

УЧРЕЖДЕНИЕ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН
(ИЯФ СО РАН)

Э.А. Бибердорф, Н.И. Попова

НЕСИММЕТРИЧНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ
ПРОБЛЕМА

ИЯФ 2010-39

НОВОСИБИРСК
2010

Несимметричная спектральная проблема

Э.А.Бибердорф

Институт математики им. С.Л. Соболева,
630090, Новосибирск, Россия

Н.И.Попова

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера,
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

В данной работе рассматривается несимметричная проблема собственных значений. Описаны методика, алгоритмы, оценки критерия качества дихотомии, одномерные спектральные портреты матриц. Область применения дихотомии спектра матрицы это – различные технические приложения.

Создан новый модуль программ DichMod (дихотомия спектра матричного пучка окружностью и мнимой осью), который вошел в новую версию **GALA-3.0** программного пакета **GALA-2.0**, описанного авторами в монографии [1]. Приведены примеры. Данная работа связана с участием авторов в Проекте № 91 СО РАН 2009-2010гг.

Nonsymmetric spectral problem

E.A.Biberdorf

Sobolev Institute of Mathematics
630090, Novosibirsk, Russia

N.I. Popova

Budker Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, Russia

Abstract

In the paper a nonsymmetric spectral problem is considered. The methods, algorithms, estimations for a performance criterion of dichotomy, one-dimensional spectral portraits of matrices are described. The field of applying the spectral matrix dichotomy is different technical applications.

The new module of programs DichMod fulfils the dichotomy of a matrix bundle spectrum by a circle and an imaginary axis. This module enters into the new version **GALA-3.0** of the program package **GALA-2.0** (Guaranteed Accuracy in Linear Algebra) described by authors in the monograph [1]. The numerical examples are given. The paper is connected with the participation of authors in Project № 91 SB RAS 2009-2010.

1 Введение

В данной работе рассматривается несимметричная проблема собственных значений, описана теория и алгоритмы. Приводятся оценки критерия качества дихотомии на основе симметричных матриц. Рассматриваются одномерные спектральные портреты матриц, которые безусловно удобны в инженерных приложениях.

Область применения дихотомии спектра матрицы это – различные технические приложения такие, как теория колебаний, решение линейных дифференциальных уравнений и исследование их устойчивости, системы и теория управления, вычислительная геометрия, графика и машинное проектирование [10, 11, 12, 13, 14, 15].

Теоремы и утверждения приводятся без доказательств. Для более детального знакомства с темой даются ссылки.

На основе данной теории и алгоритма написан модуль программ DichMod. Программы этого модуля выполняют дихотомию спектра матричного пучка окружностью и мнимой осью. В результате появилась новая версия **GALA-3.0** (Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ **GALA-3.0** №20615904 от 9.9.2010) программного пакета **GALA-2.0** (Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ **GALA-2.0** №2007614804 от 21.11.2007), который был создан авторами ранее и описан в монографии [1]. Приведены примеры.

Данная работа связана с участием авторов в государственном контракте КОНТРАКТ № 14.740.11.0350 с Минобрнауки России (2010-2012гг), а также в Проекте № 91-2009 СО РАН “Актуальные проблемы механики сплошных сред, физики полупроводников и математической биологии. Корректность краевых задач, устойчивость решений и вычислительный эксперимент”(регистрационный номер проекта 2.1.1/4591; подраздел 2.1.1, раздел 2.1, мероприятие 2; Аналитическая ведомственная целевая программа “Развитие научного потенциала высшей школы”2009-10 гг. Министерства образования и науки РФ).

2 Понятие ε -спектра

Рассмотрим пример с несимметричной матрицей.

Пример. Для квадратной целочисленной матрицы C размера 7

$$C = \begin{pmatrix} 289 & 2064 & 336 & 128 & 80 & 32 & 16 \\ 1152 & 30 & 1312 & 512 & 288 & 128 & 32 \\ -29 & -2000 & 756 & 384 & 1008 & 224 & 48 \\ 512 & 128 & 640 & 0 & 640 & 512 & 128 \\ 1053 & 2256 & -504 & -384 & -756 & 800 & 208 \\ -287 & -16 & 1712 & -128 & 1968 & -30 & 2032 \\ -2176 & -287 & -1565 & -512 & -541 & -1152 & -289 \end{pmatrix} \quad (1)$$

вычислялись собственные значения с помощью стандартной программы. Был получен следующий результат.

Приближенный спектр матрицы C :

$$\begin{aligned} \lambda_1(C) &= \mathbf{6.624}, \\ \lambda_{2,3}(C) &= \mathbf{4.065} \pm 4.381i, \\ \lambda_{4,5}(C) &= \mathbf{-1.472} \pm 5.449i, \\ \lambda_{6,7}(C) &= \mathbf{-5.906} \pm 2.371i. \end{aligned}$$

Затем с помощью ортогональной матрицы $P(P^{-1} = P^T)$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

были записаны матрицы D и F :

$$D = P^{-1}CP, \quad F = P^{-1}DP = P^{-1}(P^{-1}CP)P.$$

Видно, что матрицы D и F получены из матрицы C перестановкой целочисленных строк и столбцов. При этом при вычислении D и F через C ошибок округления не совершается.

Для матриц D и F той же стандартной программой вычислялись собственные значения. Собственные значения матриц D и F должны

совпадать с собственными значениями матрицы C , но были получены следующие результаты:

Приближенный спектр матрицы D :

$$\begin{aligned}\lambda_1(D) &= \mathbf{6.005}, \\ \lambda_{2,3}(D) &= \mathbf{3.651} \pm 3.784i, \\ \lambda_{4,5}(D) &= \mathbf{-1.331} \pm 4.699i, \\ \lambda_{6,7}(D) &= \mathbf{-5.322} \pm 2.014i.\end{aligned}$$

Приближенный спектр матрицы F :

$$\begin{aligned}\lambda_1(F) &= \mathbf{8.095}, \\ \lambda_{2,3}(F) &= \mathbf{4.984} \pm 5.709i, \\ \lambda_{4,5}(F) &= \mathbf{-1.825} \pm 7.052i, \\ \lambda_{6,7}(F) &= \mathbf{-7.207} \pm 3.090i.\end{aligned}$$

В действительности, все собственные значения матриц C, D, F являются вещественными целыми числами. Это следует из того, что сама матрица C

$$C = L^{-1}RL$$

получена с помощью матрицы L

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

из верхнетреугольной матрицы R

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2048 & 256 & 128 & 64 & 32 & 16 \\ 0 & -2 & 1024 & 512 & 256 & 128 & 32 \\ 0 & 0 & 4 & 512 & 1024 & 256 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 512 & 512 & 128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1024 & 256 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 2048 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно спектр матрицы C должен совпадать со спектром матрицы R , который состоит из чисел, расположенных на ее главной диагонали.

Точный спектр матрицы C :

$$\begin{aligned}\lambda_1(C) &= \mathbf{0}, \\ \lambda_{2,3}(C) &= \pm \mathbf{1}, \\ \lambda_{4,5}(C) &= \pm \mathbf{2}, \\ \lambda_{6,7}(C) &= \pm \mathbf{4}.\end{aligned}$$

Из сравнения вычисленных спектров матриц C , D , F и точного спектра матрицы C возникает вопрос: “Что же вычисляет стандартная программа?”. Не стоит удивляться, если вы, повторив эти расчеты на своем компьютере, получите другой набор собственных значений. Причина такой разницы в результатах – не в дефектах вычислительного алгоритма или программы. Такой разницей в результатах связан с погрешностями выполнения арифметических операций и с выбором примера. Причем величина этих погрешностей зависит от используемой в компьютере разрядной сетки для представления чисел.

Понятие ε -спектра.

Для разъяснения ситуации необходимо ввести понятие ε -спектра.

Определение 1 Точка λ комплексной плоскости принадлежит ε -спектру квадратной $N \times N$ -матрицы A ($\lambda \in \Lambda_\varepsilon(A)$), если существует $N \times N$ -матрица Δ ($\|\Delta\| \leq \varepsilon\|A\|$), такая, что λ является собственным значением матрицы $A + \Delta$ ($\det[\lambda I - (A + \Delta)] = 0$).

В других терминах ε -спектр – это множество всех точек комплексной плоскости, в которых $\sigma_{\min}(A - \lambda I) \leq \varepsilon$. Понятие ε -спектра является естественным обобщением понятия матричного спектра. Очевидно, что по изображению функции $f(\lambda) = \sigma_{\min}(A - \lambda I)$ можно судить о поведении ε -спектра матрицы A . Рассмотрим несколько примеров.

Приведем пример трехдиагональной симметричной матрицы размера $k \times k$

$$S_k = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & & & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ & & 1/2 & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1/2 \\ 0 & & & & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

собственные значения которой совпадают с корнями полинома Чебышева k -й степени. На рис. 1 (см. ниже) слева изображен спектральный портрет матрицы S_{10} в логарифмической шкале. В данном случае параметр λ принадлежит области $[-2, 2] \times [-2, 2]$. На рисунке отчетливо видны

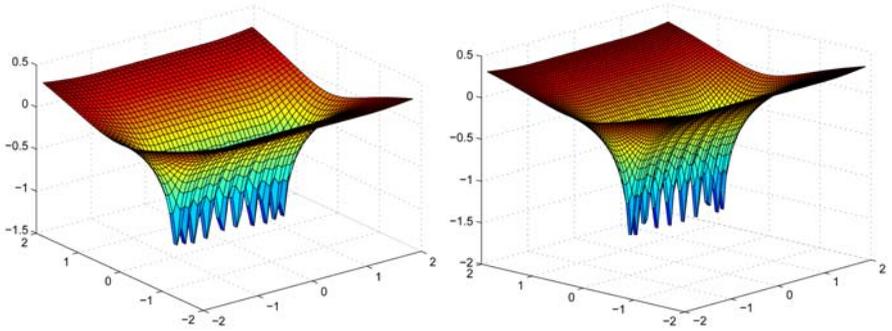


Рис. 1. $\sigma_{\min}(S_{10} - \lambda I)$ – спектральные портреты матриц (2) (слева) и (3) (справа).

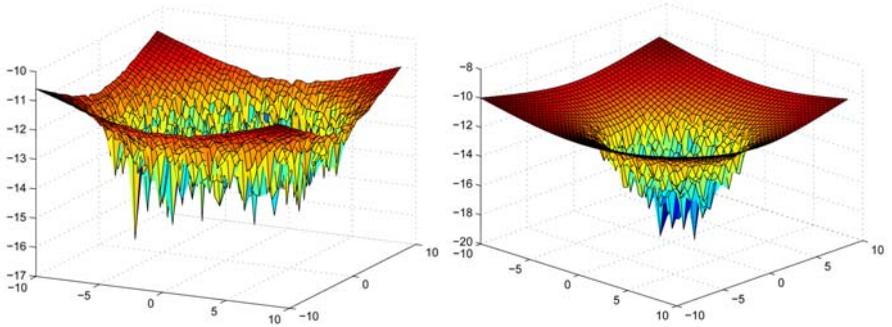


Рис. 2. Спектральные портреты матриц $C(\lg \sigma_{\min}(C - \lambda I))$ слева) и $R(\lg \sigma_{\min}(R - \lambda I))$ справа); $\lambda \in [-10, 10] \times [-10, 10]$.

десять точек минимума функции $\sigma_{\min}(S_{10} - \lambda I)$. Тем самым мы имеем дополнительное подтверждение того, что все собственные значения этой матрицы хорошо отделены друг от друга и могут быть с хорошей точностью вычислены [1].

Аналогичными свойствами обладают спектральные портреты (см. рис. 1 справа) матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & b_2 & & & 0 \\ b_2 & 0 & b_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{M-1} & 0 & b_M \\ 0 & & & b_M & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

с элементами $b_{n+1} = n/\sqrt{(2n-1)(2n+1)}$ ($1 \leq n \leq M-1$). Собственные значения этих матриц совпадают с нулями полиномов Лежандра соответствующих порядков.

А вот спектральный портрет матрицы C , о которой мы упоминали в начале этого раздела, выглядит совсем иначе (см. ниже рис. 2). Из приведенных спектральных портретов видно, что весь квадрат $[-10, 10] \times [-10, 10]$ заполнен ε -спектром матриц C и R при $\varepsilon = 10^{-10}$. Матричные ε -спектры при меньших ε занимают также большие области. В смысле ε -спектра любое число из этих областей является хорошим приближением к собственному значению матрицы. При изучении спектральных портретов матриц C и R становится понятно, почему стандартные программы по вычислению собственных значений давали такие противоречивые результаты. Очевидно, что в подобных случаях вопрос о вычислении отдельных собственных значений в условиях машинной арифметики теряет смысл, а задача об исследовании спектра несимметричных матриц требует изменения постановки.

Теория возмущений.

В реальных задачах сами матрицы получаются в результате каких-либо измерений или предварительных расчетов, то есть уже содержат погрешности. Из теории возмущений [1] известно, что для симметричной матрицы A собственные значения $\lambda_j(A)$ непрерывно зависят от элементов матрицы и при возмущении на ΔA верно неравенство (Теорема Вейля)

$$|\lambda_j(A) - \lambda_j(A + \Delta A)| \leq \|\Delta A\|.$$

Из приведенного первого примера видно, что не существует аналога этого неравенства для несимметричных матриц. Именно по этой причине сама постановка задачи о вычислении точек спектра несимметричной матрицы является некорректной с вычислительной точки зрения, так как малые погрешности, всегда возникающие при вычислениях на компьютере, приводят к непредсказуемым погрешностям результата.

Также из примера видно, что в несимметричном случае точки спектра как бы расплываются, превращаясь в спектральные пятна и можно построить на экране монитора цветной *спектральный портрет матрицы* [7]. Отсюда следует, что задача о вычислении отдельных собственных значений должна быть заменена на задачу об определении границ спектральных пятен.

3 Постановка задачи о дихотомии спектра матрицы и численные критерии дихотомии

В несимметричном случае при численном исследовании ε -спектра полная спектральная проблема о вычислении отдельных собственных значений заменяется задачей о локализации изолированных частей ε -спектра (определении границ пятен) и вычислении инвариантных подпространств, отвечающих этим частям ε -спектра.

3.1 Постановка задачи

Пусть на комплексной плоскости задана кривая γ (например, окружность, прямая, эллипс и т. д.). Требуется:

- 1) определить, есть ли на γ точки спектра матрицы A (вычислить критерий дихотомии);
- 2) если на γ отсутствуют точки спектра матрицы A , то необходимо оценить расстояние от спектра A до кривой γ ;
- 3) определить инвариантные подпространства матрицы A , отвечающие собственным значениям матрицы, лежащим внутри и вне кривой γ соответственно.

3.2 Численные критерии отсутствия точек спектра матрицы на кривой

Пусть задана матрица A . Рассмотрим на комплексной плоскости отрезок кривой γ конечной длины l . Нам необходимо ответить на важный вопрос: “Какие численные критерии могут указывать на то, что на кривой γ лежат точки спектра матрицы A ?”

Напомним, что матрица $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$, зависящая от комплексного параметра λ , называется *резольвентой матрицы* A .

Отсюда, первым очевидным критерием является норма резольвенты матрицы. Равенство

$$\max_{\lambda \in \gamma} \|(\lambda I - A)^{-1}\| = \infty \quad (4)$$

означает, что на кривой γ находятся точки спектра матрицы A и контур как бы делит спектр на две части. Поэтому говорят, что контур осуществляет *дихотомию* спектра матрицы A . Обозначим

$$\frac{m_\gamma(A)}{\|A\|} = \max_{\lambda \in \gamma} \|(\lambda I - A)^{-1}\| \quad (5)$$

(обезразмеренная норма резольвенты). Тогда условие

$$\|(\lambda I - (A + \Delta))^{-1}\| < \infty$$

для любой матрицы Δ такой, что $\|\Delta\| \leq \varepsilon\|A\|$ при $\lambda \in \gamma$ равноценно тому, что $\varepsilon m_\gamma(A) < 1$. Это условие означает, что кривая γ не пересекает ε -спектр Λ_ε матрицы A . Поэтому можно сказать, что $m_\gamma(A)$ численно оценивает близость спектра матрицы A к кривой γ .

Иногда удобнее в качестве критерия дихотомии использовать не сам максимум резольвенты, а величину (интегральную характеристику) через которую этот максимум оценивается.

Например, можно взять величину $\omega_\gamma(A) = \|H_\gamma(A)\|$, где

$$H_\gamma(A) = \frac{\|A\|^2}{l_\gamma} \oint_\gamma (\lambda I - A)^{-*} F (\lambda I - A)^{-1} |d\lambda|,$$

а F – произвольная самосопряженная положительно определенная матрица или просто

$$H_\gamma(A) = \frac{\|A\|^2}{l_\gamma} \oint_\gamma (\lambda I - A)^{-*} (\lambda I - A)^{-1} |d\lambda|. \quad (6)$$

Очевидно, что данный интеграл конечен только в том случае, если на γ отсутствуют собственные значения матрицы A . Действительно, если это не так, то под интегралом возникает особенность второго порядка, следовательно, $\|H_\gamma(A)\| = \infty$. Как показывает практика, наиболее употребляемыми контурами, используемыми для разделения спектра, являются единичная окружность и мнимая ось.

Пример. Для единичной окружности ($\lambda = re^{i\varphi} = e^{i\varphi}$) такой критерий имеет вид

$$H_r(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (e^{i\varphi} I - A)^{-*} (e^{i\varphi} I - A)^{-1} d\varphi.$$

Если γ – бесконечная кривая, например, мнимая ось, парабола или гипербола, то длина пути интегрирования l_γ бесконечна и в этом случае используют норму матрицы

$$H_\gamma(A) = \|A\|^2 \int_\gamma (\lambda I - A)^{-*} (\lambda I - A)^{-1} |d\lambda|.$$

3.3 Эквивалентность численных критериев отсутствия спектра на кривой

Следующая теорема связывает значения $\|H_\gamma(A)\|$ и $m_\gamma(A)$.

Теорема 1 *Если на гладкой незамкнутой кривой γ конечной длины отсутствуют точки спектра матрицы A , то критерии (5) и (6) связаны неравенствами:*

$$\frac{l_\gamma m_\gamma^2(A)}{1 + \frac{l_\gamma}{\|A\|} m_\gamma(A)} \leq \|H_\gamma(A)\| \leq m_\gamma^2(A), \quad (7)$$

$$\sqrt{\|H_\gamma(A)\|} \leq m_\gamma(A) \leq \frac{\|H_\gamma(A)\| l_\gamma}{2\|A\|} + \sqrt{\frac{\|H_\gamma(A)\|^2 l_\gamma^2}{4\|A\|^2} + \|H_\gamma(A)\|}. \quad (8)$$

Доказательство см. в [7].

3.4 Непрерывность резольвенты матрицы на кривой

При малых возмущениях матрицы $\|\Delta A\| \leq \varepsilon\|A\|$ возмущение резольвенты матрицы A на кривой γ также оценивается через ε . Оценку возмущения дает следующая лемма.

Лемма 1 *Пусть для кривой γ значение параметра $m_\gamma(A)$ конечно, а матрицы A и B близки в следующем смысле*

$$\|A - B\| \leq \varepsilon\|A\|, \quad \varepsilon m_\gamma(A) < 1. \quad (9)$$

Тогда для разницы резольвент справедливо неравенство

$$\|(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - B)^{-1}\| \leq \frac{\varepsilon m_\gamma^2(A)}{\|A\|(1 - \varepsilon m_\gamma(A))}. \quad (10)$$

Доказательство см. в [7].

Следствие 1 *Если усилить оценку (9)*

$$\|A - B\| \leq \varepsilon\|A\|, \quad \varepsilon m_\gamma(A) < \frac{1}{2},$$

то разница резольвент оценивается следующим образом

$$\|(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - B)^{-1}\| \leq \frac{2\varepsilon m_\gamma^2(A)}{\|A\|}.$$

Следствие 2 Пусть для матриц A и B выполнено условие (9), тогда их резольвенты близки также в смысле следующего неравенства

$$\|I - (\lambda I - B)^{-1}(\lambda I - A)\| \leq \frac{\varepsilon m_\gamma(A)}{1 - \varepsilon m_\gamma(A)}. \quad (11)$$

3.5 Непрерывность матричного критерия отсутствия спектра на кривой

Интегральные критерии дихотомии непрерывно зависят от исследуемых матриц и благодаря этому позволяют делать устойчивые и удобные для применений оценки. Рассмотрим оценки устойчивости матрицы $H_\gamma(A)$ к возмущениям матрицы A .

Теорема 2 Пусть выполнено условие (9). Определим симметричные самосопряженные матрицы

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\gamma(A) &= \frac{1}{l_\gamma} \oint_\gamma (\lambda I - A)^{-*} (\lambda I - A)^{-1} |d\lambda| = \frac{1}{\|A\|^2} H_\gamma(A), \\ \tilde{H}_\gamma(B) &= \frac{1}{l_\gamma} \oint_\gamma (\lambda I - B)^{-*} (\lambda I - B)^{-1} |d\lambda| = \frac{1}{\|B\|^2} H_\gamma(B). \end{aligned}$$

Для них справедлива оценка

$$\|\tilde{H}_\gamma(A) - \tilde{H}_\gamma(B)\| \leq \frac{\varepsilon m_\gamma(A)}{1 - \varepsilon m_\gamma(A)} \left(2 + \frac{\varepsilon m_\gamma(A)}{1 - \varepsilon m_\gamma(A)} \right) \|\tilde{H}_\gamma(A)\|. \quad (12)$$

Следствие 3 Если для матриц A и B выполнено условие (9), то для матриц $H_\gamma(A)$, $H_\gamma(B)$ вида (6) имеет место оценка

$$\|H_\gamma(A) - H_\gamma(B)\| \leq (\delta + 2\varepsilon + 2\varepsilon\delta) \|H_\gamma(A)\|, \quad (13)$$

где

$$\delta = \frac{\varepsilon m_\gamma(A)}{1 - \varepsilon m_\gamma(A)}.$$

Следствие 4 Если усилить условие (9)

$$\|A - B\| \leq \varepsilon \|A\|, \quad \varepsilon m_\gamma(A) < \frac{1}{2},$$

то

$$\|H_\gamma(A) - H_\gamma(B)\| \leq \varepsilon(6m_\gamma(A) + 8) \|H_\gamma(A)\|.$$

Замечание. Эти оценки непрерывности не зависят от того, является ли длина кривой конечной или бесконечной.

4 Проекторы на инвариантные подпространства

Линейный оператор P , действующий на векторы N -мерного пространства и отображающий их в векторы того же пространства, называется *проектором*, если $P^2 = P$. Проектор изображается квадратной $N \times N$ -матрицей.

Проектор P переводит (проектирует) вектор x в вектор $y = Px$, который проектируется в себя $Py = P^2x = y$. Каждый вектор x представим в виде $x = y + z$, где $Py = y$, $Pz = 0$. Видно, что $y = Px$, $z = x - Px = (I - P)x$. Матрица $I - P$ тоже является проектором $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P$. Проектор P проектирует вектор x в вектор $y = Px$ параллельно вектору $z = (I - P)x$. N -мерное пространство представимо в виде прямой суммы подпространства векторов $y = Px$ и подпространства векторов $x - Px$. Пусть N_1 и N_2 ($N = N_1 + N_2$) размерности этих подпространств, а базисы составлены из вектор-столбцов матриц T_1 и T_2 размера $N \times N_1$ и $N \times N_2$, то справедливы следующие представления:

$$P = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{N_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$I - P = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{N_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (14)$$

Отсюда следует, что $N_1 = \text{tr}P$, $N_2 = \text{tr}(I - P)$.

Если замкнутая кривая γ делит спектр матрицы A на две части по N_1 и N_2 собственных значений, то каждой из них можно сопоставить подпространства размерности N_1 и N_2 . Эти подпространства образуются собственными векторами матрицы A , соответствующими одной из групп ее собственных значений. Такие подпространства называют *инвариантными подпространствами матрицы A* , так как она переводит их в себя. Пусть T_1 и T_2 – матрицы, составленные из базисных векторов инвариантных подпространств матрицы A , тогда справедливо представление:

$$A = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \end{pmatrix}^{-1}, \quad (15)$$

(при этом спектр подматрицы A_1 лежит внутри контура γ , а спектр A_2 – вне контура) и

$$PAP = T \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1},$$

$$(I - P)A(I - P) = T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Проекторы P и $I - P$ являются проекторами на инвариантные подпространства матрицы A тогда и только тогда, когда

$$P^2 = P, \quad PA = AP.$$

Причем, P может быть представлен в виде интеграла по контуру, окружающему собственные значения матрицы [5]

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda.$$

Предположим, что нам известен проектор P на инвариантное подпространство матрицы A , соответствующее ее собственным значениям, лежащим внутри контура γ . Вычислив $N_1 = \text{tr} P$, мы узнаем число собственных значений матрицы A , лежащих внутри γ , а следовательно, и размерность инвариантного подпространства. Произведем сингулярное разложение матрицы P :

$$P = U \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*, \quad (16)$$

где размерности матриц Σ_1 и U_1 равны $N_1 \times N_1$ и $N \times N_1$ соответственно. Аналогичным образом представим проектор $I - P$:

$$I - P = W \begin{pmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^* = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^*. \quad (17)$$

Размеры матриц Σ_2 и W_1 равны $N_2 \times N_2$ и $N \times N_2$. Используя составную матрицу

$$T = (U_1 \dot{ : } W_1),$$

мы получим клеточно-диагональное представление матрицы A (15).

Оценка для двух близких проекторов. Если матрицы A и B близки

$$\|B - A\| \leq \varepsilon \|A\|,$$

то для двух близких проекторов

$$P_{\gamma}(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \quad P_{\gamma}(B) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda I - B)^{-1} d\lambda$$

верна оценка [8]

$$\begin{aligned} & \|P_\gamma(A) - P_\gamma(B)\| = \\ & = \left\| \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma [(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - B)^{-1}] d\lambda \right\| \leq \frac{l_\gamma}{2\pi \|A\|} \frac{\varepsilon m_\gamma^2(A)}{1 - \varepsilon m_\gamma(A)}, \end{aligned}$$

где

$$l_\gamma = \oint_\gamma |d\lambda|.$$

Отсюда видно, что проекторы близки если

$$\varepsilon m_\gamma^2(A) \frac{l_\gamma}{2\pi \|A\|} \ll 1.$$

Таким образом, при заданном контуре и при фиксированной характеристике ε точности задания матрицы A качество дихотомии определяется величиной $m_\gamma(A)$.

5 Матричные уравнения

В исследованиях дихотомии спектра матриц важную роль играют матричные уравнения.

Уравнение Сильвестра. Рассмотрим уравнение Сильвестра

$$AX - XB = C,$$

где X – неизвестная $M \times N$ -матрица, A, B – квадратные матрицы размеров $M \times M$, $N \times N$ соответственно, правая часть C – $M \times N$ -матрица.

Теорема 3 *Если матрицы A и B не имеют общих собственных значений, то неоднородное уравнение Сильвестра разрешимо при любой правой части C . (Из общей теории линейных уравнений известно, что такая разрешимость влечет за собой единственность решения).*

Уравнение Ляпунова. Матричное уравнение Ляпунова

$$XA + A^*X + C = 0 \tag{18}$$

является уравнением Сильвестра, где неизвестная X , правая часть C и коэффициенты A , A^* – матрицы одинаковых размеров $N \times N$. Из

критерия разрешимости уравнения Сильвестра следует, чтобы уравнение (18) было однозначно разрешимо при любой правой части C необходимо и достаточно, чтобы матрицы A и $-A^*$ не имели общих собственных значений. Это заведомо выполняется, если все собственные значения $\lambda_j(A)$ матрицы A лежат строго в левой комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$, $j = 1, \dots, N$. Такие матрицы называются *гурвицевыми*.

Теорема 4 Если A – гурвицева матрица и $C = C^*$ – положительно определенная матрица, то единственное решение X уравнения Ляпунова (18), представимое в виде матричного интеграла

$$X = \int_0^{\infty} e^{tA^*} C e^{tA} dt$$

является эрмитовой положительно определенной матрицей.

Где матрица e^{tA} , называемая матричной экспонентой, определяется как

$$e^{tA} = \oint_{\gamma} e^{t\lambda} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \quad (19)$$

γ – замкнутый контур, внутри которого лежат все собственные значения матрицы A . Матричная экспонента также может быть вычислена при любом конечном t с помощью сходящегося ряда (e^{tA} не вырождена при любом t , какова бы ни была матрица A)

$$e^{tA} = I_N + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k. \quad (20)$$

Верна и обратная теорема.

Теорема 5 Если существуют положительно определенные эрмитовы матрицы $X = X^*$ и $C = C^* > 0$, связанные с матрицей A уравнением Ляпунова (18), то матрица A гурвицева и все ее собственные значения $\lambda_j(A)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < -\frac{1}{2\|C^{-1}\|\|X\|} < 0$.

Дискретное уравнение Ляпунова. Дискретное уравнение Ляпунова

$$X - A^* X A = C, \quad (21)$$

где X , A , C – квадратные $N \times N$ -матрицы, используется в теории устойчивости рекуррентных последовательностей.

Теорема 6 Если все собственные значения $N \times N$ -матрицы A лежат внутри единичного круга $|\lambda_j(A)| < 1$, то для любой матрицы C матричное уравнение (21) имеет единственное решение X и оно представимо в виде ряда

$$X = C + A^*CA + (A^*)^2CA^2 + \dots + (A^*)^{N-1}CA^{N-1}. \quad (22)$$

6 Регулярный матричный пучок

В стандартной проблеме собственных значений разыскиваются числа λ , для которых матрица $A - \lambda I$ вырождена (эти числа называют собственными значениями). Существует несколько важных обобщений этого понятия.

Если A и B – квадратные матрицы одного размера, λ – комплексное число, то выражение $A - \lambda B$ называется *матричным пучком*.

Спектром матричного пучка называются такие точки комплексной плоскости при которых $\det(A - \lambda B) = 0$. Спектр матричного пучка может содержать бесконечность, если матрица B – вырожденная.

Матричный пучок $A - \lambda B$ называется *регулярным* на некоторой кривой, если на ней нет точек спектра матричного пучка.

Для матриц A и B регулярного матричного пучка верно *каноническое разложение*

$$A = T \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} S, \quad B = T \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} S, \quad (23)$$

где S и T – невырожденные матрицы размеров $l \times l$ и $m \times m$ соответственно, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ – спектр матрицы Λ , μ_1, \dots, μ_m – спектр матрицы M .

Для регулярного на единичной окружности пучка $A - \lambda B$ операторы

$$P = S^{-1} \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S, \quad I - P = S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} S$$

называются *проекторами на правое приводящее подпространство* пучка $A - \lambda B$. Аналогично операторы

$$Q = T \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}, \quad I - Q = T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} T^{-1}$$

называются *проекторами на левое приводящее подпространство*. Хотя каноническое разложение матричного пучка определяется неоднозначно,

проекторы на приводящие подпространства определяются единственным образом.

Проекторы на приводящие подпространства регулярного на единичной окружности матричного пучка могут быть представлены в интегральном виде

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (B - e^{-i\varphi} A)^{-1} B d\varphi, \quad I - P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (I - e^{-i\varphi} A)^{-1} A d\varphi.$$

Определение T , S в (23).

Если вычислены проекторы P и $I - P$, то можно определить матрицы T , S в (23). Для этого из сингулярного разложения проекторов

$$P = \left(V_1 \vdash W_1 \right) \begin{pmatrix} \Sigma_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1, \quad I - P = \left(V_2 \vdash W_2 \right) \begin{pmatrix} \Sigma_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2 \quad (24)$$

составим матрицу $S = \left(V_1 \vdash V_2 \right)$. Отсюда, по известной матрице S определяется матрица T из выражения

$$A(I - P) + BP = TS, \quad (25)$$

которое является следствием

$$BP = T \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S, \quad A(I - P) = T \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S.$$

7 Дихотомия окружностью

Начнем с изучения задачи о дихотомии спектра пучка матриц единичной окружностью. Пусть пучок $N \times N$ -матриц $A - \lambda B$ не имеет точек спектра на единичной окружности, т. е. $\det(A - \lambda B) \neq 0$ при любом комплексном λ , $|\lambda| = 1$.

Матрица H может использоваться в качестве численного критерия разделения спектра матричного пучка единичной окружностью

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A - e^{-i\varphi} B)^{-1} (ACA^* + BCB^*) (A - e^{i\varphi} B)^{-1} d\varphi. \quad (26)$$

Этот интеграл принимает конечное значение $\omega = \|H\|$, если пучок $A - \lambda B$ является регулярным на единичной окружности.

Проекторы на правые приводящие подпространства, регулярного на единичной окружности матричного пучка, соответствующие собственным значениям пучка, лежащим внутри и вне единичной окружности, в данном случае имеют вид

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (B - e^{-i\varphi} A)^{-1} B d\varphi, \quad I - P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (B - e^{-i\varphi} A)^{-1} A d\varphi.$$

А.Я. Булгаков показал [3], что для матриц H и P можно записать систему матричных уравнений, которая обобщает классическое уравнение Ляпунова для дискретного случая и обладает аналогичными свойствами (для любой эрмитовой матрицы C)

$$\begin{aligned} B^* H B - A^* H A &= A^* [P^* C P - (I - P)^* C (I - P)] A + \\ &+ B^* [P^* C P - (I - P)^* C (I - P)] B, \\ P^* H &= H P, \quad P^2 = P, \quad P(A + B)^{-1} B = (A + B)^{-1} B P, \\ H &= H^* > 0, \quad C = C^* > 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Использование введенных А.Я. Булгаковым обобщений уравнения Ляпунова позволило разработать алгоритмы решения задачи. Для решения данной системы используется эффективный итерационный алгоритм, основанный на ортогональных преобразованиях.

Решение системы (27) позволяет:

- 1) по норме $\|H\|$ определить, есть ли на единичной окружности точки спектра пучка;
- 2) вычислив $N_1 = \text{tr} P$ и $N_2 = N - N_1$, определить сколько собственных значений пучка лежит внутри и вне единичной окружности;
- 3) используя сингулярные разложения (16) и (17), определить базисы инвариантных пространств.

Для того чтобы исследовать расположение спектра пучка относительно окружности с центром в начале координат и произвольным радиусом r , очевидно, достаточно нормировать исходные матрицы пучка: $\frac{1}{r} A, \frac{1}{r} B$.

8 Функция Грина

Существуют простые формулы, связывающие решения матричных уравнений. Именно к исследованию этих формул и сводится проверка наличия круговой или линейной дихотомии спектра. При этом достаточно

детально рассмотреть алгоритм расчета решений лишь для круговой дихотомии, так как анализ линейной дихотомии сводится к случаю круговой дихотомии.

Алгоритм расчета проектора P и матричного интеграла H ($\|H\| = \omega$ – критерия дихотомии) основан на связи их с матрицами Грина некоторых вспомогательных разностных уравнений (в случае круговой дихотомии спектра матрицы A) или с матрицей Грина вспомогательной задачи для дифференциальных уравнений (в случае линейной дихотомии). Оказалось, что метод прогонки решения некоторой разностной краевой задачи приводит к расчетным формулам необходимого алгоритма (формулам итерационного процесса), а теория прогонки опирается на свойства матрицы Грина. Это подробно описано в работах [4, 6, 7]. Алгоритм дихотомии спектра матричного пучка рассмотрен в [9, 2] и опирается на определение матричной функции Грина и следующую теорему.

Теорема 7 *Если матричный пучок $A - \lambda B$ регулярен на единичной окружности, то матричная функция Грина существует и единственна.*

При этом матричная функция Грина определяется следующим образом.

Определение 2 *Матричную последовательность G_k , удовлетворяющую уравнениям*

$$\begin{cases} AG_k - BG_{k+1} = 0, & -\infty < k \leq -1, +0 \leq k < +\infty, \\ G_{+0} - G_{-0} = I, \\ \|G_k\| \rightarrow 0 & \text{при } k \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (28)$$

называют матричной функцией Грина.

Доказательство следует из того, что функция Грина, соответствующая регулярному на единичной окружности пучку, имеет вид

$$G_j = \begin{cases} S^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda^{|j|} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S & j \geq +0, \\ S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^{|j|} \end{pmatrix} S & j \leq -0. \end{cases}$$

При этом

$$P = G_{+0}, \quad I - P = G_{-0}, \quad (29)$$

Теорема 8 Верно равенство

$$H = G_{+0}^* C G_{+0} + G_{-0}^* C G_{-0} + 2 \sum_{|j|=1}^{\infty} G_j^* C G_j. \quad (30)$$

Теорема 9 Для функции Грина имеет место оценка

$$\|G_{\pm j}\| \leq \sqrt{\|C^{-1}\| \|H\|} \kappa^j,$$

где

$$\kappa = \sqrt{\frac{\|C^{-1}\| \|H\| - 1}{\|C^{-1}\| \|H\| + 1}}.$$

Следствие 5 Если $C = I$, $\|H\|$ – конечна и

$$\rho = \sqrt{\frac{\|H\| - 1}{\|H\| + 1}},$$

то кольцо с внутренним радиусом ρ и внешним радиусом $1/\rho$ свободно от точек спектра пучка $A - \lambda B$.

(См. доказательства в [8].)

9 Решение задачи круговой дихотомии

Постановка задачи.

Пусть заданы матричный пучок $A - \lambda B$ и единичная окружность на комплексной плоскости. Требуется:

- 1) определить, есть ли на единичной окружности точки спектра матричного пучка $A - \lambda B$ (т. е. вычислить критерий дихотомии $\omega = \|H\|$);
- 2) если на единичной окружности отсутствуют точки спектра матричного пучка $A - \lambda B$, то необходимо оценить расстояние от точек спектра матричного пучка до единичной окружности, используя Следствие 5;
- 3) определить проекторы (29) и инвариантные подпространства пучка $A - \lambda B$, отвечающие собственным значениям, лежащим внутри и вне единичной окружности соответственно.

9.1 Приближенная функция Грина

Видно, что для решения поставленной задачи нужно вычислить матрицы Грина G_k и воспользоваться формулами (29), (30). Для этого бесконечная система уравнений (28) заменяется конечной

$$\begin{cases} AG_j^{(k)} - BG_{j+1}^{(k)} = 0, & -2^k + 1 < j \leq -1, +0 \leq j < 2^k - 1, \\ G_{+0}^{(k)} - G_{-0}^{(k)} = I, \\ AG_{2^k}^{(k)} - BG_{-2^k+1}^{(k)} = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Эта система получена следующим образом: из системы (28) удалены уравнения для матриц G_j с большими номерами $|j| > 2^k$. Делается это исходя из требования $\|G_j\| \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$. Дополнительно в конечномерную систему включено уравнение, связывающее $G_{2^k}^{(k)}$ и $G_{-2^k+1}^{(k)}$. Это уравнение необходимо для замыкания конечномерной системы. Условие $\|G_j\| \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$ обеспечивает то, что и исходная функция Грина удовлетворяет этому уравнению с хорошей точностью, если k достаточно велико.

Матричные функции G_j и $G_j^{(k)}$ близки друг другу, причем разница между ними оценивается через величину бесконечных "хвостов" функции Грина G_j , "обрезанных" при переходе к конечномерной системе (рис. 4).

Близость матричных функций G_j и $G_j^{(J)}$ оценивает следующая теорема.

Теорема 10 Пусть матричные разностные функции G_j и $G_j^{(k)}$ удовлетворяют системам (28) и (31), где матрицы A и B образуют матричный пучок, регулярный на единичной окружности. Тогда верна оценка

$$\|G_j - G_j^{(k)}\| \leq \max_{-2^k+1 \leq j \leq 2^k} \sum_{i=1}^{\infty} \|G_{\pm((2^k+1)i+|j|)}\|. \quad (32)$$

Из Теорем 8, 9, 10 следует, что

$$\max_{-J+1 \leq j \leq J} \|G_j - G_j^{(k)}\| \leq 2\sqrt{\|C^{-1}\| \|H\|} \frac{\kappa^{J+1}}{1 - \kappa^{2J+1}}, \quad J = 2^k. \quad (33)$$

Для удобства вычислений перенумеруем элементы матричной последовательности $G_j^{(k)}$:

$$\begin{aligned} Y_j^{(k+1)} &= G_j^{(k)}, & +0 \leq j \leq 2^k; \\ Y_{2^k+j}^{(k+1)} &= G_{-2^k+j}^{(k)}, & 1 \leq j \leq 2^k. \end{aligned}$$

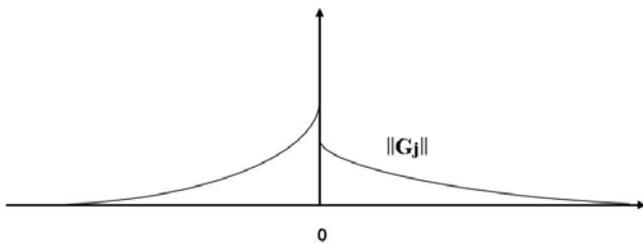


Рис. 3. Функция Грина.

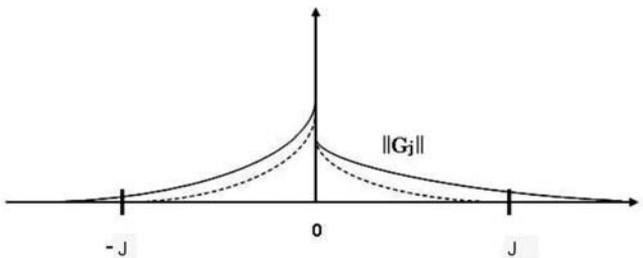


Рис. 4. Приближение функции Грина.

Таким образом, мы как бы "склеиваем" положительную и отрицательную ветви функции $G_j^{(k)}$.

Полученная матричная последовательность удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} AY_j^{(k+1)} - BY_{j+1}^{(k+1)} = 0, & 0 \leq j \leq 2^{k+1} - 1; \\ Y_0^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k)} = I. \end{cases} \quad (34)$$

Все дальнейшие построения основаны на изучении систем матричных уравнений (34). Для решения систем используем основанную на QR -разложении (см. [1]) процедуру исключения неизвестных из цепочки матричных уравнений, к решению которых сводятся вычисления проекторов P , $I - P$ на подпространства, приводящие справа матричный пучок $A - \lambda B$ и отвечающие точкам спектра, лежащим по разные стороны от окружности $|\lambda| = 1$.

9.2 Метод удвоений

Решение системы (34) можно упростить. Оказывается, можно организовать быстрый ортогональный процесс вычисления матриц из системы, применяя так называемый метод удвоений.

Для этого рассмотрим следующий процесс. Полагая

$$A_0 = A, \quad B_0 = B,$$

из двух последовательных уравнений системы (34), связывающих значения разностной функции $Y_j^{(k+1)}$ с тремя последовательными индексами $j, j+1, j+2$

$$\begin{aligned} A_0 Y_j^{(k+1)} - B_0 Y_{j+1}^{(k+1)} &= 0, \\ A_0 Y_{j+1}^{(k+1)} - B_0 Y_{j+2}^{(k+1)} &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

исключаются слагаемые $Y_{j+1}^{(k+1)}$ и получается уравнение, связывающее матрицы $Y_j^{(k+1)}$ с индексами j и $j+2$:

$$A_1 Y_j^{(k+1)} - B_1 Y_{j+2}^{(k+1)} = 0.$$

Вместе с этим из системы (34) выделяется подсистема

$$\begin{cases} A_1 Y_{2j}^{(k+1)} - B_1 Y_{2j+2}^{(k+1)} = 0, & 0 \leq j \leq 2^k - 1, \\ Y_0^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = I, \end{cases} \quad (36)$$

в которой участвуют только матрицы с четными номерами. Особенность этой системы в том, что, если не считать граничного условия, в ней в два раза меньше уравнений, чем в исходной системе.

Таким образом, преобразование двух уравнений (35) приводит к тому, что система, которую необходимо решить, уменьшается в два раза.

Очевидно, что этот процесс может быть продолжен. На промежуточном l -ом шаге из двух уравнений

$$\begin{aligned} A_{l-1} Y_{2^{l-1}j}^{(k+1)} - B_{l-1} Y_{2^{l-1}(j+1)}^{(k+1)} &= 0, \\ A_{l-1} Y_{2^{l-1}(j+1)}^{(k+1)} - B_{l-1} Y_{2^{l-1}(j+2)}^{(k+1)} &= 0 \end{aligned}$$

исключаются слагаемые с функцией Грина $Y_{2^{l-1}(j+1)}^{(k+1)}$, в результате чего получается уравнение

$$A_l Y_{2^l j}^{(k+1)} - B_l Y_{2^l (j+1)}^{(k+1)} = 0$$

и система

$$\begin{cases} A_l Y_{2^l j}^{(k+1)} - B_l Y_{2^l(j+1)}^{(k+1)} = 0, & 0 \leq j \leq 2^{k-l+1} - 1, \\ Y_0^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = I, \end{cases}$$

для матриц с номерами, кратными k -ой степени двойки.

В результате последнего k -го шага получается система из двух матричных уравнений:

$$\begin{cases} A_k Y_0^{(k+1)} - B_k Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = 0, \\ Y_0^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = I. \end{cases} \quad (37)$$

Такая система уже имеет небольшой размер и может быть решена обычными способами.

9.3 Ортогональные исключения

Сама процедура исключения промежуточных слагаемых из двух последовательных уравнений выполняется на основе QR -разложения (ортогональные преобразования, см. [1]). Использование ортогональных преобразований не ухудшает обусловленность исходной системы. Рассмотрим более подробно процедуру исключения.

Алгоритм состоит в последовательном получении пар матриц (A_0, B_0) , (A_1, B_1) , \dots (A_k, B_k) . В блочно-матричном виде уравнения (35) записываются следующим образом

$$\begin{pmatrix} A_0 & -B_0 & 0 \\ 0 & A_0 & -B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_j^{(k+1)} \\ Y_{j+1}^{(k+1)} \\ Y_{j+2}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поменяем порядок неизвестных матричных компонент

$$\begin{pmatrix} Y_j^{(k+1)} \\ Y_{j+1}^{(k+1)} \\ Y_{j+2}^{(k+1)} \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} Y_{j+1}^{(k+1)} \\ Y_j^{(k+1)} \\ Y_{j+2}^{(k+1)} \end{pmatrix}.$$

Соответственно изменится и матрица

$$\begin{pmatrix} A_0 & -B_0 & 0 \\ 0 & A_0 & -B_0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -B_0 & A_0 & 0 \\ A_0 & 0 & -B_0 \end{pmatrix}.$$

Введя обозначение для составной матрицы

$$\mathcal{F}_0 = \begin{pmatrix} -B_0 & A_0 & 0 \\ A_0 & 0 & -B_0 \end{pmatrix},$$

перепишем уравнения в виде

$$\mathcal{F}_0 \begin{pmatrix} Y_{j+1}^{(k+1)} \\ Y_j^{(k+1)} \\ Y_{j+2}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Затем выполняя QR -разложение матрицы \mathcal{F}_0

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{Q}_0 \mathcal{R}_0, \quad \mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} F_1 & \widehat{A}_1 & -\widehat{B}_1 \\ 0 & A_1 & -B_1 \end{pmatrix},$$

получим искомое уравнение

$$A_1 Y_j^{(k+1)} - B_1 Y_{j+2}^{(k+1)} = 0.$$

Продолжая процесс аналогичным образом, имеем

$$\mathcal{F}_k \begin{pmatrix} Y_{2^k(j+1)}^{(k+1)} \\ Y_{2^k j}^{(k+1)} \\ Y_{2^k(j+2)}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mathcal{F}_k = \begin{pmatrix} -B_k & A_k & 0 \\ A_k & 0 & -B_k \end{pmatrix}.$$

Произведем QR -разложение матрицы \mathcal{F}_k :

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k, \quad \mathcal{R}_k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & \widehat{A}_{k+1} & -\widehat{B}_{k+1} \\ 0 & A_{k+1} & -B_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем матрицы для следующего уравнения

$$A_{k+1} Y_0^{(k+1)} - B_{k+1} Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = 0.$$

9.4 Вычисление критерия дихотомии

Используя матрицы $G_j^{(k)}$, $Y_j^{(k+1)}$, можно построить матричную последовательность (30), сходящуюся к матрице H

$$\begin{aligned} H^{(k+1)} &= \left(G_{+0}^{(k)}\right)^* C G_{+0}^{(k)} + \left(G_{-0}^{(k)}\right)^* C G_{-0}^{(k)} + 2 \sum_{j=-2^k+1}^{2^k} \left(G_j^{(k)}\right)^* C G_j^{(k)} = \\ &= \left(Y_0^{(k+1)}\right)^* C Y_0^{(k+1)} + \left(Y_{2^{k+1}}^{(k+1)}\right)^* C Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} + 2 \sum_{j=1}^{2^{k+1}-1} \left(Y_j^{(k+1)}\right)^* C Y_j^{(k+1)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Видно, что скорость сходимости этой последовательности определяется скоростью сходимости $G_j^{(k)}$.

Теорема 11 Пусть $A - \lambda B$ – пучок, регулярный на единичной окружности, матричные разностные функции G_j и $G_j^{(k)}$ являются решениями систем (28) и (31) соответственно, тогда

$$\|H - H^{(k)}\| \leq \|C^{-1}\| \cdot \|H\| \cdot K_H \cdot \kappa^{2^k + 1}, \quad (39)$$

где $\omega = \|H\|$, $\kappa(\omega) = \sqrt{(\omega + 1)(\omega - 1)}$,

$$K_H(\omega) = \frac{4}{1 - \kappa} \left(\frac{1 + \kappa}{1 - \kappa^{2^{k+1} + 1}} \left(1 + 2\sqrt{\omega} \frac{\kappa^{2^k + 1}}{1 - \kappa^{2^{k+1} + 1}} \right) + \frac{1}{2} \right).$$

Оказывается, матрицу $H^{(k+1)}$ можно вычислить, не вычисляя предварительно все компоненты матрицы Грина.

9.5 Рекуррентные формулы для последовательности $H^{(k+1)}$

Рассмотрим рекуррентные соотношения, позволяющие последовательно вычислять матрицы $H^{(k+1)}$.

Пусть $A_0 = A$, $B_0 = B$ – матрицы исходного пучка. Последовательность пар матриц (A_k, B_k) и вспомогательные матрицы $F_k, \hat{A}_k, \hat{B}_k$ определяются рекуррентно при помощи QR -разложения

$$\begin{pmatrix} -B_{k-1} & A_{k-1} & 0 \\ A_{k-1} & 0 & -B_{k-1} \end{pmatrix} = Q_k \begin{pmatrix} F_k & \hat{A}_k & -\hat{B}_k \\ 0 & A_k & -B_k \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Рассмотрим ряд систем

$$\begin{cases} A_k Y_0^{(k+1)} - B_k Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = 0, \\ Y_0^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = I, \end{cases} \quad (41)$$

$$Y_{2^k}^{(k+1)} = -F_k^{-1} \left(\hat{A}_k Y_0^{(k+1)} - \hat{B}_k Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} \right),$$

$$X^{(k+1)} = Y_0^{(k+1)} - Y_{2^k}^{(k+1)}, \quad Z^{(k+1)} = Y_{2^k}^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)}.$$

В терминах их решений формулируется следующая теорема (при $C = I$).

Теорема 12 Первым в последовательности $H^{(k+1)}$ стоит значение

$$H^{(1)} = (Y_0^{(1)})^* Y_0^{(1)} + 2(Y_1^{(1)})^* Y_1^{(1)} + (Y_2^{(1)})^* Y_2^{(1)}.$$

Для всех последующих номеров k выполняются равенства

$$H^{(k+1)} = \left(X^{(k+1)} \right)^* H^{(k)} X^{(k+1)} + \left(Z^{(k+1)} \right)^* H^{(k)} Z^{(k+1)}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
H^{(k+1)} &= \left(Y_0^{(k+1)}\right)^* Y_0^{(k+1)} + \left(Y_{2^{k+1}}^{(k+1)}\right)^* Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} + 2 \sum_{j=1}^{2^{k+1}-1} \left(Y_j^{(k+1)}\right)^* Y_j^{(k+1)} = \\
&= \left(Y_0^{(k+1)}\right)^* Y_0^{(k+1)} + \left(Y_{2^k}^{(k+1)}\right)^* Y_{2^k}^{(k+1)} + 2 \sum_{j=1}^{2^k-1} \left(Y_j^{(k+1)}\right)^* Y_j^{(k+1)} + \\
&+ \left(Y_{2^k}^{(k+1)}\right)^* Y_{2^k}^{(k+1)} + \left(Y_{2^{k+1}}^{(k+1)}\right)^* Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} + 2 \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}-1} \left(Y_j^{(k+1)}\right)^* Y_j^{(k+1)}.
\end{aligned}$$

Система (34)

$$\begin{cases} AY_j^{(k+1)} - BY_{j+1}^{(k+1)} = 0, & 0 \leq j \leq 2^{k+1} - 1, \\ Y_0^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = I \end{cases}$$

разбивается на две подсистемы

$$\begin{cases} AY_j^{(k+1)} - BY_{j+1}^{(k+1)} = 0, & 0 \leq j \leq 2^k - 1, \\ Y_0^{(k+1)} - Y_{2^k}^{(k+1)} = X^{(k+1)} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} AY_j^{(k+1)} - BY_{j+1}^{(k+1)} = 0, & 2^k \leq j \leq 2^{k+1} - 1, \\ Y_{2^k}^{(k+1)} - Y_{2^{k+1}}^{(k+1)} = Z^{(k+1)}. \end{cases}$$

Видно, что каждая из них отличается от системы

$$\begin{cases} AY_j^{(k)} - BY_{j+1}^{(k)} = 0, & 0 \leq j \leq 2^k - 1, \\ Y_0^{(k)} - Y_{2^k}^{(k)} = I, \end{cases}$$

определяющей $Y_j^{(k)}$, только правой частью. Исходя из этого, нетрудно установить выполнение равенств $Y_j^{(k+1)} = Y_j^{(k)} X^{(k+1)}$ при $0 \leq j \leq 2^k$ и $Y_{2^k+j}^{(k+1)} = Y_j^{(k)} Z^{(k+1)}$ при $2^k \leq j \leq 2^{k+1}$. Подстановка этих значений в формулу дает представление

$$H^{(k+1)} = \left(X^{(k+1)}\right)^* H^{(k)} X^{(k+1)} + \left(Z^{(k+1)}\right)^* H^{(k)} Z^{(k+1)}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему алгоритму.

9.6 Алгоритм дихотомии единичной окружностью

Дано: матричный пучок $A_0 - \lambda B_0$, ω_{\max} , ε .

Первый шаг.

Полагаем $H^{(0)} = 0$, $k = 0$.

По матрицам A_0 , B_0 построить составную матрицу \mathcal{F}_0

$$\mathcal{F}_0 = \begin{pmatrix} -B_0 & A_0 & 0 \\ A_0 & 0 & -B_0 \end{pmatrix}.$$

Выполнить QR-разложение \mathcal{F}_0 (например, используя ортогональные отражения [1])

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{Q}_0 \mathcal{R}_0, \quad \mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} F_1 & \hat{A}_1 & -\hat{B}_1 \\ 0 & A_1 & -B_1 \end{pmatrix}.$$

Решить систему

$$\begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}.$$

Вычислить

$$H^{(1)} = X_1^* X_1 + 2Y_1^* Y_1 + Z_1^* Z_1.$$

Присвоить

$$k = 1.$$

Цикл по числу итераций.

Пока $\|H^{(k-1)} - H^{(k)}\| > \varepsilon$ **либо** $\|H^{(k)}\| < \omega_{\max}$, **тогда:**

По матрицам A_k , B_k построить составную матрицу \mathcal{F}_k

$$\mathcal{F}_k = \begin{pmatrix} -B_k & A_k & 0 \\ A_k & 0 & -B_k \end{pmatrix}.$$

Выполнить QR-разложение \mathcal{F}_k

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k, \quad \mathcal{R}_k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & \hat{A}_{k+1} & -\hat{B}_{k+1} \\ 0 & A_{k+1} & -B_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Решить систему

$$\begin{pmatrix} A_{k+1} & -B_{k+1} \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{k+1} \\ Z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}.$$

Вычислить

$$Y_{k+1} = -F_{k+1}^{-1} \left(\widehat{A}_{k+1} X_{k+1} - \widehat{B}_{k+1} Z_{k+1} \right),$$

$$U_{k+1} = Y_{k+1} - X_{k+1},$$

$$V_{k+1} = Z_{k+1} - Y_{k+1},$$

$$H^{(k+1)} = U_{k+1}^* H^{(k)} U_{k+1} + V_{k+1}^* H^{(k)} V_{k+1}.$$

Присвоить

$$k = k + 1.$$

Конец цикла.

Определение критерия дихотомии и проектора.

Присвоить

$$H_{\text{выч}} = H^{(k+1)}, \quad P_{\text{выч}} = X_{k+1}, \quad \omega_{\text{выч}} = \|H_{\text{выч}}\|.$$

Точность вычисления спектральных характеристик.

Точность вычисленных спектральных характеристик (как точность выполнения матричных уравнений) определяется параметрами $\text{res}P$ и $\text{res}H$. Эти параметры характеризуют сходимость процесса и равны

$$\text{res}P = \|P_{\text{выч}}^2 - P_{\text{выч}}\|,$$

$$\text{res}H = \|B^* H_{\text{выч}} B - A^* H_{\text{выч}} A - A^* [P_{\text{выч}}^* P_{\text{выч}} - (I - P_{\text{выч}})^* (I - P_{\text{выч}})] A - B^* [P_{\text{выч}}^* P_{\text{выч}} - (I - P_{\text{выч}})^* (I - P_{\text{выч}})] B\|.$$

Если $P_{\text{выч}}$ и $H_{\text{выч}}$ удовлетворяют уравнениям решаемой матричной системы с точностью $\text{res}P < \varepsilon$ и $\text{res}H < \varepsilon$, то они выдаются как результат.

Определить расстояние.

Минимальное расстояние dist от точек спектра до единичной окружности оценивается, согласно Следствию 5, по формулам

$$\rho = \sqrt{\frac{\omega_{\text{выч}} - 1}{\omega_{\text{выч}} + 1}}, \quad \text{dist} = \begin{cases} 1 - \rho, \\ 1/\rho - 1. \end{cases}$$

Произвести сингулярное разложение P .

Вычислив

$$N_1 = \text{tr}P_{\text{выч}}, \quad N_2 = N - N_1,$$

определить сколько собственных значений пучка лежит внутри и вне единичной окружности.

Используя сингулярные разложения (24) и (25), (23) определить базисы инвариантных подпространств.

Результатом выполнения алгоритма являются:

матрица $P_{\text{выч}}$ – вычисленное значение проектора на правое приводящее подпространство и точность его вычисления $\text{error}P = \text{res}P / (1 - 2\text{res}P)$;

$\omega_{\text{выч}} = \|H_{\text{выч}}\|$ – критерий качества дихотомии спектра матричного пучка $A_0 - \lambda B_0$ единичной окружностью;

dist – расстояние от точек спектра до единичной окружности;

N_1, N_2 – размеры подпространств (число собственных значений лежащих внутри и вне единичной окружности соответственно);

базисы инвариантных подпространств.

10 Линейная дихотомия

Постановка задачи.

Пусть заданы матрица A и мнимая ось на комплексной плоскости. Требуется:

- 1) определить, есть ли на мнимой оси точки спектра матрицы A ;
- 2) если на мнимой оси отсутствуют точки спектра матрицы A , то необходимо оценить расстояние от точек спектра A до мнимой оси;
- 3) определить инвариантные подпространства матрицы A , отвечающие собственным значениям матрицы, лежащим в левой и правой полуплоскости соответственно.

10.1 Дихотомия мнимой осью

Если у нас нет предварительной информации о матрице A , то из существования решения системы (42) можно установить отсутствие у A чисто мнимых собственных значений.

Теорема 13 (Булгаков) Если матрица A не имеет чисто мнимых собственных значений и $PA = AP$, где $P = P^2$ – проектор на ее инвариантное подпространство, отвечающее собственным значениям из левой полуплоскости, то при любой матрице C уравнения

$$A^*X + XA + P^*CP - (I - P)^*C(I - P) = 0, \quad XP = P^*X \quad (42)$$

имеют единственное решение X , которое представимо в виде интеграла

$$X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (itI - A)^{-*} C(itI - A)^{-1} dt.$$

Заметим, что для того, чтобы разделить спектр матрицы любой прямой $Re\lambda = a$, параллельной мнимой оси, достаточно заменить матрицу A на матрицу $A - aI$.

10.2 Связь между уравнениями для линейной и круговой дихотомии

Задача о дихотомии спектра вещественной $N \times N$ -матрицы A мнимой осью сводится к задаче о круговой дихотомии спектра. Предположим, что у матрицы A нет собственных значений на мнимой оси. Сначала выполняется масштабирование матрицы

$$\tilde{A} = \tau A = \frac{1}{2\|A\|} A, \quad \tau = \frac{1}{2\|A\|}.$$

Затем строится вспомогательная матрица

$$B = e^{\tilde{A}}.$$

Матричная экспонента вычисляется с помощью сходящегося матричного ряда

$$e^{\tilde{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}^k}{k!},$$

который очень быстро сходится (так как $\|\tilde{A}\| = 1/2$ и достаточно взять несколько членов ряда).

У матрицы B отсутствуют точки спектра на единичной окружности. Если P – проектор на инвариантное подпространство матрицы A , соответствующее собственным значениям матрицы A , лежащим в левой по-

луплоскости, то он осуществляет проектирование на инвариантное подпространство матрицы B , соответствующее собственным значениям, лежащим внутри единичной окружности:

$$PA = AP, \Rightarrow PB = BP, P^2 = P$$

$$A = T \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} T^{-1}, \quad P = T \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

$$B = e^{\tau A} = T \begin{pmatrix} B_+ & 0 \\ 0 & B_- \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{\tau A_+} & 0 \\ 0 & e^{\tau A_-} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Непрерывная функция Грина является решением системы

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}G(t) = AG(t), \\ G(+0) - G(-0) = I, \\ \|G(t)\| \leq \text{const} \end{cases}$$

и может быть представлена в виде

$$G(t) = \begin{cases} T \begin{pmatrix} e^{\tau A_+} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} & t > 0 \\ T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\tau A_-} \end{pmatrix} T^{-1} & t < 0. \end{cases}$$

Если по матрице $C = C^* > 0$ построить матрицу

$$D = \int_0^{\tau} e^{sA^*} C e^{sA} ds,$$

тогда матрица

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(t) D G(t) dt$$

будет одновременно решением двух систем (обобщения уравнения Ляпунова) (27), (42):

$$\begin{cases} X - B^* X B = P^* D P - (I - P)^* D (I - P), \\ P^2 = P, \quad PB = BP, \quad X = X^* > 0, \quad XP = P^* X \\ \\ \begin{cases} X A + A^* X + P^* C P - (I - P)^* C (I - P) = 0, \\ P^2 = P, \quad PA = AP, \quad X = X^* > 0, \quad XP = P^* X \end{cases} \end{cases}$$

Отсюда следует, что решение задачи о линейной дихотомии спектра матрицы A сводится к задаче о дихотомии спектра матрицы B единичной окружностью. При этом по матрицам H ($H = X$) и P , вычисленным по алгоритму круговой дихотомии, делаются выводы:

- 1) если $\omega = \|H\|$ – конечна, то у матрицы A отсутствуют точки спектра на мнимой оси;
- 2) если $\omega = \|H\|$ – конечна, то спектр матрицы A делится на две части: одна часть лежит строго в левой полуплоскости

$$\operatorname{Re} \lambda \leq \frac{\ln \rho}{\tau} < 0,$$

другая часть лежит строго в правой полуплоскости

$$\operatorname{Re} \lambda \geq \frac{-\ln \rho}{\tau} > 0,$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{\|H\| - 1}{\|H\| + 1}},$$

а расстояние $dist$ от спектра до мнимой оси равно

$$dist = \left| \frac{\ln \rho}{\tau} \right|.$$

- 3) инвариантные подпространства матрицы A , отвечающие собственным значениям матрицы, лежащим в левой и правой полуплоскостях соответственно, определяются при сингулярном разложении проектора P .

11 Эллиптическая дихотомия

Постановка задачи.

Пусть заданы матричный пучок $A - \lambda B$ и эллипс с полуосями a, b на комплексной плоскости. Требуется:

- 1) определить, есть ли на эллипсе точки спектра матричного пучка $A - \lambda B$ (т. е. вычислить критерий дихотомии $\omega = \|H\|$).
- 2) определить проекторы и инвариантные подпространства пучка $A - \lambda B$, отвечающие собственным значениям, лежащим внутри и вне эллипса соответственно.

11.1 Решение задачи

Задача о дихотомии матричного пучка $A - \lambda B$ эллипсом

$$\left(\frac{\operatorname{Re} \lambda}{a}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{b}\right)^2 = 1$$

так же сводится к алгоритму дихотомии относительно единичной окружности. Только применяется этот алгоритм к вспомогательному матричному пучку состоящему из матриц в два раза большего размера

$$\mathcal{A} = - \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2}B & 0 \\ \operatorname{sign}(a-b)A & \frac{a-b}{2}B \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2}B & A \\ 0 & \frac{a+b}{2}B \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что $a > b$ и $a^2 - b^2 = 1$. Решение задачи выражается через функцию Грина:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathcal{G}_{j-1} - \mathcal{B}\mathcal{G}_j = 0, \\ \mathcal{G}_{+0} - \mathcal{G}_{-0} = I_{2N}, \\ \|\mathcal{G}(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \pm\infty, \end{cases}, \quad \mathcal{G}_j = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_j^{(11)} & \mathcal{G}_j^{(12)} \\ \mathcal{G}_j^{(21)} & \mathcal{G}_j^{(22)} \end{pmatrix}.$$

Искомый проектор P на подпространство, соответствующее собственным значениям пучка $A - \lambda B$, лежащим внутри эллипса, равен

$$P = \mathcal{G}_{-0}^{(11)} + \mathcal{G}_{-0}^{(22)}.$$

11.2 Критерий качества эллиптической дихотомии

Из сравнения интегрального критерия дихотомии эллипсом

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A - (a \cos \varphi + ib \sin \varphi)B)^{-*} K (A - (a \cos \varphi + ib \sin \varphi)B)^{-1} d\varphi$$

с критерием круговой дихотомии расширенного пучка

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathcal{A} - e^{i\varphi}\mathcal{B})^{-*} K (\mathcal{A} - e^{i\varphi}\mathcal{B})^{-1} d\varphi,$$

где

$$K = A^*A + B^*B, \quad \mathcal{K} = \mathcal{A}^*\mathcal{A} + \mathcal{B}^*\mathcal{B},$$

можно получить оценку

$$\frac{1}{\|K\| \|\mathcal{K}^{-1}\|} \|H\| \leq \|\mathcal{H}\| \leq \|K\| \|\mathcal{K}^{-1}\| \|H\|$$

или для критерия эллиптической дихотомии соответственно

$$\omega_{\min} = \frac{\|\mathcal{H}\|}{\|K^{-1}\| \|K\|} \leq \|H\| \leq \|\mathcal{H}\| \|K\| \|\mathcal{K}^{-1}\| \|H\| = \omega_{\max}.$$

Откуда, можно считать, что критерий эллиптической дихотомии приближенно равен

$$\|H\| = (\omega_{\max} + \omega_{\min})/2.$$

Более подробно смотри в [2].

12 Одномерные спектральные портреты и численные примеры

12.1 Одномерные спектральные портреты

Изображение спектра на комплексной плоскости называют спектральным портретом матрицы. Так например, спектр матрицы C (1) представляет собой пятно радиуса ≈ 7.5 (хотя все собственные значения матрицы различны), но чаще всего спектр разбивается на несколько “спектральных пятен”, в каждой из которых $\|(\lambda I - A)^{-1}\| > 1/\varepsilon \|A\|$. Спектральное пятно может содержать несколько точек спектра. Интеграл, взятый по кривой γ , ограничивающий спектральное пятно,

$$P = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

представляет собой проектор, отвечающий всем собственным значениям, попавшим в пятно. Проектор $I - P$ осуществляет проектирование на дополнительное инвариантное подпространство, которое отвечает точкам спектра матрицы A не попавшим в данное пятно.

Рассмотрим на комплексной плоскости семейство кривых γ таких, что каждая кривая делит плоскость на две части. Например, можно взять систему концентрических окружностей или прямых, параллельных мнимой оси. На каждой кривой можно вычислить интеграл

$$H_{\gamma} = \oint_{\gamma} (\lambda I - A)^{-*} (\lambda I - A)^{-1} |d\lambda|,$$

норма $\|H_\gamma\|$ которого является критерием качества дихотомии спектра матрицы A кривой γ .

Зависимость критерия дихотомии $\omega = \|H\|$ от параметра r (при круговой дихотомии это радиус окружностей $\lambda = re^{i\varphi}$) или параметра a (при линейной дихотомии это координата пересечения с мнимой осью прямых $\lambda = a + it$) может быть изображена в виде графика называемого *одномерным спектральным портретом* (см. рисунки ниже). Значения параметров r или a при которых критерий $\omega = \|H\|$ принимает большое значение, а график “уходит на бесконечность”, иногда образуют целые интервалы (одномерные спектральные пятна). Таким образом, при помощи одномерного спектрального портрета выделяются полосы, внутри которых располагается спектр матрицы.

Одномерный спектральный портрет позволяет получить информацию о проекторе. В качестве примера, рассмотрим дихотомию спектра матрицы A семейством прямых, параллельных мнимой оси, $\operatorname{Re}\lambda = a$. Изобразим на графике зависимость $\omega = \|H_a(A)\|$ (см., например, рис. 8). Вне спектральных пятен на каждом связном интервале $\|H_a(A)\|$ – выпуклая вниз функция. Для всех значений параметра a , принадлежащих одному такому фиксированному интервалу, инвариантное подпространство, отвечающее собственным значениям матрицы A , лежащим левее прямой $\operatorname{Re}\lambda = a$, одно и то же. Следовательно, проектор $P = P_a$ на это инвариантное подпространство не зависит от выбора параметра a из данного интервала. Если выбрать параметры a_1 и a_2 из двух соседних интервалов, где $\omega = \|H_a(A)\|$ конечна, то разница $P_{a_2} - P_{a_1}$ является проектором на инвариантное подпространство матрицы A , соответствующее собственным значениям из спектрального пятна, разделяющего эти интервалы. Таким образом, вычисляются проекторы P_1, \dots, P_k для каждого спектрального пятна. Производится их сингулярное разложение

$$P_i = (V_i \dot{\vdots} W_i) \begin{pmatrix} \Sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_i.$$

Выделяются базисы инвариантных подпространств V_1, \dots, V_k , а затем исходная матрица A приводится к клеточно-диагональному виду:

$$A = (V_1 \dot{\vdots} V_2 \dot{\vdots} \dots \dot{\vdots} V_k) \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix} (V_1 \dot{\vdots} V_2 \dot{\vdots} \dots \dot{\vdots} V_k)^{-1}.$$

Здесь число диагональных клеток A_i равно числу спектральных пятен,

выделенных при помощи одномерного спектрального портрета, а их размеры равны числу собственных значений в соответствующем спектральном пятне.

В случае круговой дихотомии спектра матрицы строят радиальный спектральный портрет. При помощи описанной техники, выделяют спектральные кольца, для которых вычисляют проекторы на соответствующие инвариантные подпространства и приводят матрицу A к клеточно-диагональному виду.

Видно, что одномерные спектральные портреты дают наглядное представление о круговом или линейном расслоении спектра матрицы на кластеры и их размеры, и напоминают резонансные кривые, широко употребляемые физиками.

Нужно отметить, что проведение спектрального анализа матриц путем исследования одномерных спектральных портретов является предпочтительным. Это связано с тем, что, как показывает практика, интегральные критерии дихотомии непрерывно зависят от исследуемых матриц и обеспечивают устойчивые и удобные для применений оценки решений дифференциальных (или разностных) краевых задач, для которых эти матрицы являются коэффициентами уравнений [8].

12.2 Численные примеры

Рассмотрим несколько примеров использования описанных выше алгоритмов дихотомии спектра матрицы.

В трех первых примерах исследуется критерий дихотомии спектра матрицы A кругом радиуса r , т. е. $\omega(A, r) = \omega(r^{-1}A)$. Для этого мы используем подпрограмму `CircDich` из модуля `DichMod` пакета **GALA-3.0** (новой версии пакета **GALA-2.0**, описанного в [1]).

Пример 1. Матрица A – двухдиагональная 9×9 -матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 1/100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/16 & 1/100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/20 \end{pmatrix}$$

На главной диагонали матрицы расположены 9 ее собственных значений.

Мы разделим спектр матрицы концентрическими окружностями с центром в начале координат. Норма $\|H_r(A)\|$ служит критерием качества дихотомии спектра матрицы окружностью радиуса r и становится очень большой, если на окружности лежит собственное значение, что и видно на приведенных ниже графиках.

Результаты вычислений. Результаты расчета $\omega(A, r) = \omega(r^{-1}A)$ показаны на рис. 5 и 6. На рис. 5 изображен график зависимости параметра $\omega(A, r) = \|H_r(A)\|$ от радиуса.

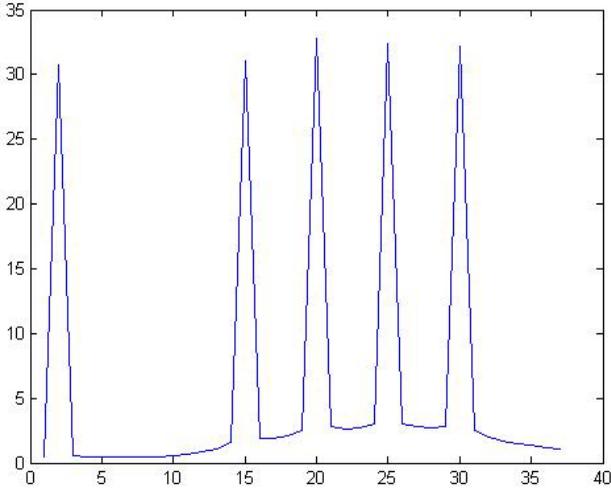


Рис. 5. Зависимость $\log_{10}[\omega(\frac{1}{r}A)]$ от r .

Критерий дихотомии отложен по ординате в логарифмическом масштабе. На рис 6. изображена часть того же портрета.

Пример 2. Матрица A – двухдиагональная 8×8 -матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

График $\omega(A, r) = \omega(r^{-1}A)$ приведен на рис. 7.

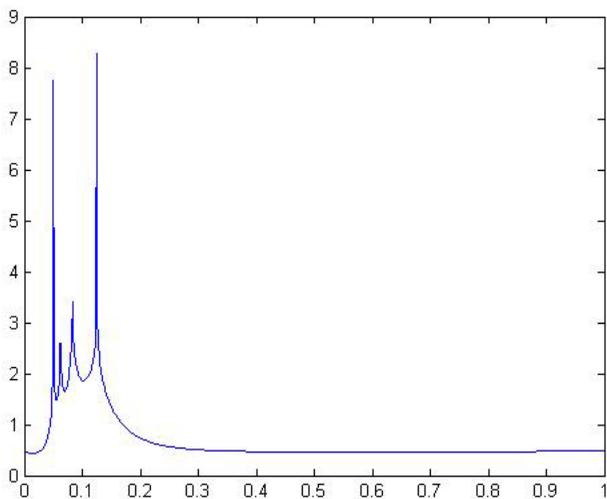


Рис. 6. Зависимость $\log_{10}[\omega(\frac{1}{r}A)]$ от r .

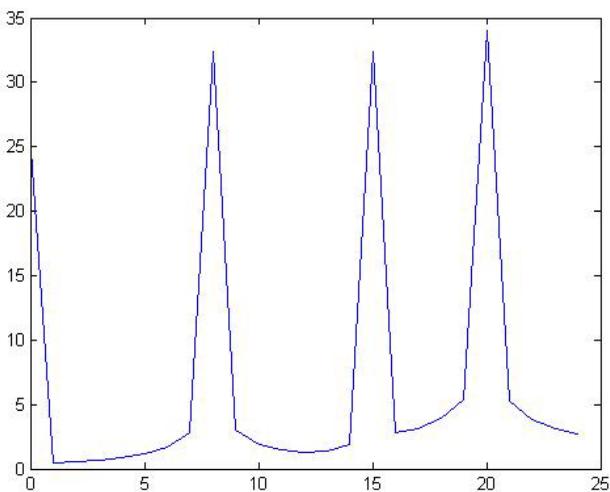


Рис. 7. Зависимость $\log_{10}[\omega(\frac{1}{r}A)]$ от r .

Пример 3. Матрица A_q – двухдиагональная 9×9 -матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} 6 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Результаты расчета $\omega_{r,q} = \omega(r^{-1}A_q)$ для разных значений q и r приведены в таблице 1.

Таблица 1

	$q = 1.0 \cdot 10^{-3}$	$q = 0.5$	$q = 4.0$	$q = 15.0$
$r = 0.75$	$\omega_{r,q} = 2.85$	$\omega_{r,q} = 13.98$	$\omega_{r,q} = 7.18 \cdot 10^5$	$\omega_{r,q} = 1.95 \cdot 10^9$
$r = 1$	$\omega_{r,q} = 2.43$	$\omega_{r,q} = 4.53$	$\omega_{r,q} = 4.51 \cdot 10^4$	$\omega_{r,q} = 1.19 \cdot 10^8$
$r = 1.25$	$\omega_{r,q} = 2.64$	$\omega_{r,q} = 3.53$	$\omega_{r,q} = 7.79 \cdot 10^3$	$\omega_{r,q} = 1.99 \cdot 10^7$

В трех следующих примерах мы исследуем критерий дихотомии спектра матрицы A мнимой осью и прямыми параллельными мнимой оси, отстоящими от нее на расстоянии a , т. е. $\omega(A, a) = \omega(A - aI)$. Для этого используем подпрограмму LinDich из модуля DichMod пакета **GALA-3.0**.

Пример 4. Матрица C – верхнетреугольная 4×4 -матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} -15 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & -10 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 10 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Числа, лежащие на главной диагонали являются собственными значениями матрицы. Видно, что два собственных значения лежат в левой полуплоскости и два – в правой, а на мнимой оси собственных значений нет. Используем этот простой пример как тест для разделения спектра матрицы мнимой осью.

Результаты вычислений. Мы получили, что критерий дихотомии $\omega(C) = \|H(C)\| = 7,106$ – величина небольшая. Это значит, что суще-

ствует единственное решение матричных уравнений и можно разделить спектр матрицы мнимой осью и вычислить проектор P .

Погрешность вычисления проектора равна $errorP = resP/(1 - 2resP) = 1.19 \cdot 10^{-15}$ и равенство $P^2 = P$ выполняется с такой же точностью. Вычисленная матрица проектора выглядит как

$$P = \begin{pmatrix} 1.0 \cdot 10^{+00} & 4.1 \cdot 10^{-17} & -2.0 \cdot 10^{-02} & -5.5 \cdot 10^{-03} \\ 3.8 \cdot 10^{-16} & 1.0 \cdot 10^{+00} & -2.5 \cdot 10^{-02} & -9.8 \cdot 10^{-03} \\ 6.4 \cdot 10^{-17} & -2.4 \cdot 10^{-16} & -5.4 \cdot 10^{-16} & -1.6 \cdot 10^{-17} \\ 2.8 \cdot 10^{-17} & -5.4 \cdot 10^{-18} & -1.7 \cdot 10^{-16} & 5.6 \cdot 10^{-16} \end{pmatrix}.$$

Два собственных значения матрицы лежат в левой полуплоскости. Вычисленное расстояние от них до мнимой оси равно $dist = 7.23$.

Пример 5. Матрица A – двухдиагональная 8×8 -матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Матрица имеет 8 собственных значений, лежащих на главной диагонали. Видно, что три собственных значения лежат слева от мнимой оси, четыре – справа и одно – на мнимой оси. Разделим спектр матрицы прямыми параллельными мнимой оси, отстоящими от нее на расстоянии a .

Результаты вычислений. Вычисления проводились при изменении параметра a от -12 до 25. Результаты расчета $\omega(A, a) = \omega(A - aI)$ показаны на рис. 8. Здесь изображен график зависимости критерия $\omega(A, a) = \|H_a(A)\|$ от параметра a . Критерий дихотомии (отложен по ординате в логарифмическом масштабе) обращается в бесконечность, когда прямая разделения спектра проходит через собственное значение матрицы, т. е. когда параметр a совпадает с собственным значением.

Пример 6. Матрица B – 9×9 -матрица вида

$$B = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix},$$

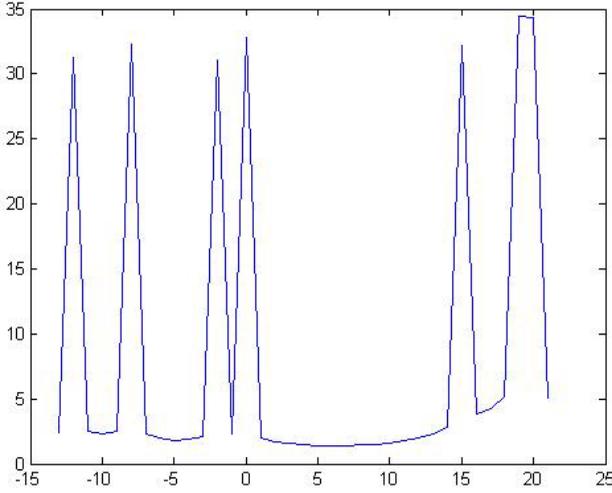


Рис. 8. Зависимость $\log_{10}[\omega(A, a)]$ от параметра a .

где на диагоналях стоят трехдиагональные 3×3 -матрицы

$$S = \begin{pmatrix} d & b & 0 \\ b & d & b \\ 0 & b & d \end{pmatrix},$$

при этом на побочных диагоналях B нули заменены на небольшие числа $\varepsilon = 2.2 \cdot 10^{-13}$.

При $d = 10.0$, $b = 10.0$ матрица B имеет 9 кратных собственных значений

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -4.14214, & \quad \lambda_4 = 10.0000, & \quad \lambda_7 = 24.1421, \\ \lambda_2 = -4.14214, & \quad \lambda_5 = 10.0000, & \quad \lambda_8 = 24.1421, \\ \lambda_3 = -4.14214, & \quad \lambda_6 = 10.0000, & \quad \lambda_9 = 24.1421, \end{aligned}$$

вычисленных с гарантированной погрешностью $error = 5.773 \cdot 10^{-15}$ с помощью подпрограммы EigValTDSymMatrix из пакета **GALA-3.0**. Проведем линейную дихотомию спектра матрицы.

Результаты вычислений. Вычисления проводились для $d = 10.0$, $b = 10.0$. Параметр a менялся от -5 до 25. Результаты расчета $\omega(B, a) = \omega(B - aI)$ показаны на рис. 9, где изображен график зависимости критерия дихотомии $\omega(B, a) = \|H_a(B)\|$ от параметра a .

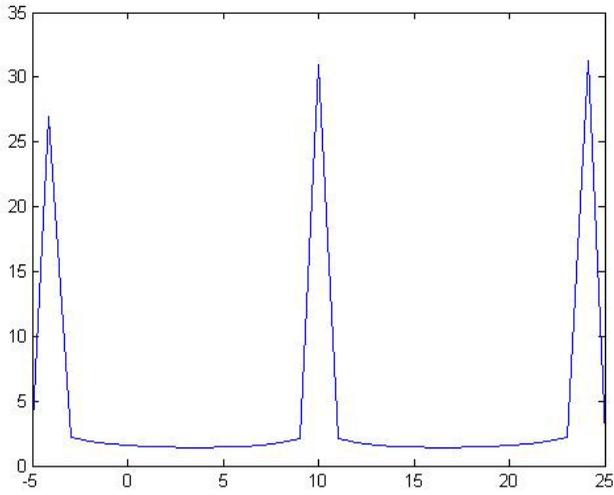


Рис. 9. Зависимость $\log_{10}[\omega(B, a)]$ от параметра a .

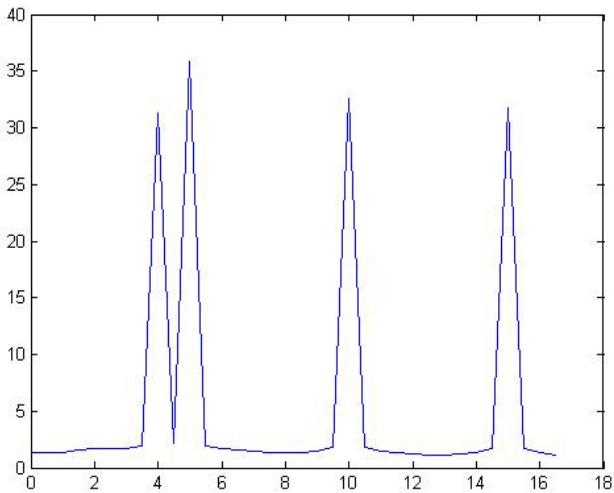


Рис. 10. Зависимость $\log_{10}[\omega(A, a, b)]$ от параметра a .

Пример 7. Проведем эллиптическую дихотомию спектра матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 5 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 10 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

Результаты вычислений. Результаты расчета показаны на рис. 10, где изображен график зависимости критерия $\omega(A, a, b) = \|H_a(A)\|$ от полуоси эллипса a (при этом $a^2 - b^2 = 1$). Параметр a менялся от 0.0 до 16.5 с шагом 0.5. Критерий дихотомии отложен по ординате в логарифмическом масштабе.

На графике видно, что когда значение a приближается к собственным значениям матрицы $\lambda_1 = 4.0$, $\lambda_2 = 5.0$, $\lambda_3 = 10.0$, $\lambda_4 = 15.0$, вычисленный критерий дихотомии $\omega(A, a, b) = \|H_a(A)\|$ постепенно растет и обращается в бесконечность.

Список литературы

- [1] *Бибердорф Э. А., Попова Н. И.* Гарантированная точность современных алгоритмов линейной алгебры. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2006.
- [2] *Бибердорф Э. А.* Гарантированная точность в прикладных задачах линейной алгебры. Новосибирск: Издательство НГУ, 2008.
- [3] *Булгаков А.Я.* Обоснование гарантированной точности выделения инвариантных подпространств несамосопряженных матриц. Тр. Ин-та математики АН СССР. Сиб. отд-ние, 1989, Т. 15, С. 12-92.
- [4] *Булгаков А.Я., Годунов С. К.* Круговая дихотомия матричного спектра. Сиб. мат. жур., 1988, Т. 29, № 5, С.59-70.
- [5] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
- [6] *Годунов С. К.* Круговая дихотомия матричного спектра. Сиб. мат. жур., 1986, Т. 27, № 5, С.24-37.
- [7] *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск, Научная книга, 1997.
- [8] *Годунов С. К.* Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск, Научная книга, 2002.

- [9] *Мальшев А. Н.* Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск, Наука Сибирское отделение, 1991.
- [10] *Demmel J., Kagstrom B.* Accurate solutions of ill-posed problems in control theory. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 9:126-145, 1988.
- [11] *Krishnan S., Narkhede A., Manocha D.* BOOLE: A system to compute Boolean combinations of sculptured solids. Computer Science Dep. Technical Report TR95-008, University of North Carolina, Chapel Hill, 1995. <http://www.cs.unc.edu/~geom/geom.html>.
- [12] *Manocha D., Demmel J.* Algorithms for interesting parametric and algebraic curves i: simple intersections. *ACM Transactions on Graphics*, 13:73-100, 1994.
- [13] *Manocha D., Demmel J.* Algorithms for interesting parametric and algebraic curves ii: Higher order intersections. *Computer Vision, Graphics and Image Processing: Graphical Models and Image Processing*, 57:80-100, 1995.
- [14] *Van Dooren P.* The computation of Kronecker's canonical form of a singular pencil. *Linear Algebra Appl.*, 27:103-141, 1979.
- [15] *Van Dooren P.* The generalized eigenstructure problem in linear system theory. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-26:111-128, 1981.