

**МИНИСТЕРСТВО
ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное агентство
по образованию**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра физики плазмы**

Черноштанов Иван Сергеевич

Квалификационная работа на соискание степени бакалавра

**Нелинейная стадия альфвеновской ионно-циклотронной
неустойчивости**

**Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Цицулко Юрий Александрович**

Новосибирск-2008

Содержание

1	Введение	2
2	Качественное рассмотрение развития альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости	4
3	Класс точных решений уравнений Власова-Максвелла для альфвеновской волны	6
3.1	Гамильтониан	6
3.2	Самосогласованное решение	7
4	Модели плазмы с инжекцией	9
4.1	Кинетическое уравнение	9
4.2	Приближенное решение при малом w	10
4.2.1	Незахваченные частицы	11
4.2.2	Захваченные частицы	12
4.2.3	Самосогласованное решение для точечной инжекции	14
4.3	Численное решение для "широкой"инжекции	15
4.4	Модель со стоячей волной	16
5	Заключение	18
6	Приложение 1	19
7	Приложение 2	20
8	Приложение 3	22
9	Приложение 4	25
10	Приложение 5	26

1 Введение

В плазме с высоким β и анизотропной функцией распределения ионов наблюдается альфвеновская ионно-циклотронная неустойчивость – возникновение альфвеновских волн с частотой, близкой к ионно-циклотронной, и поляризацией в направлении вращения ионов. Она наблюдается в открытых ловушках (на установках ТМХ [1], в компактном пробкотроне ГДЛ [9, 10] и др.) и в магнитосфере [2]. В открытых ловушках она приводит к ускоренной потере заряженных частиц, в магнитосфере ограничивает анизотропию функции распределения ионов. В литературе подробно изучались критерии возникновения неустойчивости в рамках линейной теории [3] и численных моделей [2, 4]. В большинстве работ критерий возникновения описывается как

$$\beta A^n > Const, \quad (1)$$

где β – отношение давления плазмы к давлению магнитного поля, A – отношение поперечного и продольного давления плазмы (анизотропия), n близко к единице. Для описания насыщения неустойчивости нужен учет нелинейных эффектов. Существуют работы, в которых рассматриваются нелинейные альфвеновские волны, однако в них используется гидродинамическое приближение, либо β считается малой величиной [5].

Как было показано в [1], высокая анизотропия приводит к возбуждению узкого спектра альфвеновских волн вблизи циклотронной ионной частоты и развитию сильной альфвеновской турбулентности, полное описание которой является очень сложной задачей. Цель данной работы – исследовать ряд моделей, в которых возможно аналитическое описание насыщения альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости. В первой главе рассматривается плоская альфвеновская волна, распространяющаяся вдоль постоянного однородного магнитного поля в бесстолкновительной плазме. Получен класс точных решений уравнений Власова-Максвелла, описывающих такую волну.

Во второй части работы рассматривалась модель, в которой предполагается, что в слабостолкновительную плазму, помещенную в постоянное однородное магнитное поле, инжектируется пучок быстрых ионов. Этот пучок раскачивает альфвеновскую волну, распространяющуюся вдоль однородного магнитного поля. Торможение на электронах и взаимодействие в волной приводит к постепенному уменьшению энергии ионов и их уходу в условный конус потерь. Благодаря тому, что частота столкновений считается малой, в стационарном случае возможно получить уравнение, описывающее функцию распределения инжектируемых ионов.

Считая отношение магнитного поля в волне к величине однородного магнитного

поля малым параметром, можно разложить уравнение для функции распределения в ряд. В случае, когда разброс по поперечным и продольным скоростям отсутствует (точечная инжекция), можно найти аналитическое решение этого уравнения. Используя его и связь между параметрами волны и параметрами плазмы, полученную в первой части, можно выразить амплитуду и частоту волны через энергию ионов и мощность инжекции.

Для случая, когда инжекция не является точечной, было построено численное решение. Было обнаружено, что при прочих равных условиях амплитуда волны для точечной инжекции значительно превосходит амплитуду для "широкой" инжекции, и дано качественное объяснение этому явлению.

В реальных ловушках должно происходить возбуждение стоячих, а не бегущих, альфвеновских волн, поэтому необходимо рассмотрение модели со стоячей волной. Было рассмотрено движение частиц в поле такой волны и проведено его сравнение с бегущей волной. Показано, что характер движения в этих случаях существенно отличается, из-за чего модели с бегущей и стоячей волной должны давать различные результаты.

2 Качественное рассмотрение развития альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости

Рассмотрим альфвеновскую волну с частотой, близкой к циклотронной ионной, распространяющейся вдоль однородного магнитного поля в бесстолкновительной плазме. Электрическое и магнитное поля волны вращаются в одну сторону с ионами, амплитуду волны считаем малой. На рис. 1 показано, как происходит движение частиц в поле такой волны на плоскости продольной и поперечной скоростей.

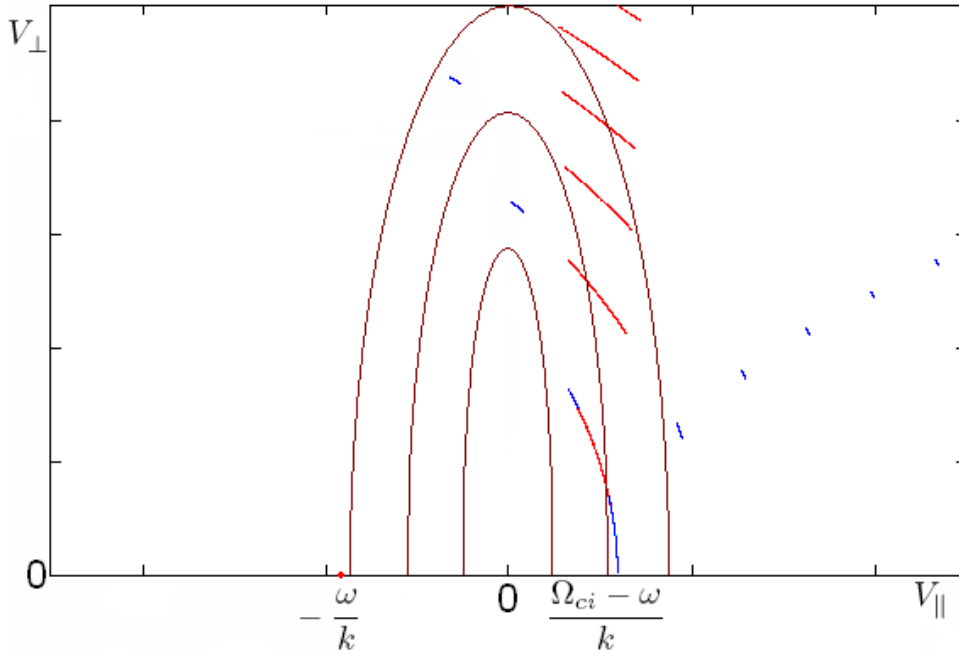


Рис. 1: Красные линии – резонансные частицы, синие – нерезонансные частицы, коричневые кривые – линии уровня анизотропной функции распределения

При отсутствии столкновений траекториями частиц являются дуги окружностей $V_{\perp}^2 + (V_{\parallel} + \omega/k)^2 = 2E/m_i$, где E – энергия частицы в системе отсчета волны. Если функция распределения ионов по скоростям является анизотропной, то, как видно из рис. 1, траектории оказываются заселенными неравномерно: частиц с большей поперечной скоростью на траектории оказывается больше, чем частиц с меньшей поперечной скоростью. Волна перемешивает частицы вдоль траектории, что приводит к уменьшению суммарной энергии частиц и передаче ее волне, из-за чего ее амплитуда увеличивается. Разность между максимальной и минимальной скоростью на траектории для частиц, удовлетворяющих условию циклотронного резонанса $\omega = \Omega_{ci} - kV_{\parallel}$ значительно

выше, чем у остальных. Поэтому перемешивание резонансных частиц приведет к более быстрому росту амплитуды волны, из-за чего они вносят наибольший вклад в развитие неустойчивости.

Тангенс угла наклона траекторий для резонансных частиц $\frac{V_{\perp}}{V_{\parallel} + \omega/k} \approx \frac{kV_{\perp}}{\Omega_{ci}} \approx \frac{kV_{\perp}}{\omega}$. Фазовая скорость волны пропорциональна альфвеновской скорости, $\frac{\omega}{k} \sim V_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho}$. Таким образом, угол наклона оказывается $\sim \beta^{-1/2}$, где $\beta = 8\pi p_{\perp}/B_0^2 \sim V_{\perp}^2/V_A^2$ – отношение давления плазмы к давлению магнитного поля. С другой стороны, чтобы линии уровня функции распределения могли пересекать траектории частиц и могла раскачиваться волна, при большем наклоне траекторий (соответствует меньшему β) должна увеличиваться анизотропия. Таким образом, для развития неустойчивости, при уменьшении одного из параметров, A или β , второй должен увеличиться, что соответствует критерию (1).

3 Класс точных решений уравнений Власова-Максвелла для альфвеновской волны

3.1 Гамильтониан

Рассмотрим движение заряженной частицы в поле циркулярно поляризованной волны с частотой ω и волновым вектором k , распространяющейся вдоль однородного магнитного поля \vec{B}_0 . Эта задача рассматривалась во многих работах, в частности, в [6, 7, 8]. В целях связности с дальнейшим повествованием в этой главе приводится ее решение, в соответствии с [7] (подробный вывод в приложении 1).

Векторный потенциал имеет вид

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1 \cos \Psi - \vec{b} \times \vec{A}_1 \sin \Psi, \quad \vec{A}_0 = xB_0\vec{e}_y, \quad \Psi = kz - \omega t, \quad \vec{b} = \vec{e}_z, \quad \vec{A}_1 = A_1\vec{e}_x \quad (2)$$

и гамильтониан для частицы сорта s

$$H_s = \frac{1}{2m_s} \left(\vec{p} - \frac{e_s}{c} \vec{A} \right)^2 = \frac{1}{2m_s} \left(\left(p_x - \frac{e_s A_1}{c} \cos(kz - \omega t) \right)^2 + \left(p_y - \frac{e_s B_0}{c} x + \frac{e_s A_1}{c} \sin(kz - \omega t) \right)^2 + p_z^2 \right). \quad (3)$$

Электрическое и магнитное поля обладают спиральной симметрией: не изменяются при одновременном сдвиге вдоль оси z на δz и повороте в плоскости x, y на угол $k\delta z$. Кроме того, в задаче имеются еще три вида симметрии: к сдвигу относительно осей x и y , а также, в системе отсчета волны – относительно сдвига по времени. Таким образом, имеются четыре интеграла движения. Переходя с помощью канонических преобразований к переменным, являющимся интегралами движения, можно получить следующий гамильтониан:

$$\mathcal{H}_{Ts}[\tau_{Ts}; \Phi_s, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}_{Ts}; \mathcal{M}_{Ts}, \mathcal{P}_{yTs}, \alpha_s] = \mathcal{M}_{Ts}^2 - \alpha_s \mathcal{M}_{Ts} + s_{ws} \sqrt{\mathcal{M}_{Ts}} \cos \Phi_s. \quad (4)$$

Здесь $\tau_{Ts} = |\Omega_{cs}|w^{2/3}t$ – перенормированное время, $\mathcal{Y}, \mathcal{P}_{yTs}, \alpha_s$ – интегралы движения,

$$\mathcal{M}_{Ts} = \frac{1}{4w^{2/3}} \left(\frac{k}{m_s \Omega_{cs}} \right)^2 \left(p_x^2 + (p_y - m_s \Omega_{cs} x)^2 \right), \quad \Phi_s = kz - \omega t + \arctan \frac{p_y - m_s \Omega_{cs} x}{p_x}, \quad (5)$$

$w = |kA_1|/|B_0|$ – безразмерная амплитуда волны, $s_{ws} = e_s A_1 / |e_s A_1|$.

На рис. 2 показаны линии уровня гамильтониана (4) на плоскости \mathcal{M}_T, Φ в полярных координатах. Видно, что при $\alpha > \alpha^* = 1.5$ есть три сорта частиц с различным характером движения: захваченные, или резонансные, у которых фаза Φ осциллирует вокруг нуля (при малом w фаза ларморовского вращения у них близка к фазе волны), и незахваченные, у которых фаза монотонно изменяется ($\dot{\Phi} > 0$ у опережающих частиц

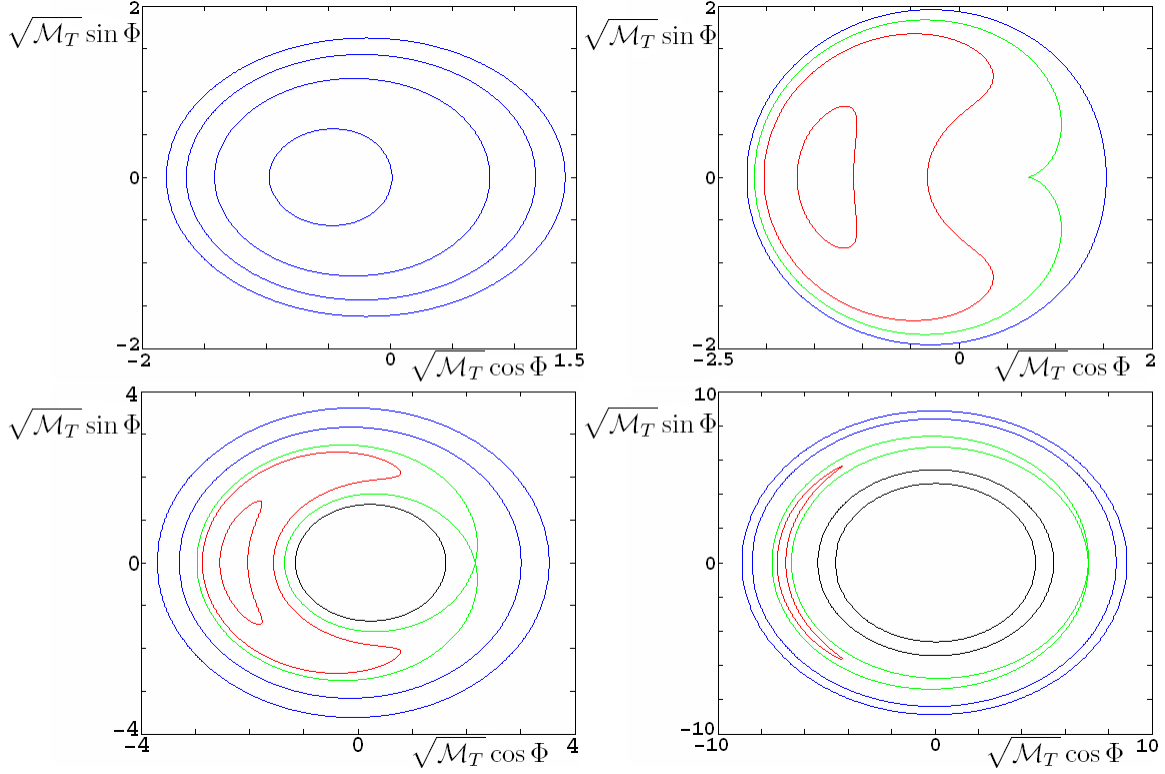


Рис. 2: Фазовые портреты траекторий, соответствующие гамильтониану (4) при $\alpha = -1$, $\alpha = \alpha^* = 1.5$, $\alpha = 5$, $\alpha = 50$. Красные линии – резонансные частицы, синие – частицы, опережающие волну, черные – отстающие от волны, зеленая линия – сепаратриса

и меньше нуля у отстающих). При увеличении параметра α область, занятая захваченными частицами, уменьшается, а при $\alpha < \alpha^*$ различие между всеми типами частиц пропадает.

В пределе $w \rightarrow 0$ \mathcal{M}_{T_s} пропорционально магнитному моменту частицы, а $\Phi = \theta + kz - \omega t$, где θ – фаза ларморовского вращения.

3.2 Самосогласованное решение

Уравнения Власова-Максвелла для бесстолкновительной плазмы имеют вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - c^2 \nabla^2 \vec{A} = 4\pi c \vec{j}, \quad \nabla \vec{A} = 0, \quad \vec{j} = \sum_{s=i,e} e_s \int \vec{v}_s f_s d^3 p = \sum_{s=i,e} \frac{e_s}{m_s} \int \left(\vec{p} - \frac{e_s}{c} \vec{A} \right) f_s d^3 p,$$

$$\frac{df_s}{dt} = \frac{\partial f_s}{\partial t} + \{f_s, H_s\} = 0, \quad H_s = \frac{1}{2m_s} \left(\vec{p} - \frac{e_s}{c} \vec{A} \right)^2, \quad \sum_{s=i,e} e_s \int f_s d^3 p = 0, \quad (6)$$

где $\{f_s, H_s\}$ – скобка Пуассона функции распределения частиц сорта s с описывающим их движение гамильтонианом H_s .

Векторный потенциал ищем в виде, аналогичном предыдущему разделу, $\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1 \cos \Psi - \vec{b} \times \vec{A}_1 \sin \Psi$, где $\Psi = k(\vec{b}\vec{r}) - \omega t$ – фаза волны, \vec{b} – единичный вектор вдоль постоянного однородного магнитного поля $\vec{B}_0 = \nabla \times \vec{A}_0$.

Используя обозначение $\vec{J} = \vec{b}j_{\parallel} + \vec{j}_{\perp} \cos \Psi + \vec{b} \times \vec{j} \sin \Psi$, из первого выражения в (6) можно получить

$$\vec{J} = \frac{k^2 c^2 - \omega^2}{4\pi c} \vec{A}_1. \quad (7)$$

Поскольку α_s и $\mathcal{H}_{T_s} = \mathcal{M}_{T_s}^2 - \alpha_s \mathcal{M}_{T_s} + s_{ws} \sqrt{\mathcal{M}_{T_s}} \cos \Phi_s$ являются интегралами движения для гамильтониана (3), произвольная функция от них является решением уравнения Власова из (6). Поэтому в качестве функций распределения электронов и ионов выберем функции $\mathcal{F}_e = \mathcal{F}_e[\mathcal{H}_{T_e}, \alpha_e]$ и $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i[\mathcal{H}_{T_i}, \alpha_i]$. Подставив их в уравнение (7), учитывая квазинейтральность плазмы и то, что суммарный импульс частиц плазмы равен нулю, получим выражения, определяющие частоту, волновой вектор и амплитуду волны:

$$\begin{aligned} \sum_{s=i,e} \frac{m_i}{m_s} \left(w^{2/3} \langle 2\mathcal{M}_T - \alpha \rangle_s - 1 \right) &= 0, \\ \omega &= \Omega_{ci} \left(w^{2/3} \langle 2\mathcal{M}_T - \alpha \rangle_i - 1 \right), \\ k^2 &= \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \sum_{s=i,e} \frac{m_i}{m_s} \left(2w^{-2/3} s_{ws} \langle \sqrt{\mathcal{M}_T} \cos \Phi \rangle_s - 1 \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\langle G(\Phi_s, \mathcal{M}_{T_s}, \alpha_s) \rangle_s = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} d\mathcal{M}_T \int_{-\pi}^{\pi} d\Phi G[\Phi, \mathcal{M}_T, \alpha] \mathcal{F}_s}{\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} d\mathcal{M}_T \int_{-\pi}^{\pi} d\Phi \mathcal{F}_s} \quad (9)$$

– среднее по функции распределения сорта s от величины G .

Первое уравнение в (8) является следствием квазинейтральности плазмы и отсутствия продольного тока (z -компонента уравнения (7)), второе возникает из равенства нулю продольного импульса плазмы, третье – из x -компоненты уравнения (7) (подробно в приложении 2).

4 Модели плазмы с инжекцией

4.1 Кинетическое уравнение

Рассмотрим плазму в однородном магнитном поле, в которую инжектируются ионы, постепенно теряющие энергию в результате трения об электроны. Будем считать, что ионы, питч-угол которых меньше угла конуса потерь $v_{\perp} < \tan \theta_L v_{\parallel}$, исчезают (модель конуса потерь). Кинетическое уравнение для инжектируемых ионов имеет вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \{H_i, f_i\} = \nu_{ie} \frac{\partial}{\partial v_i} (v_i f_i) + \mathcal{S}[\vec{p}] - \nu_L[\vec{p}] f_i - \nu_{ch} f_i. \quad (10)$$

Здесь \mathcal{S} соответствует появлению ионов в плазме в результате инжекции,

$$\nu_{ie} = \frac{4\sqrt{2\pi m_e} \Lambda e^4 n_e}{3m_i T_e^{3/2}}$$

– обратное время торможения, ν_{ch} – частота перезарядки, ν_L отлично от нуля только в конусе потерь. Будем считать столкновения и перезарядку редкими, $\nu_{ei} \sim \nu_{ch} \ll \Omega_{ci}$.

В уравнении (10) можно перейти к переменным гамильтониана (4). В нулевом приближении, когда $\nu_{ie} = \nu_{ch} = 0$, получим уравнение Власова из (6), решением которого является функция от α и \mathcal{H}_T .

В нулевом приближении переменные \mathcal{H} и α не зависели от времени. Наличие столкновений приводит к постепенному уменьшению энергии частицы и медленному (по сравнению с переменными \mathcal{M} и Φ) изменению \mathcal{H} и α . Чтобы выделить это медленное изменение, представим решение в виде $F_i = \mathcal{F}_i[\mathcal{H}_T, \alpha] + \delta f_i$, где среднее по времени $\overline{\delta f_i} = 0$ и $\delta f_i \sim (\nu_{ie}/\Omega_{ci}) \mathcal{F}_i$. Поскольку функция δf даст вклад в плотность тока, в векторном потенциале появится добавка $\vec{A} = \vec{A}_0 + \delta \vec{A}$, $\delta \vec{A} \sim (\nu_{ie}/\Omega_{ci})$, из-за чего появятся дополнительные слагаемые в гамильтониане, $H = (\vec{p} - \frac{q}{c}(\vec{A}_0 + \delta \vec{A}))^2 / (2m) = H_0 + (\nu_{ie}/\Omega_{ci}) H_1 + (\nu_{ie}/\Omega_{ci})^2 H_2$, где $\overline{H_1} = 0$. Усреднив уравнение по периоду движения и отбросив квадратичные по ν_{ie}/Ω_{ci} слагаемые, получим уравнение на $\mathcal{F}_i[\mathcal{H}_T, \alpha]$ (приложение 3):

$$\nu_{ie} \left(\overline{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \alpha} + \overline{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \mathcal{H}_T} \right) + (3\nu_{ie} - \nu_{ch} - \overline{\nu_L}) \mathcal{F}_i + \overline{\mathcal{S}}[\vec{p}] = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}} &= 2w^{2/3} \mathcal{H}_T + \frac{1}{w^{2/3}} (w^{2/3} \alpha + 1) + \frac{\omega}{w^{2/3} \Omega_{ci}} + 2(w^{2/3} \alpha + 1) \overline{\mathcal{M}_T} - 2w^{2/3} \overline{\mathcal{M}_T^2}, \\ \overline{\mathcal{B}} &= \mathcal{H}_T (1 - w^{2/3} \alpha) + \frac{w^{2/3}}{2} - \left((w^{2/3} \alpha + 1)^2 + \tilde{v}_{ph} \right) \frac{\overline{\mathcal{M}_T}}{w^{2/3}} + (w^{2/3} \alpha + 1) \overline{\mathcal{M}_T^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\overline{\mathcal{M}_T}$ и $\overline{\mathcal{M}_T^2}$ – среднее по периоду от \mathcal{M}_T и \mathcal{M}_T^2 при данном α и \mathcal{H} , $\tilde{v}_{ph} = \omega/\Omega_{ci}$ – безразмерная фазовая скорость волны.

На плоскости \mathcal{H}_T, α инжектируемым частицам соответствует линия инжекции $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{inj}[\alpha]$. Источник задается на этой линии как функция $\tilde{\mathcal{S}}[\alpha]$. В области между линией инжекции и конусом потерь решение уравнения (11) может быть записано в виде

$$\mathcal{F}_i[\mathcal{H}, \alpha] = \frac{\tilde{\mathcal{S}}[\alpha_{inj}]}{\left| \overline{\mathcal{B}}[h_{inj}, \alpha_{inj}] + \overline{\mathcal{A}}[h_{inj}, \alpha_{inj}](\alpha_{inj} + w^{-2/3})/2 \right|} \exp \left[-(3 - \nu_{ch}/\nu_{ie}) \int_{\alpha_{inj}}^{\alpha} \frac{da}{\overline{\mathcal{A}}[\hat{h}[a], a]} \right], \quad (13)$$

где функция $\hat{h}[\alpha]$ является решением уравнения характеристик

$$\frac{d\hat{h}}{da} = \frac{\overline{\mathcal{B}}[\hat{h}, a]}{\overline{\mathcal{A}}[\hat{h}, a]}. \quad (14)$$

Здесь α_{inj} – координата точки пересечения характеристики, проходящей через точку (\mathcal{H}, α) , с линией инжекции $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{inj}[\alpha]$, $h_{inj} = \hat{h}[\alpha_{inj}]$. Видно, что α_{inj} является функцией от \mathcal{H} и α .

4.2 Приближенное решение при малом w

В общем случае уравнение характеристик (14) не решается аналитически. Если амплитуда волны мала, его можно разложить по малому параметру и найти решение. Как видно из выражений (4) и (5), при конечной скорости частицы переменные $\mathcal{H}_{Ts}, \alpha_s, \mathcal{M}_{Ts}$ стремятся к бесконечности при $w \rightarrow 0$, поэтому сделаем замену $\check{\mathcal{M}} = 2w^{2/3}\mathcal{M}_T$, $\check{\alpha} = 2w^{2/3}\alpha$, $\check{\mathcal{H}} = 4w^{4/3}\mathcal{H}_T$. Движение частицы при отсутствии трения в этих переменных будет описываться гамильтонианом

$$\check{\mathcal{H}} = \check{\mathcal{M}}^2 - \check{\alpha}\check{\mathcal{M}} + 2w\sqrt{2\check{\mathcal{M}}}\cos\Phi. \quad (15)$$

Из уравнения (11) получаем

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{A}}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\check{\alpha}} + \check{\mathcal{B}}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\check{\mathcal{H}}} + \left(3 - \frac{\nu_{ch}}{\nu_{ie}}\right)\mathcal{F} &= 0, \\ \check{\mathcal{A}} &= 2 + \check{\alpha} + \check{\mathcal{H}} + 2\frac{\omega}{\Omega_{ci}} + (2 + \check{\alpha})\overline{\check{\mathcal{M}}} - \overline{\check{\mathcal{M}}^2}, \\ \check{\mathcal{B}} &= \left(1 - \frac{\check{\alpha}}{2}\right)\check{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}\left((2 + \check{\alpha})^2 + \frac{4\omega}{\Omega_{ci}}\right)\overline{\check{\mathcal{M}}} + \left(1 + \frac{\check{\alpha}}{2}\right)\overline{\check{\mathcal{M}}^2} + 2w^2, \end{aligned} \quad (16)$$

Как и для гамильтониана (4), для гамильтониана (15) существует два типа частиц с различным характером движения – захваченные или резонансными, у которых переменная Φ осциллирует при движении частицы (при малом w фаза ларморовского

вращения у них близка к фазе волны), и нерезонансные, у которых переменная Φ монотонно изменяется.

4.2.1 Незахваченные частицы

Для незахваченных частиц получаем

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \check{\mathcal{H}}}{\partial \check{\mathcal{M}}} \right)^{-1} d\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi}{2\check{\mathcal{M}} - \check{\alpha} + 2w \frac{\cos \Phi}{\sqrt{2\check{\mathcal{M}}}}},$$

$$\overline{\check{\mathcal{M}}} = \frac{1}{2\pi T} \int_0^{2\pi} \frac{\check{\mathcal{M}} d\Phi}{2\check{\mathcal{M}} - \check{\alpha} + 2w \frac{\cos \Phi}{\sqrt{2\check{\mathcal{M}}}}}, \quad \overline{\check{\mathcal{M}}^2} = \frac{1}{2\pi T} \int_0^{2\pi} \frac{\check{\mathcal{M}}^2 d\Phi}{2\check{\mathcal{M}} - \check{\alpha} + 2w \frac{\cos \Phi}{\sqrt{2\check{\mathcal{M}}}}}, \quad (17)$$

где $\check{\mathcal{M}}$ – решение уравнения $\check{\mathcal{H}} = \check{\mathcal{M}}^2 - \check{\alpha}\check{\mathcal{M}} + 2w\sqrt{2\check{\mathcal{M}}}\cos\Phi$. При $w \ll 1$ имеем

$$\check{\mathcal{M}} = \check{\mathcal{M}}_0 - 2 \frac{\sqrt{2\check{\mathcal{M}}_0} \cos \Phi}{2\check{\mathcal{M}}_0 - \check{\alpha}} w - 4 \frac{\check{\alpha} \cos^2 \Phi}{(2\check{\mathcal{M}}_0 - \check{\alpha})^3} w^2 + O(w^3). \quad (18)$$

Здесь $\check{\mathcal{M}}_0 = \check{\alpha}/2 \pm \sqrt{\check{\mathcal{H}} + \check{\alpha}^2/4}$, знак перед корнем соответствует знаку $\dot{\Phi}$. Подставляя это решение в уравнение для периода, получим

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\check{\mathcal{M}}_0 - \check{\alpha}} + \frac{2(2\check{\mathcal{M}}_0 + \check{\alpha}) \cos \Phi}{\sqrt{2\check{\mathcal{M}}_0}(2\check{\mathcal{M}}_0 - \check{\alpha})^3} w + \frac{24(2\check{\mathcal{M}}_0 + \check{\alpha}) \cos^2 \Phi}{(2\check{\mathcal{M}}_0 - \check{\alpha})^5} w^2 + O(w^3) \right) d\Phi,$$

$$T = \frac{1}{2\check{\mathcal{M}}_0 - \check{\alpha}} + 12 \frac{2\check{\mathcal{M}}_0 + \check{\alpha}}{(2\check{\mathcal{M}}_0 - \check{\alpha})^5} w^2 + O(w^4), \quad (19)$$

Аналогичные преобразования для $\overline{\check{\mathcal{M}}}$ и $\overline{\check{\mathcal{M}}^2}$ дают

$$\overline{\check{\mathcal{M}}} = \check{\mathcal{M}}_0 - 4 \frac{\check{\alpha} + \check{\mathcal{M}}_0}{(2\check{\mathcal{M}}_0 - \check{\alpha})^3} w^2 + O(w^3), \quad \overline{\check{\mathcal{M}}^2} = \check{\mathcal{M}}_0^2 + 4 \frac{3\check{\alpha}^2 \check{\mathcal{M}}_0 - 6\check{\alpha} \check{\mathcal{M}}_0^2}{(2\check{\mathcal{M}}_0 - \check{\alpha})^4} w^2 + O(w^3). \quad (20)$$

Подставляя полученные соотношения в выражения для $\check{\mathcal{A}}$ и $\check{\mathcal{B}}$, в нулевом порядке по w получаем

$$\check{\mathcal{A}} = \check{\alpha} + 2\check{\mathcal{M}}_0 + 2(1 + \tilde{v}_{ph}), \quad \check{\mathcal{B}} = \check{\mathcal{M}}(2\check{\mathcal{M}} - 3\check{\alpha} - 2(1 + \tilde{v}_{ph})). \quad (21)$$

Используя соотношение $\check{\mathcal{H}} = (\check{\mathcal{M}}_0 - \check{\alpha}/2)^2 - \check{\alpha}^2/4 = \check{\mathcal{M}}_0(\check{\mathcal{M}}_0 - \check{\alpha})$ получаем уравнения характеристик в переменных $\check{\mathcal{M}}_0, \check{\alpha}$:

$$d\check{\mathcal{M}}_0 = \frac{d\check{\mathcal{H}} + \check{\mathcal{M}}_0 d\check{\alpha}}{2\check{\mathcal{M}}_0 - \check{\alpha}}, \quad \frac{d\check{\alpha}}{d\check{\mathcal{M}}_0} = \frac{2\check{\mathcal{M}}_0 - \check{\alpha}}{\check{\mathcal{M}}_0 + \check{\mathcal{B}}/\check{\mathcal{A}}} = \frac{\check{\alpha} + 2(1 + \tilde{v}_{ph})}{2\check{\mathcal{M}}_0} + 1. \quad (22)$$

Его решение

$$\check{\alpha} = 2\check{\mathcal{M}}_0 - 2(1 + \check{v}_{ph}) + Const\sqrt{\check{\mathcal{M}}_0}. \quad (23)$$

На плоскости \mathcal{H}, α характеристики для незахваченных частиц задаются параметрически как

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\mathcal{M}_T - \frac{1 + \check{v}_{ph}}{w^{2/3}} + \left(\alpha_{inj} - 2\mathcal{M}_{inj} + \frac{1 + \check{v}_{ph}}{w^{2/3}} \right) \sqrt{\frac{\mathcal{M}_T}{\mathcal{M}_{inj}}}, \\ \mathcal{H}_T &= \mathcal{M}_T^2 - \alpha\mathcal{M}_T, \\ \mathcal{M}_{inj} &= \frac{\alpha_{inj}}{2} \pm \sqrt{\mathcal{H}_{inj} + \frac{\alpha_{inj}^2}{4}}. \end{aligned} \quad (24)$$

В соответствии с (13) функция распределения, описывающая незахваченные частицы, может быть записана в виде

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{inj} \left(\frac{\mathcal{M}_{inj}}{\mathcal{M}_T} \right)^{(3-\nu_{ch}/\nu_{ie})/2}, \quad (25)$$

где \mathcal{M}_T и \mathcal{M}_{inj} выражаются через α и α_{inj} посредством (24), $\mathcal{F}_{inj} = \mathcal{F}_{inj}[\alpha_{inj}]$ – значение функции распределения на кривой инжекции, определяемое видом источника.

4.2.2 Захваченные частицы

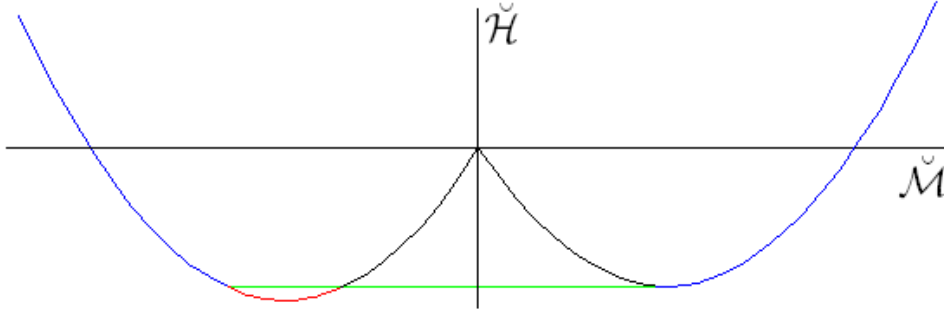


Рис. 3: Сечение гамильтониана при $w \ll 1$.

На рис. 3 показано сечение графика гамильтониана $\check{\mathcal{H}} = \check{\mathcal{M}}^2 - \check{\alpha}\check{\mathcal{M}} + 2w\sqrt{2\check{\mathcal{M}}}\cos\Phi$ полуплоскостями $\Phi = 0$ и $\Phi = \pi$ при $w \ll 1$. Синим цветом обозначены частицы, опережающие волну, черным – отстающие от волны, красным – захваченные частицы, зеленым – энергия частиц на сепаратрисе. Захваченные частицы располагаются в области $\check{\mathcal{H}}_1 < \check{\mathcal{H}} < \check{\mathcal{H}}_2$, где $\check{\mathcal{H}}_1$ – глобальный минимум гамильтониана, а $\check{\mathcal{H}}_2$ – седловая точка. $\check{\mathcal{H}}_1$ и $\check{\mathcal{H}}_2$ являются решениями уравнения $\left. \frac{\partial \check{\mathcal{H}}}{\partial \check{\mathcal{M}}} \right|_{\Phi=\pi/2 \pm \pi/2}$,

$$\check{\mathcal{H}}_1 = -\frac{\check{\alpha}^2}{4} + 2w\sqrt{\check{\alpha}} + \frac{3}{\check{\alpha}}w^2 + O(w^3), \quad \check{\mathcal{H}}_2 = -\frac{\check{\alpha}^2}{4} - 2w\sqrt{\check{\alpha}} + \frac{3}{\check{\alpha}}w^2 + O(w^3), \quad (26)$$

Видно, что для захваченных частиц $\check{\mathcal{H}} = -\check{\alpha}^2/4 + w\check{h}$, где \check{h} порядка единицы. При $w = 0$ решением уравнений характеристик на плоскости $\check{\mathcal{H}}, \check{\alpha}$, для частиц с нулевой продольной скоростью является $\check{\mathcal{H}} = -\check{\alpha}^2/4 + (1 + \check{v}_{ph})^2$. Видно, что при инжекции частиц с $v_{\parallel} = 0$ захваченные частицы возникают лишь при условии, что безразмерная фазовая скорость волны \check{v}_{ph} отличается от единицы на величину порядка \sqrt{w} .

Выражение для периода движения

$$T = -2 \int_{\mathcal{M}_{\min}}^{\mathcal{M}_{\max}} \left(\frac{\partial \check{\mathcal{H}}}{\partial \check{\Phi}} \right)^{-1} d\check{\mathcal{M}} = 2 \int_{\check{\mathcal{M}}_{\min}}^{\check{\mathcal{M}}_{\max}} \frac{d\check{\mathcal{M}}}{\sqrt{2w^2\check{\mathcal{M}} - (\check{\mathcal{H}} + \check{\alpha}\check{\mathcal{M}} - \check{\mathcal{M}}^2)^2}}. \quad (27)$$

Как видно из выражения для гамильтониана, у захваченных частиц переменная $\check{\mathcal{M}}$ отличается от $\alpha/2$ на величину порядка \sqrt{w} , поэтому в интеграле (27) сделаем замену $\check{\mathcal{M}} = \alpha/2 + \sqrt{w}y$. В результате получим

$$T = \frac{1}{\sqrt{w}} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{4\check{\alpha} + 8\sqrt{w}y - (y^2 - \check{h})^2}}, \quad (28)$$

где y_1 и y_2 – решения уравнения $4\check{\alpha} + 8\sqrt{w}y - (y^2 - \check{h})^2 = 0$. Дважды проинтегрировав это выражение по $\check{\alpha}$ и разложив результат по w , получим

$$\int \int T d\check{\alpha} = -\frac{4\sqrt{2}\check{\alpha}^{1/4}\sqrt{1-\check{\beta}}}{105\sqrt{w}} \left((16\check{\alpha}^{3/2}\check{\beta}(\check{\beta}^2 - 2) - 105w)E \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right] + \right. \\ \left. + (4\check{\alpha}^{3/2}(4\check{\beta}^2 + 3\check{\beta} - 5) + 105w)K \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right] + O(w^2) \right), \quad (29)$$

где $\check{\beta} = \check{h}/(2\sqrt{\check{\alpha}})$ ($\check{\beta}$ изменяется от -1 до 1), $E(x)$ и $K(x)$ – эллиптические функции

$$E[x] = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x \sin^2 \theta} d\theta, \quad K[x] = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x \sin^2 \theta}}. \quad (30)$$

Дважды продифференцировав по $\check{\alpha}$, получим

$$T = \frac{1}{\sqrt{w}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\check{\alpha}^{1/4}\sqrt{1-\check{\beta}}} K \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right] + \frac{(4\check{\beta}^2 - 3)E \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right] + (3 + 4\check{\beta})K \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right]}{2\sqrt{2}\check{\alpha}^{7/4}\sqrt{1-\check{\beta}(1+\check{\beta})}} w + O(w^2) \right). \quad (31)$$

Сделав аналогичные вычисления для $\overline{\check{\mathcal{M}}}$ и $\overline{\check{\mathcal{M}}^2}$, получим

$$\overline{\check{\mathcal{M}}} = \frac{\check{\alpha}}{2} - \frac{w}{\sqrt{\check{\alpha}}} \left(1 + \frac{(\check{\beta}-1)E \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right]}{K \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right]} \right) + O(w^2), \\ \overline{\check{\mathcal{M}}^2} = \frac{\check{\alpha}^2}{4} + w\sqrt{\check{\alpha}} \left(2\check{\beta} - 3 - 3 \frac{(\check{\beta}-1)E \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right]}{K \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right]} \right) + O(w^2). \quad (32)$$

Перейдем от $\check{\mathcal{H}}$ и $\check{\alpha}$ к переменным $\check{h} = (\check{\mathcal{H}} + \check{\alpha}^2/4)/w$ и $\check{\beta} = \check{h}/(2\sqrt{\check{\alpha}})$. Учитывая, что фазовая скорость слабо отличается от единицы, $\check{v}_{ph} + 1 \sim \sqrt{w}$, из уравнений характеристик получим

$$\frac{d\check{h}}{d\check{\beta}} = \frac{\check{h}}{\check{\beta} - 1} \left(2 - \frac{1}{\check{\beta}} + \frac{E \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right]}{K \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right] - E \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right]} \right) + O(\sqrt{w}). \quad (33)$$

Решение этого уравнения

$$h = Const \left(K \left[\frac{\check{\beta} + 1}{\check{\beta} - 1} \right] - E \left[\frac{\check{\beta} + 1}{\check{\beta} - 1} \right] \right)^2 \check{\beta}(\check{\beta} - 1). \quad (34)$$

Выражение для характеристик на плоскости \mathcal{H}_T , α может быть записано параметрически

$$\alpha = \alpha_{inj} \frac{\check{\beta}_{inj}^2 G^2[\check{\beta}]}{\check{\beta}^2 G^2[\check{\beta}_{inj}]}, \quad \mathcal{H}_T = \left(\mathcal{H}_{inj} + \frac{\alpha_{inj}^2}{4} \right) \frac{G[\check{\beta}]}{G[\check{\beta}_{inj}]} - \frac{\alpha^2}{4}, \quad \check{\beta}_{inj} = \frac{4\mathcal{H}_{inj} + \alpha_{inj}^2}{\sqrt{8\alpha_{inj}}}, \quad (35)$$

где функция $G[\check{\beta}]$ определяется выражением

$$G[\check{\beta}] = \check{\beta}(\check{\beta} - 1) \left(K \left[\frac{\check{\beta} + 1}{\check{\beta} - 1} \right] - E \left[\frac{\check{\beta} + 1}{\check{\beta} - 1} \right] \right)^2. \quad (36)$$

Таким образом, в соответствии с (13) функция распределения

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{inj} \left(\frac{\alpha_{inj}}{\alpha} \right)^{(3-\nu_{ch}/\nu_{ie})/2}. \quad (37)$$

4.2.3 Самосогласованное решение для точечной инжекции

Как было показано в главе 2, развитие неустойчивости определяется размешиванием частиц на траекториях. При малой амплитуде волны разность между максимальной и минимальной скоростью на траектории для захваченных частиц пропорциональна \sqrt{w} , а для нерезонансных частиц она значительно меньше – пропорциональна w . Поскольку размер траекторий для резонансных частиц значительно превышает размер траекторий для незахваченных частиц, перемешивание на резонансных траекториях приводит к более быстрому росту амплитуды волны. Отсюда следует, что при точечной инжекции нарастать будут волны с такими параметрами, чтобы большая часть инжектируемых частиц оказывались захваченными.

Найдем решение самосогласованной задачи – системы из уравнений Максвелла и кинетического уравнения (11), считая амплитуду волны малой, $w \ll 1$. Решением кинетического уравнения для резонансных частиц является (37). Подставив его в первое

соотношение в (8), получим, что частота волны может отличаться от циклотронной ионной лишь на величину порядка w : $\omega/\Omega_{ci} + 1 \sim w$. При этом условии вкладом нерезонансных частиц в среднее по функции распределения в (8) можно пренебречь. Подставим функцию распределения для захваченных частиц в (8) и разложим результат по w . В результате получим выражения, связывающие частоту и амплитуду волны с энергией инжектируемых ионов E_{inj} и мощностью инъекции J_{inj} :

$$w = \frac{\tilde{\beta}}{(k\rho)^{5/4}} F_B \left[\frac{\nu_{ch}}{\nu_{ei}} \right] = \frac{8\pi E_{inj}}{(k\rho)^{5/4} B_0^2} \sqrt{\frac{J_{inj} n_i}{\nu_{ie}}} F_B \left[\frac{\nu_{ch}}{\nu_{ei}} \right], \quad \frac{\omega}{\Omega_{ci}} = -1 + \frac{w}{\sqrt{k\rho}} F_\omega \left[\frac{\nu_{ch}}{\nu_{ie}} \right], \quad (38)$$

где ρ – ларморовский радиус инжектируемых ионов. Здесь $\tilde{\beta} = \frac{8\pi E_{inj}}{B_0^2} \sqrt{\frac{J_{inj} n_i}{\nu_{ie}}}$ по порядку величины совпадает с отношением давления плазмы к давлению магнитного поля, функции $F_B[x]$ и $F_\omega[x]$ определяются выражениями (95) и (96).

При подстановке одно из уравнений в (8) обратилось в тождество. Это связано с тем, что в данной модели могут существовать волны с любым волновым числом. Если искать волну с максимальной амплитудой, то нужно выбирать как можно меньшие k . В данной модели с пространственно неограниченной плазмой волновое число может быть сколь угодно мало, однако реальная плазма ограничена, и максимальная длина волны в ней – порядка размеров плазмы.

4.3 Численное решение для "широкой" инъекции

В случае точечной инъекции анизотропия функции распределения определялась параметрами резонансных траекторий. Рассмотрим случай, когда размер области инъекции значительно превышает размер траекторий и анизотропия определяется параметрами инъекции.

Пример численного решения для случая, когда распределение по продольным скоростям инжектируемых частиц прямоугольное, а разброс по поперечным скоростям отсутствует, представлен на рис. 4, где на плоскости $V_{||}, V_{\perp}$ изображен логарифм функции распределения для захваченных (справа) и всех (слева) частиц. Видно, что отношение числа резонансных частиц к числу нерезонансных мало.

Из формул (38) получаем, что при тех же параметрах инъекции амплитуда волны в случае точечной инъекции равна $w = 0.041$ и гораздо выше, чем в случае широкой.

Из выражений (56), (57) и (58) видно, что амплитуда волны пропорциональна току J_x , который оказывается пропорциональным среднему от $\sqrt{\mathcal{M}_T} \cos \Phi$. Из рис. 2 видно, что среднее по траектории от $\sqrt{\mathcal{M}_T} \cos \Phi$ для нерезонансных частиц близко к нулю и

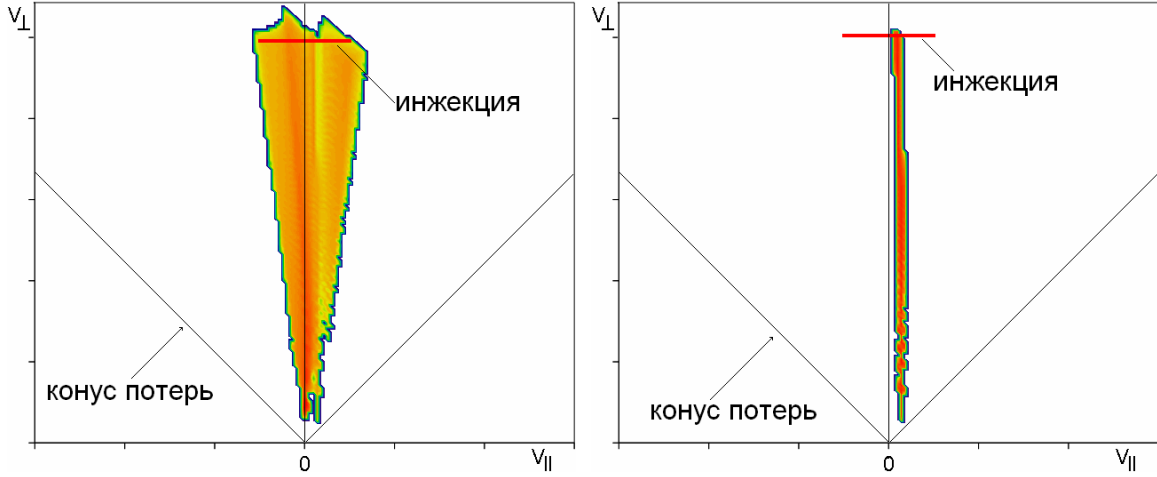


Рис. 4: Численное решение для "широкой"инжекции. $k\rho = 1$, $\tilde{\beta} = 0.018$, $\nu_{ie} = \nu_{ch}$, $w = 5 \cdot 10^{-5}$

заметно отлично от нуля для резонансных частиц. В случае точечной инжекции все инжектируемые частицы оказываются резонансными, что приводит к большому вкладу в ток и к большой амплитуде волны. В случае широкой инжекции вклад от нерезонансных частиц из-за их большого числа оказывается сравнимым с вкладом от захваченных ионов и компенсирует его, что приводит к значительно меньшей амплитуде волны.

4.4 Модель со стоячей волной

До сих пор предполагалось, что инжектируемые частицы возбуждают в плазме бегущую волну. Как видно из дисперсионного соотношения для альфвеновской волны, она не может распространяться, если циклотронная ионная частота плазмы меньше частоты волны. Поэтому в реальных ловушках волна будет отражаться от областей слабого магнитного поля, что приведет к возбуждению стоячей волны (наблюдение стоячих альфвеновских волн при инжекции частиц в пробкотрон описывается в работе [1]).

Рассмотрим движение заряженных частиц в поле стоячей волны. В системе координат, где ось z направлена вдоль внешнего магнитного поля \vec{B}_0 , ее векторный потенциал можно записать как $\vec{A} = A_1 \{\cos(\omega t) \cos(kz), \sin(\omega t) \cos(kz), 0\}$. Электрическое и магнитное поля гармонически зависят от z и вращаются в плоскости x, y в одну сторону с ионами. Видно, что электрическое и магнитное поля волны инвариантны к сдвигам в плоскости x, y , а так же к одновременному сдвигу по времени на δt и повороту в плоскости x, y на угол $\omega \delta t$, то есть имеются три интеграла движения. После ряда преобразований, аналогичных описанным в приложении 1, можно получить гамильтониан,

описывающий движение иона в поле стоячей альфвеновской волны:

$$\mathcal{H}_i[\tau; \Phi, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; \mathcal{M}, \mathcal{P}_y, \mathcal{P}] = \left(1 + \frac{\omega}{\Omega_{ci}}\right) \mathcal{M} + \frac{(\mathcal{P} - \mathcal{M})^2}{2} + 2s_{ws} \sqrt{2\mathcal{M}} w \cos \mathcal{Z} \cos(\Phi + \mathcal{Z}) + 2w^2 \cos^2 \mathcal{Z}, \quad (39)$$

где \mathcal{Y} и \mathcal{P}_y являются интегралами движения,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m_i \Omega_{ci}} \right)^2 \left(p_x^2 + (p_y - m_i \Omega_{ci} x)^2 \right), \quad \Phi = \arctan \frac{p_y - m_i \Omega_{ci} x}{p_x} - kz - \omega t, \\ \mathcal{P} &= \frac{k}{m_i \Omega_{ci}} p_z + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m_i \Omega_{ci}} \right)^2 \left(p_x^2 + (p_y - m_i \Omega_{ci} x)^2 \right), \quad \mathcal{Z} = kz, \quad \tau = |\Omega_{ci}| t. \end{aligned} \quad (40)$$

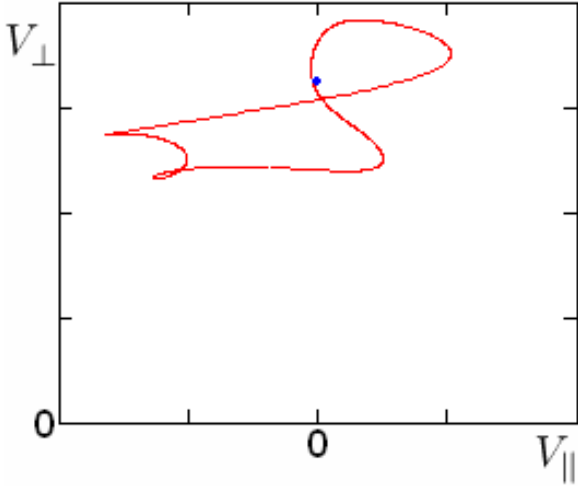


Рис. 5: Численное решение для стоячей волны при $w = 10^{-4}$. Синие точки – начальное положение частиц, красные точки – положение частиц при $\tau = 100$

На рис. 5 приведен пример численного решения уравнений движения для группы частиц в стоячей альфвеновской волне. Как указывалось в пункте 4.2.3, в случае одной бегущей волны малой амплитуды изменение скорости частицы при движении мало. Как показывает численное решение, изменение скорости частицы может быть значительным даже в случае слабой волны. Сильные различия характера движения в этих случаях указывает на то, что результаты, получаемые из моделей с бегущей и стоячей волнами, могут заметно различаться.

5 Заключение

В данной работе рассмотрен ряд моделей, описывающих состояние насыщения альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости. Дано качественное объяснение развития неустойчивости в плазме с анизотропной функцией распределения ионов и указана большая роль резонансных частиц – удовлетворяющих условию циклотронного резонанса $kV_{\parallel} = \omega - \Omega_{ci}$. При решении уравнений Власова-Максвелла получен класс точных решений, описывающих альфвеновскую волну, распространяющуюся вдоль однородного магнитного поля в однородной плазме. В модели, где анизотропия поддерживается инжекцией ионов в плазму, получены уравнения, описывающие стационарную функцию распределения инжектируемых ионов. Для нулевого разброса инжектируемых частиц по скоростям (точечная инжекция) и волны малой амплитуды в этой модели получена аналитическая связь между параметрами волны и параметрами инжекции. Для неточечной инжекции было построено численное решение. Показано, что в случае точечной инжекции амплитуда волны значительно выше, чем в случае широкой, что связано с компенсацией вкладов от резонансных и нерезонансных частиц.

Также численно исследовано движение частиц в поле стоячей альфвеновской волны. Показано, что характер движения частиц в стоячей и бегущей волне существенно различается. Поэтому модель со стоячей волной может давать результаты, отличные от тех, что получены в рассмотренных моделях с бегущей волной.

6 Приложение 1

Рассмотрим движение частицы, описываемой гамильтонианом (3). Сделаем каноническое преобразование с производящей функцией

$$\mathcal{F}_0 [\mu, P_y, P_z, \vec{r}] = \mu (\Theta + \sin \Theta \cos \Theta) + P_y y + P_z z, \quad (41)$$

где $\Omega_{sc} = e_s B_0 / (m_s c)$ есть циклотронная частота частицы сорта s , а функция функция $\Theta[\mu, P_y, x]$ определяется соотношением

$$P_y = m_s \Omega_{cs} (x + \rho \sin \Theta). \quad (42)$$

Здесь $\rho = \sqrt{2\mu / |m_s \Omega_{cs}|}$ – ларморовский радиус частицы. Используя следующие соотношения

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \Theta} = 2\mu \cos^2 \Theta, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \mu} = \frac{-\sin \Theta}{2\mu \cos \Theta}, \quad \nabla \Theta = \frac{-\vec{e}_x}{\rho \cos \Theta}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial P_y} = \frac{1}{m_s \Omega_{cs} \rho \cos \Theta}, \quad (43)$$

получаем связь между старыми и новыми переменными

$$\begin{aligned} \{x, y, z\} &= \left\{ \frac{P_y}{m_s \Omega_{cs}} - \rho \sin \theta, Y - s_{cs} \rho \cos \theta, Z \right\}, \quad \{p_x, p_y, p_z\} = \{-m_s |\Omega_{cs}| \rho \cos \theta, P_y, P_z\}, \\ \theta = \Theta &= -s_{cs} \arctan \left[\frac{p_y - m_s \Omega_{cs} x}{p_x} \right], \quad \mu = \frac{1}{2m_s |\Omega_{cs}|} \{p_x^2 + (p_y - m_s \Omega_{cs} x)^2\}, \quad s_{cs} \equiv \frac{\Omega_{cs}}{|\Omega_{cs}|}. \end{aligned} \quad (44)$$

Соответствующий гамильтониан

$$\tilde{H}_s = |\Omega_{cs}| \mu + \frac{P_z^2}{2m_s} + \sqrt{2\mu m_s |\Omega_{cs}|} \frac{e_s A_1}{m_s c} \cos [-s_{cs} \theta + kZ - \omega t] + \frac{e_s^2 A_1^2}{2m_s c^2}. \quad (45)$$

Сделаем второе преобразование с производящей функцией

$$\mathcal{F}_1 [\tilde{\mu}, \tilde{P}_y, \tilde{P}_z; \theta, Y, Z; t] = \tilde{\mu} \{\theta - s_{cs} (kZ - \omega t)\} + \tilde{P}_y Y + \tilde{P}_z Z, \quad (46)$$

которое дает

$$\begin{aligned} \mu &= \tilde{\mu}, \quad P_y = \tilde{P}_y, \quad P_z = \tilde{P}_z - s_{cs} k \tilde{\mu}, \\ \Phi_s &= \theta - s_{cs} (kZ - \omega t), \quad \tilde{Y} = Y, \quad \tilde{Z} = Z \end{aligned} \quad (47)$$

и

$$\tilde{H}_s [t; \Phi_s, \tilde{Y}, \tilde{Z}; \tilde{\mu}, \tilde{P}_y, \tilde{P}_z] = (|\Omega_{cs}| + s_{cs} \omega) \tilde{\mu} + \frac{(\tilde{P}_z - s_{cs} k \tilde{\mu})^2}{2m_s} + \sqrt{2\tilde{\mu} m_s |\Omega_{cs}|} \frac{e_s A_1}{m_s c} \cos \Phi_s. \quad (48)$$

Обезразмерим переменные на массу и циклотронную частоту частицы и на волновой вектор волны. В результате получим

$$\begin{aligned}\Phi_s &= \Phi_s, \quad \mathcal{M}_s = \tilde{\mu} \frac{k^2}{m_s |\Omega_{cs}|}, \quad \mathcal{Y} = \tilde{Y} k, \quad \mathcal{P}_{ys} = \tilde{P}_y \frac{k}{m_s |\Omega_{cs}|}, \quad \mathcal{Z} = \tilde{Z} k, \quad \mathcal{P}_s = \tilde{P}_z \frac{k}{m_s |\Omega_{cs}|}, \\ \tau_s &= t |\Omega_{cs}|, \quad \mathcal{H}_s = \tilde{H}_s \frac{k^2}{m_s \Omega_{cs}^2}, \quad \tilde{v}_{\phi s} = \frac{\omega}{\Omega_{cs}}, \quad w = \frac{|A_1 k|}{|B_0|}, \quad s_{ws} = \frac{e_s A_1}{|e_s A_1|}, \\ \mathcal{H}_s[\tau_s; \Phi_s, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; \mathcal{M}_s, \mathcal{P}_y, \mathcal{P}_s] &= (1 + \tilde{v}_{\phi s}) \mathcal{M}_s + \frac{(\mathcal{P}_s - s_{cs} \mathcal{M}_s)^2}{2} + s_{ws} \sqrt{2 \mathcal{M}_s w} \cos \Phi_s.\end{aligned}\quad (49)$$

Сделаем новое преобразование

$$\begin{aligned}\Phi_s &= \Phi_s, \quad \mathcal{M}_{Ts} = \mathcal{M}_s / (2w^{2/3}), \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}, \quad \mathcal{P}_{yTs} = \mathcal{P}_{ys} / (2w^{2/3}), \\ \mathcal{Z} &= \mathcal{Z}, \quad \check{\mathcal{P}}_s = \mathcal{P}_s / (2w^{2/3}), \quad \tau_{Ts} = \tau_s w^{2/3}, \quad \check{\mathcal{H}}_s = \mathcal{H}_s / (2w^{4/3}), \\ \check{\mathcal{H}}_s[\tau_{Ts}; \Phi_s, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; \mathcal{M}_{Ts}, \mathcal{P}_{yTs}, \check{\mathcal{P}}_s] &= \mathcal{M}_{Ts}^2 - \left(2s_{cs} \check{\mathcal{P}}_s - \frac{1 + \tilde{v}_{\phi s}}{w^{2/3}}\right) \mathcal{M}_{Ts} + s_{ws} \sqrt{\mathcal{M}_{Ts}} \cos \Phi_s + \check{\mathcal{P}}_s^2.\end{aligned}\quad (50)$$

Сделаем последнее преобразование с производящей функцией

$$\check{F}[\tau_{Ts}; \Phi_s, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}_{Ts}; \mathcal{M}_{Ts}, \mathcal{P}_{yTs}, \check{\mathcal{P}}_s] = \Phi_s \mathcal{M}_{Ts} + \mathcal{Y} \mathcal{P}_{yTs} + \mathcal{Z}_{Ts} \left(2s_{cs} \check{\mathcal{P}}_s - \frac{1 + \tilde{v}_{\phi s}}{w^{2/3}}\right) - \check{\mathcal{P}}_s^2 \tau_{Ts}, \quad (51)$$

которое дает

$$\begin{aligned}\Phi_s &= \Phi_s, \quad \mathcal{M}_{Ts} = \mathcal{M}_{Ts}, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}, \quad \mathcal{P}_{yTs} = \mathcal{P}_{yTs}, \\ \mathcal{Z}_{Ts} &= s_{cs} \left(\mathcal{Z}/2 + \check{\mathcal{P}}_s \tau_{Ts}\right), \quad \alpha_s = 2s_{cs} \check{\mathcal{P}}_s - (1 + \tilde{v}_{\phi s}) / w^{2/3}\end{aligned}\quad (52)$$

и гамильтониан

$$\mathcal{H}_{Ts}[\tau_{Ts}; \Phi_s, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}_{Ts}; \mathcal{M}_{Ts}, \mathcal{P}_{yTs}, \alpha_s] = \mathcal{M}_{Ts}^2 - \alpha_s \mathcal{M}_{Ts} + s_{ws} \mathcal{M}_{Ts}^{1/2} \cos \Phi_s. \quad (53)$$

7 Приложение 2

Уравнения Власова-Максвелла для бесстолкновительной плазмы имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - c^2 \nabla^2 \vec{A} &= 4\pi c \vec{j}, \quad \nabla \vec{A} = 0, \quad \vec{j} = \sum_{s=i,e} e_s \int \vec{v}_s f_s d^3 p = \sum_{s=i,e} \frac{e_s}{m_s} \int \left(\vec{p} - \frac{e_s}{c} \vec{A}\right) f_s d^3 p, \\ \frac{df_s}{dt} &= \frac{\partial f_s}{\partial t} + \{f_s, H_s\} = 0, \quad H_s = \frac{1}{2m_s} \left(\vec{p} - \frac{e_s}{c} \vec{A}\right)^2, \quad \sum_{s=i,e} e_s \int f_s d^3 p = 0.\end{aligned}\quad (54)$$

Векторный потенциал ищем в виде $\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1 \cos \Psi - \vec{b} \times \vec{A}_1 \sin \Psi$, где $\Psi = k(\vec{b}\vec{r}) - \omega t$ – фаза волны, \vec{b} – единичный вектор вдоль постоянного однородного магнитного поля $\vec{B}_0 = \nabla \times \vec{A}_0$. Получаем $\partial_t^2 \vec{A} - c^2 \nabla^2 \vec{A} = (k^2 c^2 - \omega^2) (\vec{A}_1 \cos \Psi - \vec{b} \times \vec{A}_1 \sin \Psi)$.

Введем новые скорости $\vec{V} = \vec{b} \left(v_{\parallel} - \frac{\omega}{k} \right) + \vec{v}_{\perp} \cos \Psi + \vec{b} \times \vec{v}_{\perp} \sin \Psi$, где $v_{\parallel} = \vec{b} \cdot \vec{v}$, $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{b} v_{\parallel}$. Отсюда $\vec{v} = \vec{b} \frac{\omega}{k} + V_{\parallel} \vec{b} + \vec{V}_{\perp} \cos \Psi - \vec{b} \times \vec{V} \sin \Psi$. Подставляя это соотношение в выражение для плотности тока в уравнении Максвелла, получаем

$$(k^2 c^2 - \omega^2) (\vec{A}_1 \cos \Psi - \vec{b} \times \vec{A}_1 \sin \Psi) = 4\pi c (\vec{b} \vec{J}_{\parallel} + \vec{J}_{\perp} \cos \Psi - \vec{b} \times \vec{J}_{\perp} \sin \Psi), \quad (55)$$

где

$$\vec{J} = \sum_{s=i,e} e_s \int \left(\vec{V}_s + \vec{b} \frac{\omega}{k} \right) f_s d^3 p = \vec{b} \vec{j}_{\parallel} + \vec{j}_{\perp} \cos \Psi + \vec{b} \times \vec{j}_{\perp} \sin \Psi, \quad (56)$$

откуда

$$\vec{J} = \frac{k^2 c^2 - \omega^2}{4\pi c} \vec{A}_1. \quad (57)$$

Из соотношений (44), (47), (49), (50) и (52) получаем

$$\begin{aligned} V_{xs} &= s_{cs} \sqrt{2m_s \mu |\Omega_{cs}|} \cos \Phi - \frac{e_s A_1}{c} = -\frac{|\Omega_{cs}|}{k} \left(2w^{1/3} \sqrt{\mathcal{M}_{T_s}} \cos \Phi + s_{ws} w \right), \\ V_{ys} &= v_y \cos \Psi + v_x \sin \Psi = \sqrt{2m_s \mu |\Omega_{cs}|} \sin \Phi = 2 \frac{\Omega_{cs}}{k} w^{1/3} \sqrt{\mathcal{M}_{T_s}} \sin \Phi, \\ V_{zs} &= \frac{\Omega_{cs}}{k} \left(1 - (2\mathcal{M}_{T_s} - \alpha) w^{2/3} \right), \end{aligned} \quad (58)$$

при этом

$$d^3 V_s = d\Phi_s d\mathcal{M}_{T_s} d\alpha_s \left| \frac{\partial(V_{xs}, V_{ys}, V_{zs})}{\partial(\Phi_s, \mathcal{M}_{T_s}, \alpha_s)} \right| = d\Phi_s d\mathcal{M}_{T_s} d\alpha_s \left| \frac{2\Omega_{cs}^3 w^{4/3}}{k^3} \right|. \quad (59)$$

Произвольная функция от α_s и $\mathcal{H}_{T_s} = \mathcal{M}_{T_s}^2 - \alpha_s \mathcal{M}_{T_s} + s_{ws} \sqrt{\mathcal{M}_{T_s}} \cos \Phi_s$ — интегралов движения для гамильтониана (4) является решением уравнения Власова. Поэтому в качестве функций распределения электронов и ионов возьмем функции $\mathcal{F}_e = \mathcal{F}_e[\mathcal{H}_{T_e}, \alpha_e]$ и $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i[\mathcal{H}_{T_i}, \alpha_i]$. Подставив их в уравнение (56) и учитывая соотношения (58) и (59), получим

$$\begin{aligned} - \sum_{s=i,e} e_s \left| \frac{4\Omega_{cs}^4 w^{5/3}}{k^4} \right| \int d\mathcal{M}_{T_s} d\alpha_s \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sqrt{\mathcal{M}_{T_s}} \cos \Phi_s + \frac{s_{ws} w^{2/3}}{2} \right) \mathcal{F}_s[\mathcal{H}_{T_s}, \alpha_s] d\Phi_s &= A_1 \frac{k^2 c}{4\pi}, \\ \sum_{s=i,e} \frac{e_s \Omega_{cs}}{k} \left| \frac{2\Omega_{cs}^3 w^{4/3}}{k^3} \right| \int d\mathcal{M}_{T_s} d\alpha_s \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - (2\mathcal{M}_{T_s} - \alpha_s) w^{2/3} \right) \mathcal{F}_s[\mathcal{H}_{T_s}, \alpha_s] d\Phi_s &= 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Учитывая, что средний продольный импульс плазмы равен нулю (она покоится), получаем

$$\frac{1}{\sum_{s'} m_{s'} n_{s'}} \sum_{s=i,e} m_s \int \left(V_z + \frac{\omega}{k} \right) \mathcal{F}_s d^3 V_s = 0,$$

$$\frac{\omega}{k} = - \sum_{s=i,e} \frac{m_s}{\sum_{s'} m_{s'} n_{s'}} \frac{\Omega_{cs}}{k} \left| \frac{2\Omega_{cs}^3 w^{4/3}}{k^3} \right| \int d\mathcal{M}_{Ts} d\alpha_s \int_{-\pi}^{\pi} (1 - (2\mathcal{M}_{Ts} - \alpha_s)w^{2/3}) \mathcal{F}_s[\mathcal{H}_{Ts}, \alpha_s] d\Phi_s, \quad (61)$$

где

$$n_s = \int \mathcal{F}_s d^3V_s = \left| \frac{2\Omega_{cs}^3 w^{4/3}}{k^3} \right| \int d\mathcal{M}_{Ts} d\alpha_s \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_s[\mathcal{H}_{Ts}, \alpha_s] d\Phi_s \quad (62)$$

– концентрация частиц сорта s .

Введем обозначение

$$\hat{I}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} d\mathcal{M}_T \int_{-\pi}^{\pi} d\Phi f[\Phi, \mathcal{M}_T, \alpha].$$

Из второго уравнения (60) получаем $\Omega_{ci}^4 \hat{I}[(1 - (2\mathcal{M}_{Ti} - \alpha_i)w^{2/3})\mathcal{F}_i] = \Omega_{ce}^4 \hat{I}[(1 - (2\mathcal{M}_{Te} - \alpha_e)w^{2/3})\mathcal{F}_e]$, а из условия квазинейтральности плазмы, $\sum e_s n_s = 0$, следует $|\Omega_{ci}^3 \hat{I}[\mathcal{F}_i] = |\Omega_{ce}^3 \hat{I}[\mathcal{F}_e]$. Подставляя эти соотношения в (61), получаем

$$\frac{\omega}{\Omega_{ci}} = w^{2/3} \frac{\hat{I}[(2\mathcal{M}_{Ti} - \alpha_i)\mathcal{F}_i]}{\hat{I}[\mathcal{F}_i]} - 1 \quad (63)$$

Из первого уравнения (60) следует

$$\frac{16\pi w^{5/3}}{k^6 c} \sum_{s=i,e} e_s \Omega_{cs}^4 \left(\hat{I}[\sqrt{\mathcal{M}_{Ts}} \cos \Phi_s \mathcal{F}_s] + \frac{s_{cs} w^{2/3}}{2} \hat{I}[\mathcal{F}_s] \right) = -A_1. \quad (64)$$

Разделив обе части на концентрацию частиц плазмы (62) и воспользовавшись соотношением $kA_1 = wB_0$, получим

$$k^2 = \frac{8\pi w^{-2/3} n}{B_0 c} \sum_{s=i,e} e_s |\Omega_{cs}| \left(\frac{\hat{I}[\sqrt{\mathcal{M}_{Ts}} \cos \Phi_s \mathcal{F}_s]}{\hat{I}[\mathcal{F}_s]} + \frac{s_{cs} w^{2/3}}{2} \right). \quad (65)$$

Введя усреднение по функции распределения (9) из (60), (63) и (65) получаем уравнения (8).

8 Приложение 3

Рассмотрим кинетическое уравнение (10). Перейдем в нем к переменным гамильтониана (4). Представим функцию распределения ионов как $f_i(\vec{v}, t) = F_i(\vec{V}, t)$, где $\vec{V} = v_{\parallel} \vec{b} + \vec{v}_{\perp} \cos \Psi + \vec{b} \times \vec{v}_{\perp} \sin \Psi$. Тогда $\vec{v} = \vec{V}_{\parallel} + \vec{V}_{\perp} \cos \Psi - \vec{b} \times \vec{V}_{\perp} \sin \Psi$,

$$\frac{\partial f}{\partial v_k} = \frac{\partial F}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial v_k} = \frac{\partial F}{\partial V_i} (b_i b_k + (\delta_{ik} - b_i b_k) \cos \Psi + e_{ink} b_n \sin \Psi), \quad v_k \frac{\partial f}{\partial v_k} = V_i \frac{\partial F}{\partial V_i}.$$

Из выражений (58) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial V_{xs}} &= \frac{k}{2|\Omega_s|w^{1/3}} \left(-2\sqrt{\mathcal{M}_{T_s}} \cos \Phi_s \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{M}_{T_s}} + 2\frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right) + \frac{\sin \Phi_s}{\sqrt{\mathcal{M}_{T_s}}} \frac{\partial}{\partial \Phi_s} \right), \\ \frac{\partial}{\partial V_{ys}} &= \frac{k}{2|\Omega_s|w^{1/3}} \left(2\sqrt{\mathcal{M}_{T_s}} \sin \Phi_s \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{M}_{T_s}} + 2\frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right) + \frac{\cos \Phi_s}{\sqrt{\mathcal{M}_{T_s}}} \frac{\partial}{\partial \Phi_s} \right), \quad \frac{\partial}{\partial V_{zs}} = \frac{k}{\Omega_s w^{2/3}} \frac{\partial}{\partial \alpha_s}. \end{aligned} \quad (66)$$

Для безразмерной функции распределения ионов $\tilde{F} = \nu_{ie} |\Omega_{ci}|^3 / (J_{inj} k^3) F_i$, уравнение (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} w^{2/3} \Omega_{ci} \left(\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \mathcal{H}_{T_i}} + \{ \mathcal{H}_{T_i}, \tilde{F}_i \} \right) &= \nu_{ie} \vec{V} \frac{\partial}{\partial \vec{V}} \tilde{F}_i + \frac{\nu_{ie} |\Omega_{ci}|^3}{J_{inj} k^3} \mathcal{S}[\vec{p}] + (3\nu_{ie} - \nu_{ch} - \nu_L[\vec{p}]) \tilde{F}_i, \\ \{ \mathcal{H}_{T_s}, F_i \} &= \left(2\mathcal{M}_{T_s} - \alpha_s + s_{ws} \frac{\cos \Phi_s}{2\sqrt{\mathcal{M}_{T_s}}} \right) \frac{\partial f}{\partial \Phi_s} - \mathcal{M}_{T_s} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{Z}_T} + s_{ws} \sqrt{\mathcal{M}_{T_s}} \sin \Phi_s \frac{\partial f}{\partial \mathcal{M}_{T_s}}, \\ \vec{V} \frac{\partial}{\partial \vec{V}} &= \left(2\mathcal{M}_{T_s} + w^{2/3} (\mathcal{H}_{T_s} - \alpha_s \mathcal{M}_{T_s}) \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}_{T_s}} + \\ &+ \left(\alpha_s + 2\mathcal{M}_{T_s} + 2w^{2/3} (\mathcal{H}_{T_s} - \alpha_s \mathcal{M}_{T_s}) + \frac{1 - v_{ph}}{w^{2/3}} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} - \frac{s_{ws} w^{2/3}}{2} \frac{\sin \Phi_s}{\sqrt{\mathcal{M}_{T_s}}} \frac{\partial}{\partial \Phi_s}. \end{aligned} \quad (67)$$

Функцию $\tilde{F}_i[\vec{V}] = \tilde{F}_i[\mathcal{M}_T, \alpha, \Phi]$ в уравнении (10) представим в виде суммы функций от "быстрых" и "медленных" переменных $\tilde{F}_i = \mathcal{F}_i[\mathcal{H}_T, \alpha] + \delta f_i$, где $\overline{\delta f_i} = 0$ и $\delta f_i \sim \nu_{ie}/\Omega_{ci}$. Поскольку функция δf даст вклад в плотность тока в уравнении Максвелла, в векторном потенциале появится добавка $\vec{A} = \vec{A}_0 + \delta \vec{A}$, $\delta \vec{A} \sim (\nu_{ie}/\Omega_{ci})$, из-за чего появятся дополнительные слагаемые в гамильтониане, $H = (\vec{p} - \frac{q}{c}(\vec{A}_0 + \delta \vec{A}))^2 / (2m) = H_0 + (\nu_{ie}/\Omega_{ci}) H_1 + (\nu_{ie}/\Omega_{ci})^2 H_2$. H_1 линейно зависит от δf , поэтому среднее $\overline{H_1} = 0$. Подставив эту функцию в уравнение (10) и усреднив по времени, получим

$$\begin{aligned} \nu_{ie} \left(\overline{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \alpha} + \overline{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \mathcal{H}_T} \right) + w^{2/3} \Omega_{ci} \left(\frac{\nu_{ie}}{\Omega_{ci}} \overline{\{ H_1, \delta f_i \}} + \frac{\nu_{ie}^2}{\Omega_{ci}^2} \overline{\{ H_2, \mathcal{F}_i \}} \right) + (3\nu_{ie} - \nu_{ch} - \overline{\nu}_L) \mathcal{F}_i + \\ + \overline{\mathcal{S}[\vec{p}]} + \nu_{ie} \overline{\vec{V} \frac{\partial}{\partial \vec{V}} \delta f_i} = 0, \end{aligned} \quad (68)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}} &= 2w^{2/3} \mathcal{H} + \frac{1}{w^{2/3}} (w^{2/3} \alpha + 1) + \frac{\omega}{w^{2/3} \Omega_{ci}} + 2(w^{2/3} \alpha + 1) \overline{\mathcal{M}} - 2w^{2/3} \overline{\mathcal{M}^2}, \\ \overline{\mathcal{B}} &= \mathcal{H} (1 - w^{2/3} \alpha) + \frac{w^{2/3}}{2} - \left\{ (w^{2/3} \alpha + 1)^2 + \frac{\omega}{\Omega_{ci}} \right\} \frac{\overline{\mathcal{M}}}{w^{2/3}} + (w^{2/3} \alpha + 1) \overline{\mathcal{M}^2}. \end{aligned} \quad (69)$$

Пренебрегая слагаемыми, квадратичными по ν_{ie}/Ω_{ci} , получаем уравнение для функции \mathcal{F}_i :

$$\nu_{ie} \left(\overline{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \alpha} + \overline{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \mathcal{H}_T} \right) + (3\nu_{ie} - \nu_{ch} - \overline{\nu}_L) \mathcal{F}_i + \overline{\mathcal{S}[\vec{p}]} = 0. \quad (70)$$

Рассмотрим случай точечной инжекции, когда скорость инжектируемых ионов $v_{\parallel} = 0$, $v_{\perp}^2 = 2E_{inj}/m$. В соответствии с (58) это дает

$$V_{\parallel} = -\frac{\omega}{k} = \frac{\Omega_{ci}}{k} \left(1 - (2\mathcal{M}_{inj} - \alpha_{inj})w^{2/3}\right),$$

$$V_{\perp}^2 = \frac{4w^{4/3}\Omega_{ci}^2}{k^2} \left(\mathcal{H}_{inj} + \frac{w^{2/3}}{4} + (w^{2/3}\alpha_{inj} + 1) \frac{\mathcal{M}_{inj}}{w^{2/3}} - \mathcal{M}_{inj}^2\right) = \frac{2E_{inj}}{m}, \quad (71)$$

$$\mathcal{M}_{Ti} = \mathcal{M}_{inj}[\alpha_i] = \frac{1}{2w^{2/3}} \left(w^{2/3}\alpha_i + 1 + \frac{\omega}{\Omega_{ci}}\right),$$

$$\mathcal{H}_{Ti} = \mathcal{H}_{inj}[\alpha_i] = \frac{k^2 E_{inj}}{2w^{4/3}\Omega_{ci}^2 m_i} - \frac{w^{2/3}}{4} - (w^{2/3}\alpha_i + 1) \frac{\mathcal{M}_{Ti}}{w^{2/3}} + \mathcal{M}_{Ti}^2 =$$

$$= \frac{1}{4w^{4/3}} \left\{ \tilde{E}_{inj} - w^2 + \frac{\omega^2}{\Omega_{ci}^2} - (w^{2/3}\alpha_i + 1)^2 \right\},$$

$$\cos^2 \Phi_i = \frac{(\mathcal{H}_{Ti} - \mathcal{M}_{Ti}^2 + \alpha_i \mathcal{M}_{Ti})^2}{\mathcal{M}_{Ti}} = \frac{\left\{ \tilde{E}_{inj} - w^2 - 2 \left(w^{2/3}\alpha_i + 1 + \frac{\omega}{\Omega_{ci}} \right) \right\}^2}{8w^2 \left(w^{2/3}\alpha_i + 1 + \frac{\omega}{\Omega_{ci}} \right)} \leq 1, \quad (72)$$

где $\tilde{E}_{inj} = 2k^2 E_{inj}/(\Omega_{ci}^2 m_i)$.

Неравенство (72) эквивалентно

$$\left(\sqrt{\tilde{E}_{inj}} - w\right)^2 \leq 2 \left(w^{2/3}\alpha_i + 1 + \frac{\omega}{\Omega_{ci}}\right) \leq \left(\sqrt{\tilde{E}_{inj}} + w\right)^2. \quad (73)$$

Таким образом, источник ионов

$$\mathcal{S}_i = \frac{J_{inj}}{\pi m_i^3} \delta[V_{\perp}^2 - 2E_{inj}/m_i] \delta[V_{\parallel}] =$$

$$= \frac{J_{inj}|k|^3}{8\pi m_i^3 w^2 |\Omega_{ci}|^3} \delta[\mathcal{H}_{Ti} - \mathcal{H}_{inj}[\alpha_i]] \delta[\mathcal{M}_{Ti} - \mathcal{M}_{inj}[\alpha_i]] \sigma[1 - \cos^2 \Phi_i], \quad (74)$$

где $\sigma[x] = (x + |x|)/2$ – функция Хевисайда.

Усреднив источник, получим $\bar{\mathcal{S}} = J_{inj} \tilde{\mathcal{S}}[\alpha] \delta[\mathcal{H} - \mathcal{H}_{inj}[\alpha]]/m_i^3$, где

$$\tilde{\mathcal{S}}[\alpha] = \frac{1}{8\pi w^2} \overline{\delta[\mathcal{M} - \mathcal{M}_{inj}[\alpha]]} = \frac{1}{8\pi w^2} \frac{1}{T} \oint \delta[\mathcal{M} - \mathcal{M}_{inj}[\alpha]] \frac{d\mathcal{M}}{\mathcal{M}^{1/2} |\sin \Phi|} =$$

$$= \frac{N_{\mathcal{M}}}{8\pi w^2 T [\mathcal{H}_{inj}, \alpha] \sqrt{\mathcal{M}_{inj} - (\mathcal{H}_{inj} - \mathcal{M}_{inj}^2 + \alpha \mathcal{M}_{inj})^2}}, \quad (75)$$

где $N_{\mathcal{M}}$ – число точек пересечения кривых $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{inj}[\alpha]$ и $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{inj}[\alpha]$. В плоскости \mathcal{H}_T , α инжектируемым частицам соответствует линия

$$G_{inj}[\mathcal{H}, \alpha] = \left(4w^{4/3}\mathcal{H} + w^2 - \frac{\omega^2}{\Omega_{ci}^2} + (w^{2/3}\alpha + 1)^2\right) \times$$

$$\times \sigma \left[8w^2 \left(w^{2/3} \alpha + 1 + \frac{\omega}{\Omega_{ci}} \right) - \left(4w^{4/3} \mathcal{H} + w^{4/3} \alpha^2 - \left(1 + \frac{\omega}{\Omega_{ci}} \right)^2 \right)^2 \right] = \tilde{E}_{inj}. \quad (76)$$

В области между линией инжекции и конусом потерь решение уравнения (70) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i[\mathcal{H}, \alpha] &= \frac{\tilde{\mathcal{S}}[\alpha_{inj}]}{\left| \tilde{\mathcal{B}}[h_{inj}, \alpha_{inj}] - \tilde{\mathcal{A}}[h_{inj}, \alpha_{inj}] d\mathcal{H}_{inj}/d\alpha \right|} \exp \left[-(3 - \eta_{ex}) \int_{h_{inj}}^{\mathcal{H}} \frac{dh}{\tilde{\mathcal{B}}[h, a[h]]} \right] = \\ &= \frac{\tilde{\mathcal{S}}[\alpha_{inj}]}{\left| \tilde{\mathcal{B}}[h_{inj}, \alpha_{inj}] + \tilde{\mathcal{A}}[h_{inj}, \alpha_{inj}] (\alpha_{inj} + w^{-2/3})/2 \right|} \exp \left[-(3 - \eta_{ex}) \int_{\alpha_{inj}}^{\alpha} \frac{da}{\tilde{\mathcal{A}}[\hat{h}[a], a]} \right], \quad (77) \end{aligned}$$

Плотность ионов

$$n_i = 2w^{4/3} \frac{J_{inj}}{\nu_{ie}} \int \mathcal{F}_i[\mathcal{H}[\Phi, \mathcal{M}, \alpha], \alpha] d\Phi d\mathcal{M} d\alpha. \quad (78)$$

9 Приложение 4

Представим функцию распределения электронов как функцию от $\vec{V} = \vec{b}v_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \cos \Psi + \vec{b} \times \vec{v}_{\perp} \sin \Psi$, $f_e = f_e[\vec{V}]$ где $\Psi = kz - \omega t$. Подставив эту функцию в уравнение Власова, после ряда преобразований получим

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} \frac{\partial H_e}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial f_e}{\partial \vec{p}} \frac{\partial H_e}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial f_e}{\partial \vec{V}} \cdot \left(\left(\vec{V} - \frac{\omega}{k} \vec{b} \right) \times \left(-k(\vec{V}_{\parallel} - \frac{\omega}{k} \vec{b}) + \Omega_{ce} \vec{b} + \frac{e_e k}{m_e c} \vec{A}_1 \right) \right) = 0. \quad (79)$$

Используя безразмерные переменные $\tilde{v}_{ph} = -\omega/\Omega_{ci}$, $\vec{u} = -k\vec{V}/\Omega_{ci}$, $w = -kA_1/B_0$, $\tilde{F} = |\Omega_{ci}^3/(n_e k^3)| f_e$, $\vec{e}_1 = \vec{A}_1/A_1$, можно переписать (79) как

$$\frac{\partial \tilde{F}_e}{\partial \vec{u}} \cdot \left((\vec{u} - \tilde{v}_{ph} \vec{b}) \times \left(\vec{b} - \frac{m_e}{m_i} (\vec{u}_{\parallel} - \tilde{v}_{ph} \vec{b}) - w \vec{e}_1 \right) \right) = 0. \quad (80)$$

Функцию распределения электронов будем считать усредненной по траектории максвелловским распределением. Тогда функцию распределения электронов можно представить в виде $\tilde{F} = \tilde{F}_0[u] + \tilde{f}[\vec{u}]$, где \tilde{F}_0 – безразмерная максвелловская функция, а \tilde{f} – добавка. Считая амплитуду волны малой, $w \ll 1$, в пределе $m_e/m_i \rightarrow 0$ получаем

$$\frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial \vec{u}} (\vec{u} \times \vec{b}) = -w \frac{\tilde{v}_{ph}}{u} \tilde{F}'_0 \vec{e}_1 (\vec{u} \times \vec{b}). \quad (81)$$

Используя $\vec{u} = \vec{e}_1 u \sin \theta \cos \phi + (\vec{b} \times \vec{e}_1) u \sin \theta \sin \phi + \vec{b} u \cos \theta$ и $\partial_{\vec{u}} f \cdot (\vec{u} \times \vec{b}) = -\partial_{\phi} f$, получим $\tilde{f} = -w \tilde{v}_{ph} \tilde{F}'_0 \sin \theta \cos \phi$. Отсюда получаем, что средняя продольная скорость электронов

равна нулю

$$\int u_{||}(\tilde{F}_0[u] + \tilde{f}[\vec{u}])d^3u = -w\tilde{v}_{ph} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^\infty \tilde{F}'_0[u]u^3 du \int_{-\pi}^\pi \cos \phi d\phi = 0, \quad (82)$$

или, в соответствии с (58), $w^{2/3}\langle 2\mathcal{M}_T - \alpha \rangle_e - 1 = -\omega/\Omega_{ce}$. При этом при выполнении второго уравнения в (8) первое обращается в тождество.

Так же получаем

$$\begin{aligned} \int (\vec{e}_1 \vec{u})(\tilde{F}_0[u] + \tilde{f}[\vec{u}])d^3u &= -w\tilde{v}_{ph} \int_0^\infty u^3 \tilde{F}'_0 du \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_{-\pi}^\pi \cos^2 \phi d\phi = \\ &= 4w\tilde{v}_{ph}\pi \int_0^\infty u^2 \tilde{F}_0 du = w\tilde{v}_{ph}. \end{aligned} \quad (83)$$

Здесь использовано, что $\int \tilde{F}_0 u^2 \sin \theta du d\theta d\phi = 4\pi \int \tilde{F}_0 u^2 dV = 1$.

Из (58) получаем $2w^{-2/3}\langle \sqrt{\mathcal{M}_{Te}} \cos \Phi \rangle_e - 1 = -\tilde{v}_{ph}(\Omega_{ci}/\Omega_{ce}) = \omega/\Omega_{ce}$. Отсюда из третьего уравнения в (8) получаем

$$k^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \left(2w^{-2/3}\langle \sqrt{\mathcal{M}_{Ti}} \cos \Phi \rangle_i - 1 + \frac{\omega}{\Omega_{ci}} \right). \quad (84)$$

10 Приложение 5

Интегралы в выражении (8) могут быть изменены следующим образом

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty d\alpha \int_0^\infty d\mathcal{M}_T \int_{-\pi}^\pi d\Phi f[\mathcal{M}_T, \alpha, \Phi] &= \int_{-\infty}^\infty d\alpha \int_{\mathcal{H}_{\min}}^\infty d\mathcal{H}_T \left(\frac{\partial \mathcal{M}_T}{\partial \mathcal{H}_T} f[\mathcal{M}_T, \alpha, \Phi] d\Phi \right) = \\ &= \int_{-\infty}^\infty d\alpha \int_{\mathcal{H}_{\min}}^\infty d\mathcal{H}_T T[\mathcal{H}_T, \alpha] \bar{f}[\mathcal{H}_T, \alpha], \end{aligned} \quad (85)$$

где \bar{f} – среднее по траектории от величины f .

Как отмечалось, при точечной инжекции большая часть частиц оказываются захваченными. Для них среднее по траектории от продольной скорости $w^{2/3}\overline{2\mathcal{M}_T - \alpha} = \frac{w}{\sqrt{\alpha}} \left(1 + (\check{\beta} - 1)E \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right] / K \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right] \right) \sim w$, поэтому при подстановке функции распределения для захваченных частиц во второе выражение получаем, что $\tilde{v}_{ph} + 1 \sim w$.

В выражении (85) перейдем к интегрированию вдоль характеристик:

$$\int_{-\infty}^\infty d\alpha \int_0^\infty d\mathcal{M}_T \int_{-\pi}^\pi d\Phi f[\mathcal{M}_T, \alpha, \Phi] = \int_{\min \alpha_{inj}}^{\max \alpha_{inj}} d\alpha_{inj} \int_{\alpha_{loss}}^{\alpha_{inj}} d\alpha \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial \alpha_{inj}} T[\hat{h}[\alpha, \alpha_{inj}], \alpha] \bar{f}[\hat{h}[\alpha, \alpha_{inj}], \alpha], \quad (86)$$

Здесь $\hat{h}[\alpha, \alpha_{inj}]$ – решение уравнения характеристик, α_{loss} – значение α , при котором характеристика с данным α_{inj} уходит в конус потерь. Из выражений для характеристик захваченных частиц (35) получаем

$$\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial \alpha_{inj}} = - \frac{(\check{\beta} - 1)^2 \left(K \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right] - E \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right] \right)^3 K \left[\frac{\check{\beta}_{inj}+1}{\check{\beta}_{inj}-1} \right]}{2w^{2/3} (\check{\beta}_{inj} - 1)^2 K \left[\frac{\check{\beta}+1}{\check{\beta}-1} \right] \left(K \left[\frac{\check{\beta}_{inj}+1}{\check{\beta}_{inj}-1} \right] - E \left[\frac{\check{\beta}_{inj}+1}{\check{\beta}_{inj}-1} \right] \right)^3}. \quad (87)$$

При точечной инжекции для инжектируемых частиц параметр $\check{\alpha}$ лежит в пределах $\left(\sqrt{\tilde{E}_{inj}} - w \right)^2 \leq (\check{\alpha} + 2 + 2\tilde{v}_{ph}) \leq \left(\sqrt{\tilde{E}_{inj}} + w \right)^2$. Введя параметр $x_\alpha = (2\check{\alpha}_{inj} - \check{\alpha}_{max} - \check{\alpha}_{min}) / (\check{\alpha}_{max} - \check{\alpha}_{min})$, который изменяется от -1 до 1 , получим

$$\begin{aligned} \check{\alpha}_{inj} &= \tilde{E}_{inj} - 2(1 + \tilde{v}_{ph}) + w^2 + 2w\sqrt{\tilde{E}_{inj}} x_\alpha, \\ \check{\beta}_{inj} &= \frac{(1 + \tilde{v}_{ph})^2/w - 2w - 2\sqrt{\tilde{E}_{inj}} x_\alpha}{2\sqrt{\tilde{E}_{inj}} - 2(1 + \tilde{v}_{ph}) + w^2 + 2w\sqrt{\tilde{E}_{inj}} x_\alpha} = -x_\alpha + O(w). \end{aligned} \quad (88)$$

Все частицы, для которых $-1 < \check{\beta}_{inj} < 1$, являются захваченными. Видно, что число нерезонансных частиц мало – порядка w , поэтому в дальнейшем при интегрировании их вкладом можно пренебречь.

В интеграле (86) перейдем от интегрирования по α и α_{inj} к $\check{\beta}$ и $\check{\beta}_{inj}$. Из (88) и (35) получим $d\alpha_{inj} = d\check{\alpha}_{inj} / (2w^{2/3}) = -w^{1/3} \sqrt{\tilde{E}_{inj}} d\check{\beta}_{inj}$ и $d\alpha = (\tilde{E}_{inj} / (2w^{2/3})) \frac{d}{d\check{\beta}} (\check{\beta}_{inj} G[\check{\beta}] / (\check{\beta} G[\check{\beta}_{inj}]))^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} d\mathcal{M}_T \int_{-\pi}^{\pi} d\Phi f[\mathcal{M}_T, \alpha, \Phi] = -\frac{1}{2} \tilde{E}_{inj}^{3/2} w^{-1/3} \int_{-1}^1 d\check{\beta}_{inj} \frac{\check{\beta}_{inj}^2}{G^2[\check{\beta}_{inj}]} \int_{\check{\beta}_{loss}}^1 d\check{\beta} T \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial \alpha_{inj}} \bar{f} \frac{d}{d\check{\beta}} \frac{G^2[\check{\beta}]}{\check{\beta}^2}. \quad (89)$$

Из (35), (37) и (75) с учетом (88) получаем

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{inj} \left(\frac{\alpha_{inj}}{\alpha} \right)^n = \frac{1}{w \tilde{E}_{inj}^{3/2} \sqrt{1 - x_\alpha^2}} \left(\frac{\check{\beta}_{inj} G[\check{\beta}]}{\check{\beta} G[\check{\beta}_{inj}]} \right)^{2n}, \quad n = \frac{3 - \nu_{ch}/\nu_{ie}}{2}. \quad (90)$$

Введем величину

$$\tilde{\beta} = \frac{8\pi E_{inj} n_i}{B_0^2} \sqrt{\frac{J_{inj}}{\nu_{ie} n_i}}, \quad (91)$$

которая по порядку величины совпадает с отношением давления плазмы к давлению магнитного поля. Из (78) и (84) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{ie} n_i}{J_{inj}} &= 2w^{4/3} \int \mathcal{F}_i[\mathcal{H}[\Phi, \mathcal{M}, \alpha], \alpha] d\Phi d\mathcal{M} d\alpha = F_n[w, \tilde{E}_{inj}] = \tilde{E}_{inj}^{-1/4} F_1[n], \\ \frac{k^2 m_i c^2}{4\pi n_i e_i^2} &= 2w^{-2/3} \langle \mathcal{M}_T^2 - \mathcal{H}_T - \alpha \mathcal{M}_T \rangle_i - 1 + \tilde{v}_{ph} = F_k[w, \tilde{E}_{inj}] = \frac{\sqrt{\tilde{E}_{inj}}}{w} \frac{F_2[n]}{F_1[n]}, \end{aligned} \quad (92)$$

где

$$\begin{aligned}
F_1[x] &= 2\sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{(1-y)^{2x-\frac{7}{2}}}{\sqrt{1-y^2}} \left(E \left[\frac{y+1}{y-1} \right] - K \left[\frac{y+1}{y-1} \right] \right)^{4x-6} K \left[\frac{y+1}{y-1} \right] \hat{I}_1(y, x) dy, \\
\hat{I}_1(y, x) &= \int_{-1}^y (1-l)^{2-2x} \left(E \left[\frac{l+1}{l-1} \right] - K \left[\frac{l+1}{l-1} \right] \right)^{5-4x} K \left[\frac{l+1}{l-1} \right] dl; \\
F_2[x] &= 4\sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{(1-y)^{2x-\frac{9}{2}}}{\sqrt{1-y^2}} \left(E \left[\frac{y+1}{y-1} \right] - K \left[\frac{y+1}{y-1} \right] \right)^{4x-8} K \left[\frac{y+1}{y-1} \right] \hat{I}_2(y, x) dy, \\
\hat{I}_2(y, x) &= \int_{-1}^y (1-l)^{3-2x} \left(E \left[\frac{l+1}{l-1} \right] - K \left[\frac{l+1}{l-1} \right] \right)^{7-4x} \left(K \left[\frac{l+1}{l-1} \right] + (l-1)E \left[\frac{l+1}{l-1} \right] \right) dl.
\end{aligned} \tag{93}$$

Таким образом,

$$\tilde{\beta} = \frac{\tilde{E}_{inj}}{F_k[w, \tilde{E}_{inj}] \sqrt{F_n[w, \tilde{E}_{inj}]}} = w \tilde{E}_{inj}^{5/8} \frac{\sqrt{F_1[n]}}{F_2[n]}. \tag{94}$$

Поскольку $\tilde{E}_{inj} = k^2 \rho^2$, где ρ – ларморовский радиус инжектируемых ионов, получим

$$w = \frac{\tilde{\beta}}{(k\rho)^{5/4}} F_B \left[\frac{\nu_{ch}}{\nu_{ie}} \right], \quad F_B[x] = \frac{F_2[(3+x)/2]}{\sqrt{F_1[(3+x)/2]}}. \tag{95}$$

Подставив (87), (88) и (90) с учетом (85) во второе выражение в (8) и разложив результат по w , получим

$$\frac{\omega}{\Omega_{ci}} = -1 + \frac{w}{\sqrt{\tilde{E}_{inj}}} F_\omega \left[\frac{\nu_{ch}}{\nu_{ie}} \right], \quad F_\omega[x] = \frac{F_3[(3+x)/2]}{F_2[(3+x)/2]}, \tag{96}$$

где

$$\begin{aligned}
F_3(x) &= 4\sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{(1-y)^{2x-\frac{5}{2}}}{\sqrt{1-y^2}} \left(E \left[\frac{y+1}{y-1} \right] - K \left[\frac{y+1}{y-1} \right] \right)^{4x-4} K \left[\frac{y+1}{y-1} \right] \hat{I}_3(y, x) dy, \\
\hat{I}_3(y, x) &= \int_{-1}^y (1-l)^{1-2x} \left(E \left[\frac{l+1}{l-1} \right] - K \left[\frac{l+1}{l-1} \right] \right)^{3-4x} \left(K \left[\frac{l+1}{l-1} \right] + (l-1)E \left[\frac{l+1}{l-1} \right] \right) dl. \tag{97}
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Casper T.A., Smith G.R., Phys. Rev. Let, V 48, № 15, p 1015 (1982)
- [2] Mangeney A.,Grappin R., Geophysical research letters, V 30 (2003)
- [3] Watson D.C., Physical Fluids, v 23, № 12 (1980)
- [4] Tajima T.,Mima K.,M. Dawson J., Plasma Review Letters, V 39, № 4 (1977)
- [5] Hasegawa A.,Mira K., Phys. Rev. Let, V 37, № 11 (1976)
- [6] Palmadesso P., Schmidt G. The physics of fluids, V 14, № 7, p 1411-1418 (1971)
- [7] Панов Д.А., Тимофеев А.В, Физика плазмы, Т 21, № 12, с 1092-1098 (1995)
- [8] Лазько В.С., Физика плазмы, Т 20, с 523-527 (1994)
- [9] Аникеев А.В., Багрянский П.А., Коржавина М.С., Приходько В.В., Тезисы XXXV Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС
- [10] Коржавина М.С., Тезисы XLVI Международной научной студенческой коференции