

УЧРЕЖДЕНИЕ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
им. Г.И. Будкера СО РАН  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН  
(ИЯФ СО РАН)

М.Г. Козлов, А.В. Резниченко, В.С. Фадин

ПРОВЕРКА УСЛОВИЯ РЕДЖЕЗАЦИИ ГЛЮОНА  
В СЛЕДУЮЩЕМ ЗА ГЛАВНЫМ ПОРЯДКЕ.  
ГЛЮОННАЯ ЧАСТЬ

ИЯФ 2011-24

НОВОСИБИРСК  
2011

**Проверка условия реджезации глюона  
в следующем за главным порядке.  
Глюонная часть\***

*М.Г. Козлов<sup>†</sup>, А.В. Резниченко<sup>‡</sup>, В.С. Фадин<sup>††</sup>*

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера, 630090, Новосибирск, Россия  
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

**Аннотация**

В данной работе мы рассматриваем последнее условие бутстрапа, справедливость выполнения которого не проверена до настоящего времени. Это условие является необходимым элементом в построенном на основе соотношения унитарности доказательстве мультиреджевской формы амплитуд КХД с глюонным обменом при высоких энергиях в следующем за главным логарифмическим приближении. Подход основан на  $s$ -канальной унитарности и позволяет воспроизводить последовательно во всех порядках теории возмущений мультиреджевскую форму амплитуды, если только оказываются выполнены определенные нелинейные соотношения, называемые условиями бутстрапа. Все из них были получены, и все, кроме одного, были проверены. В настоящей статье осуществляется явная проверка выполнения последнего условия — условия бутстрапа на неупругую амплитуду рождения одного глюона в мультиреджевской кинематике. В предыдущей работе мы провели такую проверку для чисто фермионных вкладов, а здесь мы завершаем её для глюонных однопетлевых поправок к составляющим рассматриваемого условия.

---

*\*Работа выполнена в рамках проектов РФФИ 10-02-01238, а также ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”, грант 14.740.11.0082.*

<sup>†</sup>*e-mail address:* M.G.Kozlov@inp.nsk.su

<sup>‡</sup>*e-mail address:* A.V.Reznichenko@inp.nsk.su

<sup>††</sup>*e-mail address:* Fadin@inp.nsk.su

*M.G. Kozlov, A.V. Reznichenko, V.S. Fadin*

**Check of the gluon reggeization condition  
in the next-to-leading order.  
Gluon part**

**Abstract**

In the paper we discuss the last unproved bootstrap condition which validity has not been verified until recently. This condition is a requisite for the unitarity based proof of the multi-Regge form of the QCD amplitude with the gluon exchange at high energies within the next-to-leading logarithmic approximation (NLA). The approach is based on  $s$ -channel unitarity: it allows one to reproduce sequentially the multi-Regge form order by order in the perturbation theory provided that some nonlinear relations (referred to as bootstrap conditions) hold true. All the concerned bootstrap conditions had been found, and all but one were proved to be valid. In the present article authors perform the verification of the last one — the bootstrap condition for the inelastic amplitude of one gluon production in the multi-Regge kinematics. In the previous paper we carried out the same procedure for purely fermionic contributions to the bootstrap condition discussed. Herein we finish the overall verification by calculating one-loop gluon corrections to components of the bootstrap condition.



---

# 1 Введение

Данная работа является продолжением цикла статей [1–11], посвященных доказательству мультиреджевской формы амплитуд КХД с глюонным обменом при высоких энергиях в следующем за главным логарифмическом приближении (СГЛП). Мультиреджевская кинематика (МРК) подразумевает строгое упорядочение рожденных частиц в пространстве быстрот. Гипотеза о мультиреджевской форме амплитуды утверждает, что действительная часть амплитуды многочастичного рождения в МРК с глюонным обменом и отрицательной сигнатурой имеет простой факторизованный вид, в котором вся энергетическая зависимость определяется только факторами Редже. Данная гипотеза нашла свое наиболее важное применение в подходе БФКЛ (Балицкого—Фаина—Кураева—Липатова) [12–15] в главном логарифмическом приближении (ГЛП), где амплитуда вещественна, и СГЛП, где важна только реальная часть многочастичной сигнатуризованной амплитуды.

Мультиреджевская форма амплитуды доказана в ГЛП, то есть когда в ряде теории возмущений суммируются только члены вида  $(\alpha_S \ln s)^n$  [16]. Успешное развитие подхода БФКЛ в следующем за главным логарифмическом приближении (СГЛП), то есть когда учитываются также члены  $\alpha_S (\alpha_S \ln s)^n$ , обуславливает необходимость проверки гипотезы и в этом приближении. Общая схема доказательства гипотезы в СГЛП сформулирована в работе [9]. Оно основывается на так называемом бутстрапном подходе: необходимым и достаточным условием справедливости гипотезы является выполнение так называемых *соотношений* бутстрапа — условий совместимости реджевской формы амплитуды с  $s$ -канальной унитарностью. Выполнение последних гарантирует правильный реджевский вид последовательно во всех порядках теории возмущений [2]. Соотношений бутстрапа бесконечно много: все они связывают различные  $s$ -канальные скачки амплитуды многочастичного рождения с её производными по быстротам. Нетривиальным фактом является то, что все эти соотношения можно удовлетворить, если только вершины и траектория подчиняются нескольким нелинейным *условиям* бутстрапа. К настоящей

му времени все эти условия бутстрапа найдены [1, 2, 3, 6] и выполнение всех их, кроме одного, доказано [7, 8, 9]. Выполнение последнего из них — условия на неупругую амплитуду рождения глюона в МРК — доказано только для кварковых вкладов [10]. В данной работе проводится проверка неупругого условия бутстрапа в глюонном секторе.

Главными составляющими условия бутстрапа являются импакт-фактор перехода реджеона в глюон и матричный элемент оператора рождения глюона. Вычисление обеих составляющих в однопетлевом приближении позволяет завершить проверку последнего условия бутстрапа в СГЛП и, тем самым, сделать заключительный шаг в обосновании мультиреджевской формы амплитуды. Импакт-фактор перехода реджеона в глюон был найден нами в работе [11]. Данная статья посвящена вычислению матричного элемента оператора рождения глюона, а также проверке неупругого условия бутстрапа в глюонном секторе. Ниже мы будем использовать введенные в [9] и [10] определения и обозначения, а также результаты вычисления импакт-фактора рождения глюона [11]. В рамках СГЛП для нас достаточно рассматривать составляющие условия бутстрапа только в следующем за борновским порядке.

## 2 Условие бутстрапа для рождения глюона в МРК

Следуя [10], в настоящей работе мы используем светоконусное разложение импульсов:  $k = k^+ n_1 + k^- n_2 + k_\perp$ , где  $k^+ = (k, n_2)$ ,  $k^- = (k, n_1)$ , а  $n_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0_\perp; \pm 1)$  — светоконусные векторы. Кроме того, мы используем светоконусную калибровку  $(e, n_2) = 0$  для входящих в составляющие бутстрапа реджевских вершин.

В терминах  $t$ -канального операторного формализма, введенного в работе [9], условие бутстрапа для рождения глюона в мультиреджевской кинематике выглядит следующим образом [9]:

$$\langle GR_1 | + g q_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | \widehat{\mathcal{G}} = g \gamma_{R_1 R_2}^G \langle R_\omega(q_2) |, \quad (2.1)$$

где  $g$  — неперенормированная константа связи (ниже мы также будем использовать обозначение  $\bar{g}^2 = \frac{g^2 N_c \Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}}$ , в котором  $N_c$  — число цветов,  $D = 4 + 2\epsilon$  — размерность пространства-времени в используемой нами размерностной регуляризации);  $\langle GR_1 |$  — бра-вектор импакт-фактора перехода реджеона  $R_1$  с импульсом  $q_1$  в глюон  $G$  с импульсом  $k = q_1 - q_2$ ;

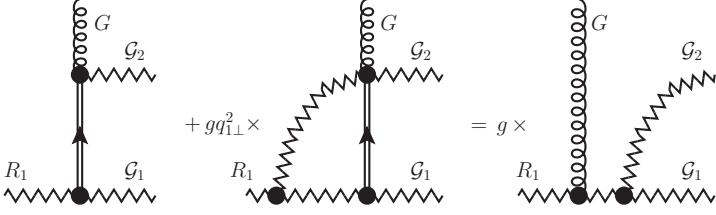


Рис. 1. Схематичное изображение условия бутстрапа (2.1), спроектированного на состояние  $|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$ : первая диаграмма обозначает импакт-фактор перехода реджеона  $R_1$  в глюон  $G$ ; вторая представляет матричный элемент оператора рождения глюона  $G$  между состоянием  $\langle R_\omega(q_1)|$  и двухреджеонным состоянием  $|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$ ; третья диаграмма — свертка эффективной вершины  $\gamma_{R_1R_2}^G$  и  $\langle R_\omega(q_2)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$ ; двойная линия со стрелкой изображает струю из одного или двух глюонов, соединяющую эффективные реджевские вершины; линия зигзага обозначает реджезованный глюон в  $t$ -канале. Для всех составляющих бутстрапа здесь подразумевается антисимметрия по замене  $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$ .

$\hat{\mathcal{G}}$  — оператор рождения глюона  $G$ ;  $\langle R_\omega(q)|$  — собственное состояние октетного ядра БФКЛ с собственным значением  $\omega(q)$  (величину  $1 + \omega(q)$  обычно называют траекторией глюона);  $\gamma_{R_1R_2}^G$  — вершина рождения глюона  $G$  реджеоном  $R_1$  с импульсом  $q_1$  при переходе в реджеон  $R_2$  с импульсом  $q_2$ . Везде ниже квантовые числа частиц (например, их цветовые индексы) обозначаются символами самих частиц. В правой части (2.1) подразумевается суммирование по цветам реджеона  $R_2$ . Состояние двух реджеонов в канале  $t_2$  с импульсами  $r_1$  и  $r_2$  мы описываем вектором  $|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$ . Графическая иллюстрация условия бутстрапа (2.1), спроектированного на состояние  $|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle$ , приведена на рис.1.

Очевидно, что в следующем за борновским приближении вместо (2.1) можно использовать условие, получающееся умножением справа на  $1 - \hat{\mathcal{U}}$ , где  $\hat{\mathcal{U}} \sim g^2$  — произвольный оператор. Это условие можно представить следующим образом:

$$\langle GR_1|(1 - \hat{\mathcal{U}}) + gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1)|(1 - \hat{\mathcal{U}})(1 + \hat{\mathcal{U}})\hat{\mathcal{G}}(1 - \hat{\mathcal{U}}) = g\gamma_{R_1R_2}^G \langle R_\omega(q_2)|(1 - \hat{\mathcal{U}}). \quad (2.2)$$

Данное преобразование дает возможность существенно упростить проверку условия бутстрапа, потому что дает возможность устранить с помощью оператора  $\hat{\mathcal{U}}$  наиболее сложные вклады в составляющих бутстрапа.

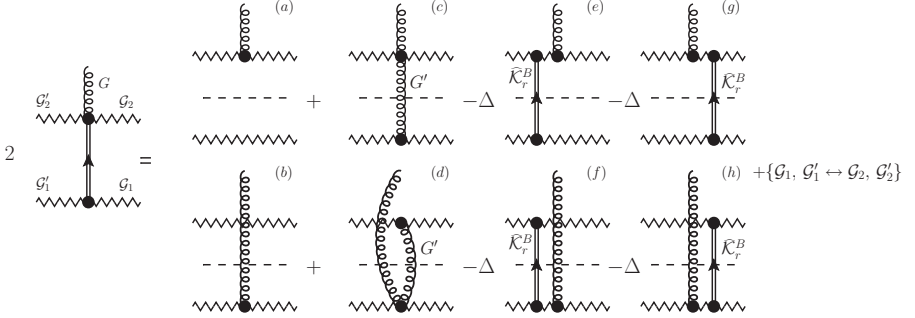


Рис. 2. Схематичное представление удвоенного матричного элемента  $\langle \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 | \widehat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle$ : диаграммы (a) и (b) отвечают борновскому вкладу, а также вкладу виртуальных поправок за счет однопетлевых поправок к реджевским вершинам; пара диаграмм (c) и (d) отвечает поправкам от рождения реального глюона  $G'$ ; диаграммы (e)–(h) отвечают вычитательным слагаемым в (2.3), пропорциональным  $\Delta$ ; двойная линия со стрелкой в правой части обозначает вставку оператора  $\widehat{\mathcal{K}}_r^B$ ; пунктирная линия обозначает массовую поверхность.

В соответствии с [9] для оператора рождения глюона имеем следующее определение:

$$\widehat{\mathcal{G}} = \widehat{\mathcal{G}}^\Delta - \left( \widehat{\mathcal{G}}^B \widehat{\mathcal{K}}_r^B + \widehat{\mathcal{K}}_r^B \widehat{\mathcal{G}}^B \right) \Delta. \quad (2.3)$$

Здесь  $\widehat{\mathcal{K}}_r^B$  — оператор “реальной части” ядра БФКЛ в борновском приближении:

$$\langle \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 | \widehat{\mathcal{K}}_r^B | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle = \delta^\perp(r'_1 + r'_2 - r_1 - r_2) \frac{2}{N_c} T_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}_1}^a T_{\mathcal{G}'_2 \mathcal{G}_2}^a \mathcal{K}_r^{(B)}(r'_1, r_1; r_1 + r_2), \quad (2.4)$$

где  $T^a$  — генераторы цветовой алгебры в присоединенном представлении, а

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_r^{(B)}(r'_1, r_1; r_1 + r_2) &= \frac{g^2 N_c}{2(2\pi)^{D-1}} \left( (r_1 + r_2)_\perp^2 - \frac{r'_{1\perp}{}^2 r_{2\perp}{}^2 + r'_{2\perp}{}^2 r_{1\perp}{}^2}{(r_1 - r'_1)_\perp^2} \right), \\ r'_2 &= r_1 + r_2 - r'_1. \end{aligned} \quad (2.5)$$



Оператор  $\widehat{\mathcal{G}}^\Delta$ , входящий в (2.3), определяется матричными элементами

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 | \widehat{\mathcal{G}}^\Delta | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle &= \delta^\perp(r'_1 + r'_2 - k - r_1 - r_2) \frac{1}{2} \left[ \gamma_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}_1}^{\mathcal{G}} \Delta_{\mathcal{G}'_2 \mathcal{G}_2} + \gamma_{\mathcal{G}'_2 \mathcal{G}_2}^{\mathcal{G}} \Delta_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}_1} + \right. \\ &+ \left. \sum_{G'} \Re \int_{y-\Delta}^{y+\Delta} \frac{dz'}{2(2\pi)^{D-1}} \left( \gamma_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}_1}^{\{GG'\}} \gamma_{G'}^{\mathcal{G}'_2 \mathcal{G}_2} + \gamma_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}_1}^{G'} \gamma_{\{GG'\}}^{\mathcal{G}'_2 \mathcal{G}_2} \right) \right] + \{ \mathcal{G}_1, \mathcal{G}'_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2, \mathcal{G}'_2 \}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\Delta_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}'_1} = r_{1\perp}^2 \delta^\perp(r_1 - r'_1) \delta_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}'_1}$ ;  $y = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{k^+}{k^-} \right]$  — быстрота рожденного глюона  $G$  с импульсом  $k$ ;  $z' = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{k'^+}{k'^-} \right]$  — быстрота промежуточного глюона  $G'$ , находящегося на массовой поверхности (поэтому  $k'^- = -\frac{k'^2}{2k'^+}$ ); по его дискретным квантовым числам проводится суммирование. Подчеркнем, что от вкладов промежуточного глюона  $G'$  в (2.6) берется вещественная часть ( $\Re$ ). Далее,  $\gamma_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}_1}^{\{GG'\}}$  — вершина рождения струи, состоящей из глюонов  $G$  и  $G'$  при реджеонном переходе  $\mathcal{G}'_1 \rightarrow \mathcal{G}_1$ ;  $\gamma_{\{\mathcal{G}'_2 \mathcal{G}_2\}}^{\mathcal{G}'_2 \mathcal{G}_2}$  — вершина поглощения глюона  $G'$  реджеоном  $\mathcal{G}'_2$  с переходом его в глюон  $G$  и реджеон  $\mathcal{G}_2$ , при этом

$$\gamma_{\{\mathcal{G}'_2 \mathcal{G}_2\}}^{\mathcal{G}'_2 \mathcal{G}_2} = \gamma_{\mathcal{G}'_2 \mathcal{G}_2}^{\{GG'_-\}}, \quad (2.7)$$

где индекс “ $-$ ” означает изменение знака импульса и комплексное сопряжение вектора поляризации. Во избежание недоразумений отметим, что по историческим причинам обозначения бра- и кет-состояний в (2.6) не соответствуют направлению реджеонных переходов. Это обстоятельство не имеет никакого значения.

В первых двух слагаемых (2.6), соответствующих рис. 2а и рис. 2б, должны учитываться виртуальные однопетлевые поправки к вершинам  $\gamma_{\mathcal{G}'_i \mathcal{G}_i}^{\mathcal{G}}$ , которые мы приведем ниже. Во вкладах, отвечающих реальным поправкам от рождения промежуточного глюона  $G'$  (рис. 2с, 2д), суммирование идет по цветам и поляризациям глюона  $G'$  с импульсом  $k'$ , а интегрирование проводится по его быстройте  $z' = \frac{1}{2} \ln(k'^+/k'^-)$ . Параметр  $\Delta$ , где  $\Delta \rightarrow \infty$ , регуляризует расходимость при интегрировании по быстройте. Однако, благодаря известному свойству факторизации реджевских вершин  $\gamma_{R_1 R_2}^{\{G_1 G_2\}}$  — см. [4], формула (12) — эта расходимость сокращается с вычитательными слагаемыми в (2.3), пропорциональными  $\Delta$  (рис. 2е–2h).

Представим матричный элемент оператора рождения глюона в сле-

дующем виде:

$$\begin{aligned} \langle R_\omega(q_1) | \hat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle &= \langle R_\omega(q_1) | \hat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(B)} + \langle R_\omega(q_1) | \hat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(v)} + \\ &+ \langle R_\omega(q_1) | \hat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(r)}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где первое слагаемое в правой части представляет собой борновский вклад, второе — вклад виртуальных петлевых поправок к вершинам и к функции  $R_\omega$ , а третье — вклад реальных поправок от рождения глюона на  $G'$ .

Определения вершин, траектории глюона, реальной части октетно-го ядра БФКЛ и его собственной функции введены в работе [10]. Ниже приведены только те из них, которые необходимы для вычисления матричного элемента оператора рождения глюона.

Для проекции  $\langle R_\omega(q) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle$  имеем следующее представление

$$\begin{aligned} \langle R_\omega(q) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle &= \delta^\perp(q - r_1 - r_2) T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^R R_\omega(r_{1\perp}, r_{2\perp}), \quad (2.9) \\ R_\omega(r_1, r_2) &= 1 + \bar{g}^2 \left[ -\frac{11}{6} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln[-q^2] + \ln \left[ \frac{r_1^2 r_2^2}{q^4} \right] \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{67}{18} - \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{r_1^2}{q^2} \right] \ln \left[ \frac{r_2^2}{q^2} \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Вершина  $\gamma_{R_1 R_2}^G$  рождения глюона  $G$  с импульсом  $k = q_1 - q_2$  и вектором поляризации  $e$  представляется в виде

$$\gamma_{R_1 R_2}^G = \gamma_{R_1 R_2}^{G(B)} + 2g\bar{g}^2 T_{R_1 R_2}^G e_{\perp\mu}^*(k) q_{1\perp}^2 V_g^\mu(q_1, q_2), \quad (2.11)$$

где  $\gamma_{R_1 R_2}^{G(B)}$  — вершина в борновском приближении:

$$\gamma_{R_1 R_2}^{G(B)} = -2g T_{R_1 R_2}^G e_{\perp\mu}^* q_{1\perp}^2 \left( \frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{k_{\perp}^\mu}{k_{\perp}^2} \right), \quad (2.12)$$

а  $V_g^\mu(q_1, q_2)$  — функция вершинных поправок, введенная в [10]:

$$\begin{aligned} V_g^\mu(q_1, q_2) &= \left( \frac{k_{\perp}^\mu}{k_{\perp}^2} - \frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} \right) \left( \frac{11}{6} \frac{q_{1\perp}^2 + q_{2\perp}^2}{q_{1\perp}^2 - q_{2\perp}^2} \ln \left[ \frac{q_{1\perp}^2}{q_{2\perp}^2} \right] - \frac{1}{2} \ln^2 \left[ \frac{q_{1\perp}^2}{q_{2\perp}^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - |k_{\perp}^2|^\epsilon \left[ \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{\pi^2}{2} \right] + \frac{k_{\perp}^2}{3(q_{1\perp}^2 - q_{2\perp}^2)^2} \left[ q_{1\perp}^2 + q_{2\perp}^2 - \frac{2q_{1\perp}^2 q_{2\perp}^2}{q_{1\perp}^2 - q_{2\perp}^2} \ln \left[ \frac{q_{1\perp}^2}{q_{2\perp}^2} \right] \right] \right) - \\ &\quad - \frac{k_{\perp}^\mu}{k_{\perp}^2} \left( \frac{11}{3} \frac{q_{2\perp}^2}{q_{1\perp}^2 - q_{2\perp}^2} \ln \left[ \frac{q_{1\perp}^2}{q_{2\perp}^2} \right] + \frac{k_{\perp}^2}{6q_{1\perp}^2} - \frac{k_{\perp}^2 (2k_{\perp}^2 - q_{1\perp}^2 - q_{2\perp}^2)}{6q_{1\perp}^2 (q_{1\perp}^2 - q_{2\perp}^2)^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ q_{1\perp}^2 + q_{2\perp}^2 - \frac{2q_{1\perp}^2 q_{2\perp}^2}{q_{1\perp}^2 - q_{2\perp}^2} \ln \left[ \frac{q_{1\perp}^2}{q_{2\perp}^2} \right] \right] \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Калибровочно-инвариантная вершина рождения двух глюонов была получена в [17]. В светоконусной калибровке  $(e_{1,2}, n_2) = 0$  она приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \gamma_{R_1 R_2}^{\{G_1 G_2\}} = 4g^2 e_{1\perp}^{*\alpha} e_{2\perp}^{*\beta} & \left[ T_{G_1 G'}^{R_1} T_{G' G_2}^{R_2} b_{\alpha\beta}(q_1; k_1, k_2; x_1) + \right. \\ & \left. + T_{G_1 G'}^{R_2} T_{G' G_2}^{R_1} b_{\beta\alpha}(q_1; k_2, k_1; x_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь  $e_{1,2}$  — векторы поляризации рожденных глюонов  $G_1$  и  $G_2$ , а  $x_{1,2} = \frac{k_{1,2}^+}{k_1^+ + k_2^+}$ ;

$$\begin{aligned} b^{\alpha\beta}(q_1; k_1, k_2; x_1) = & -\frac{x_2 k_{1\perp}^\alpha q_{1\perp}^\beta - x_1 q_{1\perp}^\alpha (q_1 - k_1)_\perp^\beta}{x_1 (q_1 - k_1)_\perp^2 + x_2 k_{1\perp}^2} - \\ & -\frac{x_1 q_{1\perp}^2 k_{1\perp}^\alpha (q_1 - k_1)_\perp^\beta}{k_{1\perp}^2 (x_1 (q_1 - k_1)_\perp^2 + x_2 k_{1\perp}^2)} + \frac{x_1 q_{1\perp}^\alpha \Lambda_\perp^\beta + x_2 q_{1\perp}^\beta \Lambda_\perp^\alpha}{\Lambda_\perp^2} + \frac{x_1 q_{1\perp}^2 k_{1\perp}^\alpha k_{2\perp}^\beta}{k_{1\perp}^2 (x_2 k_{1\perp}^2 + x_1 k_{2\perp}^2)} - \\ & -x_1 x_2 q_{1\perp}^2 \frac{\Lambda_\perp^\alpha k_{2\perp}^\beta + k_{1\perp}^\alpha \Lambda_\perp^\beta}{\Lambda_\perp^2 (x_2 k_{1\perp}^2 + x_1 k_{2\perp}^2)} + g_\perp^{\alpha\beta} \frac{x_1 x_2 (q_1, \Lambda)_\perp}{\Lambda_\perp^2} + \\ & + g_\perp^{\alpha\beta} x_1 x_2 \frac{q_{1\perp}^2 (\Lambda, x_2 k_1 + x_1 k_2)_\perp}{2\Lambda_\perp^2 [x_2 k_{1\perp}^2 + x_1 k_{2\perp}^2]} - g_\perp^{\alpha\beta} \frac{x_1 x_2 (q_{1\perp}^2 - 2(q_1, k_1)_\perp)}{2[x_1 (q_1 - k_1)_\perp^2 + x_2 k_{1\perp}^2]}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $\Lambda_\perp^\mu = (x_2 k_1 - x_1 k_2)_\perp^\mu$ .

В вершине (2.14) компоненты  $k_1^+$  и  $k_2^+$  одинакового знака. Однако далее мы будем иметь дело с вершинами, получаемыми из (2.14) с помощью кроссинга, и там данные компоненты, будучи разных знаков, могут привести к сингулярности. Она регуляризуется малой мнимой добавкой в знаменателе ( $\pm i0$ ). Взятие вещественной части ( $\Re$ ) в (2.6) приводит к пониманию этой сингулярности в интегралах по быстроте в смысле главного значения ( $\mathcal{P}$ ). То же замечание относится ко всем линейным по  $x_1$  знаменателям в (2.15).

Для дальнейших ссылок заметим также, что

$$\begin{aligned} b^{\alpha\beta}(q_1; k_1, k_2; x_1 = 1) &= q_{1\perp}^2 \left( \frac{q_{1\perp}^\alpha}{q_{1\perp}^2} - \frac{k_{1\perp}^\alpha}{k_{1\perp}^2} \right) \left( \frac{(q_1 - k_1)_\perp^\beta}{(q_1 - k_1)_\perp^2} - \frac{k_{2\perp}^\beta}{k_{2\perp}^2} \right), \\ b^{\alpha\beta}(q_1; k_1, k_2; x_1 = 0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из этих соотношений и формулы (2.12) следует упомянутое выше факторизационное свойство вершины  $\gamma_{R_1 R_2}^{\{G_1 G_2\}}$  при очень большой разнице быстрот рожденных глюонов.

Для проверки условия бутстрапа мы выбираем следующий базис цветовых структур, вычислению коэффициентов при которых будет посвящено дальнейшее изложение:

$$\text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}], \quad \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'}, \quad \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_2}^{G'} T_{\mathcal{G}_1 G}^{G'}. \quad (2.17)$$

Первая цветовая структура симметрична относительно перестановки  $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$ . Вторая и третья структуры, далее называемые древесными, выбраны такими же, как для вкладов борновского приближения. Выбор в качестве цветового базиса (2.17) удобен тем, что виртуальные поправки к вершинам возникают только для древесных структур, а в силу общей антисимметрии условия бутстрапа (2.1) относительно замены  $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$  вклады симметричной структуры антисимметричны по замене  $r_1 \leftrightarrow r_2$  импульсов реджеонов, что существенно облегчает их вычисления. Напоминаем, что запись  $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$  означает перестановку как цветовых индексов, так и импульсов реджеонов.

Ниже мы будем использовать обозначение для общего коэффициента

$$\mathcal{N}_\mu = \delta^\perp(q_1 - k - r_1 - r_2) q_{1\perp}^2 \frac{4}{N_c} g^2 \bar{g}^2 e_{\perp\mu}^*(k). \quad (2.18)$$

### 3 Вычисление $gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | \hat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle$

Перейдем к непосредственному вычислению вклада реальных поправок в матричный элемент оператора рождения глюона. При нормировке скалярного произведения двухреджеонных состояний, введенной в [9], он записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | \hat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(r)} &= \\ &= gq_{1\perp}^2 \sum_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2} \int \frac{d^{D-2} r'_1 d^{D-2} r'_2}{r'_{1\perp}{}^2 r'_{2\perp}{}^2} \langle R_\omega(q_1) | \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 \rangle \langle \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 | \hat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(r)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Далее в (3.1) для вклада реальных поправок мы можем положить борновским множитель  $\langle R_\omega(q_1) | \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 \rangle = \langle R_\omega(q_1) | \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 \rangle^{(B)} = \delta^\perp(q_1 - r'_1 - r'_2) T_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2}^{R_1}$ , а в матричном элементе оператора рождения глюона необходимо рассматривать только вклады диаграмм рис. 2с–2h, а также диаграмм, полученных заменой  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}'_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2, \mathcal{G}'_2$ : см. вклады промежуточного глюона

$G'(k')$  в (2.6), а также вычитательные слагаемые из (2.3). Вклады реальных поправок в (3.1) и ниже мы обозначаем верхним индексом ( $r$ ).

От интегрирования по быстрой  $z'$  глюона  $G'(k')$  в (2.6) удобно перейти к переменной  $x = \frac{k'^+}{k'^+ + k^+}$ . При этом  $dz' = \frac{dx}{x(1-x)}$ , а  $x$  меняется в пределах  $e^{-\Delta} \sqrt{\frac{k'^2}{k_\perp^2}} < x < 1 - e^{-\Delta} \sqrt{\frac{k_\perp^2}{k'^2}}$ . Заметим, что для вкладов в  $\langle \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 | \hat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle$  от диаграммы рис.2с (и такой же диаграммы с заменой  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}'_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2, \mathcal{G}'_2$ ) в силу соотношения (2.7) в последний аргумент вершинных функций (2.15) входит величина  $\frac{-k'^+}{-k'^+ + k^+}$ , очевидно связанная с  $x$ :  $\frac{-k'^+}{-k'^+ + k^+} = \frac{-x}{1-2x}$ .

Далее после “снятия” всех дельта-функций в (3.1) мы выбираем в качестве импульса интегрирования в поперечном пространстве  $l_\perp = r'_{1\perp}$  (для вкладов диаграмм рис. 2с, 2е, 2f, 2h) либо  $l_\perp = r'_{2\perp}$  (для диаграмм рис. 2d и 2g). Затем мы выполняем подстановку явного вида вершин (2.14) с учетом (2.7), октетного ядра (2.4) и борновского матричного элемента оператора рождения глюона, который находим из (2.6), опустив члены  $\sim g^3$ . После этого проводим суммирование по поляризациям промежуточного глюона  $G'$  по формуле

$$\sum_{pol G'} (e_\perp^*)^\alpha (e_\perp)^{\alpha'} = -g_\perp^{\alpha\alpha'} \quad (3.2)$$

и для вкладов от  $\hat{\mathcal{G}}^\Delta$  выражаем все цветовые структуры через базисные (2.17), пользуясь элементарным соотношением цветовой алгебры

$$\text{Tr}[T^G T^{\mathcal{G}_2} T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] = \text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] + \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \quad (3.3)$$

В результате описанных преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
& gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | \hat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(r)} = gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | [\hat{\mathcal{G}}^\Delta - \Delta(\hat{\mathcal{G}}^B \hat{\mathcal{K}}_r^B + \hat{\mathcal{K}}_r^B \hat{\mathcal{G}}^B)] | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(r)} = \\
& = \delta^\perp(q_1 - k - r_1 - r_2) 2g^4 q_{1\perp}^2 e_{\perp\mu}^*(k) \left\{ \int \frac{d^{D-2}l}{(2\pi)^{D-1}} \left( \frac{l_{\alpha\perp}}{l_\perp^2} + \frac{(r_1 - l)_{\alpha\perp}}{(r_1 - l)_\perp^2} \right) \times \right. \\
& \times \mathcal{P} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{x(1-x)} \left[ -\text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \left( \frac{b^{\mu\alpha}(q_1 - l; k; r_1 - l, 1 - x)}{(q_1 - l)_\perp^2} + \right. \right. \\
& + \frac{b^{\mu\alpha}(q_1 - l; k; r_1 - l; \frac{1-x}{1-2x})}{(q_1 - l)_\perp^2} \left. \right) - \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \left( \frac{b^{\mu\alpha}(q_1 - l; k; r_1 - l; 1 - x)}{(q_1 - l)_\perp^2} + \right. \\
& + \frac{b^{\mu\alpha}(q_1 - l; r_1 - l, k; x)}{(q_1 - l)_\perp^2} + \frac{b^{\mu\alpha}(q_1 - l; k; r_1 - l; \frac{1-x}{1-2x})}{(q_1 - l)_\perp^2} + \\
& \left. \left. + \frac{b^{\mu\alpha}(q_1 - l; r_1 - l, k; \frac{-x}{1-2x})}{(q_1 - l)_\perp^2} \right) \right] - \Delta \delta^\perp(q_1 - k - r_1 - r_2) \frac{gq_{1\perp}^2}{N_c} \times \quad (3.4) \\
& \times \int \frac{d^{D-2}l}{l_\perp^2 (q_1 - l)_\perp^2} \left[ T_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2}^{R_1} T_{b\mathcal{G}'_1}^{a'} T_{\mathcal{G}'_2 b'}^{a'} \left( \frac{\gamma_{b'\mathcal{G}'_2}^{G(B)}(k + r_2, r_2) \delta_{b\mathcal{G}_1}}{(k + r_2)_\perp^2} \times \right. \right. \\
& \times \mathcal{K}_r^{(B)}(l, r_1; q_1) + \frac{\gamma_{b\mathcal{G}_1}^{G(B)}(k + r_1, r_1) \delta_{b'\mathcal{G}_2}}{(k + r_1)_\perp^2} \mathcal{K}_r^{(B)}(l, k + r_1; q_1) \left. \right) + \\
& + T_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2}^{R_1} T_{b\mathcal{G}'_1}^{a'} T_{\mathcal{G}'_2 b'}^{a'} \left( \frac{\gamma_{\mathcal{G}'_2 b'}^{G(B)}(l, l - k) \delta_{\mathcal{G}_1 b}}{(l - k)_\perp^2} \mathcal{K}_r^{(B)}(q_1 - l, r_1; r_1 + r_2) + \right. \\
& \left. + \frac{\gamma_{\mathcal{G}'_1 b}^{G(B)}(l, l - k) \delta_{\mathcal{G}_2 b'}}{(l - k)_\perp^2} \mathcal{K}_r^{(B)}(l - k, r_1; r_1 + r_2) \right) \left. \right] \left. \right\} - \\
& - \delta^\perp(q_1 - k - r_1 - r_2) 2g^4 q_{1\perp}^2 e_{\perp\mu}^*(k) \left\{ \mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2 \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь  $x_- = e^{-\Delta} \sqrt{\frac{(r_1 - l)_\perp^2}{k_\perp^2}}$ ,  $x_+ = 1 - e^{-\Delta} \sqrt{\frac{k_\perp^2}{(r_1 - l)_\perp^2}}$  — пределы интегрирования по  $x$ , которые, помимо прочего, зависят как от  $r_{1\perp}$ , так и от импульса интегрирования  $l_\perp$ . Для удобства записи и дальнейшего упрощения в квадратных скобках в формуле (3.4) мы сгруппировали вместе вклады, происходящие из диаграммы рис. 2с и перекрестной ( $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$ ) диаграммы рис. 2д.

В (3.4) во вкладах, пропорциональных  $\Delta$ , вычитательные слагаемые приведены в последовательности, соответствующей порядку диаграмм рис. 2e–2h. Используя явный вид (2.5) и (2.12), а также формулу (3.3), получаем:

$$\begin{aligned}
& -\Delta g q_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | (\widehat{\mathcal{G}}^B \widehat{\mathcal{K}}_r^B + \widehat{\mathcal{K}}_r^B \widehat{\mathcal{G}}^B) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle = \Delta \frac{(4\pi)^{D/2} \mathcal{N}_\mu}{\Gamma(1-\epsilon)} \left\{ \int \frac{d^{D-2l}}{(2\pi)^{D-1}} \times \right. \\
& \times \left( \frac{l_{\alpha\perp}}{l_\perp^2} + \frac{(r_1-l)_{\alpha\perp}}{(r_1-l)_\perp^2} \right) \left[ \text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \left( \frac{(q_1-l-k)_\perp^\alpha}{(q_1-l-k)_\perp^2} - \frac{(r_1-l)_\perp^\alpha}{(r_1-l)_\perp^2} \right) \times \right. \\
& \times \left( \frac{(q_1-l)_\perp^\mu}{(q_1-l)_\perp^2} - \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \right) + \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \left( \left( \frac{(q_1-l-k)_\perp^\alpha}{(q_1-l-k)_\perp^2} - \frac{(r_1-l)_\perp^\alpha}{(r_1-l)_\perp^2} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left. \left( \frac{(q_1-l)_\perp^\mu}{(q_1-l)_\perp^2} - \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \right) + \left( \frac{(r_1-l)_\perp^\alpha}{(r_1-l)_\perp^2} - \frac{(q_1-l)_\perp^\alpha}{(q_1-l)_\perp^2} \right) \left( \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} - \frac{(q_1-r_1)_\perp^\mu}{(q_1-r_1)_\perp^2} \right) \right] \right\} - \\
& -\Delta \frac{(4\pi)^{D/2} \mathcal{N}_\mu}{\Gamma(1-\epsilon)} \left\{ \mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2 \right\}. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Теперь преобразуем выражение (3.4) к виду, в котором проведено явное сокращение регуляризатора  $\Delta$ . Для этого разобьем промежуток интегрирования по  $x$  на три области:  $[x_-, e^{-\Delta}]$ ,  $[e^{-\Delta}, 1 - e^{-\Delta}]$  и, наконец,  $[1 - e^{-\Delta}, x_+]$ . Интегрирование по  $x$  в первой и третьей областях проведем, положив всюду (кроме меры  $\frac{dx}{x(1-x)}$ ) в подынтегральном выражении соответственно  $x = 0$  либо  $x = 1$ : см. (2.16). Это приводит ко вкладам, пропорциональным  $\ln \left[ \frac{k_\perp^2}{(l-r_1)_\perp^2} \right]$ , в окончательном выражении (3.9). Теперь введем обобщенную функцию  $\frac{1}{[x(1-x)]_+}$ , определенную следующим образом:

$$\int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)]_+} \phi(x) = \int_0^1 dx \left( \frac{\phi(x)}{x(1-x)} - \frac{\phi(0)}{x} - \frac{\phi(1)}{(1-x)} \right). \tag{3.6}$$

Если в качестве  $\phi(x)$  взять выражение в квадратных скобках из (3.4), то после применения (2.16) для вычисления  $\phi(0)$  и  $\phi(1)$  и сравнения полученного результата со вкладом (3.5) становится очевидно, что сумма вкладов от второй области разбиения  $[e^{-\Delta}, 1 - e^{-\Delta}]$  и вычитательных слагаемых (3.5) не зависит больше от  $\Delta$ , и мы можем интегрирование по  $x$  проводить для этой области в пределах от 0 до 1, заменив  $\frac{1}{[x(1-x)]_+}$  на  $\frac{1}{[x(1-x)]_+}$ .

Для дальнейшего упрощения вкладов от второй области разбиения учтем, что

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{(x(1-x))_+} \left( b^{\alpha\mu}(q_1 - l; r_1 - l, k; x_1) + b^{\mu\alpha}(q_1 - l; k, r_1 - l; 1 - x_1) \right) \Big|_{x_1 \rightarrow \frac{-x}{1-2x}} = \\
 & = \int_0^1 \frac{dx}{(x(1-x))_+} \left( b^{\alpha\mu}(q_1 - l; r_1 - l, k; x) + b^{\mu\alpha}(q_1 - l; k, r_1 - l; 1 - x) \right),
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

поскольку сумма  $b^{\alpha\mu}(q_1 - l; r_1 - l, k; x_1) + b^{\mu\alpha}(q_1 - l; k, r_1 - l; 1 - x_1)$  содержит только линейные по  $x_1$  знаменатели, к которым можно применить следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{(x(1-x))_+} \left( \frac{1-x_1}{[x_1 a + (1-x_1)b]} \right) \Big|_{x_1 \rightarrow \frac{-x}{1-2x}} = \\
 & = \int_0^1 \frac{dx}{(x(1-x))_+} \frac{1-x}{[x a + (1-x)b]} = \frac{1}{b} \ln\left[\frac{b}{a}\right], \\
 & \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \left( \frac{x_1(1-x_1)}{[x_1 a + (1-x_1)b]} \right) \Big|_{x_1 \rightarrow \frac{-x}{1-2x}} = \\
 & = \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \frac{x(1-x)}{[x a + (1-x)b]} = \frac{1}{a-b} \ln\left[\frac{a}{b}\right].
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь  $a > 0$  и  $b > 0$ .



Окончательно получаем следующее выражение

$$\begin{aligned}
& gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | \hat{\mathcal{G}} | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(r)} = \\
& = \frac{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \mathcal{N}_\mu}{\Gamma(1-\epsilon)} \int \frac{d^{D-2}l}{(2\pi)^{D-1}} \left( \text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^{\mathcal{G}} T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \left\{ \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{(x(1-x))_+} \times \right. \right. \\
& \times \left[ \left( \frac{l_{\alpha\perp}}{l_\perp^2} + \frac{(r_1-l)_{\alpha\perp}}{(r_1-l)_\perp^2} \right) \left[ -\frac{b^{\mu\alpha}(q_1-l; k, r_1-l; x)}{2(q_1-l)_\perp^2} - \frac{b^{\mu\alpha}(q_1-l; k, r_1-l; \frac{-x}{1-2x})}{2(q_1-l)_\perp^2} \right] \right. \\
& - \frac{1}{2} \left( \frac{l_{\alpha\perp}}{l_\perp^2} + \frac{(r_1-l)_{\alpha\perp}}{(r_1-l)_\perp^2} \right) \left( \frac{(q_1-l-k)_\perp^\alpha}{(q_1-l-k)_\perp^2} - \frac{(r_1-l)_\perp^\alpha}{(r_1-l)_\perp^2} \right) \times \\
& \times \left. \left. \left( \frac{(q_1-l)_\perp^\mu}{(q_1-l)_\perp^2} - \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \right) \ln \left[ \frac{k_\perp^2}{(l-r_1)_\perp^2} \right] \right\} - \text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^{\mathcal{G}} T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \{r_1 \leftrightarrow r_2\} - \right. \\
& - \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \left[ \int_0^1 \frac{dx}{(x(1-x))_+} \left( \frac{l_{\alpha\perp}}{l_\perp^2} + \frac{(r_1-l)_{\alpha\perp}}{(r_1-l)_\perp^2} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left( \frac{b^{\mu\alpha}(q_1-l; k, r_1-l; x)}{(q_1-l)_\perp^2} + \frac{b^{\alpha\mu}(q_1-l; r_1-l, k; 1-x)}{(q_1-l)_\perp^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{l_{\alpha\perp}}{l_\perp^2} + \right. \\
& + \frac{(r_1-l)_{\alpha\perp}}{(r_1-l)_\perp^2} \left. \right) \ln \left[ \frac{k_\perp^2}{(l-r_1)_\perp^2} \right] \left\{ \left( \frac{(q_1-l-k)_\perp^\alpha}{(q_1-l-k)_\perp^2} - \frac{(r_1-l)_\perp^\alpha}{(r_1-l)_\perp^2} \right) \times \right. \\
& \times \left( \frac{(q_1-l)_\perp^\mu}{(q_1-l)_\perp^2} - \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \right) - \left( \frac{(r_1-l)_\perp^\alpha}{(r_1-l)_\perp^2} - \frac{(q_1-l)_\perp^\alpha}{(q_1-l)_\perp^2} \right) \times \\
& \times \left. \left. \left( \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} - \frac{(q_1-r_1)_\perp^\mu}{(q_1-r_1)_\perp^2} \right) \right\} + \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_2}^{G'} T_{\mathcal{G}_1 G}^{G'} \left[ r_1 \leftrightarrow r_2 \right] \right). \tag{3.9}
\end{aligned}$$

В (3.9) слагаемые, пропорциональные  $\ln \left[ \frac{k_\perp^2}{(l-r_1)_\perp^2} \right]$ , возникают от интегрирования по  $x$  вблизи  $x=0$  и  $x=1$  (в первой и третьей областях) и представляют наиболее сложные интегралы по поперечным импульсам. Оказывается возможным устранить эти слагаемые в модифицированном условии бутстрапа (2.2), выбрав  $\hat{U} = \hat{U}_k$  с матричными элементами

$$\begin{aligned}
& \langle \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 | \hat{U}_k | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle = g^2 \delta^\perp(r'_1 + r'_2 - r_1 - r_2) T_{\mathcal{G}'_1 \mathcal{G}_1}^a T_{\mathcal{G}_2 \mathcal{G}_2}^a \frac{r'_{1\perp} r'_{2\perp}}{(2\pi)^{D-1}} \times \\
& \times \left( \frac{r'_{1\perp}{}^\alpha}{r'_{1\perp}{}'^2} + \frac{(r_1-r'_1)_\perp^\alpha}{(r_1-r'_1)_\perp{}'^2} \right) \left( \frac{r'_{2\perp}{}^\alpha}{r'_{2\perp}{}'^2} + \frac{(r_2-r'_2)_\perp^\alpha}{(r_2-r'_2)_\perp{}'^2} \right) \ln \left[ \frac{k_\perp^2}{(r'_1-r_1)_\perp^2} \right] = \tag{3.10} \\
& = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{k_\perp^2}{(r_1-r'_1)_\perp^2} \right] \langle \mathcal{G}'_1 \mathcal{G}'_2 | \hat{\mathcal{K}}_r^B | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Естественным свойством этого оператора — если мы ожидаем, что условие бутстрапа (2.1) выполнено — является также то, что с помощью него можно устранить наиболее сложные вклады не только в операторе рождения глюона, но и в импакт-факторе. Запишем (2.2):

$$\langle GR_1|_* + gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1)|(1 - \widehat{U}_k)\widehat{\mathcal{G}}_* = g\gamma_{R_1 R_2}^G \langle R_\omega(q_2)|(1 - \widehat{U}_k), \quad (3.11)$$

$$\langle GR_1|_* = \langle GR_1|(1 - \widehat{U}_k), \quad (3.12)$$

$$\widehat{\mathcal{G}}_* = (1 + \widehat{U}_k)\widehat{\mathcal{G}}(1 - \widehat{U}_k), \quad (3.13)$$

где индекс “\*” у составляющих условия бутстрапа обозначает отсутствие в них наиболее сложных интегралов по импульсам. Введем также  $\langle R_\omega(q_1)|_* = \langle R_\omega(q_1)|(1 - \widehat{U}_k)$ , тогда условие бутстрапа, которое мы далее будем проверять, представляется в виде:

$$\langle GR_1|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_* + gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1)|_*\widehat{\mathcal{G}}_*|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle = g\gamma_{R_1 R_2}^G \langle R_\omega(q_2)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_* \quad (3.14)$$

Заметим также, что преобразованную функцию  $\langle R_\omega(q_1)|_*$  теперь можно вычислить точно по размерности  $D = 4 + 2\epsilon$ :

$$\begin{aligned} \langle R_\omega(q_1)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_* &= \langle R_\omega(q_1)|(1 - \widehat{U}_k)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle = \\ &= \delta^\perp(q_1 - r_1 - r_2)T_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}^{R_1} \left( 1 - \bar{g}^2(-q_{1\perp}^2)^\epsilon \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\epsilon\Gamma(1 + 2\epsilon)} \left\{ \left[ \frac{r_{1\perp}^2}{q_{1\perp}^2} \right]^\epsilon \ln \left[ \frac{q_{1\perp}^2}{r_{1\perp}^2} \right] + \right. \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{r_{2\perp}^2}{q_{1\perp}^2} \right]^\epsilon \ln \left[ \frac{q_{1\perp}^2}{r_{2\perp}^2} \right] + \left( \left[ \frac{r_{1\perp}^2}{q_{1\perp}^2} \right]^\epsilon + \left[ \frac{r_{2\perp}^2}{q_{1\perp}^2} \right]^\epsilon - 1 \right) \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \left[ \frac{k_\perp^2}{q_{1\perp}^2} \right] + \right. \right. \\ &\left. \left. + \psi(1 - \epsilon) - \psi(1) + 2\psi(1 + 2\epsilon) - 2\psi(1 + \epsilon) + \frac{11 + 7\epsilon}{2(1 + 2\epsilon)(3 + 2\epsilon)} \right) \right\} \right). \quad (3.15) \end{aligned}$$

В разложении по  $\epsilon$  функция  $\langle R_\omega(q_1)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_*$  выглядит следующим образом:

$$\langle R_\omega(q_1)|\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\rangle_* = \delta^\perp(q_1 - r_1 - r_2)T_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}^{R_1} \left( 1 - \bar{g}^2 R_k(r_1, r_2) \right), \quad (3.16)$$

где мы ввели обозначение для блока, который далее встречается в раз-

личных вкладах:

$$\begin{aligned}
R_k(r_1, r_2) &= \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{11}{6} + \ln[-k_\perp^2] \right) + \\
&+ \left( \frac{11}{6} + \ln \left[ \frac{k_\perp^2}{(r_1 + r_2)_\perp^2} \right] \right) \ln \left[ \frac{r_{1\perp}^2 r_{2\perp}^2}{-(r_1 + r_2)_\perp^2} \right] - \\
&- \frac{1}{2} \ln^2 \left[ \frac{r_{1\perp}^2}{(r_1 + r_2)_\perp^2} \right] - \frac{1}{2} \ln^2 \left[ \frac{r_{2\perp}^2}{(r_1 + r_2)_\perp^2} \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \ln^2[-(r_1 + r_2)_\perp^2] - \frac{67}{18} + \mathcal{O}(\epsilon).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Используя (2.11) и (3.16), находим правую часть условия бутстрапа (3.14):

$$\begin{aligned}
&g\gamma_{R_1 R_2}^G \langle R_\omega(q_2) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_* = \\
&= \mathcal{N}_\mu \frac{N_c}{2} T_{R_1 R_2}^G T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^{R_2} \left[ \left( \frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \right) R_k(r_1, r_2) + V_g^\mu(q_1, q_1 - k) \right],
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где функция  $V_g^\mu(q_1, q_2 = q_1 - k)$  определена формулой (2.13). Заметим, что правая часть условия бутстрапа не содержит вкладов симметричной цветовой структуры:

$$\frac{N_c}{2} T_{R_1 R_2}^G T_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}^{R_2} = \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} - \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_2}^{G'} T_{\mathcal{G}_1 G}^{G'}. \tag{3.19}$$

К глюонным виртуальным поправкам оператора рождения глюона мы относим поправки от реджевских вершин (2.11), фигурирующих в определении (2.6), а также от собственной функции ядра БФКЛ  $\langle R_\omega(q_1) |_*$ , определенной выше. Используя явный вид (2.11) поправок к вершинам  $\gamma_{\mathcal{G}_1' \mathcal{G}_1}^{G'}$  и  $\gamma_{\mathcal{G}_2' \mathcal{G}_2}^{G'}$ , входящим в выражение (2.6), а также поправки к  $\langle R_\omega(q_1) | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_*$  из представления (3.16), нетрудно получить

$$\begin{aligned}
&gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) |_* \widehat{\mathcal{G}}_* | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(v)} = \\
&= \mathcal{N}_\mu \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \left\{ \left( \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} - \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \right) R_k(r_1, q_1 - r_1) + \right. \\
&\left. + V_g^\mu(q_1 - r_1, r_2) \right\} - \mathcal{N}_\mu \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_2}^{G'} T_{\mathcal{G}_1 G}^{G'} \left\{ r_1 \leftrightarrow r_2 \right\}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

После преобразования с помощью оператора  $\hat{U}_k$  петлевой вклад в матричный элемент оператора рождения глюона приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) |_* \hat{G}_* | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle^{(r)} &= \frac{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \mathcal{N}_\mu}{\Gamma(1-\epsilon)} \int \frac{d^{D-2}l}{(2\pi)^{D-1}} \left( \text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \times \right. \\
&\times \left\{ \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{(x(1-x))_+} \left( \frac{l_{\alpha\perp}}{l_\perp^2} + \frac{(r_1-l)_{\alpha\perp}}{(r_1-l)_\perp^2} \right) \left[ -\frac{b^{\mu\alpha}(q_1-l; k, r_1-l; x)}{2(q_1-l)_\perp^2} - \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{b^{\mu\alpha}(q_1-l; k, r_1-l; \frac{-x}{1-2x})}{2(q_1-l)_\perp^2} \right] \right\} - \text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \left\{ r_1 \leftrightarrow r_2 \right\} - \\
&- \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \left[ \int_0^1 \frac{dx_1}{(x_1 x_2)_+} \left( \frac{l_{\alpha\perp}}{l_\perp^2} + \frac{(r_1-l)_{\alpha\perp}}{(r_1-l)_\perp^2} \right) \times \right. \\
&\times \left. \left( \frac{b^{\mu\alpha}(q_1-l; k, r_1-l; x_1)}{(q_1-l)_\perp^2} + \frac{b^{\alpha\mu}(q_1-l; r_1-l, k; x_1)}{(q_1-l)_\perp^2} \right) \right] + \\
&+ \left. \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_2}^{G'} T_{\mathcal{G}_1 G}^{G'} \left[ r_1 \leftrightarrow r_2 \right] \right). \tag{3.21}
\end{aligned}$$

### Вклад древесных цветовых структур

Для величины  $gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) |_* \hat{G}_* | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle$  вклад реальных поправок от рождения промежуточного глюона  $G'$  для обеих древесных цветовых структур (ниже обозначаем индексом “tree”) дается выражением

$$\begin{aligned}
gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) |_* \hat{G}_* | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_{tree}^{(r)} &= \\
&- \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \left[ \frac{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \mathcal{N}_\mu}{\Gamma(1-\epsilon)} \int \frac{d^{D-2}l}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^1 \frac{dx}{(x(1-x))_+} \times \right. \\
&\times \left. \left( \frac{b^{\mu\alpha}(q_1-l; k, r_1-l; 1-x)}{(q_1-l)_\perp^2} + \frac{b^{\alpha\mu}(q_1-l; r_1-l, k; x)}{(q_1-l)_\perp^2} \right) \times \right. \\
&\times \left. \left( \frac{l_{\alpha\perp}}{l_\perp^2} + \frac{(r_1-l)_{\alpha\perp}}{(r_1-l)_\perp^2} \right) \right] + \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_2}^{G'} T_{\mathcal{G}_1 G}^{G'} \left[ r_1 \leftrightarrow r_2 \right]. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Для вычисления данного вклада сначала можно провести интегрирование по  $x$ , используя формулы (3.8):

$$\begin{aligned}
gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | * \hat{\mathcal{G}}_* | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_{tree}^{(r)} &= -\frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \left[ \frac{(4\pi)^{D/2} \mathcal{N}_\mu}{\Gamma(1-\epsilon)} \int \frac{d^{D-2}l}{(2\pi)^{D-1}} \times \right. \\
&\times \left( \frac{l_{\alpha\perp}}{l_\perp^2} + \frac{(r_1-l)_{\alpha\perp}}{(r_1-l)_\perp^2} \right) \left( \ln \left[ \frac{(r_1+r_2-l)_\perp^2}{k_\perp^2} \right] \left\{ \frac{(q_1-l)_\perp^\alpha k_\perp^\mu}{(q_1-l)_\perp^2 k_\perp^2} + \right. \right. \\
&+ \frac{(r_1+r_2-l)_\perp^\alpha (q_1-l)_\perp^\mu}{(r_1+r_2-l)_\perp^2 (q_1-l)_\perp^2} - \frac{(r_1+r_2-l)_\perp^\alpha k_\perp^\mu}{(r_1+r_2-l)_\perp^2 k_\perp^2} - \left. \frac{g_\perp^{\alpha\mu}}{2(q_1-l)_\perp^2} \right\} + \\
&+ \left\{ \frac{(r_1-l)_\perp^\alpha (q_1-l)_\perp^\mu}{(r_1-l)_\perp^2 (q_1-l)_\perp^2} + \frac{(q_1-l)_\perp^\alpha (q_1-r_1)_\perp^\mu}{(q_1-l)_\perp^2 (q_1-r_1)_\perp^2} - \frac{g_\perp^{\alpha\mu}}{2(q_1-l)_\perp^2} - \right. \\
&- \left. \frac{(r_1-l)_\perp^\alpha (q_1-r_1)_\perp^\mu}{(r_1-l)_\perp^2 (q_1-r_1)_\perp^2} \right\} \ln \left[ \frac{(q_1-r_1)_\perp^2}{(r_1-l)_\perp^2} \right] \left. \right] + \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_2}^{G'} T_{\mathcal{G}_1 G}^{G'} \left[ r_1 \leftrightarrow r_2 \right]. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

После свертки по  $\alpha$  наиболее сложные интегралы по импульсам возникают от второго слагаемого в первой фигурной скобке, а также от первого слагаемого во второй фигурной скобке в (3.24). Вычисление этих интегралов осуществляется по формуле

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^2l}{(2\pi)^3} \frac{l_\perp^\mu (l-q_1, l-q_2)_\perp}{l_\perp^2 (l-q_1)_\perp^2 (l-q_2)_\perp^2} \ln \left[ \frac{k_\perp^2}{(l-q_2)_\perp^2} \right] = \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left( q_{1\perp}^\mu - q_{2\perp}^\mu \frac{(q_1, q_2)_\perp}{q_{2\perp}^2} \right) I(q_{1\perp}, q_{2\perp}) + \right. \\
&+ \frac{q_{1\perp}^\mu}{2q_{1\perp}^2} \ln \left[ \frac{(q_1-q_2)_\perp^2}{q_{2\perp}^2} \right] \ln \left[ \frac{(k_\perp^2)^2}{q_{2\perp}^2 (q_1-q_2)_\perp^2} \right] + \\
&+ \left. \frac{q_{2\perp}^\mu}{2q_{2\perp}^2} \ln \left[ \frac{(q_1-q_2)_\perp^2}{q_{1\perp}^2} \right] \ln \left[ \frac{(k_\perp^2)^2}{q_{2\perp}^2 (q_1-q_2)_\perp^2} \right] \right\}, \tag{3.24}
\end{aligned}$$

где мы ввели обозначение для функции дилогарифмического типа

$$I(q_{1\perp}, q_{2\perp}) = \int_0^1 \frac{dx}{(xq_{1\perp} + (1-x)q_{2\perp})_\perp^2} \ln \left[ \frac{xq_{1\perp}^2 + (1-x)q_{2\perp}^2}{x(1-x)(q_1-q_2)_\perp^2} \right]. \tag{3.25}$$

Функция  $I(q_1, q_2)$  обладает следующим свойством симметрии (см. [7], Appendix B):

$$I(q_1, q_2) = I(q_2, q_1) = I(q_1, q_1 - q_2) = I(q_2 - q_1, q_2) = I(-q_1, q_2 - q_1), \tag{3.26}$$

которое далее нами использовалось для упрощения окончательного результата (3.30).

Остальные интегралы в (3.24) вычисляются с использованием следующих двух формул

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^{D-2}l}{(2\pi)^{D-1}} \frac{l_{\perp}^{\mu}}{l_{\perp}^2 (q_1 - l)_{\perp}^2} \ln \left[ \frac{k_{\perp}^2}{(l - q_2)_{\perp}^2} \right] = \frac{2}{(4\pi)^{D/2}} \left\{ \frac{q_{1\perp}^{\mu}}{q_{1\perp}^2} \left( \frac{1}{\epsilon} \ln \left[ \frac{(q_1 - q_2)_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} \right] \right) + \right. \\
& + \ln[-q_{1\perp}^2] \ln \left[ \frac{(q_1 - q_2)_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} \right] + \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(q_1 - q_2)_{\perp}^2}{q_{1\perp}^2} \right] \ln \left[ \frac{(q_1 - q_2)_{\perp}^2}{q_{2\perp}^2} \right] \Big\} + \\
& + \left( q_{1\perp}^{\mu} \frac{(q_1, q_2)_{\perp}}{q_{1\perp}^2} - q_{2\perp}^{\mu} \right) I(q_{1\perp}, q_{2\perp}) \Big\} + \mathcal{O}(\epsilon), \tag{3.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^{D-2}l}{(2\pi)^{D-1}} \frac{(l - q_1, l - q_2)_{\perp}}{(l - q_1)_{\perp}^2 (l - q_2)_{\perp}^2} \ln \left[ \frac{k_{\perp}^2}{(l - q)_{\perp}^2} \right] = \\
& = \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon} \ln[-k_{\perp}^2] - \frac{\pi^2}{3} + \ln[-(q - q_1)_{\perp}^2] \ln[-(q - q_2)_{\perp}^2] + \right. \\
& + \left. \ln \left[ \frac{(k_{\perp}^2)^2}{(q - q_1)_{\perp}^2 (q - q_2)_{\perp}^2} \right] \ln[-(q_1 - q_2)_{\perp}^2] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon), \tag{3.28}
\end{aligned}$$

а также формулы, получающейся из (3.28) предельным переходом  $q \rightarrow q_2$ :

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^{D-2}l}{(2\pi)^{D-1}} \frac{(l - q_1, l - q_2)_{\perp}}{(l - q_1)_{\perp}^2 (l - q_2)_{\perp}^2} \ln \left[ \frac{k_{\perp}^2}{(l - q_2)_{\perp}^2} \right] = \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon} \ln[-k_{\perp}^2] - \right. \\
& - \frac{\pi^2}{3} - \ln^2[-(q_1 - q_2)_{\perp}^2] + 2 \ln[-(q_1 - q_2)_{\perp}^2] \ln[-k_{\perp}^2] \Big\} + \mathcal{O}(\epsilon). \tag{3.29}
\end{aligned}$$

В результате интегрирования по импульсам получаем в разложении по  $\epsilon$  вклад древесных цветовых структур для реальных поправок в матричный элемент оператора рождения глюона:

$$\begin{aligned}
& gq_{1\perp}^2 \langle R_{\omega}(q_1) | * \widehat{\mathcal{G}}_* | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_{tree}^{(r)} = \tag{3.30} \\
& = \mathcal{N}_{\mu} \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \left\{ \frac{q_{1\perp}^{\mu}}{2q_{1\perp}^2} \left( \ln \left[ \frac{(q_1 - k)_{\perp}^2}{q_{1\perp}^2} \right] \ln \left[ \frac{(q_1 - k)_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} \right] - \right. \right. \\
& - \ln \left[ \frac{r_{1\perp}^2}{q_{1\perp}^2} \right] \ln \left[ \frac{r_{1\perp}^2}{(q_1 - r_1)_{\perp}^2} \right] \Big) - \frac{k_{\perp}^{\mu}}{2k_{\perp}^2} \left( \ln \left[ \frac{(q_1 - k)_{\perp}^2}{q_{1\perp}^2} \right] \ln \left[ \frac{(q_1 - k)_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} \right] - \right. \\
& - \ln \left[ \frac{r_{2\perp}^2}{(q_1 - r_1)_{\perp}^2} \right] \ln \left[ \frac{r_{2\perp}^2}{k_{\perp}^2} \right] \Big) + \frac{(q_1 - r_1)_{\perp}^{\mu}}{2(q_1 - r_1)_{\perp}^2} \left( \ln \left[ \frac{r_{2\perp}^2}{(q_1 - r_1)_{\perp}^2} \right] \ln \left[ \frac{k_{\perp}^2}{r_{2\perp}^2} \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \ln \left[ \frac{q_{1\perp}^2}{r_{1\perp}^2} \right] \ln \left[ \frac{(q_1 - r_1)_\perp^2}{r_{1\perp}^2} \right] - \left( q_{1\perp}^\mu \frac{(q_1, q_1 - k)_\perp}{q_{1\perp}^2} - k_\perp^\mu \frac{(k, q_1 - k)_\perp}{k_\perp^2} \right) I(q_{1\perp}, k_\perp) + \\
& + \left( (q_1 - r_1)_\perp^\mu \frac{(q_1 - r_1, r_2)_\perp}{(q_1 - r_1)_\perp^2} - k_\perp^\mu \frac{(r_2, k)_\perp}{k_\perp^2} \right) I(q_{1\perp} - r_{1\perp}, k_\perp) + \\
& + \left( q_{1\perp}^\mu \frac{(q_1, r_1)_\perp}{q_{1\perp}^2} - (q_1 - r_1)_\perp^\mu \frac{(r_1, q_1 - r_1)_\perp}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right) I(q_{1\perp}, r_{1\perp}) \Big\} - \\
& - \mathcal{N}_\mu \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_2}^{G'} T_{\mathcal{G}_1 G}^{G'} \left\{ r_1 \leftrightarrow r_2 \right\}.
\end{aligned}$$

### Вклад симметричной цветовой структуры

Вклады симметричной цветовой структуры далее обозначены нижним индексом “sum”. Напоминаем, что удачный выбор цветового базиса (2.17) обеспечивает отсутствие виртуальных поправок для вкладов симметричной цветовой структуры, поэтому теперь верхний индекс ( $r$ ) писать не будем. Исходя из (3.21), имеем

$$\begin{aligned}
gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) |_* \hat{\mathcal{G}}_* | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_{sym} = & \text{Tr} [T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \left\{ \frac{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \mathcal{N}_\mu \mathcal{P}}{\Gamma(1 - \epsilon)} \int_0^1 \frac{dx}{(x(1-x))_+} \times \right. \\
& \times \int \frac{d^{D-2}l}{(2\pi)^{D-1}} \left( \frac{l_{\alpha\perp}}{l_\perp^2} + \frac{(r_1 - l)_{\alpha\perp}}{(r_1 - l)_\perp^2} \right) \left[ - \frac{b^{\mu\alpha}(q_1 - l; k, r_1 - l; x)}{2(q_1 - l)_\perp^2} - \right. \\
& \left. \left. - \frac{b^{\mu\alpha}(q_1 - l; k, r_1 - l; \frac{-x}{1-2x})}{2(q_1 - l)_\perp^2} \right] \right\} - \text{Tr} [T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \left\{ r_1 \leftrightarrow r_2 \right\}. \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Обозначим за  $F^\mu(x)$  первый интеграл по импульсам в (3.31) с учетом вкладов  $\{r_1 \leftrightarrow r_2\}$ :

$$F^\mu(x) = \int \frac{d^{D-2}l}{(2\pi)^{D-1}} \left( \frac{l_{\alpha\perp}}{l_\perp^2} + \frac{(r_1 - l)_{\alpha\perp}}{(r_1 - l)_\perp^2} \right) \frac{b^{\mu\alpha}(q_1 - l; k, r_1 - l; x)}{(q_1 - l)_\perp^2} - \{r_1 \leftrightarrow r_2\}. \quad (3.32)$$

Воспользовавшись формулами

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P} \int_0^1 dx \frac{F^\mu\left(\frac{-x}{1-2x}\right)}{x(1-x)} \stackrel{\tau=\frac{x}{1-x}}{=} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} F^\mu\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right) = \\
& = \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dx}{x} \left( F^\mu\left(\frac{x}{x-1}\right) + F^\mu\left(\frac{1}{1-x}\right) \right), \quad (3.33)
\end{aligned}$$

легко получить

$$\begin{aligned}
& gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | * \widehat{\mathcal{G}}_* | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_{sym} = \\
& = -\text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \left\{ \frac{(4\pi)^{D/2} \mathcal{N}_\mu}{2\Gamma(1-\epsilon)} \mathcal{P} \int_0^1 dx \left[ \frac{F^\mu(x)}{x(1-x)} - \frac{F^\mu(0)}{x} - \frac{F^\mu(1)}{1-x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{F^\mu\left(\frac{1}{1-x}\right) + F^\mu\left(1 - \frac{1}{1-x}\right) - F^\mu(0) - F^\mu(1)}{x} \right] \right\} + \\
& + \text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \left\{ r_1 \leftrightarrow r_2 \right\}. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Существенным моментом является представление функции  $F^\mu(x_1)$  в форме, наиболее удобной для дальнейшего интегрирования по поперечным импульсам:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^{D-2}l}{(2\pi)^{D-1}} \left( \frac{l_{\alpha\perp}}{l_\perp^2} + \frac{(r_1-l)_{\alpha\perp}}{(r_1-l)_\perp^2} \right) \frac{b^{\mu\alpha}(q_1-l; k, r_1-l; x_1)}{(q_1-l)_\perp^2} - \{r_1 \leftrightarrow r_2\} = \\
& = \int \frac{d^{D-2}l}{(2\pi)^{D-1}} \left\{ \right. \\
& \frac{x_1(r_1+k-l)_\perp^\mu (\Lambda_1, l)_\perp + x_2(r_1+k-l, l)_\perp \Lambda_{1\perp}^\mu - x_1 x_2 l_\perp^\mu (\Lambda_1, k+r_1-l)_\perp}{l_\perp^2 (r_1+k-l)_\perp^2 \Lambda_{1\perp}^2} \\
& + \frac{x_1(k+r_1-l)_\perp^\mu (\Lambda_0, l)_\perp + x_2(k+r_1-l, l)_\perp \Lambda_{0\perp}^\mu - x_1 x_2 l_\perp^\mu (\Lambda_0, k+r_1-l)_\perp}{l_\perp^2 (k+r_1-l)_\perp^2 \Lambda_{0\perp}^2} \\
& \left. - \frac{x_1(q_1-l)_\perp^\mu (\Lambda_1, l)_\perp + x_2(q_1-l, l)_\perp \Lambda_{1\perp}^\mu - x_1 x_2 l_\perp^\mu (\Lambda_1, q_1-l)_\perp}{l_\perp^2 (q_1-l)_\perp^2 \Lambda_{1\perp}^2} \right\} - \\
& - \left\{ r_1 \leftrightarrow r_2 \right\}, \tag{3.35}
\end{aligned}$$

где  $\Lambda_{1\perp}^\mu = (x_1(r_1-l) - x_2 k)_\perp^\mu$ ,  $\Lambda_{0\perp}^\mu = (x_1 l + x_2 k)_\perp^\mu$ . Для получения выражения (3.35) из (3.32) мы воспользовались общей антисимметрией  $r_1 \leftrightarrow r_2$ , а также заменой переменной интегрирования  $(l-r_1)_\perp \mapsto l_\perp$  для соответствующих вкладов. Так, например, после свертки по  $\alpha$  в (3.32) и указанной замены вклады второго и четвертого слагаемых из представления (2.15) приводят к выражению, не зависящему явно от  $r_1$  и  $r_2$ , то есть сокращаются при антисимметризации  $r_1 \leftrightarrow r_2$ . Далее, третье и шестое слагаемые в  $b^{\mu\alpha}$  из представления (2.15) после свертки по  $\alpha$  и замены



приводят ко второму и третьему слагаемому (дробям) в фигурных скобках в (3.35). Все остальные члены из  $b^{\mu\alpha}$  после свертки с учетом замены, антисимметризации, а также после преобразования знаменателей (2.15) в пятом и седьмом членах с помощью очевидной формулы

$$\frac{x_1 x_2}{\Lambda_{\perp}^2 [x_2 k_{1\perp}^2 + x_1 k_{2\perp}^2]} = \frac{1}{(k_1 + k_2)_{\perp}^2} \left[ \frac{1}{\Lambda_{\perp}^2} - \frac{1}{x_2 k_{1\perp}^2 + x_1 k_{2\perp}^2} \right] \quad (3.36)$$

приводят к первому слагаемому в фигурных скобках в (3.35) при полном сокращении всех вкладов с линейными по  $x_1$  знаменателями.

Форма (3.35) удобна тем, что теперь все интегралы вычисляются по одной формуле

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{D-2}l}{(2\pi)^{D-1}} \frac{(l, l - K)_{\perp}}{l_{\perp}^2 (l - K)_{\perp}^2} \frac{(l - Q)_{\perp}^{\mu}}{(l - Q)_{\perp}^2} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{(Q - K)_{\perp}^{\mu}}{(Q - K)_{\perp}^2} \ln \left[ \frac{Q_{\perp}^2}{(Q - K)_{\perp}^2} \right] + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{(Q - K)_{\perp}^{\mu}}{(Q - K)_{\perp}^2} - \frac{Q_{\perp}^{\mu}}{Q_{\perp}^2} \right) \ln \left[ \frac{(Q - K)_{\perp}^2}{K_{\perp}^2} \right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) + \\ &+ \frac{2\Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(1 + 2\epsilon)} \frac{1}{\epsilon} \frac{Q_{\perp}^{\mu}}{Q_{\perp}^2} \left( [-(Q - K)_{\perp}^2]_{\perp}^{\epsilon} - [-K_{\perp}^2]_{\perp}^{\epsilon} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

При этом в последней строчке (3.37) выделены точно по  $\epsilon$  слагаемые, позволяющие находить с необходимой точностью сингулярные вклады (при  $x = 0$  и  $x = 1$ ) при дальнейшем интегрировании по  $x$  в (3.34). После интегрирования по поперечным импульсам получаем следующее пред-

ставление для  $F^\mu(x_1)$ :

$$\begin{aligned}
F^\mu(x_1) = & \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} (-k_\perp^2)^\epsilon \frac{2\Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{\frac{D}{2} - 2}} \frac{1}{\epsilon} \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(1 + 2\epsilon)} \left( x_2^{2\epsilon} x_1^{-2\epsilon} - x_1^{-2\epsilon} \right) + \right. \\
& + x_2 \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \ln \left[ \frac{(x_1 r_1 + k)_\perp^2}{(k + r_1)_\perp^2} \right] + x_1 \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \ln \left[ \frac{(x_1 r_2 - x_2 k)_\perp^2}{k_\perp^2} \frac{(x_1 r_2 + k)_\perp^2}{x_2^2 k_\perp^2} \right] - \\
& - \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \ln \left[ \frac{(x_1 r_1 - x_2 k)_\perp^2}{(k + r_1)_\perp^2} \right] - x_2^2 \frac{(x_1 r_1 - x_2 k)_\perp^\mu}{(x_1 r_1 - x_2 k)_\perp^2} \ln \left[ \frac{(x_1 r_2 + k)_\perp^2 (r_1 + k)_\perp^2}{q_{1\perp}^2 k_\perp^2} \right] + \\
& + \frac{(x_1 r_2 + k)_\perp^\mu}{(x_1 r_2 + k)_\perp^2} \ln \left[ \frac{(x_1 r_1 - x_2 k)_\perp^2 (q_1 - r_1)_\perp^2}{x_2^2 k_\perp^2 q_{1\perp}^2} \right] - x_1 \frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} \ln \left[ \frac{(x_1 r_2 + k)_\perp^2}{(x_1 r_1 - x_2 k)_\perp^2} \right] + \\
& \left. + 2 \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \ln[x_2^2] \right\} - \{r_1 \leftrightarrow r_2\}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Результат (3.38) записан с учетом общей антисимметрии  $\{r_1 \leftrightarrow r_2\}$ : в частности, после интегрирования (3.35) по формуле (3.37) опущен член  $\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} x_1 \ln[x_2^2]$ , исчезающий при антисимметризации. При интегрировании (3.35) необходимо удерживать сингулярные вклады (последняя строка в (3.37)) для первого слагаемого в числителе второй дроби в фигурных скобках (3.35) (в точках  $x_1 = 0$  и  $x_1 = 1$ ), а также для второго слагаемого в числителе второй дроби и второго слагаемого в числителе третьей дроби (в точке  $x_1 = 0$ ). Однако, для последних двух вкладов сингулярность при  $x_1 = 0$  в сумме сокращается. Далее, в виду (2.16) имеем

$$\begin{aligned}
F^\mu(0) &= 0, \\
F^\mu(1) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \left( \ln \left[ \frac{r_{1\perp}^2 r_{2\perp}^2 [(q_1 - r_1)_\perp^2]^2}{q_{1\perp}^2 [k_\perp^2]^3} \right] + \right. \\
& + \frac{2\Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{\frac{D}{2} - 2}} \frac{(-k_\perp^2)^\epsilon}{\epsilon} \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(1 + 2\epsilon)} \left. \right) - \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \ln \left[ \frac{r_{1\perp}^2}{(q_1 - r_2)_\perp^2} \right] - \\
& \left. - \frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} \ln \left[ \frac{(q_1 - r_1)_\perp^2}{r_{1\perp}^2} \right] \right\} - \{r_1 \leftrightarrow r_2\}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Подставляя результат (3.38), (3.39) в (3.34), получаем окончательный ответ для вкладов симметричной цветовой структуры в матричный эле-

мент оператора рождения глюона:

$$\begin{aligned}
& gq_{1\perp}^2 \langle R_\omega(q_1) | * \widehat{\mathcal{G}}_* | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_{sym} = \\
& = \mathcal{N}_\mu \text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \int_0^1 dx_1 \left\{ \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(1 + 2\epsilon)} \frac{2(-k_\perp^2)^\epsilon}{\epsilon x_1^{1-2\epsilon}} + \right. \\
& + \left( \frac{x_1 k_\perp^\mu}{(r_2 + x_1 k)_\perp^2} + \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \frac{(r_{2\perp}^2 - x_1 k_\perp^2)}{(r_2 + x_1 k)_\perp^2} \right) \ln \left[ \frac{(r_1 + x_2 k)_\perp^2 (q_1 - r_1)_\perp^2}{q_{1\perp}^2 k_\perp^2 x_2^2} \right] - \\
& - \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \frac{1}{x_1} \ln \left[ \frac{(r_1 + x_1 k)_\perp^2 (r_2 + x_1 k)_\perp^2 (r_2 + x_2 k)_\perp^2}{x_2^2 r_{1\perp}^2 r_{2\perp}^2 (k + r_2)_\perp^2} \right] + \\
& + \left. \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \frac{1}{x_1} \ln \left[ \frac{(r_1 + x_1 k)_\perp^2}{r_{1\perp}^2} \right] - \frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} \frac{1}{x_1} \ln \left[ \frac{(r_1 + x_2 k)_\perp^2 (r_1 + x_1 k)_\perp^2}{(r_1 + k)_\perp^2 r_{1\perp}^2} \right] \right\} - \\
& - \mathcal{N}_\mu \text{Tr}[T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \int_0^1 dx_1 \left\{ r_1 \leftrightarrow r_2 \right\}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

## 4 Проверка условия бутстрапа

Нашей целью является явная проверка условия бутстрапа (2.1) либо, эквивалентно, преобразованного с помощью оператора  $\widehat{\mathcal{U}}_k$  условия (3.14). Еще раз заметим, что наш выбор цветового базиса (2.17) достаточно оптимален: правая часть (3.18) условия содержит только древесные цветовые структуры, а в силу антисимметричности относительно замены  $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$  всех компонентов условия бутстрапа проверку можно осуществлять только для одной древесной и для симметричной цветовой структуры.

Приведем явные выражения, найденные в работе [11], для глюонного вклада в импакт-фактор рождения глюона в следующем за борновским

приближении. Вклад древесных цветовых структур в импакт-фактор:

$$\begin{aligned}
\langle GR_1 | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_{*tree} = & \mathcal{N}_\mu \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'} \left[ -\frac{q_{1\perp}^\mu}{2q_{1\perp}^2} \left( \ln \left[ \frac{(q_1 - k)_\perp^2}{q_{1\perp}^2} \right] \ln \left[ \frac{(q_1 - k)_\perp^2}{k_\perp^2} \right] - \right. \\
& - \ln \left[ \frac{r_{1\perp}^2}{q_{1\perp}^2} \right] \ln \left[ \frac{r_{1\perp}^2}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right] \left. \right) + \frac{k_\perp^\mu}{2k_\perp^2} \left( \ln \left[ \frac{(q_1 - k)_\perp^2}{q_{1\perp}^2} \right] \ln \left[ \frac{(q_1 - k)_\perp^2}{k_\perp^2} \right] - \right. \\
& - \ln \left[ \frac{r_{2\perp}^2}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right] \ln \left[ \frac{r_{2\perp}^2}{k_\perp^2} \right] \left. \right) - \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{2(q_1 - r_1)_\perp^2} \left( \ln \left[ \frac{r_{2\perp}^2}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right] \ln \left[ \frac{k_\perp^2}{r_{2\perp}^2} \right] + \right. \\
& + \ln \left[ \frac{q_{1\perp}^2}{r_{1\perp}^2} \right] \ln \left[ \frac{(q_1 - r_1)_\perp^2}{r_{1\perp}^2} \right] \left. \right) + \left( q_{1\perp}^\mu \frac{(q_1, q_1 - k)_\perp}{q_{1\perp}^2} - k_\perp^\mu \frac{(k, q_1 - k)_\perp}{k_\perp^2} \right) I(q_{1\perp}, k_\perp) + \\
& + \left( (q_1 - r_1)_\perp^\mu \frac{(q_1 - r_1, r_2)_\perp}{(q_1 - r_1)_\perp^2} - k_\perp^\mu \frac{(r_2, k)_\perp}{k_\perp^2} \right) I(q_{1\perp} - r_{1\perp}, k_\perp) - \\
& - \left( q_{1\perp}^\mu \frac{(q_1, r_1)_\perp}{q_{1\perp}^2} - (q_1 - r_1)_\perp^\mu \frac{(r_1, q_1 - r_1)_\perp}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \right) I(q_{1\perp}, r_{1\perp}) + \\
& - \left( \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} - \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \right) R_k(r_1, q_1 - r_1) - V_g^\mu(q_1 - r_1, r_2) + \\
& + \left( \frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} - \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \right) R_k(r_1, r_2) + V_g^\mu(q_1, q_1 - k) \left. \right] - \mathcal{N}_\mu \frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_2}^{G'} T_{\mathcal{G}_1 G}^{G'} \left[ r_1 \leftrightarrow r_2 \right], \tag{4.1}
\end{aligned}$$

где функция  $I(q_1, q_2)$  определена в (3.25), функция  $V_g^\mu(r_1, r_2)$  — в (2.13), а  $R_k(r_1, r_2)$  — в (3.17). Данный результат для импакт-фактора, а также результаты (3.20) и (3.30) для матричного элемента оператора рождения глюона и (3.18) для правой части условия бутстрапа представлены в наиболее удобной для проверки форме. Так, в (4.1) последовательно представлены вклады, сокращающиеся со вкладами реальных поправок к оператору рождения глюона из (3.30), с виртуальными поправками из (3.20) и с правой частью (3.18) условия бутстрапа. Это сокращение завершает проверку условия бутстрапа (3.14) для древесных цветовых структур  $\frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_1}^{G'} T_{\mathcal{G}_2 G}^{G'}$  и  $\frac{N_c}{2} T_{R_1 \mathcal{G}_2}^{G'} T_{\mathcal{G}_1 G}^{G'}$ .

Вклад симметричной цветовой структуры в импакт-фактор:

$$\begin{aligned}
& \langle GR | \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \rangle_{*sym} = \\
& = -\mathcal{N}_\mu \text{Tr} [T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \int_0^1 dx_1 \left\{ \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(1 + 2\epsilon)} \frac{2(-k_\perp^2)^\epsilon}{\epsilon x_1^{1-2\epsilon}} + \right. \\
& + \left( \frac{x_1 k_\perp^\mu}{(r_2 + x_1 k)_\perp^2} + \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \frac{(r_{2\perp}^2 - x_1 k_\perp^2)}{(r_2 + x_1 k)_\perp^2} \right) \ln \left[ \frac{(r_1 + x_2 k)_\perp^2 (q_1 - r_1)_\perp^2}{q_{1\perp}^2 k_\perp^2 x_2^2} \right] - \\
& - \frac{(q_1 - r_1)_\perp^\mu}{(q_1 - r_1)_\perp^2} \frac{1}{x_1} \ln \left[ \frac{(r_1 + x_1 k)_\perp^2 (r_2 + x_1 k)_\perp^2 (r_2 + x_2 k)_\perp^2}{x_2^2 r_{1\perp}^2 r_{2\perp}^2 (k + r_2)_\perp^2} \right] + \\
& + \left. \frac{k_\perp^\mu}{k_\perp^2} \frac{1}{x_1} \ln \left[ \frac{(r_1 + x_1 k)_\perp^2}{r_{1\perp}^2} \right] - \frac{q_{1\perp}^\mu}{q_{1\perp}^2} \frac{1}{x_1} \ln \left[ \frac{(r_1 + x_2 k)_\perp^2 (r_1 + x_1 k)_\perp^2}{(r_1 + k)_\perp^2 r_{1\perp}^2} \right] \right\} + \\
& + \mathcal{N}_\mu \text{Tr} [T^{\mathcal{G}_2} T^G T^{\mathcal{G}_1} T^{R_1}] \int_0^1 dx_1 \left\{ r_1 \leftrightarrow r_2 \right\}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Для симметричной цветовой структуры после получения окончательного результата для матричного элемента оператора рождения глюона (3.40) и для импакт-фактора (4.2) проверка условия бутстрапа также становится тривиальной, поскольку выражения совпадают с точностью до знака. Заметим, что проверка бутстрапа (3.14) для симметричной цветовой структуры проводится до проведения интегрирования по переменной  $x_1$ .

## 5 Заключение

Доказательство мультиреджевской формы амплитуды в СГЛП основано на бутстрапном подходе. В статье [9] приведена общая схема этого доказательства на основе соотношений бутстрапа, возникающих из требования совместимости реджевской формы амплитуды и условия  $s$ -канальной унитарности. Для выполнения бесконечного числа соотношений бутстрапа достаточно установить справедливость лишь нескольких условий бутстрапа на эффективные вершины и траекторию. Все условия, кроме одного, были проверены ранее. Данная статья является заключительной в цикле работ по проверке последнего условия бутстрапа: неупругого условия бутстрапа для рождения глюона в МРК. Это условие представляет собой соотношение (2.1) между импакт-фактором [11], матричным

элементом оператора рождения глюона, а также собственной функцией ядра БФКЛ и эффективной реджеонной вершиной. Ранее мы провели проверку данного условия для вкладов фермионного сектора [10]. В настоящей работе мы нашли однопетлевые глюонные поправки к матричному элементу оператора рождения глюона и на основе вычисления импакт-фактора [11] явно продемонстрировали выполнение неупругого условия бутстрапа (2.1). Это завершает доказательство мультиреджевской формы амплитуд КХД с глюонным обменом в СГЛП.

## Список литературы

- [1] M. Braun and G.P. Vacca, Phys. Lett. B, **477** (2000) 156 [arXiv:hep-ph/9910432].
- [2] V.S. Fadin, Talk given at the NATO Advanced Research Workshop DIFFRACTION 2002, Diffraction 2002, NATO Science Series, **101** (2002) 235.
- [3] V.S. Fadin, Phys. Atom. Nucl., **66** (2003) 2017.
- [4] V.S. Fadin and R. Fiore, Phys. Lett. B, **440** (1998) 359 [arXiv:hep-ph/9807472].
- [5] V.S. Fadin, R. Fiore, M.I. Kotsky and A. Papa, Phys. Rev. D, **61** (2000) 094005 [arXiv:hep-ph/9908264].
- [6] J. Bartels, V.S. Fadin and R. Fiore, Nucl. Phys. B, **672** (2003) 329 [arXiv:hep-ph/0307076].
- [7] V.S. Fadin and A. Papa, Nucl. Phys. B, **640** (2002) 309 [arXiv:hep-ph/0206079].
- [8] V.S. Fadin, M.G. Kozlov and A.V. Reznichenko, Phys. Atom. Nucl. **67** (2004) 359 [Yad. Fiz. **67** (2004) 377] [arXiv:hep-ph/0302224].
- [9] V.S. Fadin, R. Fiore, M.G. Kozlov and A.V. Reznichenko, Phys. Lett. B, **639** (2006) 74 [arXiv:hep-ph/0602006].
- [10] V.S. Fadin, M.G. Kozlov and A.V. Reznichenko, Yad. Fiz. 74 (2011) 784–796 pp.
- [11] V.S. Fadin, M.G. Kozlov and A.V. Reznichenko, “NLO Impact-factor for one gluon production in MRK”, to be published

- [12] V.S. Fadin, E.A. Kuraev and L.N. Lipatov, Phys. Lett. B, **60** (1975) 50.
- [13] E.A. Kuraev, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, Sov. Phys. JETP, **44** (1976) 443 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **71** (1976) 840].
- [14] E.A. Kuraev, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, Sov. Phys. JETP, **45** (1977) 199 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **72** (1977) 377].
- [15] I.I. Balitsky and L.N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **28** (1978) 822 [Yad. Fiz. **28** (1978) 1597].
- [16] Ya.Ya. Balitskii, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, in *Materials of IV Winter School of LNPI* (Leningrad, 1979) 109.
- [17] V.S. Fadin and L.N. Lipatov, JETP Lett. **49** (1989) 352 [Yad. Fiz. **50** (1989 SJNCA,50,712.1989) 1141].

*М.Г. Козлов, А.В. Резниченко, В.С. Фадин*

**Проверка условия реджезации глюона  
в следующем за главным порядке.  
Глюонная часть**

*M.G. Kozlov, A.V. Reznichenko, V.S. Fadin*

**Check of the gluon reggeization condition  
in the next-to-leading order.  
Gluon part**

ИЯФ 2011-24

Ответственный за выпуск А.В. Васильев

Работа поступила 29.08.2011 г.

---

Сдано в набор 30.08.2011 г.

Подписано в печать 31.08.2011 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.0 печ.л., 1.6 уч.-изд.л.

Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 24

---

Обработано на РС и отпечатано на  
роталпринте «ИЯФ им. Г.И. Будкера» СО РАН  
*Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*