 & & & & \\ 0 & a_2 & c_2 & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & & & \\ \hline & & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & c_{Nl-3} & b_{Nl-3} & 0 \\ & & & & 0 & a_{Nl-2} & c_{Nl-2} & b_{Nl-2} \\ & & & & 0 & 0 & a_{Nl-1} & c_{Nl-1} \end{array} \right] \begin{array}{c} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{Nl-3} \\ f_{Nl-2} \\ f_{Nl-1} \end{array} = \begin{array}{c} RHS_0 \\ RHS_1 \\ RHS_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ RHS_{Nl-3} \\ RHS_{Nl-2} \\ RHS_{Nl-1} \end{array}$$

Как обсуждалось в разделе 2.3, граничные условия выбраны отражающими — равенство нулю первой производной по поперечной координате. Это означает, что на нижней границе окна  $f_{n,0} = f_{n,1}$ , из чего получаются коэффициенты  $B_0 = 1$  и  $C_0 = -1$ , а  $RHS_0 = 0$ . На верхней границе из такого же граничного условия  $f_{n,Nl-2} = f_{n,Nl-1}$  получаются коэффициенты  $A_{Nl-1} = -1$  и  $C_{Nl-1} = -1$ , а  $RHS_{Nl-1} = 0$ .

Метод прогонки вычисляет решение рекуррентным способом:

$$f_l = \alpha_{l+1}f_{l+1} + \beta_{l+1}.$$

Постановка такого решения позволяет выразить прогоночные коэффициенты  $\alpha_{l+1}$  и  $\beta_{l+1}$  рекуррентным способом с помощью коэффициентов системы  $a_l, b_l$  и  $c_l$ :

$$\alpha_{l+1} = -\frac{b_l}{a_l\alpha_l + c_l}, \quad \beta_{l+1} = \frac{RHS_l - a_l\beta_l}{a_l\alpha_l + c_l}.$$

Поскольку коэффициент  $c_l$  является имеет ненулевую мнимую часть и сама искомая функция является комплексной, прогоночные коэффициенты тоже являются комплексными, а их действительные и мнимые части равны, соответственно,

$$\begin{aligned} \Re\alpha_{l+1} &= -\frac{\frac{1}{2g^2} \left( \frac{1}{2g^2} \Re\alpha_l - \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} - \frac{1}{g^2} \right)}{\left( \frac{1}{2g^2} \Re\alpha_l - \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} - \frac{1}{g^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2g^2} \Im\alpha_l + \frac{2k_0}{\tau} \right)^2}, \\ \Im\alpha_{l+1} &= \frac{\frac{1}{2g^2} \left( \frac{1}{2g^2} \Im\alpha_l + \frac{2k_0}{\tau} \right)}{\left( \frac{1}{2g^2} \Re\alpha_l - \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} - \frac{1}{g^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2g^2} \Im\alpha_l + \frac{2k_0}{\tau} \right)^2}, \\ \Re\beta_{l+1} &= \frac{\left( \Re RHS_l - \frac{1}{2g^2} \Re\beta_l \right) \left( \frac{1}{2g^2} \Re\alpha_l - \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} - \frac{1}{g^2} \right)}{\left( \frac{1}{2g^2} \Re\alpha_l - \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} - \frac{1}{g^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2g^2} \Im\alpha_l + \frac{2k_0}{\tau} \right)^2} + \\ &+ \frac{\left( \Im RHS_l - \frac{1}{2g^2} \Im\beta_l \right) \left( \frac{1}{2g^2} \Im\alpha_l + \frac{2k_0}{\tau} \right)}{\left( \frac{1}{2g^2} \Re\alpha_l - \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} - \frac{1}{g^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2g^2} \Im\alpha_l + \frac{2k_0}{\tau} \right)^2}, \\ \Im\beta_{l+1} &= \frac{\left( \Im RHS_l - \frac{1}{2g^2} \Im\beta_l \right) \left( \frac{1}{2g^2} \Re\alpha_l - \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} - \frac{1}{g^2} \right)}{\left( \frac{1}{2g^2} \Re\alpha_l - \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} - \frac{1}{g^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2g^2} \Im\alpha_l + \frac{2k_0}{\tau} \right)^2} - \\ &- \frac{\left( \Re RHS_l - \frac{1}{2g^2} \Re\beta_l \right) \left( \frac{1}{2g^2} \Im\alpha_l + \frac{2k_0}{\tau} \right)}{\left( \frac{1}{2g^2} \Re\alpha_l - \frac{\bar{n}}{2\bar{\gamma}} - \frac{3}{h\tau} - \frac{1}{g^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2g^2} \Im\alpha_l + \frac{2k_0}{\tau} \right)^2}. \end{aligned}$$

Граничные условия определяют первые прогоночные коэффициенты  $\alpha_1 = 1$  и  $\beta_1 = 0$ . Тогда решение системы записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\Re f_l &= \Re \alpha_{l+1} \Re f_{l+1} - \Im \alpha_{l+1} \Im f_{l+1} + \Re \beta_{l+1}, \\ \Im f_l &= \Re \alpha_{l+1} \Im f_{l+1} + \Im \alpha_{l+1} \Re f_{l+1} + \Im \beta_{l+1}.\end{aligned}$$

## Список литературы

1. А.В.Бурдаков А.М.Кудрявцев П.В.Логачев К.В.Лотов А.В.Петренко А.Н.Скринский. Проект эксперимента по кильватерному ускорению на инжекционном комплексе ВЭПП-5 // Физика плазмы, т.31, №4, 327. — 2005.
2. T.Tajima, J.M.Dawson. Laser electron accelerator // Phys. Rev. Lett. 43, 267. — 1979.
3. et al. R.G.Hemker. Dynamic effects in plasma wakefield excitation // Phys. Rev. ST Accel. Beams 3, 063301. — 2000.
4. Nieter C., J.R.Cary. VORPAL: a versatile plasma simulation code // J. Comput. Phys. 196 (2), 448. — 2004.
5. A.Pukhov. Three-dimensional electromagnetic relativistic particle-in-cell code VLPL(Virtual Laser Plasma Lab) // J. Plasma. Phys. 61 (3), 425. — 1999.
6. P.Mora, T.M.Antonsen. Kinetic modeling of intense, short laser pulses propagating in tenuous plasmas // Phys. Plasmas 4 (1), 217. — 1997.
7. et al. C.Huang // J. Comput. Phys. 217, 658. — 2006.
8. D.Strickland, G.Mourou. Compression of amplified chirped optical pulses // Opt. Commun. 56, 219. — 1985.
9. Гапонов А.В. Миллер М.А. О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотных полях // ЖЭТФ, Т.34, №2, 242. — 1958.
10. Р.И. Спицын. Эволюция лазерного импульса в рамках квазистатической модели плазменного кильватерного ускорителя // Выпускная квалификационная бакалаврская работа, Новосибирский Национальный Исследовательский Государственный Университет (НГУ). — 2014.
11. Berenger Jean-Pierre. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // J. Comput. Phys. 114 (2), 185. — 1994.
12. P.Sprangle, E.Esarey. Interaction of ultrahigh laser fields with beams and plasmas // Phys. Fluids B 4, 2241. — 1992.
13. et al. R.F.Hubbard. Intense laser pulse propagation in capillary discharge plasma channels // AIP Conference Proceedings 472, 394. — 1999.