

# ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННАЯ АННИГИЛЯЦИЯ В ФОТОНЫ: НОВЫЕ МЕТОДЫ И СТАРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

---

Роман Ли

Экспериментальный семинар ИЯФ, 17 апреля 2020 г.

Институт ядерной физики СО РАН

- Введение
- Методы вычисления
- Точные результаты
- Асимптотика и предыдущие результаты
- Выводы

## ВВЕДЕНИЕ

---

- Теория возмущений является одним из немногих инструментов получения точных теоретических предсказаний в квантовой теории поля.
- Коэффициенты ряда т.в. представляются диаграммами Фейнмана. Количество петель определяет порядок теории возмущений.
- Следующие за главным вклады (NLO, NNLO и т.д.) называют ещё рад. поправками. Сложность вычисления рад. поправок "экспоненциально" растёт с ростом числа петель **и числа параметров задачи (кинематических инвариантов и масс)**.

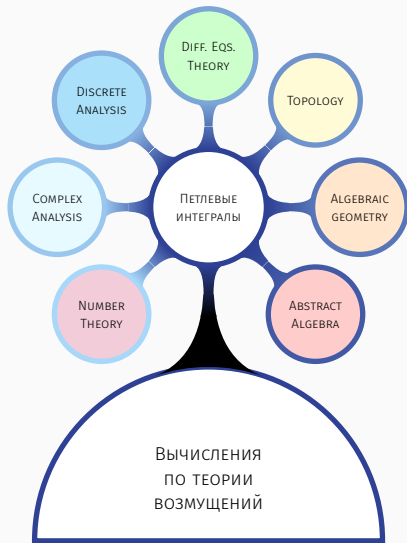
State-of-art на сегодняшний день:

- 1 петля (NLO) — любые процессы (условно).



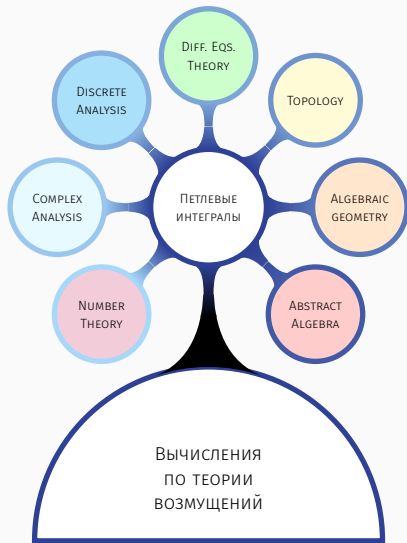
State-of-art на сегодняшний день:

- 1 петля (NLO) — любые процессы (условно).
- 2 петли(NNLO) — 3 параметра: амплитуды и дифф. сечения процессов  $2 \rightarrow 2$  с участием массивных частиц.



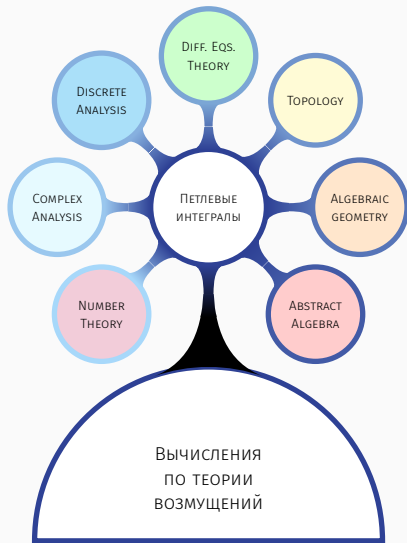
State-of-art на сегодняшний день:

- 1 петля (NLO) — любые процессы (условно).
- 2 петли(NNLO) — 3 параметра: амплитуды и дифф. сечения процессов  $2 \rightarrow 2$  с участием массивных частиц.
- 3 петли — 2 параметра: формфакторы массивных частиц, амплитуды и дифф. сечения процессов  $2 \rightarrow 2$  с участием безмассовых частиц.



State-of-art на сегодняшний день:

- 1 петля (NLO) — любые процессы (условно).
- 2 петли(NNLO) — 3 параметра: амплитуды и дифф. сечения процессов  $2 \rightarrow 2$  с участием массивных частиц.
- 3 петли — 2 параметра: формфакторы массивных частиц, амплитуды и дифф. сечения процессов  $2 \rightarrow 2$  с участием безмассовых частиц.
- 4 петли — 1 параметр: безмассовые пропагаторы, КЭД вклад в  $g-2$ , форм-факторы безмассовых частиц в КХД ( $H \rightarrow gg$ ).





State-of-art на сегодняшний день:

- 1 петля (NLO) — любые процессы (условно).
- 2 петли (NNLO) — 3 параметра: амплитуды и дифф. сечения процессов  $2 \rightarrow 2$  с участием массивных частиц.
- 3 петли — 2 параметра: формфакторы массивных частиц, амплитуды и дифф. сечения процессов  $2 \rightarrow 2$  с участием безмассовых частиц.
- 4 петли — 1 параметр: безмассовые пропагаторы, КЭД вклад в  $g-2$ , форм-факторы безмассовых частиц в КХД ( $H \rightarrow gg$ ).



Грубо определить сложность задачи можно, сложив число петель и число параметров (наличие масс, как правило, привносит дополнительную сложность). На настоящий момент небезнадёжны вычисления сложности  $\leq 5$ .

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$  при произвольных  $s = (p_+ + p_-)^2$  с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$  при произвольных  $s = (p_+ + p_-)^2$  с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.
- Однако, сравнение с имеющимися результатами для асимптотики  $s \gg m^2$  показало несогласие, которое нельзя было оставить без объяснения. Эта асимптотика рассматривалась, как минимум, в трёх работах:
  1. Andreassi, Calucci, Furlan, Peressutti, and Cazzola [1962],
  2. Eidelman and Kuraev [1978],
  3. Berends and Kleiss [1981].

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$  при произвольных  $s = (p_+ + p_-)^2$  с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.
- Однако, сравнение с имеющимися результатами для асимптотики  $s \gg m^2$  показало несогласие, которое нельзя было оставить без объяснения. Эта асимптотика рассматривалась, как минимум, в трёх работах:
  1. Andreassi, Calucci, Furlan, Peressutti, and Cazzola [1962],
  2. Eidelman and Kuraev [1978],
  3. Berends and Kleiss [1981].
- Во всех работах рассматривалась асимптотика  $s \gg m^2$ . В первой работе вычисление проводилось в с.п. электрона, в остальных — в с.ц.и. Зависимость от системы — следствие ограничения на энергию фотонов  $\omega > \omega_0$ .

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$  при произвольных  $s = (p_+ + p_-)^2$  с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.
- Однако, сравнение с имеющимися результатами для асимптотики  $s \gg m^2$  показало несогласие, которое нельзя было оставить без объяснения. Эта асимптотика рассматривалась, как минимум, в трёх работах:

1. Andreassi, Calucci, Furlan, Peressutti, and Cazzola [1962],
2. Eidelman and Kuraev [1978],
3. Berends and Kleiss [1981].

- Во всех работах рассматривалась асимптотика  $s \gg m^2$ . В первой работе вычисление проводилось в с.п. электрона, в остальных — в с.ц.и. Зависимость от системы — следствие ограничения на энергию фотонов  $\omega > \omega_0$ .
- Во всех работах рассматривались также рад. поправки к полному сечению процесса  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$  и вычислялась сумма

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}}_{\text{LO}} + \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}}_{\text{LO+NLO}},$$

которая уже не зависит от инфракрасного обрезания  $\omega_0$ .

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$  при произвольных  $s = (p_+ + p_-)^2$  с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.
- Однако, сравнение с имеющимися результатами для асимптотики  $s \gg m^2$  показало несогласие, которое нельзя было оставить без объяснения. Эта асимптотика рассматривалась, как минимум, в трёх работах:

1. Andreassi, Calucci, Furlan, Peressutti, and Cazzola [1962],
2. Eidelman and Kuraev [1978],
3. Berends and Kleiss [1981].

- Во всех работах рассматривалась асимптотика  $s \gg m^2$ . В первой работе вычисление проводилось в с.п. электрона, в остальных — в с.ц.и. Зависимость от системы — следствие ограничения на энергию фотонов  $\omega > \omega_0$ .
- Во всех работах рассматривались также рад. поправки к полному сечению процесса  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$  и вычислялась сумма

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}}_{\text{LO}} + \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}}_{\text{LO+NLO}},$$

которая уже не зависит от инфракрасного обрезания  $\omega_0$ .

- Во всех работах попарно различные результаты для  $\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}$ .

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$  при произвольных  $s = (p_+ + p_-)^2$  с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.
- Однако, сравнение с имеющимися результатами для асимптотики  $s \gg m^2$  показало несогласие, которое нельзя было оставить без объяснения. Эта асимптотика рассматривалась, как минимум, в трёх работах:

1. Andreassi, Calucci, Furlan, Peressutti, and Cazzola [1962],
2. Eidelman and Kuraev [1978],
3. Berends and Kleiss [1981].

- Во всех работах рассматривалась асимптотика  $s \gg m^2$ . В первой работе вычисление проводилось в с.п. электрона, в остальных — в с.ц.и. Зависимость от системы — следствие ограничения на энергию фотонов  $\omega > \omega_0$ .
- Во всех работах рассматривались также рад. поправки к полному сечению процесса  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$  и вычислялась сумма

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}}_{\text{LO}} + \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}}_{\text{LO+NLO}},$$

которая уже не зависит от инфракрасного обрезания  $\omega_0$ .

- Во всех работах попарно различные результаты для  $\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}$ .
- Во всех работах попарно различные результаты для  $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}}$ .

- Настоящая работа началась как проект на один день, в основном для демонстрационных и обучающих целей. Исходная задача была в том, чтобы вычислить борновское сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$  при произвольных  $s = (p_+ + p_-)^2$  с помощью современных методов многопетлевых вычислений. Как и ожидалось, в исходной постановке проект был начат и закончен в один день, потребовалось примерно 12 часов работы.
- Однако, сравнение с имеющимися результатами для асимптотики  $s \gg m^2$  показало несогласие, которое нельзя было оставить без объяснения. Эта асимптотика рассматривалась, как минимум, в трёх работах:

1. Andreassi, Calucci, Furlan, Peressutti, and Cazzola [1962],
2. Eidelman and Kuraev [1978],
3. Berends and Kleiss [1981].

- Во всех работах рассматривалась асимптотика  $s \gg m^2$ . В первой работе вычисление проводилось в с.п. электрона, в остальных — в с.ц.и. Зависимость от системы — следствие ограничения на энергию фотонов  $\omega > \omega_0$ .
- Во всех работах рассматривались также рад. поправки к полному сечению процесса  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$  и вычислялась сумма

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}}_{\text{LO}} + \underbrace{\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}}_{\text{LO+NLO}},$$

которая уже не зависит от инфракрасного обрезания  $\omega_0$ .

- Во всех работах попарно различные результаты для  $\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}$ .
- Во всех работах попарно различные результаты для  $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}}$ .
- **Обновлённая цель работы: вычислить также  $\sigma(e^+e^- \rightarrow 2\gamma)$  @NLO.**



# МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ

---

Интеграл по фазовому объёму

$$d\Phi_N = (2\pi)^4 \delta(P_i - P_f) \prod_f \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2\varepsilon_f}$$

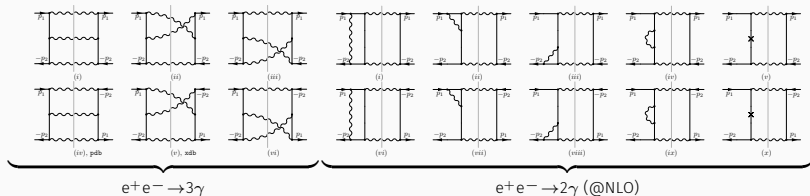
легко превратить в петлевой интеграл с "разрезанными" пропагаторами с помощью классического приёма:

$$\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\varepsilon} = \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(p^2 - m^2)$$

Здесь  $2\pi \delta(p^2 - m^2)$  соответствует "разрезанному" согласно правилу Катковского пропагатору  $(p^2 - m^2 + i0)^{-1}$ .

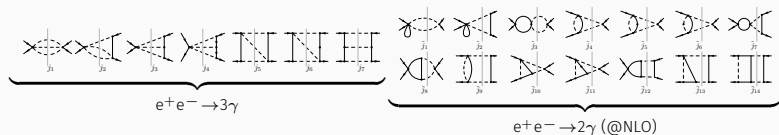
Интегрирование по N-частичному фазовому объёму эквивалентно (N - 1)-петлевому интегралу (с N разрезанными пропагаторами).

1. Полное сечение выражалось в виде суммы разрезанных диаграмм:



**Рис.:** Диаграммы для вычисления полного сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$  (слева) и виртуальной поправки к полному сечению  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$  (справа).

2. Выполнялась IBP редукция (**LiteRed**, [Lee, 2014]), строились дифференциальные уравнения на мастер-интегралы [Kotikov, 1991, Remiddi, 1997]



**Рис.:** Мастер-интегралы.

3. Дифференциальные системы приводились к  $\epsilon$ -форме [Henn, 2013, Lee, 2015], **Libra**

$$\partial_\beta J = \epsilon M(\beta) J$$

Здесь  $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - 4/s}$  – скорость электрона в с.ц.и.

4. Общее решение

$$J(\beta) = \text{Pexp}\left[\epsilon \int_{\beta_0}^{\beta} d\beta M(\beta)\right] J(\beta_0) = \sum_n \epsilon^n \iiint_{\beta > \beta_n > \dots > \beta_1 > \beta_0} d\beta_n M(\beta_n) \dots d\beta_1 M(\beta_1) J(\beta_0)$$

выражается через обобщенные полилогарифмы.

5. Граничные условия определялись по асимптотике  $\beta \stackrel{\text{def}}{\rightarrow} 0$ .  
 6. Результат имеет вид:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{\sigma_{\text{div}}}{\epsilon} + \sigma_3, \quad \sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma(\text{virt})} = -\frac{\sigma_{\text{div}}}{\epsilon} + \sigma_2.$$

NB: Вклад  $\pm \frac{\sigma_{\text{div}}}{\epsilon}$  связан с инфракрасной расходимостью. Он сокращается в полном сечении  $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}}$ . Чтобы получить физически наблюдаемые сечения, нужно перенести вклад мягкофотонной области из первого сечения во второе. Мягкофотонная область определяется условием  $\omega_i < \omega_0$  для  $i = 1, 2$  или  $3$ , где  $\omega_0$  – точность измерения энергии.

ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

---

В с.ц.и. получаем (здесь и далее мы кладём  $m = 1$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0) &= \frac{2\alpha}{\pi} \left( -\frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \ln z - 1 \right) \ln \left( \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} \right) \sigma_0 \\ &+ \frac{\alpha^3}{s\beta} \mathcal{S} \left\{ \frac{4(3 + \beta^4)}{s\beta^2} \left[ 4\text{Li}_3(1-z) - 2\text{Li}_3(-z) - (2\text{Li}_2(1-z) - \text{Li}_2(-z)) \ln z - \frac{3}{2}\zeta_3 \right] \right. \\ &\quad - \frac{16}{3s\beta} \left[ \ln^3 z + \pi^2 \ln z \right] - \frac{4}{\beta} \left( s - 2 + \frac{16}{3s} - \frac{8}{s^2} \right) \left[ \text{Li}_2(-z) + \frac{1}{2} \ln s \ln z \right] \\ &\quad \left. - \left( s\beta^2 + \frac{7}{\beta^2} - \frac{2\beta^2 + \beta^4}{3} \right) \ln^2 z + \frac{(s - 4/s)\beta^2 \pi^2}{3} + \frac{8(2 + \beta^2)}{3s\beta} \ln z + \frac{8}{3s} \right\}, \end{aligned}$$

где  $\beta = \sqrt{1 - 4/s}$ ,  $z = \frac{1-\beta}{1+\beta}$ , а  $\mathcal{S}$  символ симметризации по замене  $\beta \rightarrow -\beta$ . Здесь  $\sigma_0 = \frac{\pi\alpha^2}{s\beta} \left[ -\frac{3-\beta^4}{\beta} \ln z - 2(2 - \beta^2) \right]$  – борновское сечение  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ .

## СЕЧЕНИЕ ТРЁХФОТОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ

В с.ц.и. получаем (здесь и далее мы кладём  $m = 1$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0) &= \frac{2\alpha}{\pi} \left( -\frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \ln z - 1 \right) \ln \left( \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} \right) \sigma_0 \\ &+ \frac{\alpha^3}{s\beta} \mathcal{S} \left\{ \frac{4(3 + \beta^4)}{s\beta^2} \left[ 4\text{Li}_3(1-z) - 2\text{Li}_3(-z) - (2\text{Li}_2(1-z) - \text{Li}_2(-z)) \ln z - \frac{3}{2}\zeta_3 \right] \right. \\ &\quad - \frac{16}{3s\beta} \left[ \ln^3 z + \pi^2 \ln z \right] - \frac{4}{\beta} \left( s - 2 + \frac{16}{3s} - \frac{8}{s^2} \right) \left[ \text{Li}_2(-z) + \frac{1}{2} \ln s \ln z \right] \\ &\quad \left. - \left( s\beta^2 + \frac{7}{\beta^2} - \frac{2\beta^2 + \beta^4}{3} \right) \ln^2 z + \frac{(s - 4/s)\beta^2 \pi^2}{3} + \frac{8(2 + \beta^2)}{3s\beta} \ln z + \frac{8}{3s} \right\}, \end{aligned}$$

где  $\beta = \sqrt{1 - 4/s}$ ,  $z = \frac{1-\beta}{1+\beta}$ , а  $\mathcal{S}$  символ симметризации по замене  $\beta \rightarrow -\beta$ . Здесь  $\sigma_0 = \frac{\pi\alpha^2}{s\beta} \left[ -\frac{3-\beta^4}{\beta} \ln z - 2(2 - \beta^2) \right]$  – борновское сечение  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ .

Сечение двухфотонной аннигиляции с учетом рад. поправки имеет аналогичный вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0) &= \sigma_0 + \frac{\pi\alpha(1 + \beta^2)}{2\beta} \sigma_0 - \frac{2\alpha}{\pi} \left( -\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln z - 1 \right) \ln \left( \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} \right) \sigma_0 \\ &+ \frac{\alpha^3}{s\beta} \mathcal{S} \left\{ \frac{24(s^2 + s - 3)}{s^2\beta} \Re \left[ 2\text{Li}_3 \left( \frac{e^{i\pi/3}}{z+1} \right) \right] + \dots \right. \end{aligned}$$

## АСИМПТОТИКИ И СТАРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

---



$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \underbrace{\frac{2\alpha^3}{3\beta} (\pi^2 - 9)}_{\subset \Gamma_{\text{орто}}} + \frac{\alpha^3}{3} \beta \left( -4 \ln \omega_0 - \frac{31\pi^2}{12} + 16 \right) + \dots$$

$$\begin{aligned} \sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma} = & \underbrace{\frac{\pi\alpha^2}{2\beta}}_{\subset \Gamma_{\text{пара}}} + \underbrace{\frac{\pi^2\alpha^3}{4\beta^2}}_{\subset \text{Сак.-Зом.}} + \underbrace{\frac{\alpha^3}{8\beta} (\pi^2 - 20)}_{\subset \Gamma_{\text{пара}}} \\ & + \frac{\pi\alpha^2}{2} \beta + \frac{\pi^2\alpha^3}{2} - \frac{\alpha^3}{36} \beta \left( -48 \ln \omega_0 + 3\pi^2 + 80 \right) + \dots \end{aligned}$$

В согласии с известными членами пороговой асимптотики.

Получаем в с.ц.и.

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left( \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 - \frac{2\pi^2}{3} \right\} + \dots$$

Получаем в с.ц.и.

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left( \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 - \frac{2\pi^2}{3} \right\} \\ + \frac{\alpha^3}{s^2} \left\{ 8(\ln s - 1)(4 \ln s - 5) \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} + \frac{20}{3} \ln^3 s - 30 \ln^2 s + 14 \ln s + \frac{29}{3} + \frac{2\pi^2}{9} (30 \ln s - 29) + 8\zeta_3 \right\} + \dots$$

Имея в распоряжении точные формулы, мы можем вычислить и субведущие члены асимптотики, и, в частности, определить точность главного члена.

Получаем в с.ц.и.

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left( \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 - \frac{2\pi^2}{3} \right\} + \dots$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{[\text{Berends and Kleiss, 1981}]} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left( \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 \right\}$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{[\text{Eidelman and Kuraev, 1978}]} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left( \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 + \zeta_3 \right\}$$

**Все три результата отличаются константой!** Заметим, что результат Berends&Kleiss использовался, в частности, для проверки работы генератора событий BABAYAGA [Balossini et al].

Получаем в с.ц.и.

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left( \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 - \frac{2\pi^2}{3} \right\} + \dots$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{[\text{Berends and Kleiss, 1981}]} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left( \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 \right\}$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{[\text{Eidelman and Kuraev, 1978}]} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left( \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 + \zeta_3 \right\}$$

**Все три результата отличаются константой!** Заметим, что результат Berends&Kleiss использовался, в частности, для проверки работы генератора событий BABAYAGA [Balossini et al].

Поскольку мы вычислили вероятность излучения фотона в произвольной системе, мы можем также получить и сечение в с.п. электрона:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left( \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} + \frac{3}{2} \right) - \frac{\pi^2}{6} (\ln s + 3) + \frac{1}{2} (\ln s - 7)(\ln s - 2) \ln s \right\} + \dots$$

Получаем в с.ц.и.

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left( \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 - \frac{2\pi^2}{3} \right\} + \dots$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{\text{[Berends and Kleiss, 1981]}} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left( \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 \right\}$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma}^{\text{[Eidelman and Kuraev, 1978]}} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left( \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} - \frac{1}{2} \right) + 3 + \zeta_3 \right\}$$

**Все три результата отличаются константой!** Заметим, что результат Berends&Kleiss использовался, в частности, для проверки работы генератора событий BABAYAGA [Balossini et al].

Поскольку мы вычислили вероятность излучения фотона в произвольной системе, мы можем также получить и сечение в с.п. электрона:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \left\{ 2(\ln s - 1)^2 \left( \ln \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} + \frac{3}{2} \right) - \frac{\pi^2}{6} (\ln s + 3) + \frac{1}{2} (\ln s - 7)(\ln s - 2) \ln s \right\} + \dots$$

Этот результат совпадает с [Andreassi et al., 1962]!

Обе работы [Eidelman and Kuraev, 1978] и [Berends and Kleiss, 1981] использовали приближённую формулу дифф. сечения, полученную из точной [Mandl and Skyrme, 1952]:

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} \propto d\Gamma_3 \left\{ \frac{(k_2 \cdot p_1)^2 + (k_2 \cdot p_2)^2}{(k_1 \cdot p_1)(k_1 \cdot p_2)(k_3 \cdot p_1)(k_3 \cdot p_2)} - \frac{1}{\gamma^2} \left[ \frac{k_2 \cdot p_1}{k_1 \cdot p_1 (k_3 \cdot p_2)^2} + \frac{k_2 \cdot p_2}{k_1 \cdot p_2 (k_3 \cdot p_1)^2} \right] + \text{перестановки} \right\}$$

При больших углах второй член подавлен (относительно первого) множителем  $1/\gamma^2 = 4m^2/s$ , однако эта малость компенсируется при направлениях  $k_3$ , квазипараллельных оси соударения благодаря квадрату  $(k_3 \cdot p)$  в знаменателе (т.к., квадрата малости “хватает” чтобы скомпенсировать и малость телесного угла  $d^2\theta_3 \sim 1/\gamma^2$ , и внешний множитель  $\frac{1}{\gamma^2}$ ).

Остальные члены, имеющие формальный порядок  $\sim \frac{1}{\gamma^2}$  были опущены.

**Было проверено, что прямое интегрирование указанного выражения приводит к результату работы [Berends and Kleiss, 1981] (т.о., [Eidelman and Kuraev, 1978] видимо, содержит ещё и техническую ошибку).**

## РАССМОТРЕНИЕ ИЗ РАБОТЫ [BERENDS AND KLEISS, 1981]

Обе работы [Eidelman and Kuraev, 1978] и [Berends and Kleiss, 1981] использовали приближённую формулу дифф. сечения, полученную из точной [Mandl and Skyrme, 1952]:

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow 3\gamma} \propto d\Gamma_3 \left\{ \frac{(k_2 \cdot p_1)^2 + (k_2 \cdot p_2)^2}{(k_1 \cdot p_1)(k_1 \cdot p_2)(k_3 \cdot p_1)(k_3 \cdot p_2)} - \frac{1}{\gamma^2} \left[ \frac{k_2 \cdot p_1}{k_1 \cdot p_1 (k_3 \cdot p_2)^2} + \frac{k_2 \cdot p_2}{k_1 \cdot p_2 (k_3 \cdot p_1)^2} \right] + \text{перестановки} \right\}$$

При больших углах второй член подавлен (относительно первого) множителем  $1/\gamma^2 = 4m^2/s$ , однако эта малость компенсируется при направлениях  $k_3$ , квазипараллельных оси соударения благодаря квадрату  $(k_3 \cdot p)$  в знаменателе (т.к., квадрата малости “хватает” чтобы скомпенсировать и малость телесного угла  $d^2\theta_3 \sim 1/\gamma^2$ , и внешний множитель  $\frac{1}{\gamma^2}$ ).

Остальные члены, имеющие формальный порядок  $\sim \frac{1}{\gamma^2}$  были опущены.

Было проверено, что прямое интегрирование указанного выражения приводит к результату работы [Berends and Kleiss, 1981] (т.о., [Eidelman and Kuraev, 1978] видимо, содержит ещё и техническую ошибку).

Однако, тщательный анализ показывает, что необходимо учитывать члены

$$d\Gamma_3 \left\{ - \frac{1}{2\gamma^2} \left[ \frac{(p_1 \cdot p_2)}{(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2)(k_3 \cdot p_2)} + \frac{(p_1 \cdot p_2)}{(k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1)(k_3 \cdot p_1)} \right] + \text{перестановки} \right\}$$

которые дают вклад в области, когда все три фотона имеют импульсы, квазипараллельные оси соударения (точнее, два квазипараллельны, а один квази-антипараллелен). В этом случае малость  $\frac{1}{\gamma^2} d^2\theta_2 d^2\theta_3 \sim \frac{1}{\gamma^6}$  компенсируется малостью всех трёх знаменателей.

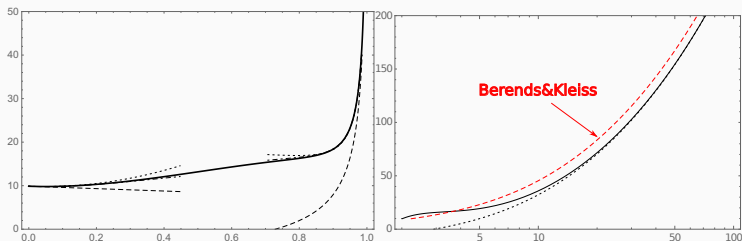
Было проверено, что учёт этих членов даёт в точности добавку  $-\frac{4\alpha^3 m^2}{3s}$  к полному сечению, в согласии с асимптотикой результата, полученного в настоящей работе.



Используя полученные результаты, можно получить и асимптотику полного сечения  $e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}$ :

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}} = \frac{\alpha^3}{s} \left[ \frac{\ln^3 s}{3} - \frac{\ln^2 s}{2} + \frac{2}{3}\pi^2 \ln s - 2 \ln s - \frac{3\pi^2}{2} + 4 \right] + \frac{\alpha^3}{s^2} \left[ \frac{4 \ln^3 s}{3} + 2 \ln^2 s + \frac{34}{3}\pi^2 \ln s - 34 \ln s + 20\zeta_3 - \frac{76\pi^2}{9} + \frac{47}{3} \right] + \dots$$

Главный член совпадает с [Andreassi et al., 1962]!



**Рис.:** Поправка  $\propto \alpha^3$  к полному сечению  $e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}$ .

Слева:  $(s - 4m^2)[\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}}]_{\alpha^3}$  как функция от  $\beta = \sqrt{1 - 4m^2/s}$ .

Справа:  $(s - 4m^2)[\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{фотоны}}]_{\alpha^3}$  как функция  $\sqrt{s}/m$ .

- Современные методы многопетлевых вычислений, основанные на IBP приведении и методе дифф. уравнений, являются эффективным инструментом для вычисления радиационных поправок к дифференциальным и полным сечениям. В частности, становятся доступными задачи вычисления дифференциальных сечений процессов  $2 \rightarrow 2$  в порядке NNLO (в двух петлях).
- В настоящей работе вычислены (впервые) борновское сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$  и радиационная поправка к процессу  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$  при произвольных энергиях сталкивающихся частиц.
- Сравнение высокоэнергетической асимптотики показало несогласие с имеющимися результатами для с.ц.и. ([Eidelman and Kuraev, 1978, Berends and Kleiss, 1981]). Найдена причина несогласия с последней работой: пропущенные члены в дифференциальном сечении, дающие вклад в трижды коллинеарной области. Асимптотика в с.п. электрона совпала с результатами работы [Andreassi et al., 1962].

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

---

ЗАПАСНЫЕ СЛАЙДЫ.

---

- Вероятность излучения мягкого фотона выражается через хорошо известный интеграл (см., например, 4 том курса ЛЛ):

$$I^{(4)}(u_1, u_2) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\omega^2(u_1 \cdot u_2)}{(k \cdot u_1)(k \cdot u_2)}.$$

Можно легко показать, что этот интеграл Лоренц-инвариантен, и получить в с.п. одной из частиц ответ:  $I^{(4)}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\beta_{12}} \ln \frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}}$ . Здесь  $\beta_{12}$  — относительная скорость частиц.

- Вероятность излучения мягкого фотона выражается через хорошо известный интеграл (см., например, 4 том курса ЛЛ):

$$I^{(4)}(u_1, u_2) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\omega^2 (u_1 \cdot u_2)}{(k \cdot u_1)(k \cdot u_2)}.$$

Можно легко показать, что этот интеграл Лоренц-инвариантен, и получить в с.п. одной из частиц ответ:  $I^{(4)}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\beta_{12}} \ln \frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}}$ . Здесь  $\beta_{12}$  — относительная скорость частиц.

- Однако, нам нужен аналогичный интеграл в размерностной регуляризации, включая члены  $\propto \epsilon^1$ . Последние зависят уже и от скоростей частиц  $\beta_{1,2}$  в лабораторной системе.

- Вероятность излучения мягкого фотона выражается через хорошо известный интеграл (см., например, 4 том курса ЛЛ):

$$I^{(4)}(u_1, u_2) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\omega^2 (u_1 \cdot u_2)}{(k \cdot u_1)(k \cdot u_2)}.$$

Можно легко показать, что этот интеграл Лоренц-инвариантен, и получить в с.п. одной из частиц ответ:  $I^{(4)}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\beta_{12}} \ln \frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}}$ . Здесь  $\beta_{12}$  — относительная скорость частиц.

- Однако, нам нужен аналогичный интеграл в размерностной регуляризации, включая члены  $\propto \epsilon^1$ . Последние зависят уже и от скоростей частиц  $\beta_{1,2}$  в лабораторной системе.
- Интеграл можно также вычислить с помощью методов многопетлевых вычислений. Конечный результат:

$$I^{(4-2\epsilon)}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\beta_{12}} \ln \frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}} + \epsilon \frac{1}{\beta_{12}} \left[ f\left(\frac{x_1 x_3}{x_2}\right) + f\left(\frac{x_2 x_3}{x_1}\right) + f(x_1 x_2 x_3) - f\left(\frac{x_1 x_2}{x_3}\right) - f(x_3^2) \right]$$

$$f(x) = \text{Li}_2(1-x) + \frac{1}{4} \ln^2 x, \quad x_1 = \sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{1-\beta_2}{1+\beta_2}}, \quad x_3 = \sqrt{\frac{1-\beta_{12}}{1+\beta_{12}}}.$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0) = & \sigma_0 + \frac{\pi \alpha (1 + \beta^2)}{2\beta} \sigma_0 - \frac{2\alpha}{\pi} \left( -\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln z - 1 \right) \ln \left( \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} \right) \sigma_0 \\
 + \frac{\alpha^3}{s\beta} \mathcal{S} \left\{ & \frac{9s^2 - 8s - 4}{(s-1)s\beta} \ln z + \frac{(3s-4)}{(s-1)} \ln s + (3 - \beta^2) \frac{\pi^2}{4} + \frac{16 - 5\beta^2 - \beta^4}{4\beta^2} \ln^2 z + \frac{20}{s\beta} \text{Li}_2(-z) \right. \\
 & + \frac{4(1 + \beta^2)(2 - \beta^2)}{\beta} \text{Li}_2(1 - z) + \left[ \frac{3s+2}{s\beta} + \frac{3}{\beta(s-1)^2} \right] \ln s \ln z - \frac{1}{2\beta} \left[ \ln^2 z - \pi^2 \right] \ln z \\
 & - (3 - \beta^2) \left[ \text{Li}_2(-z) \ln z + \ln s \ln^2 z \right] + \frac{2(1 + \beta^2)(3 - \beta^4)}{\beta^2} \text{Li}_2(1 - z) \ln z \\
 & + \frac{4(2s^2 - s - 9)}{s^2\beta} \left[ -2\text{Li}_3 \left( \frac{1}{z+1} \right) - \frac{1}{2} \text{Li}_2(-z) \ln s - \frac{1}{8} \ln^2 s \ln z - \frac{1}{6} \ln^3 z - \frac{\pi^2}{8} \ln z \right] \\
 & + \frac{24(s^2 + s - 3)}{s^2\beta} \Re \left[ 2\text{Li}_3 \left( \frac{e^{i\pi/3}}{z+1} \right) + 2 \ln(1+z) \text{Li}_2 \left( \frac{e^{i\pi/3}}{1+z} \right) - \frac{1}{4} \text{Li}_2(-z) \ln s \right. \\
 & \left. - \frac{1}{8} \left( \ln s \ln \frac{(s-1)^2}{s} + \frac{1}{6} \ln^2 z + \frac{\pi^2}{18} \right) \ln z \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0) = & \sigma_0 + \frac{\pi\alpha(1+\beta^2)}{2\beta}\sigma_0 - \frac{2\alpha}{\pi} \left( -\frac{1+\beta^2}{2\beta} \ln z - 1 \right) \ln \left( \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} \right) \sigma_0 \\
 + \frac{\alpha^3}{s\beta} \mathcal{S} \left\{ & \frac{9s^2 - 8s - 4}{(s-1)s\beta} \ln z + \frac{(3s-4)}{(s-1)} \ln s + (3-\beta^2) \frac{\pi^2}{4} + \frac{16-5\beta^2-\beta^4}{4\beta^2} \ln^2 z + \frac{20}{s\beta} \text{Li}_2(-z) \right. \\
 + \frac{4(1+\beta^2)(2-\beta^2)}{\beta} & \text{Li}_2(1-z) + \left[ \frac{3s+2}{s\beta} + \frac{3}{\beta(s-1)^2} \right] \ln s \ln z - \frac{1}{2\beta} \left[ \ln^2 z - \pi^2 \right] \ln z \\
 - (3-\beta^2) & \left[ \text{Li}_2(-z) \ln z + \ln s \ln^2 z \right] + \frac{2(1+\beta^2)(3-\beta^4)}{\beta^2} \text{Li}_2(1-z) \ln z \\
 + \frac{4(2s^2-s-9)}{s^2\beta} & \left[ -2\text{Li}_3\left(\frac{1}{z+1}\right) - \frac{1}{2}\text{Li}_2(-z) \ln s - \frac{1}{8}\ln^2 s \ln z - \frac{1}{6}\ln^3 z - \frac{\pi^2}{8} \ln z \right] \\
 + \frac{24(s^2+s-3)}{s^2\beta} & \Re \left[ 2\text{Li}_3\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{z+1}\right) + 2\ln(1+z) \text{Li}_2\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{1+z}\right) - \frac{1}{4}\text{Li}_2(-z) \ln s \right. \\
 & \left. - \frac{1}{8} \left( \ln s \ln \frac{(s-1)^2}{s} + \frac{1}{6} \ln^2 z + \frac{\pi^2}{18} \right) \ln z \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

$\beta\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0)$  не является аналитической функцией  $\beta^2$  из-за отмеченного члена. Заметим, что  $v = \frac{2\beta}{1+\beta^2}$  — относительная скорость электрона и позитрона и отмеченный член как раз появляется от разложения фактора Зоммерфельда—Сахарова. Замечательно, что  $\frac{\pi\alpha}{v}$  умножается на борновское сечение, **точное по  $\beta$** .

$$\begin{aligned}
 \sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\gamma}^{\text{cmf}}(\omega_0) = & \sigma_0 + \frac{\pi \alpha (1 + \beta^2)}{2\beta} \sigma_0 - \frac{2\alpha}{\pi} \left( -\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln z - 1 \right) \ln \left( \frac{\sqrt{s}}{2\omega_0} \right) \sigma_0 \\
 + \frac{\alpha^3}{s\beta} \mathcal{S} \left\{ & \frac{9s^2 - 8s - 4}{(s-1)s\beta} \ln z + \frac{(3s-4)}{(s-1)} \ln s + (3 - \beta^2) \frac{\pi^2}{4} + \frac{16 - 5\beta^2 - \beta^4}{4\beta^2} \ln^2 z + \frac{20}{s\beta} \text{Li}_2(-z) \right. \\
 & + \frac{4(1 + \beta^2)(2 - \beta^2)}{\beta} \text{Li}_2(1 - z) + \left[ \frac{3s+2}{s\beta} + \frac{3}{\beta(s-1)^2} \right] \ln s \ln z - \frac{1}{2\beta} \left[ \ln^2 z - \pi^2 \right] \ln z \\
 & - (3 - \beta^2) \left[ \text{Li}_2(-z) \ln z + \ln s \ln^2 z \right] + \frac{2(1 + \beta^2)(3 - \beta^4)}{\beta^2} \text{Li}_2(1 - z) \ln z \\
 & + \frac{4(2s^2 - s - 9)}{s^2\beta} \left[ -2\text{Li}_3\left(\frac{1}{z+1}\right) - \frac{1}{2} \text{Li}_2(-z) \ln s - \frac{1}{8} \ln^2 s \ln z - \frac{1}{6} \ln^3 z - \frac{\pi^2}{8} \ln z \right] \\
 & + \frac{24(s^2 + s - 3)}{s^2\beta} \Re \left[ 2\text{Li}_3\left(\frac{e^{i\pi/3}}{z+1}\right) + 2 \ln(1+z) \text{Li}_2\left(\frac{e^{i\pi/3}}{1+z}\right) - \frac{1}{4} \text{Li}_2(-z) \ln s \right. \\
 & \left. - \frac{1}{8} \left( \ln s \ln \frac{(s-1)^2}{s} + \frac{1}{6} \ln^2 z + \frac{\pi^2}{18} \right) \ln z \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

- G Andreassi, Giorgio Calucci, G Furlan, G Peressutti, and P Cazzola. Radiative corrections to the total cross section for annihilation of a pair into photons. *Physical Review*, 128(3):1425, 1962.
- Frits A Berends and R Kleiss. Distributions for electron-positron annihilation into two and three photons. *Nuclear Physics B*, 186(1):22–34, 1981.
- S. I. Eidelman and E. A. Kuraev.  $e^+ e^-$  Annihilation Into Two and Three Photons at High-Energy. *Nucl. Phys.*, B143:353–364, 1978. doi: 10.1016/0550-3213(78)90030-5.
- Johannes M. Henn. Multiloop integrals in dimensional regularization made simple. *Phys.Rev.Lett.*, 110(25):251601, 2013. doi: 10.1103/PhysRevLett.110.251601.
- A. V. Kotikov. Differential equation method: The Calculation of N point Feynman diagrams. *Phys. Lett.*, B267:123–127, 1991. doi: 10.1016/0370-2693(91)90536-Y. [Erratum: *Phys. Lett.*B295,409(1992)].
- Roman N. Lee. LiteRed 1.4: a powerful tool for reduction of multiloop integrals. *J. Phys. Conf. Ser.*, 523:012059, 2014. doi: 10.1088/1742-6596/523/1/012059.
- Roman N. Lee. Reducing differential equations for multiloop master integrals. *J. High Energy Phys.*, 1504:108, 2015. doi: 10.1007/JHEP04(2015)108.
- F Mandl and THR Skyrme. The theory of the double compton effect. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 215(1123):497–507, 1952.
- Giulio Racah. Sulla nascita degli elettroni positivi. *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, 11(7):477–481, 1934. ISSN 1827-6121. doi: 10.1007/BF02959919. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02959919>.
- Ettore Remiddi. Differential equations for Feynman graph amplitudes. *Nuovo Cim.*, A110:1435–1452, 1997.