МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (Новосибирский государственный университет, НГУ)

Физический факультет

Квалификационная работа на соискание степени бакалавра

Кафедра физики плазмы

(название кафедры)

Горн Александр Андреевич

(фамилия, имя, отчество студента)

Название работы:

Отклик узкого столба плазмы на плотный ультрарелятивистский пучок заряженных частиц

Научный руководитель:

д-р физ.-мат. наук Лотов Константин Владимирович

(звание, фамилия, имя, отчество, роспись)

Новосибирск — 2016 год

Оглавление

1: Введение

Реакция плазмы на пучок хорошо исследована и в общем случае, и в контексте кильватерного ускорения, и с учетом нелинейных эффектов, однако в контексте плазменного кильватерного ускорения появилась задача о реакции узкой плазмы на пучок. Задача появилась из эксперимента AWAKE, который будет проводиться в CERN в конце 2016 года. [3]

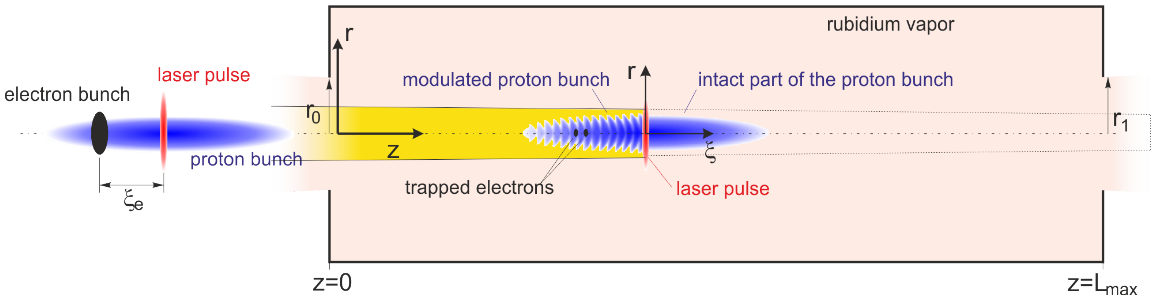

Рис. 1.1: Схема эксперимента AWAKE.

В эксперименте (Рис. 1.1) высокоэнергетический лазерный пучок пройдет сквозь плазменную ячейку, наполненную парами рубидия, и создаст в ней узкий плазменный столб с резкой границей плотности плазмы. Плазма будет свободно вытекать через торцы камеры, что создаст плавный переход плотности к нулю снаружи плазменной ячейки (Рис. 1.2).

Следом за лазерным пучком в плазму влетит протонный и электронный пучки, так называемые драйвер и витнесс. Драйвер будет иметь высокую энергию и возбудит в плазме поля, в которых начнет ускоряться витнесс. Таким образом можно ускорить электронный пучок до энергии порядка 1 TeV. Параметры эксперимента приведены в Таблице 1.1.

Чтобы теоретически предсказать энергию ускоренных частиц, оптимизировать параметры инжекции электронного пучка, а также добиться

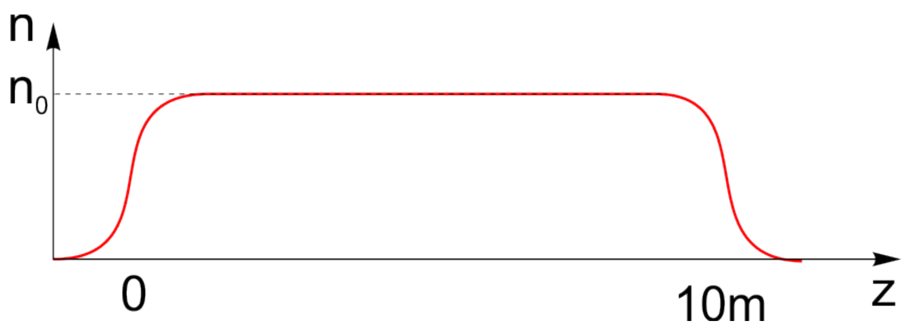

Рис. 1.2: Профиль плотности плазмы в эксперименте AWAKE, за нулевую точку взято положение входного отверстия в плазменную секцию.

Таблица 1.1: Исходные параметры эксперимента AWAKE и обозначения.

Параметр, обозначение	Величина
Плотность плазмы, n_0	7×10^{14} см$^{-3}$
Атомная масса ионов плазмы, M_i	85.5
Число частиц в целом пучке, N_b	3×10^{11}
Длина пучка, σ_{zb}	12 см
Радиус пучка, σ_{rb}	0.02 см
Энергоразброс пучка, δW_b	0.35%
Угловой разброс пучка, $\delta\alpha_b = \epsilon_b/\sigma_{rb}$	4.5×10^{-5}
Положение лазерного импульса относительно центра пучка, ξ_s	0 см

наибольшего темпа ускорения, необходимо выяснить какие поля создаются в плазме различными драйверами. При изучении отклика основное внимание уделяется не только полям, но и кильватерному потенциалу, градиент которого имеет смысл силы, действующей на ультрарелятивистскую частицу. Для нахождения полей и кильватерного потенциала, создаваемых в плазме пучком заряженных частиц, в данной работе используется следующая модель (Рис. 1.3): плазма представлена в форме бесконечного столба с радиусом R и однородной плотностью n_0, по оси которого со скоростью, близкой к скорости света, летит пучок заряженных частиц с произвольной осесимметричной плотностью $n_b = n_b(r, z)$. В соответствии с контекстом эксперимента считается, что радиус пучка r_b всегда меньше радиуса плазмы R. В дальнейшем, в моделировании и других расчетах рассматриваются обрезанные гауссовские пучки.

Так как в эксперименте присутствует область переменной плотности

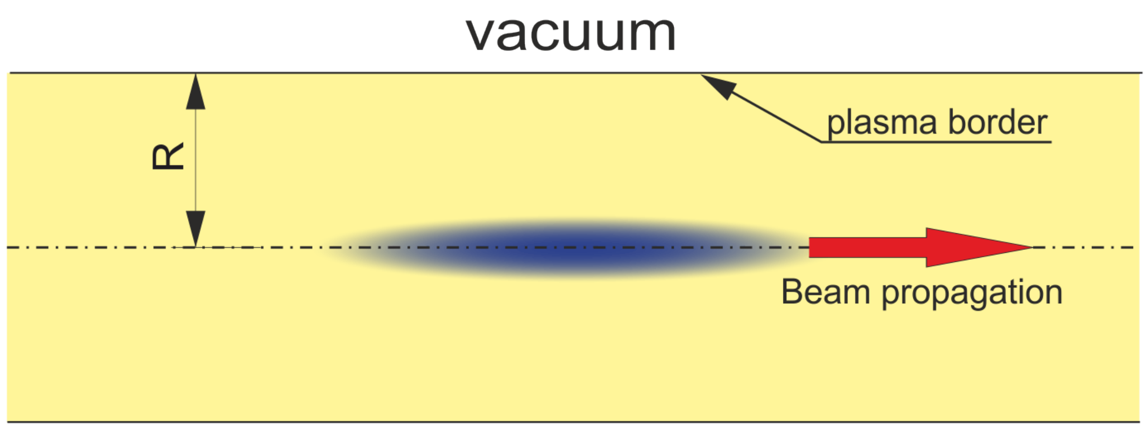

Рис. 1.3: Геометрия задачи.

вблизи входного и выходного отверстий плазменной секции, представляет интерес исследовать отклик при различной плотности плазмы. Существует несколько характерных областей плотности плазмы, заслуживающих внимания, которые определяются параметрами системы: $c \cdot \omega_p < R$, $c \cdot \omega_p > R$ и $n > n_b$, $n < n_b$. В данной работе отклик исследовался двумя способами: с помощью полученных в линейном приближении выражений для полей и кильватерного потенциала и с помощью программы LCODE [4], моделирующей данную задачу в квазистатическом приближении.

2: Линейный отклик

2.1 Аналитические выражения для кильватерного потенциала

В случае линейного отклика плазмы возможно найти аналитическое выражение для кильватерного потенциала используя первый порядок теории возмущений для системы уравнений Максвелла. В данной модели удобно воспользоваться квазистатическим приближением и считать все величины функциями от расстояния от оси системы r и координаты $\xi = z - ct$, сопутствующей пучку.

Запишем покомпонентно полную систему уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi}(E_r - B_\phi) = \frac{4\pi}{c}j_r; && \frac{\partial}{\partial\xi}(E_r - B_\phi) = \frac{\partial E_z}{\partial r}; \qquad (*)\\
&\frac{\partial}{\partial\xi}(B_r + E_\phi) = 0; && \frac{\partial}{\partial\xi}(B_r + E_\phi) = -\frac{\partial B_z}{\partial r};\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rB_\phi = \frac{4\pi}{c}j_z - \frac{\partial E_z}{\partial\xi}; && \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rE_\phi = \frac{\partial B_z}{\partial\xi};
\end{aligned}$$

Данную систему уравнений можно значительно упростить, введя кильватерный потенциал, определение которого напрямую следует из уравнения (*).

$$E_r - B_\phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \tag{2.1a}$$

$$E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \tag{2.1b}$$

В этом случае система примет следующий вид:

$$\begin{gathered} B_z = 0; \qquad B_r = 0; \qquad E_\phi = 0; \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial r} = -\frac{4\pi}{c} j_r; \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r B_\phi = \frac{4\pi}{c} j_z - \frac{\partial E_z}{\partial \xi}; \end{gathered} \tag{**}$$

Получим из (**) уравнение для кильватерного потенциала, исключив неизвестную радиальную компоненту тока $j_r = -enV_r$ с помощью линеаризованных уравнения непрерывности

$$-c\frac{\partial \delta n}{\partial \xi} + \frac{n_0}{r}\frac{\partial}{\partial r} r V_r + n_0 \frac{\partial V_z}{\partial \xi} = 0$$

и уравнения движения

$$\frac{\partial V_z}{\partial \xi} = \frac{eE_z}{mc}$$

В итоге уравнение для кильватерного потенциала примет вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\Phi = 4\pi e \delta n \tag{2.2}$$

где $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m}}$ – плазменная частота.

Правая часть уравнения содержит возмущение плотности плазмы, которое вместе с плазменной частотой зануляется снаружи плазменного столба, тем самым позволяя легко найти решение в этой области.

$$\boxed{\Phi = 0, \qquad r > R} \tag{2.3}$$

Чтобы найти решение внутри плазмы, введем штрихованные безразмерные переменные $r' = \frac{\omega_p}{c} r$, $\xi' = \frac{\omega_p}{c}\xi$, $n' = \frac{n}{n_0}$ и перепишем в них уравнение (2.2).

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'}\frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \Phi = 4\pi e \delta n \tag{2.4}$$

Конечное уравнение является модифицированным уравнением Бесселя нулевого порядка с правой частью, зависящей от возмущения плотности плазмы. Вывод конечного выражения для возмущения плотности плазмы (2.5) приведен в Приложении.

$$\delta n = -\frac{q}{e} n_b f_{\perp}(r'/k_p) \int_{-\infty}^{\xi} f_{\parallel}(\xi_0'/k_p) sin(\xi' - \xi_0') d\xi_0' \qquad (2.5)$$

Сначала решим уравнение (2.4) для одной частицы пучка, находящейся в точке (ξ_0, r_0), т.е. найдем функцию Грина. Фундаментальными решениями уравнения являются модифицированные функции Бесселя первого $(I_0(r'))$ и второго $(K_0(r'))$ рода, а значит, при учете граничных условий $[\Phi]_{r'=r_0'} = 0$, $[\Phi]_{r'=R'} = 0$, а также ограниченности потенциала на оси функция Грина примет следующий вид:

$$G(r', r_0') = 4\pi e \frac{\delta n}{f_{\perp}(r'/k_p) k_p^2} \cdot r_0' \begin{cases} I_0(r') \left[\frac{K_0(R')}{I_0(R')} I_0(r_0') - K_0(r_0') \right] & r' < r_0' \\ \left[\frac{K_0(R')}{I_0(R')} I_0(r') - K_0(r') \right] I_0(r_0') & r_0' \leq r' \leq R' \end{cases} \qquad (2.6)$$

Конечное выражение для кильватерного потенциала получается интегрированием функции Грина с поперечной плотностью пучка $f_{\perp}(r'/k_p)$ и состоит из двух множителей: радиальной и продольной функции.

$$\boxed{\Phi(\xi', r') = -\frac{4\pi q c^2 n_b}{{\omega_p}^2} F(\xi') R(r'), \qquad r \leq R} \qquad (2.7)$$

Продольная функция имеет простую форму и показывает как кильватерный потенциал осциллирует с плазменной частотой вдоль продольной координаты (Рис. 2.1).

$$F(\xi') = \int_{-\infty}^{\xi'} sin\left(\xi' - \xi_0'\right) f_{\parallel}(\xi_0') d\xi_0' \qquad (2.8)$$

Радиальная функция имеет более сложную структуру, чем продольная, однако ее график ведет себя просто: он монотонно спадает от некоторого значения на оси системы до нуля на границе плазмы (Рис. 2.2).

$$
\begin{aligned}
R(r') = \left[\frac{K_0(R')}{I_0(R')} I_0(r') - K_0(r')\right] \int_0^{r'} r_0' I_0(r_0') f_\perp(r_0'/k_p) dr_0' - \\
- I_0(r') \int_{r'}^{R'} r_0' \left[\frac{K_0(R')}{I_0(R')} I_0(r_0') - K_0(r_0')\right] f_\perp(r_0'/k_p) dr_0'
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

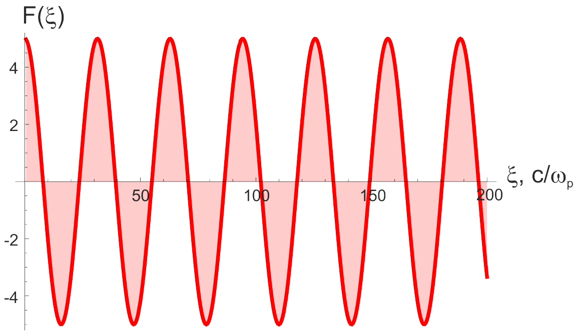

Рис. 2.1: Продольная функция

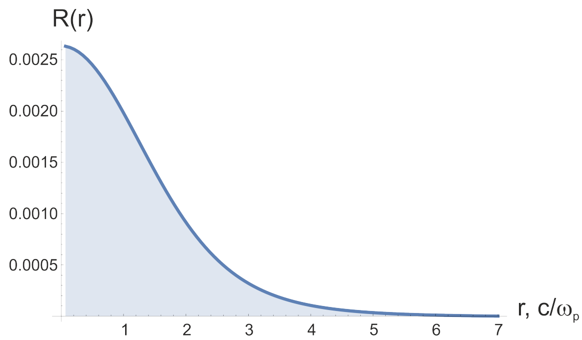

Рис. 2.2: Радиальная функция

2.2 Эффект роста потенциала при уменьшении плотности плазмы

Как уже было сказано в Главе 1, плазма в эксперименте AWAKE имеет плавно спадающий к нулю продольный профиль плотности в районе отверстий плазменной секции, поэтому представляет интерес изучить поведение кильватерного потенциала в широком диапазоне плотностей плазмы (от нуля до базовой плотности $n_0 = 7 \cdot 10^{14} cm^{-3}$) и найти область применимости аналитического решения, полученного ранее.

Функции $F(\xi')$ и $R(r')$, которые входят в аналитическое выражение для потенциала, содержат в себе штрихованные безразмерные переменные $r' = k_p r$ и $\xi' = k_p \xi$, зависящие от плотности плазмы, а значит, сам кильватерный потенциал тоже зависит от плотности плазмы нетривиальным образом.

На Рис. 2.3 приведено сравнение между такой зависимостью на оси системы в случае ограниченной плазмы (черная гладкая кривая), зависимостью в случае бесконечной плазмы (гладкая оранжевая кривая) и результатами моделирования программой LCODE (красные точки). При построении аналитических функций использовались базовые параметры эксперимента AWAKE (Таблица 1.1).

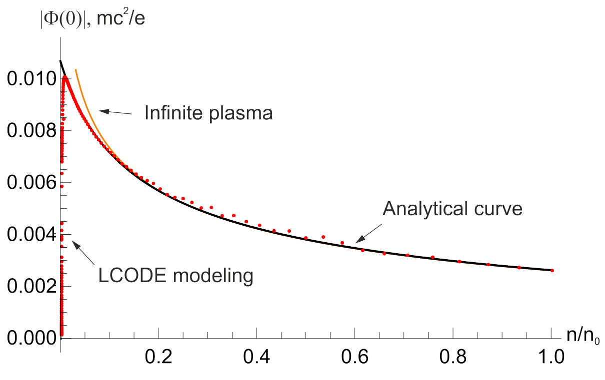

Рис. 2.3: Эволюция потенциала при изменении плотности плазмы

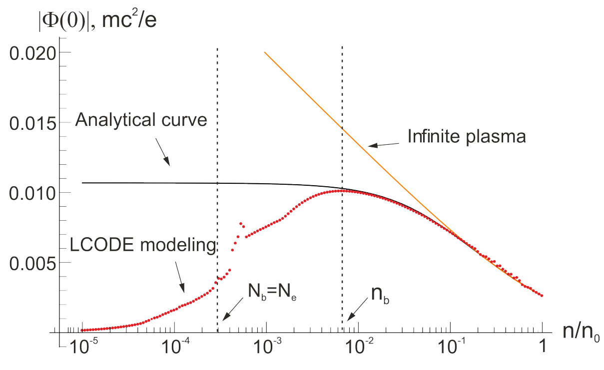

Рис. 2.4: Эволюция потенциала при изменении плотности плазмы в логарифмическом масштабе

На всех кривых виден эффект роста потенциала при понижении плотности плазмы. Этот эффект наблюдается в первую очередь в бесконечной плазме и лишь модифицируется ограниченной. Радиальная функция в случае бесконечной плазмы возрастает до бесконечности, в то время как кривая для ограниченной плазмы принимает определенное значение при нулевой плотности. Однако, если посмотреть на этот рисунок в логарифмическом масштабе (Рис. 2.4), видно, что график, соответствующий моделированию программой LCODE, начинает убывать при приближении к нулю с момента, когда плотность плазмы становится равной плотности пучка.

Несовпадение между аналитическими кривыми и моделированием начиная с некоторой плотности говорит о том, что с этого момента перестает работать линейное приближение, в рамках которого была получена аналитика. В данном случае линейность нарушается при плотности $n_b = 2 \cdot 10^{12} cm^{-3}$ и меньше.

2.3 Отсутствие потенциала снаружи плазменного столба

В контексте эксперимента AWAKE предполагается инжекция электронного пучка в кильватерную волну, создаваемую протонным пучком (драйвером) с последующим захватом и ускорением электронов. Ранее было непонятно как повлияет на захват область с переменной плотностью вблизи входного отверстия в плазменную секцию.

Для того, чтобы устранить неопределенность, рассмотрим силы, действующие в такой системе на частицу инжектируемого пучка. Согласно определению кильватерного потенциала (2.1), его градиент имеет смысл силы действующей на частицу с единичным зарядом. При этом важнее всего рассмотреть радиальную компоненту такой силы, так как именно она будет способствовать фокусировке, либо дефокусировке частицы, что непосредственно влияет на захват.

$$F_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = E_r - B_\phi \tag{2.10}$$

Сначала исследуем силы, действующие на частицу снаружи плазменного столба. Решение для кильватерного потенциала дает тождественный ноль при $r > R$, что говорит об отсутствии сил в этой области. Получим то же с помощью моделирования программой LCODE. Как видно из формулы (2.10), радиальная сила является разностью радиального электрического и азимутального магнитного полей. Эти величины (Рис. 2.5) и (Рис. 2.6) плавно спадают по радиусу до нуля на бесконечности, однако их разность зануляется во всей области снаружи плазмы (Рис. 2.7), что совпадает с теорией.

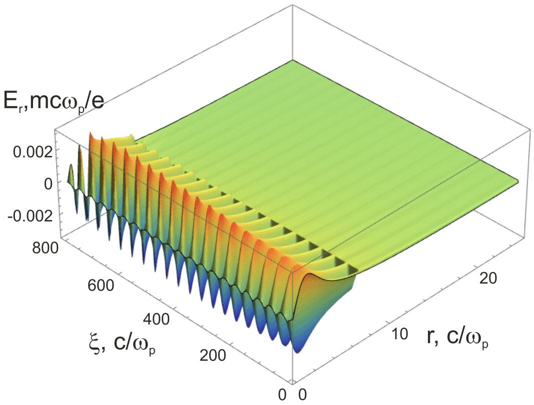

Рис. 2.5: Электрическое поле

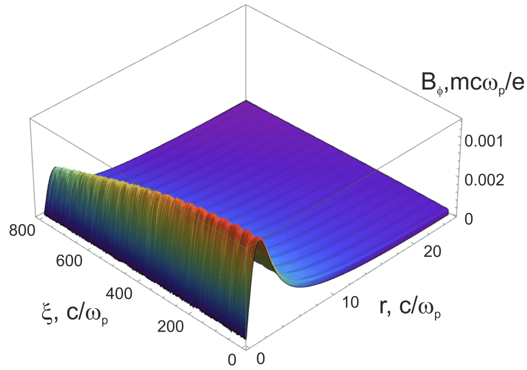

Рис. 2.6: Магнитное поле

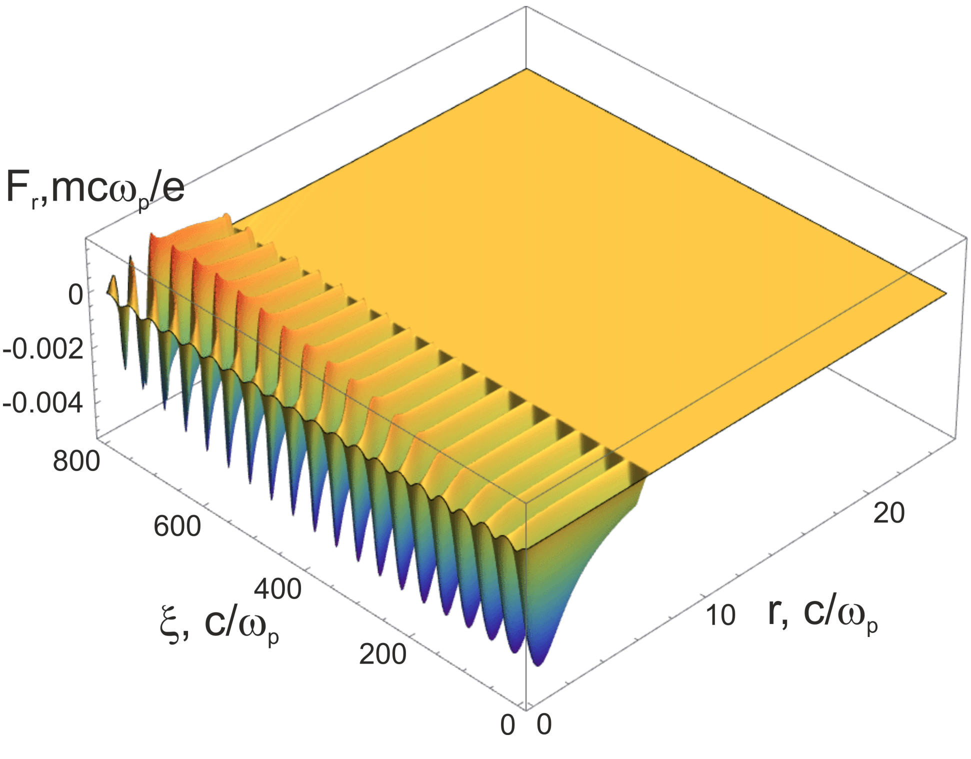

Рис. 2.7: Радиальная сила

2.4 Проблема осевой инжекции электронного пучка в эксперимнте AWAKE

Исследуем теперь фокусирующую силу внутри плазмы. Радиальная сила при $r < R$ осциллирует с плазменной длинной волны. Предположим, что в плазму инжектируется пучок отрицательно заряженных частиц, например, электронов как в эксперименте AWAKE, тогда в зависимости от продольной координаты инжекции из-за осцилляций создаются два вида областей: фокусирующие (оттенки красного на Рис. 2.7) и дефокусирующие (оттенки синего на Рис. 2.7). Электроны, попавшие в область дефокусировки, получат положительный радиальный импульс и не захватятся в кильватерную волну, вылетев за пределы плазмы. Таким образом, для того, чтобы обеспечить наилучший захват электронов в кильватерную волну, необходимо инжектировать их в области фокусировки.

Однако, из Рис. 2.7 видно, что радиальная сила помимо осциллирующей имеет также постоянную компоненту, в какой-то степени повторяющую форму драйвера (в данном случае протонного пучка). Постоянная компонента вносит отрицательную добавку в радиальную силу, что в среднем приводит к доминированию дефокусирующей силы по всей длине пучка.

Ранее в эксперименте AWAKE предполагалась инжекция электронного пучка вдоль оси системы следом за протонным пучком.

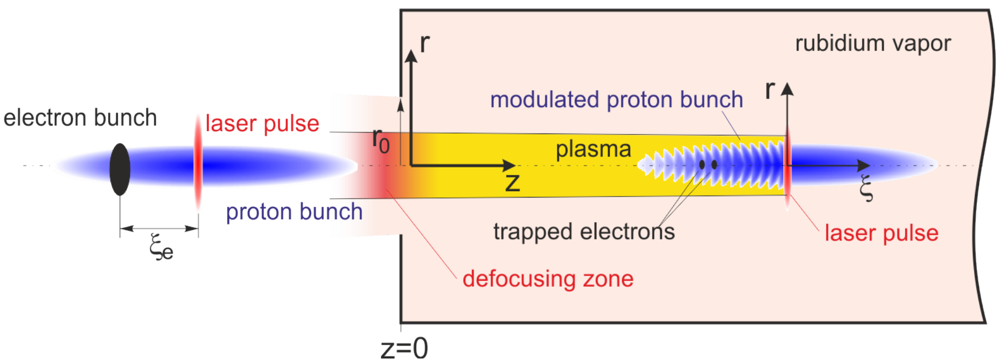

Рис. 2.8: Дефокусирующая область вблизи входного отверстия в плазменную секцию эксперимента AWAKE

При такой инжекции пучок неизбежно попадет в зону переменной плотности вблизи входного отверстия в плазменную секцию. В этой области частота колебаний кильватерной волны $\omega_p \sim \sqrt{n}$ меняется в зависимости от плотности плазмы, смещая тем самым плоскость постоянной фазы в сопутствующем пучку окне (Рис. 2.9). В этом случае инжектируемые электроны будут попеременно попадать то в фокусирующую, то в дефокусирующую фазу и в среднем дефокусироваться, что воспрепятствует захвату частиц в волну для последующего ускорения.

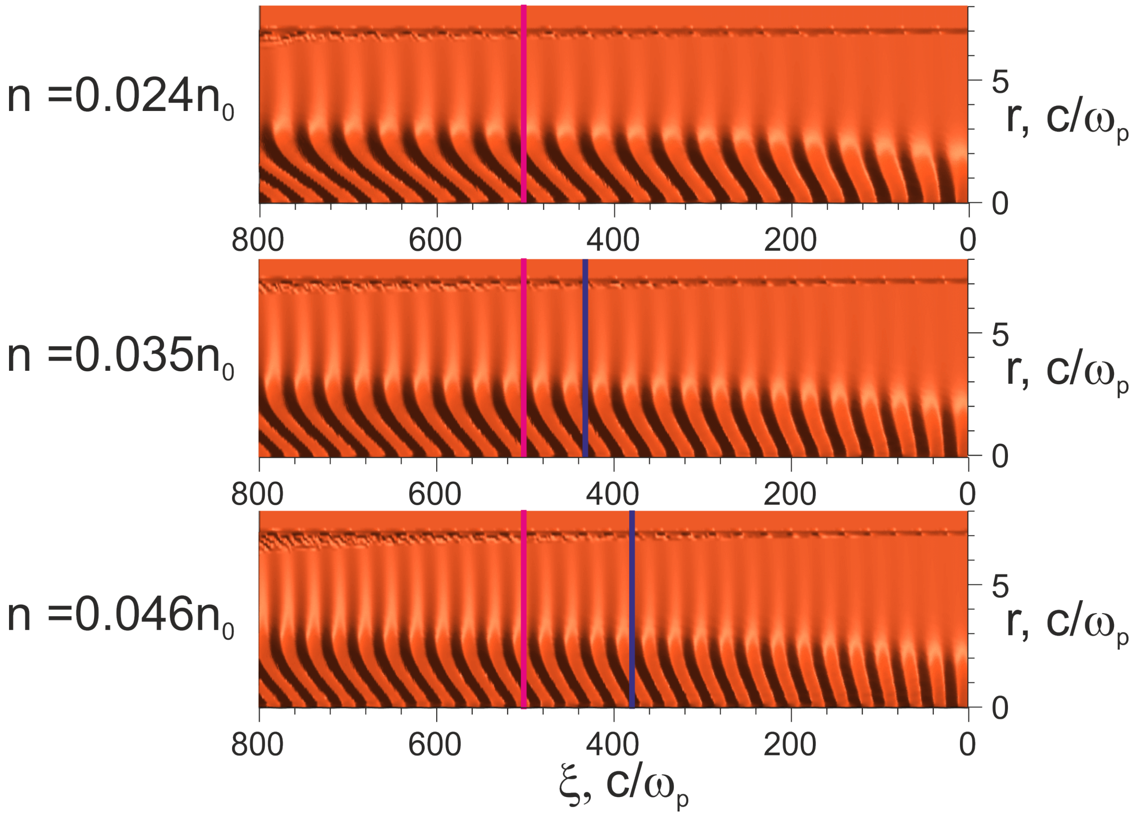

Рис. 2.9: Смещение фазы кильватерной волны (синяя линия) относительно положения электронного пучка (фиолетовая линия) на диаграмме электронной плотности плазмы при инжекции электронов в область переменной плотности.

Таким образом, чтобы добиться эффективной инжекции частиц в волну, необходимо как-то обойти дефокусирующую область. Было предложено инжектировать электрононный пучок не вдоль оси системы, а под некоторым углом к ней вглубь плазмы. Тогда электронный пучок обойдет опасную зону переменной плотности снаружи плазменного столба, где на него не будет действовать никаких сил.

Для такой постановки задачи с помощью программы LCODE был выбран оптимальный угол инжекции $\alpha = 0.009$ радиан, а затем прове-

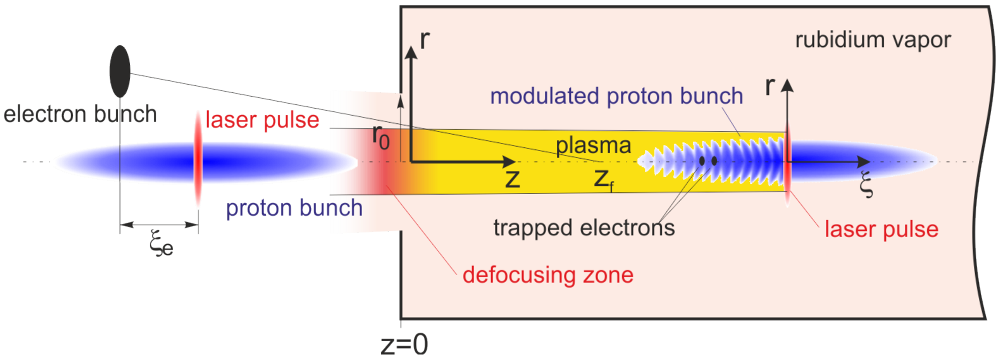

Рис. 2.10: Схема "косой"инжекции электронного пучка в эксперименте AWAKE.

дено финальное моделирование и получен энергетический спектр ускоренных электронов на выходе из плазменной секции. [2] На Рис. 2.11 приведено сравнение таких энергетических спектров для случая "косой"инжекции и инжекции вдоль оси. Видно, что во втором случае ни один электрон не захватился в волну, в то время как при косой инжекции около 40% электронов были захвачены и ускорены в среднем до энергии 1.5 GeV, что подтверждает приведенные выше рассуждения.

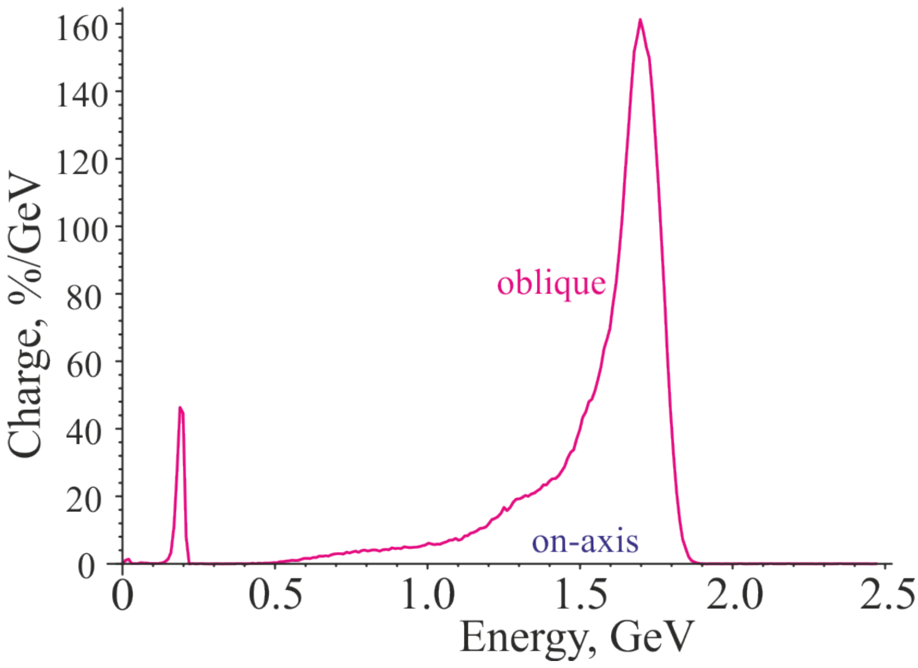

Рис. 2.11: Энергетический спектр ускоренных электронов на выходе из плазменной секции для случая осевой (синяя кривая) и "косой"(красная кривая) инжекции.

3: Нелинейный отклик

Как уже было сказано в разделе 2.2, линейное приближение, в котором получена аналитика для кильватерного потенциала, работает лишь при плотности плазмы выше плотности пучка. Однако, протонный пучок, влетая в плазменную секцию в эксперименте AWAKE, пройдет через плазму с широким интервалом плотности: от нуля до базовой n_0. Поэтому необходимо исследовать отклик также и при низкой плотности плазмы используя единственный доступный в этом случае метод - моделирование.

3.1 Вылет плазменных электронов при низкой плотности плазмы

Моделирование программой LCODE показывает, что в обсуждаемой в работе задаче (Рис. 1.3) в некотором диапазоне плотностей плазмы ниже плотности пучка n_b наблюдается вылет плазменных электронов за границу плазменного столба(Рис. 3.1).

Это явление опасно в первую очередь тем, что вылетающие электроны выносят с собой из плазмы кильватерный потенциал, оказывающий непредсказуемое влияние на электронный пучок в схеме "косой"инжекции.

Чтобы понять причину вылета электронов из плазмы при низкой плотности, найдем и изучим траектории этих частиц. Для этого с помощью теоремы Гаусса приближенно найдем электрическое поле в обсуждаемой системе (Рис. 1.3) и подставим в уравнение движения. При этом будем считать, что плазма холодная, и плотность ионов однородна внутри плазменного столба $n_i(t, z, r) = const = n_i$, а пучок имеет гаус-

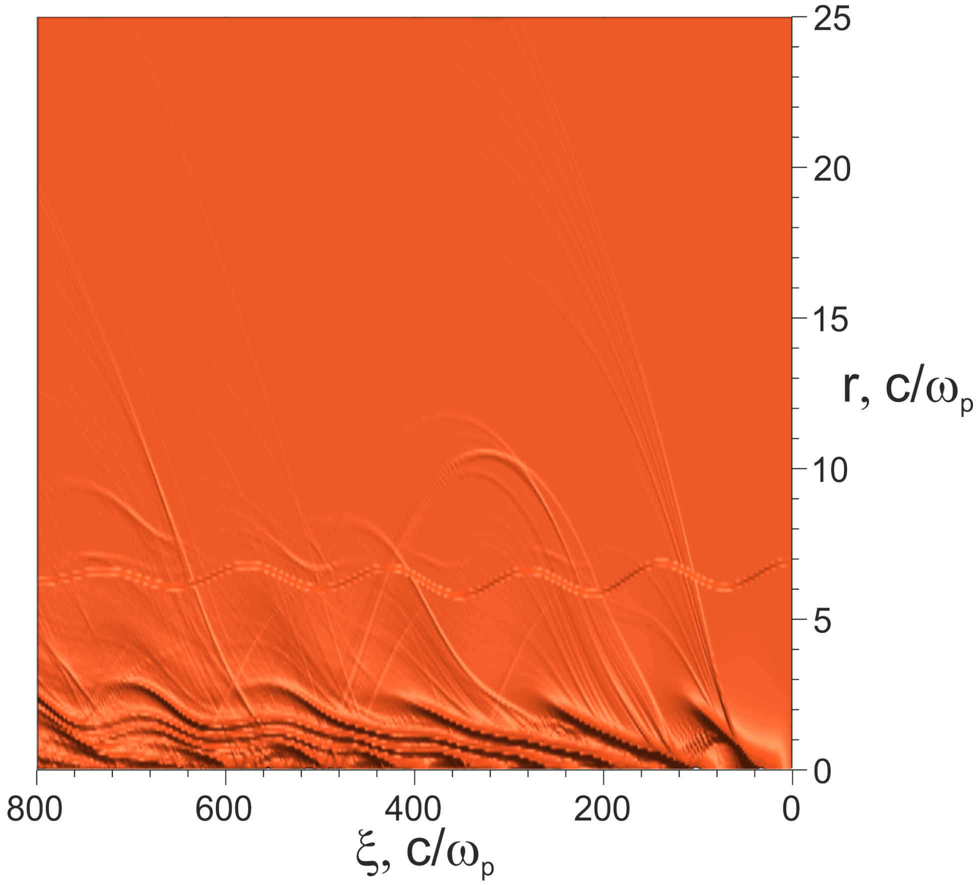

Рис. 3.1: Плазменные электроны, струями вылетающие за границу плазменного столба на пространственной диаграмме плотности плазмы.

совский профиль по обеим координатам: $n_b(\xi, r) = n_b e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2} - \frac{r^2}{2\sigma_r^2}}$, причем его продольная плотность мало меняется на исследуемом промежутке по ξ длиной L.

$$E_r(t,r) \cdot 2\pi r L = -4\pi e \int_0^r (n_e(t,r) - n_i(t,r) - n_b(t,r)) 2\pi r L dr$$

Упростим интеграл, включающий в себя неизвестную плотность электронов, воспользовавшись условием сохранения числа частиц в элементарном объеме между двумя траекториями электронов с начальными радиусами r_0 и $r_0 + dr_0$:

$$n_e(t,r) r dr = n_{e0} r_0 dr_0$$

где n_{e0} - это начальная однородная по объему плазмы плотность электронов.

Тогда окончательное выражение для радиального электрического поля примет вид:

$$E_r = -\frac{4\pi e}{r}\left[\int_0^{r_0} n_{e0} r dr - \int_0^{r} (n_i(t,r) + n_b(t,r)) r dr\right] \tag{3.1}$$

Чтобы получить уравнение траектории плазменного электрона, подставим это выражение в уравнение движения $m\frac{dV}{dt} = -eE$ и сделаем замену $\xi = z - ct$.

$$\frac{d^2 r}{d\xi^2} = \frac{4\pi e^2}{mc^2 r}\left[\int_0^{r_0} n_{e0} r dr - \int_0^{r} (n_i(\xi,r) + n_b(\xi,r)) r dr\right] \tag{3.2}$$

В данной работе это уравнение было численно решено с помощью программного пакета Wolfram Mathematica. [5] Вычисленные траектории электронов с различными начальными радиусами приведены на Рис. 3.2.

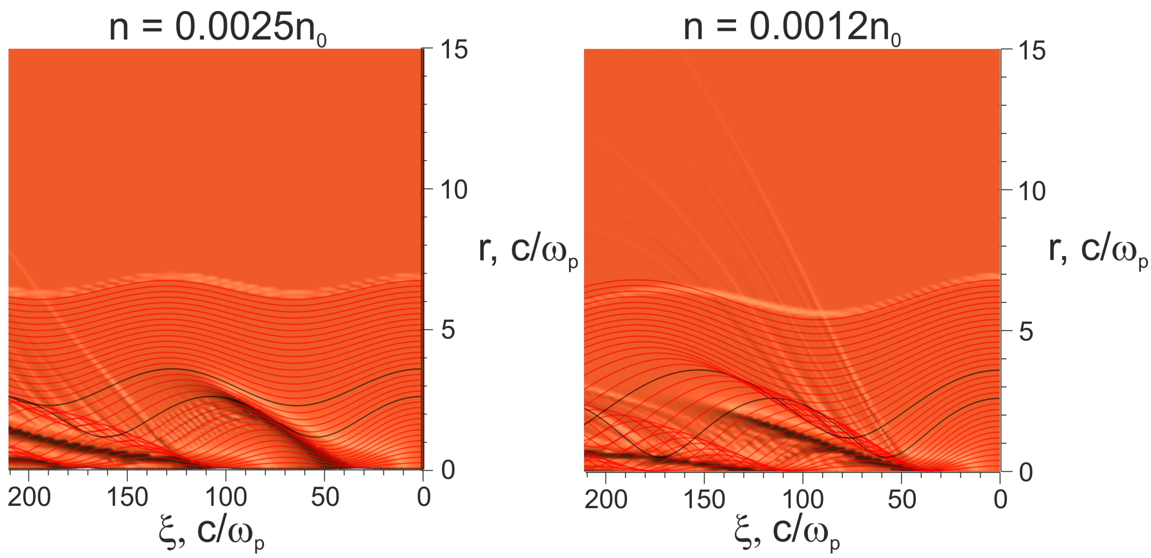

Рис. 3.2: Аналитические траектории плазменных электронов, соответствующие различной плотности плазмы, на фоне электронной плотности, полученной с помощью моделирования программой LCODE.

Приближение, в котором получены аналитические решения для траекторий не учитывает влияние их пересечений, т.е. момента опрокидывания плазменной волны, однако из сравнения аналитики с моделированием видно, что начиная с некоторой плотности плазмы электроны начинают вылетать как раз из тех областей, где произошло опрокидывание. Это можно объяснить следующим образом: в осесимметричном случае на плазменный электрон с радиусом $r = r_e$ действуют кулоновские силы со стороны только лишь тех частиц, для которых $r < r_e$. При пересечении траекторий двух электронов (черные траектории на Рис. 3.2) один из них, имевший больший радиус, попадет во внутреннюю область другого, тем самым увеличив отрицательный заряд в этой области и, соответственно, силу, выталкивающую второй электрон. Если пересечений произойдет достаточно много, что наблюдается при низкой плотности плазмы, то отталкивающая сила превзойдет притягивающую со стороны протонного пучка, и электрон беспрепятственно вылетит за пределы плазменного столба.

3.2 Искажение кильватерной волны компенсирующий током

Известно, что плазма обладает высокой проводимостью, а значит, при прохождении через нее пучка заряженных частиц, имеющего ненулевой ток, в этой среде, в силу сохранения магнитного потока, возникнет обратный ток, равный по величине току пучка - так называемый компенсирующий ток. Частицы плазмы, генерирующие кильватерную волну в такой системе, приобретут постоянную компоненту скорости, и как любой движущийся источник, изменят частоту излучаемой волны на $\delta\omega(r) \sim j_z(r) = -en(r)V_z$. Профиль плотности пучка в обсуждаемой задаче имеет форму, зависящую от радиуса, следовательно, волна будет по-разному искажаться в зависимости от поперечной координаты. Для случая гауссовской формы пучка, частота колебаний на оси системы будет ниже, чем на границе плазмы, что можно наблюдать на диаграмме радиальной силы, полученной в результате моделирования (Рис. 3.3).

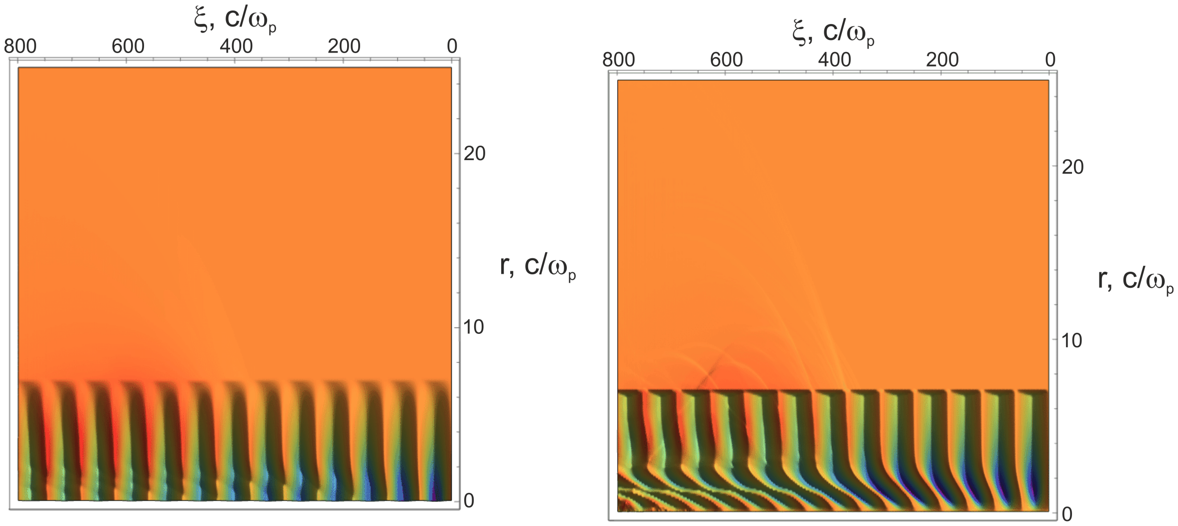

Рис. 3.3: Искажение структуры кильватерного потенциала (левый рисунок) и радиальной компоненты силы (правый рисунок) компенсирующим током.

Можно было бы ожидать то же самое и от диаграммы кильватерного потенциала, производная по радиусу которого является радиальной силой, однако поперечного искажения волны на этом графике не наблюдается (Рис. 3.3). Потенциал ведет себя так, как это предсказывают аналитические выражения, полученные в разделе 2.1 в линейном приближении: он осциллирует строго с плазменной частотой вдоль продольной координаты ξ при любом радиусе.

4: Заключение

В данной работе получены и проанализированы аналиnические выражения для кильватерного потенциала в осесимметричной задаче об отклике ограниченного столба плазмы на ультрарелятивистский пучок заряженных частиц. С использованием моделирования программой LCODE определена область применимости последних. Полученная аналитика согласуется с зарубежными статьями на схожую тему. [1]

С помощью аналитических выражений и моделирования программой LCODE в работе исследовано влияние областей неоднородной плотности в эксперименте AWAKE, запуск которого запланирован на конец 2016 года.

А именно:

- Обнаружен эффект возрастания кильватерного потенциала на оси при понижении плотности плазмы.
- Показано отсутствие сил, действующих на заряженную частицу снаружи плазменного столба.
- Показана необходимость использования схемы "косой"инжекции в эксперименте AWAKE.
- Выявлено и объяснено явление вылета электронов из плазмы низкой плотности в контексте обсуждаемой задачи.
- Продемонстрировано как компенсирующий ток по-разному искажает структуру кильватерного потенциала и полей.

Литература

[1] Y. Fang, et al., The effect of plasma radius and profile on the development of self-modulation instability of electron bunches, Physics of Plasmas (2014), http://dx.doi.org/10.1063/1.4872328

[2] A. Caldwell, et al., Path to AWAKE: Evolution of the concept, Nuclear Instruments Methods in Physics Research A (2016), http://dx.doi.org/10.1016/j.nima.2015.12.050

[3] E. Gschwendtner, et al., AWAKE, The Advanced Proton Driven Plasma Wakefield Acceleration Experiment at CERN, Nuclear Instruments Methods in Physics Research A (2016), http://dx.doi.org/10.1016/j.nima.2016.02.026

[4] LCODE http://www.inp.nsk.su/~lotov/autobuilds-lcode/lcode-stable/manual-r652/manual.pdf.

[5] Wolfram Mathematica https://www.wolfram.com/mathematica/.

А: Вывод возмущения плотности плазмы

Выражение для возмущения несложно получить из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + n_0 div\vec{V} = 0,$$

продифференцировав его по времени, выразив произвозную скорости по времени из лианеризованного уравнения движения

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

и подставив дивергенцию электрического поля из одного из уравнений Максвелла

$$div\vec{E} = 4\pi(\rho_b - \delta n).$$

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} = -n_0 div\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{n_0 e}{m} div\vec{E} = \omega_p^2(\frac{\rho_b}{e} - \delta n)$$

Сделаем замену $\xi = z - ct$ и выразим итоговое уравнение на δn.

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial \xi^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2}\delta n = \frac{q}{e}\frac{\omega_p^2}{c^2} n_b f_{\parallel}(\xi) f_{\perp}(r) \qquad (A.1)$$

Решить это уравнение можно так же, как уравнение (2.2) с помощью функции Грина. Фундаментальными решениями уравнения (А.1) являются $sin(k_p\xi)$ и $cos(k_p\xi)$. Учитывая, что возмущение плазмы не может распространяться со скоростью большей скорости света, т.е. $\delta n = 0$ при $\xi > \xi_0$, а также условие непрерывности по ξ, получим следующую функцию Грина:

$$G(\xi, \xi_0) = \begin{cases} -\frac{q}{e} n_b f_\perp(r) sin(k_p(\xi - \xi_0)) & \xi < \xi_0 \\ 0 & \xi \geq \xi_0 \end{cases} \tag{A.2}$$

В результате, возмущение плотности плазмы может быть найдено интегрированием функции Грина с продольной плотностью пучка.

$$\delta n = -\frac{q}{e} k_p n_b f_\perp(r) \int_{-\infty}^{\xi} f_\parallel(\xi_0) sin(k_p(\xi - \xi_0)) d\xi_0 \tag{A.3}$$