

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Сибирское отделение
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера СО РАН

М.С. Чащин и И.А. Котельников

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ДИАМАГНЕТИЗМА
КОМПАКТНОГО ПЛАЗМОИДА

ИЯФ 2008-19

НОВОСИБИРСК
2008

Об измерении диамагнетизма компактного плазмоида

М.С. Чащин и И.А. Котельников

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

Решена задача об определении энергосодержания компактного плазмоида в виде тонкого диска по результатам диамагнитных измерений. В расчётах учтено влияние проводящих стенок камеры экспериментальной установки в пределе полного скинирования магнитного поля плазмы.

On interpreting the diamagnetism of a compact plasmoid

Maxim Chaschin, Igor Kotelnikov

Budker Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, Russia

Abstract

A set of formulas for interpreting the diamagnetic measurements of compact plasmoid in a conducting chamber is derived. The formulas are written in the form of an integral transformation relating the magnetic flux to the radial pressure profile of the plasmoid. An inverse transformation is also found. Particular examples of applying the newly derived formulas to the SHIP experiment are given. They show that the conductive chamber has essential effect on the result of the measurements. The optimization of the loop geometry that allows maximizing the measured signal is also described.

1 Введение

Для измерения газокINETического давления плазмы, находящейся в магнитном поле, широко используются диамагнитные зонды [1, 2, 3, 4, 5, 6]. В простейшем случае диамагнитный зонд представляет собой проводящий контур или катушку, которая охватывает столб плазмы. Изменение давления плазмы в ходе эксперимента приводит к изменению магнитного потока через петлю, который наводит в ней ЭДС. В теории диамагнитных измерений различают два предельных режима. Первый режим реализуется, если длительность удержания плазмы столь мала, что можно пренебречь диффузией магнитного потока через стенки вакуумной камеры, считая их идеально проводящими [1, 4]. В другом случае, когда время скинирования поля от плазмы мало по сравнению с длительностью эксперимента, можно пренебречь влиянием токов изображения в проводящих элементах экспериментальной установки. В общем случае частичного экранирования сравнительно недавно был найден изящный и вместе с тем простой способ восстановления временного хода давления плазмы по измеренной зависимости напряжения от времени [7].

Во всех перечисленных работах так или иначе предполагается, что плазма имеет форму достаточно длинного цилиндра. Однако в экспериментах с мощной инжекцией пучков нейтральных атомов под прямым углом к магнитному полю, как в эксперименте SHIP (Synthesized Hot Ion Plasmoid) [8], возникает облако быстрых ионов, которое имеет форму, близкую к тонкому плоскому диску. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы предоставить экспериментаторам набор формул, позволяющих интерпретировать результаты измерения диамагнетизма такого плазмоида по крайней мере в некоторых простых случаях, поддающихся аналитическому исследованию.

2 Теоретическая модель

Пусть плазмод имеет форму тонкого диска радиуса a и удерживается внешним магнитным полем в центральной плоскости цилиндрической проводящей камеры радиуса R и длины L (Рис. 1). Пренебрегая конечной

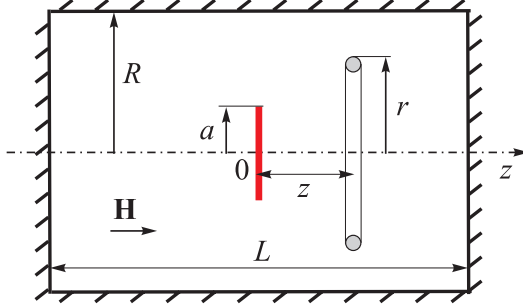


Fig. 1. Геометрия задачи. Плазмод в виде тонкого диска удерживается внешним магнитным полем \mathbf{H} вблизи плоскости $z = 0$. Измерительный контур в виде петли радиуса r размещён на расстоянии z от плазмоида. Плазма и измерительная петля находятся внутри проводящей цилиндрической камеры радиуса R и длины L .

толщиной плазмоида, запишем распределение давления в нём в виде

$$p(r, z) = P(r) \delta(z), \quad (1)$$

где

$$P(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz p(r, z).$$

В магнитном поле \mathbf{H} , направленном преимущественно вдоль оси z проводящей камеры, в плазмоеде возникает азимутальный ток¹

$$j_\alpha = \frac{c}{H} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{c}{H} \frac{dP(r)}{dr} \delta(z), \quad (2)$$

так что сила Лоренца уравнивает градиент давления. Этот ток создаёт импульсное магнитное поле (поскольку он возникает и исчезает вместе с плазмой), которое сравнительно несложно выделить на фоне внешнего поля, создаваемого магнитными катушками. По величине импульсного поля можно определить давление плазмы. В этом и состоит идея диамагнитных измерений.

¹Этот ток не совсем точно называют диамагнитным, так как он содержит добавку, обусловленную градиентным и центробежным дрейфами, которые частично компенсируют истинный диамагнитный ток $\mathbf{j}_\mu = -c \operatorname{rot}(p_\perp \mathbf{B}/B^2)$. В данном случае подобное уточнение не существенно, так как при вычислении тока (2) внешнее магнитное поле приближенно считается однородным. Подробнее обсуждение этого вопроса см. в [9, §4.2].

Существует несколько типов диамагнитных зондов для измерения импульсного магнитного поля плазмы. В эксперименте SHIP используется простейшая конструкция диамагнитного зонда, состоящая из двух проводящих контуров. Они расположены в плоскости, параллельной плазмойду, на некотором расстоянии z от него и соединены в электрическую схему так, чтобы исключить наводки от медленно меняющегося внешнего магнитного поля.

Для интерпретация результатов диамагнитных измерений с помощью такого зонда для начала полезно рассмотреть ещё более простую задачу, предположив, что диамагнитный зонд имеет только один контур, а внешнее магнитное поле постоянно, так что второй компенсирующий контур не нужен, как показано на Рис. 1. Создание и нагрев плазмы вызывает изменение магнитного потока через контур, которое наводит в контуре ЭДС, пропорциональную скорости изменения магнитного потока. По величине ЭДС можно судить о величине давления плазмы.

Вследствие азимутальной симметрии задачи магнитное поле плазмойда

$$B_r = -\frac{\partial}{\partial z}A_\alpha, \quad B_\alpha = 0, \quad B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rA_\alpha \quad (3)$$

можно выразить через азимутальную компоненту $A_\alpha(r, z)$ векторного потенциала, а остальные компоненты приравнять нулю. При таком выборе векторного потенциала \mathbf{A} он удовлетворяет Кулоновской калибровке $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ и подчиняется векторному уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (4)$$

у которого в цилиндрической системе координат (r, α, z) содержательной является только азимутальная проекция

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial A_\alpha}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial z^2} - \frac{A_\alpha}{r^2} = -\frac{4\pi}{H}\frac{dP(r)}{dr}\delta(z). \quad (5)$$

Вычисления заметно упрощаются, если магнитное поле плазмы \mathbf{B} существенно меньше, чем внешнее магнитное поле \mathbf{H} . Это упрощение уже использовано в выражении (2) для j_α , которое подставлено в правую часть уравнения (5) и где полное поле $|\mathbf{H} + \mathbf{B}|$ заменено на H .

Магнитный поток через диамагнитную петлю выражается через значение потенциала A_α на контуре измерительной петли, умноженное на периметр петли:

$$\Phi(r, z) = 2\pi \int_0^r dr' r' B_z(r', z) = 2\pi r A_\alpha(r, z). \quad (6)$$

В следующем разделе найдено пространственное распределение $\Phi(r, z)$ для случая компактного плазмоида, максимальный радиус которого a (как и радиус измерительного контура r) мал по сравнению с размерами проводящей камеры. В разделе 4 это ограничение будет снято.

3 Компактный плазмод

В пределе $a/R \rightarrow 0$ и $a/L \rightarrow 0$ решение уравнения (5), убывающее до нуля на бесконечном удалении от плазмоида, имеет вид

$$A_\alpha(r, z) = \frac{1}{c} \int \frac{j_\alpha(r', z') \cos \alpha' r' dr' d\alpha' dz'}{\sqrt{r^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2rr' \cos \alpha'}}.$$

Подставив сюда выражение для плотности тока из (2), выполнив интегрирование по z и α , и умножив затем результат на $2\pi r$, находим магнитный поток через измерительную петлю

$$\Phi(r, z) = \frac{8\pi r}{H} \int_0^\infty dr' \frac{dP(r')}{dr'} \frac{1}{k} \sqrt{\frac{r'}{r}} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k^2) - E(k^2) \right\}. \quad (7)$$

Здесь введено обозначение $k^2 = 4r'r / [(r' + r)^2 + z^2]$, а функции

$$K(k^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}},$$

$$E(k^2) = \int_0^{\pi/2} d\alpha \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}$$

есть полные эллиптические интегралы Лежандра. Верхний предел интегрирования в формуле (7) формально положен бесконечным, хотя в реальных условиях всегда может указать такой радиус a , за пределами которого давлением плазмы можно пренебречь.

Выполнив в (7) интегрирование по частям при помощи тождеств

$$\frac{dK(k^2)}{d(k^2)} = \frac{1}{2k^2} \left[\frac{E(k^2)}{1 - k^2} - K(k^2) \right],$$

$$\frac{dE(k^2)}{d(k^2)} = \frac{1}{2k^2} [E(k^2) - K(k^2)],$$

получаем альтернативное выражение для магнитного потока через виток:

$$\Phi(r, z) = \frac{2\pi}{H} \int_0^\infty dr' P(r') k \sqrt{\frac{r'}{r}} \left[\frac{r'^2 - r^2 + z^2}{(r' - r)^2 + z^2} E(k^2) - K(k^2) \right]. \quad (8)$$

Магнитный поток от компактного плазмоида удобно нормировать на магнитный поток Φ_0 , создаваемый через тот же измерительный контур длинным плазменным цилиндром с идентичным радиальным профилем давления

$$p(r) = P(r)/\ell.$$

При таком определении ℓ имеет смысл эффективной ширины плазмоида. В пределе «малого бета», $B \ll H$, нормирующий поток равен

$$\Phi_0 = -\frac{4\pi}{H\ell} W, \quad (9)$$

где

$$W = \int_0^\infty P(r') 2\pi r' dr' \quad (10)$$

имеет смысл полного энергосодержания плазмоида.

3.1 Ступенчатый профиль давления

Интеграл (7) элементарно вычисляется в случае, когда $P(r') = P_0 = \text{const}$ при $r' < a$ и затем скачком обращается в нуль. Тогда

$$dP(r')/dr' = -P_0 \delta(r' - a), \quad (11)$$

а интегрирование сводится к замене r' на a в подынтегральном выражении. В результате имеем

$$\Phi(r, z)/\Phi_0 = \frac{\ell}{\pi a^2} \sqrt{(a+r)^2 + z^2} \left\{ \left(1 - \frac{\bar{k}^2}{2} \right) K(\bar{k}^2) - E(\bar{k}^2) \right\}, \quad (12)$$

где $\bar{k}^2 = 4ar / [(a+r)^2 + z^2]$. Так как $\Phi_0 = -4\pi^2 P_0 a^2 / H\ell = -(4\pi/H\ell) W$, отсюда легко видеть, что энергосодержание плазмоида прямо пропорционально измеренному значению магнитного потока:

$$W = \alpha |\Phi|, \quad (13)$$

причём

$$\alpha = \frac{Ha^2}{4\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[\left(1 - \frac{\bar{k}^2}{2} \right) K(\bar{k}^2) - E(\bar{k}^2) \right]^{-1}. \quad (14)$$

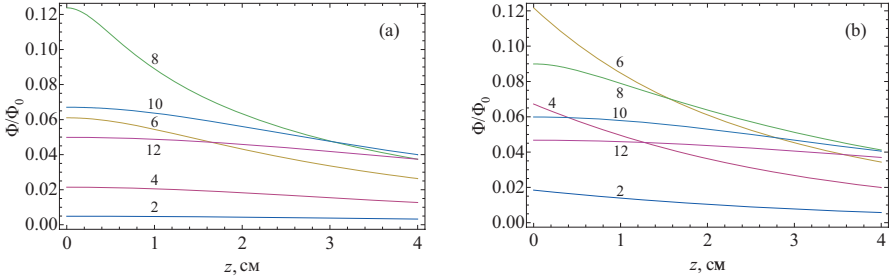


Fig. 2. Зависимость магнитного потока через измерительный контур от расстояния до плазмоида со ступенчатым (а) и параболическим (b) профилем плотности. Радиус плазмоида $a = 7,5$ см, ширина $\ell = 1$ см; радиус измерительного контура r (в сантиметрах) указан на рисунке.

На Рис. 2,а показана зависимость Φ/Φ_0 от z для нескольких значений радиуса измерительного контура r , а на Рис. 3,а сплошной линией — та же зависимость, пересчитанная в коэффициент α для конкретных параметров эксперимента [8].

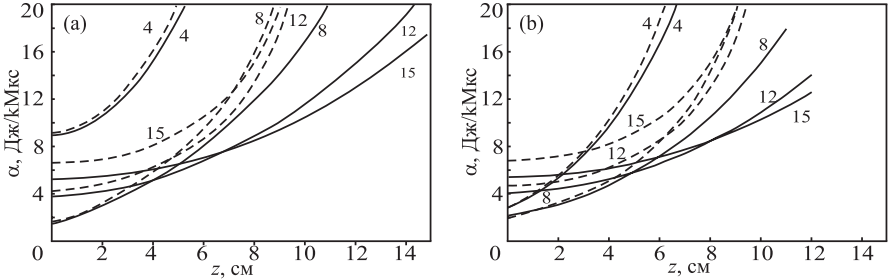


Fig. 3. Зависимость коэффициента пропорциональности $\alpha = W/|\Phi|$ от z для однородного (а) и параболического (b) профиля давления в плазмоиде с параметрами, указанными на Рис. 2. Радиус измерительного контура r (в сантиметрах) указан на рисунке. Напряженность магнитного поля $H = 24$ кГс. Сплошные линии отвечают случаю, когда эффект проводящих стенок камеры пренебрежимо мал. Пунктиром показан результат вычислений для проводящей камеры с радиусом $R = 33$ см и длиной $L = 25$ см.

Поток через измерительный контур быстро убывает при его удалении от плазмоида. В пределе $|z| \gg (a, r)$

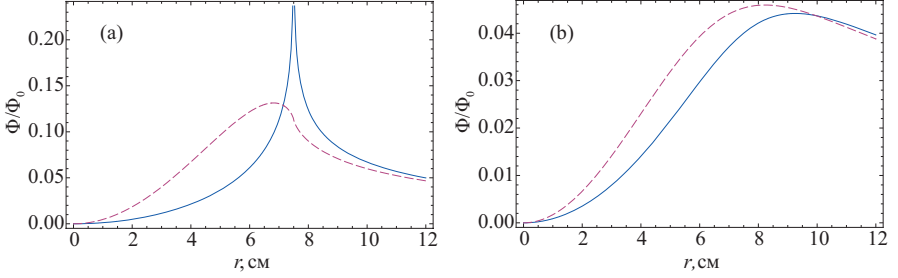


Fig. 4. Зависимость магнитного потока через измерительный контур от радиуса контура: (а) контур расположен вплотную к плазмоду; (б) на расстоянии $z = 3,5$ см от него: сплошная линия – плазмод со ступенчатым профилем плотности, пунктирная линия – плазмод с параболическим профилем плотности. Параметры плазмоида указаны на Рис. 2.

$$\Phi(r, z)/\Phi_0 = \frac{\ell r^2}{2|z|^3}. \quad (15)$$

Формула (15) даёт универсальную связь (для больших z) между магнитным потоком через измерительную петлю и энергосодержанием плазмоида, не зависящую от конкретного вида радиального профиля давления, однако её практическая значимость ограничена из очевидных трудностей измерения диамагнитного сигнала на большом расстоянии от плазмоида. В противоположном пределе $|z| \ll (a, r)$ результат представлен на Рис. 4,а. Как видно из рисунка, компактный плазмод создаёт существенно меньший магнитный поток через измерительную петлю по сравнению с бесконечно длинным столбом плазмы, имеющим тот же радиальный профиль давления, даже в том случае, когда петля расположена вплотную к плазмоду.

3.2 Параболический профиль давления

Пример плазмоида со ступенчатым профилем давления хотя и позволяет получить простые и легко интерпретируемые формулы обладает очевидным недостатком. Диамагнитный ток в этой модели протекает только по радиальной границе плазмоида, что имеет мало общего с реальной ситуацией. Этому недостатка лишен плазмод с параболическим профилем давления, таким что

$$P(r') = P_0 \times (1 - r'^2/a^2) \quad (16)$$

при $r \leq a$ и $P(r') = 0$ при $r > a$. Тогда вместо (12) имеем

$$\Phi(r, z)/\Phi_0 = \frac{2\ell}{\pi a^2} \int_0^a dr' \frac{2r'}{a^2} \sqrt{(r' + r)^2 + z^2} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k^2) - E(k^2) \right\}, \quad (17)$$

причём $\Phi_0 = -2\pi^2 P_0 a^2 / H\ell$ (т.е. формально в 2 раза меньше, чем для плазмоида со ступенчатым профилем давления), а вместо (14) получаем

$$\alpha = \frac{Ha}{8} \left[\int_0^a \frac{dr'}{a} \frac{2r'}{a^2} \sqrt{(r' + r)^2 + z^2} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k^2) - E(k^2) \right\} \right]^{-1}. \quad (18)$$

Предельная формула (15) остаётся в силе для параболического профиля давления, поскольку, как отмечено выше, при соответствующем определении нормирующего потока (9) она верна для любого профиля давления.

На Рис. 2,b показан ход зависимости от z магнитного потока через измерительные контуры разных радиусов для параболического профиля давления плазмоида. Рис. 3,b представляет ту же зависимость в пересчёте на коэффициент α . Сравнение Рис. 2,b с Рис. 2,a для ступенчатого профиля давления показывает, что особенное разительное отличие зависимости магнитного потока от z наблюдается при небольшом удалении от плазмоида измерительного контура с радиусами $r = 4 \div 6$ см.

Зависимость магнитного потока от радиуса измерительного контура показана на Рис. 4 для случая, когда тот расположен вплотную к плазмойду (Рис. 4,a) и на некотором расстоянии от него, примерно составляющем половину радиуса плазмоида (Рис. 4,b). Измерение магнитного потока диамагнитными петлями разного радиуса, расположенными вблизи плазмоида, позволяет извлечь информацию о радиальном профиле давления в плазмойде, но, как видно из Рис. 4,b, влияние деталей радиального профиля давления на зависимость измеренного магнитного потока от радиуса измерительного контура быстро замазывается уже при небольшом удалении контура от плазмоида.

Измерение радиальной компоненты B_r магнитного поля непосредственно вблизи плазмоида с противоположных сторон от него позволяет сразу извлечь информацию о радиальном профиле давления, поскольку

$$B_r(r, 0+) = -B_r(r, 0-) = \frac{2\pi}{H} \frac{dP}{dr}. \quad (19)$$

Формулу (19) нетрудно получить из граничных условий на поверхности тонкого диска с известным распределением поверхностного тока (2).

4 Влияние проводящей камеры

Стенки проводящей камеры существенно влияют на результат диамагнитных измерений, если измерительный контур проложен вблизи стенок или если размеры плазмоида вовсе не малы по сравнению с размерами камеры, как предполагалось выше. Токи изображения в стенках проводящей камеры направлены против диамагнитного тока плазмы и, следовательно, они уменьшают магнитный поток через измерительный контур. При достаточно большой длительности эксперимента, превышающей время скинирования магнитного поля через стенки камеры, токи изображения успевают затухнуть, возвращая нас к ситуации, рассмотренной в предыдущем разделе. Однако длительность многих импульсных экспериментов существенно меньше, чем время скинирования магнитного поля плазмоида в стенках проводящей камеры, и тогда магнитное поле плазмоида “заперто” внутри неё.

Для вычисления A_α теперь необходимо решить уравнение (5) с граничными условиями

$$\frac{\partial}{\partial z} A_\alpha = 0 \quad \text{при } r = R, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r A_\alpha = 0 \quad \text{при } z = \pm \frac{L}{2}. \quad (21)$$

Первое условие означает, что $B_r = 0$ на внутренней поверхности проводящего цилиндра радиуса R , а второе условие эквивалентно $B_z = 0$ на торцах камеры.

Уравнение (5) для A_α однородно (т. е. его правая часть равна нулю) везде, за исключением плоскости $z = 0$. Соответственно, вне этой плоскости его решение можно записать в виде ряда

$$A_\alpha(r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_1(\mu_i r/R) \operatorname{sh} [\mu_i(L/2 - |z|)/R] \quad (22)$$

по собственным функциям однородного уравнения $J_1(\mu_i r/R) e^{\pm \mu_i z/R}$, где μ_i — нули функции $J_1(\mu)$, а C_i — постоянные коэффициенты. В предельной записи ряда (22) уже учтено, что решение чётно относительно плоскости $z = 0$ и удовлетворяет граничным условиям (21) при $z = \pm L/2$. Выполнение граничного условия (20) гарантировано тем, что при $r = R$ в нуль обращается каждый член ряда.

Решение (22) характеризуется наличием скачка производной $\partial A_\alpha / \partial z$

при $z = 0$. Величина скачка

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial z}(r, 0+) - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}(r, 0-) = -\frac{4\pi}{H} \frac{dP(r)}{dr}$$

легко вычисляется путём интегрирования уравнение (5) по малой окрестности $z = 0$ и после подставка ряда (22) приводит к уравнению

$$2 \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_1 \left(\frac{\mu_i r}{R} \right) \frac{\mu_i}{R} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_i L}{2R} \right) = \frac{4\pi}{H} \frac{dP(r)}{dr}$$

для определения коэффициентов ряда C_i . Интегрирование этого уравнение по r с весом $r J_1(\mu_j r/R)$ при учёте свойства ортогональности функций Бесселя

$$\int_0^1 dx x J_1(\mu_i x) J_1(\mu_j x) = \frac{1}{2} J_0^2(\mu_i) \delta_{ij} \quad (23)$$

сразу даёт искомый коэффициент

$$C_i = \frac{4\pi}{HR} \int_0^R dr' r' J_1 \left(\frac{\mu_i r'}{R} \right) \frac{dP(r')}{dr'} \Big/ \mu_i J_0^2(\mu_i) \operatorname{ch}(\mu_i L/2R).$$

Его подстановка в формулу (22), умноженную на $2\pi r$, связывает магнитный поток через измерительный виток

$$\Phi(r, z) = \frac{8\pi^2 r}{HR} \int_0^R dr' r' K(r|r'; z) \frac{dP(r')}{dr'} \quad (24)$$

с радиальным градиентом давления $dP(r')/dr'$; здесь

$$K(r|r'; z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} [\mu_i(L/2 - |z|)/R]}{\operatorname{ch}(\mu_i L/2R)} \frac{J_1(\mu_i r/R) J_1(\mu_i r'/R)}{\mu_i J_0^2(\mu_i)}. \quad (25)$$

Выполнив интегрирование по частям, можно выразить $\Phi(r, z)$ непосредственно через $P(r')$:

$$\Phi(r, z) = -\frac{8\pi^2 r}{HR^2} \int_0^R dr' r' P(r') \hat{K}(r|r'; z), \quad (26)$$

однако ядро соответствующего интегрального преобразования

$$\hat{K}(r|r'; z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} [\mu_i(L/2 - |z|)/R]}{\operatorname{ch}(\mu_i L/2R)} \frac{J_1(\mu_i r/R) J_0(\mu_i r'/R)}{J_0^2(\mu_i)} \quad (27)$$

в отличие от (25) несимметрично относительно перестановки $r \rightleftharpoons r'$. Удобство интегральных преобразований с симметричными ядрами состоит в том, что их зачастую удаётся обратить. Иными словами, интегральное уравнение (24) удаётся решить, выразив $dP(r')/dr'$ через $\Phi(r, z)$, как это сделано в Приложении А.

4.1 Упрощение ядра интегрального преобразования

Прежде всего отметим, что в пределе $R \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$ из (24) получается альтернативная форма записи решения (7) для компактного плазмоида:

$$\Phi(r, z) = -\frac{4\pi^2 r}{H} \int_0^\infty dr' r' P(r') \int_0^\infty d\xi \xi e^{-\xi|z|} J_1(\xi r) J_0(\xi r'). \quad (28)$$

Существует также альтернативная форма ядра (25), которая при конечном R , но при $L \rightarrow \infty$ записывается в виде интеграла

$$K(r|r'; z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk R \frac{I_1(kr_{<})}{I_1(kR)} [I_1(kR)K_1(kr_{>}) - I_1(kr_{>})K_1(kR)] \cos(kz). \quad (29)$$

Она получена в Приложении В и несколько более удобна для исследования предела $z \rightarrow 0$. Здесь $r_{<} = \min(r, r')$, $r_{>} = \max(r, r')$. Подынтегральное выражение стремится к $\frac{1}{2}$ при $r_{<} \rightarrow r_{>} \rightarrow 0$, поэтому $K(0, 0|z) = \frac{1}{2}\delta(z)$.

В ряде практически важных случаев ядро интегрального преобразования (25) удаётся существенно упростить. Например, обычно можно считать, что $L \gtrsim 2R$. Поскольку $\mu_i \approx \pi(i+1/4)$, величина $\mu_i L/2R$ оказывается достаточно большой, чтобы дробь из гиперболических функций можно было заменить на $\exp(-\mu_i z/R)$ даже для первых членов ряда. Тогда

$$K(r|r'; z) \approx \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\mu_i |z|/R} \frac{J_1(\mu_i r/R) J_1(\mu_i r'/R)}{\mu_i J_0^2(\mu_i)}. \quad (30)$$

Во-вторых, известно, что $\mu_i J_0^2(\mu_i) \rightarrow 2/\pi$ при $i \rightarrow \infty$, но оказывается, что приближенное равенство

$$\mu_i J_0^2(\mu_i) \approx 2/\pi$$

верно даже при $i = 1$ с точностью лучше 2,4%. Соответственно, $\mu_i J_0^2(\mu_i)$ в знаменателе правых частей (25) и (30) можно заменить на $2/\pi$ с вполне приемлемой точностью.

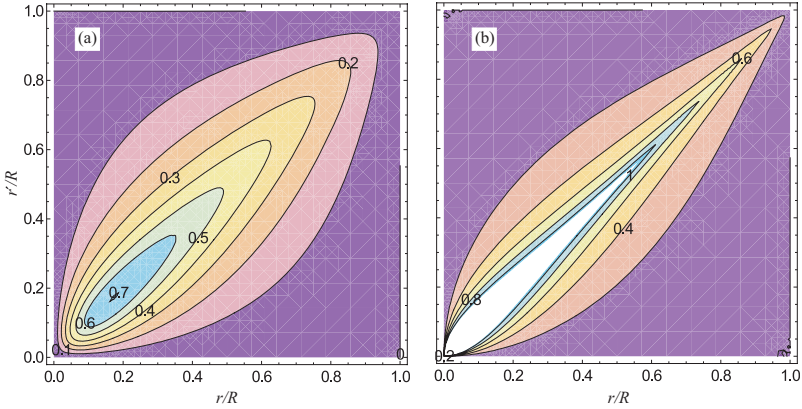


Fig. 5. Ядро интегрального преобразования (26) при $z = 0,1R$ (a) и $z = 0,01R$ (b). Учтено 50 и 100 членов ряда, соответственно.

Члены ряда (30) экспоненциально убывают с ростом их номера i . Сохранение только первого члена ряда $i = 1$ даёт точность порядка 15% при $|z| = 0,5R$ и 2% при $|z| > R$. По мере приближения измерительного контура к плазмоду приходится учитывать тем большее число членов ряда, чем меньше отношение z/R . На Рис. 5 показаны изолинии величины ядра (25) при $z = 0,1R$ и $z = 0,01R$, полученные суммированием ограниченного числа членов ряда. При $z = 0$ ядро (25) обращается в бесконечность на линии $r = r'$, так что конечная сумма при сколь угодно большом числе членов даёт вблизи этой линии ошибку в пределе $z \rightarrow 0$. Поскольку в реальных условиях измерительный контур всегда расположен на конечном расстоянии от плазоида, вычисление правильной асимптотики ядра при $z \rightarrow 0$ представляет чисто академический интерес, тем не менее она найдена в Приложении С.

4.2 Плазмод со ступенчатым профилем давления

В качестве первого примера вновь рассмотрим плазмод со ступенчатым профилем давления (11). Тогда магнитный поток через измерительный виток

$$\Phi(r, z) = -\frac{8\pi^2 r a P_0}{H R} K(r|a; z)$$

зависит от значения ядра только в одной точке. То же самое верно в отношении коэффициента

$$\alpha = \frac{H}{8\pi} \frac{Ra}{r} K(r|a; z)^{-1}$$

пропорциональности между энергосодержанием плазмоида W и величиной $|\Phi|$. На Рис. 3,а пунктирными линиями показаны зависимости коэффициента α от z при разных радиусах плазмоида со ступенчатым профилем давления. Размеры проводящей камеры указаны в подписи к рисунку. Для сравнения на том же рисунке сплошной линией показана величина α для случая, когда стенки камеры находятся далеко от плазмоида и измерительного витка. Как и следовало ожидать, проводящие стенки камеры уменьшают магнитный поток тем значительнонее, чем они ближе.

4.3 Параболический профиль давления

Подставив (16) в интегральное преобразование (24) с ядром (25), обнаруживаем, что интеграл по r' вычисляется, а результат имеет вид

$$\Phi = -\frac{16\pi^2 r P_0}{H} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sh}[\mu_i(L/2 - |z|)/R]}{\text{ch}(\mu_i L/2R)} \frac{J_1(\mu_i r/R) J_2(\mu_i a/R)}{\mu_i^2 J_0^2(\mu_i)}. \quad (31)$$

Полученный ряд быстро сходится даже при $z \rightarrow 0$. При $z = 0$, члены ряда с ростом их номера i убывают пропорционально $1/i^2$, а при $z \neq 0$ сходимость ещё лучше за счёт экспоненциально убывающего множителя $\text{sh}[\mu_i(L/2 - |z|)/R]/\text{ch}(\mu_i L/2R) \approx \exp(-\mu_i L/2R)$.

Зависимость коэффициента пропорциональности α между энергосодержанием и магнитным потоком от расстояния между петлями и плазмодом изображена на Рис. 3,б пунктирными линиями для разных радиусов измерительной петли. Сплошными линиями показан результат вычисления α без учёта эффекта проводящих стенок. Из сравнения сплошных и пунктирных кривых видно, что наличие проводящей стенки становится существенным при $r \gtrsim R/2$ и/или $z \gtrsim L/4$ и тогда её влияние обязательно следует учитывать при восстановлении параметров плазмы по измеренному диамагнитному потоку.

5 ПлазмOID конечной ширины

ПлазмOID конечной ширины можно представить в виде суперпозиции плоских дисков с нулевой шириной с помощью очевидного тождества

$$p(r, z) = \int_{-L/2}^{L/2} dz' p(r, z') \delta(z - z'). \quad (32)$$

Далее нужно проявить известную аккуратность при вычислении диамагнитного тока и учесть добавку, связанную с производной по z :

$$j_\alpha = c \frac{(\mathbf{B} + \mathbf{H})_z}{|\mathbf{B} + \mathbf{H}|^2} \frac{\partial p}{\partial r} - c \frac{(\mathbf{B} + \mathbf{H})_r}{|\mathbf{B} + \mathbf{H}|^2} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Однако нетрудно показать, что второе слагаемое по сравнению с первым содержит малый множитель порядка $\beta = 8\pi p/H^2$. При $\beta \ll 1$ им можно пренебречь и тем самым вернуться к ранее использованному приближенному выражению (2), переписывая уравнение (5) в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A_\alpha}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial z^2} - \frac{A_\alpha}{r^2} = -\frac{4\pi}{H} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{\partial p(r, z')}{\partial r} \delta(z - z'),$$

нетрудно заключить, что результат вычислений, аналогичных выполненным в предыдущих разделах, приведёт к интегральной формуле

$$\Phi(r, z) = \frac{8\pi^2 r}{HR} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \int_0^R dr' r' K(r|r'|; z - z') \frac{\partial p(r', z')}{\partial r'} \quad (33)$$

с тем же ядром (25) (со всеми его эквивалентными формами), обобщающей формулу (24) на случай плазмOIDа конечной, хотя и малой ширины.

6 Расчёты для эксперимента SHIP

В эксперименте SHIP диамагнитная петля состоит из двух соосных контуров: измерительного контура с радиусом r_1 и компенсирующего контура с внешним радиусом r_2 и внутренним r_1 . Внешний радиус компенсатора и число витков в каждом контуре подбираются так, чтобы поток внешнего магнитного поля через компенсатор был в точности равен потоку через измерительный контур. Если количество витков в измерительном контуре N_1 , а в компенсаторе N_2 , тогда

$$r_2 = r_1 \sqrt{\frac{N_1 + N_2}{N_2}}. \quad (34)$$

В такой геометрии легко интерпретировать результаты измерений в случае, когда плазма имеет вид длинного цилиндрического столба, а время скинирования поля в стенках проводящей камеры мало по сравнению с временем проведения измерений (или если проводящие стенки находятся достаточно далеко от плазмы). Тогда компенсатор измеряет только изменение потока внешнего магнитного поля, а измерительная петля регистрирует также и изменение потока магнитного поля от плазмы. Сигнал компенсатора вычитается из сигнала измерителя аналоговым способом, в результате чего измеренная ЭДС зависит только от магнитного потока от плазмы.

В экспериментах с компактным плазмодом сигнал компенсатора содержит добавку от магнитного поля плазмы, которую невозможно исключить подбором радиусов и числа витков из-за радиальной неоднородности поля плазмоида. Измеренная ЭДС диамагнитной петли определяется величиной потокосцепления

$$\Delta\Phi(r_1, z) = (N_1 + N_2) \Phi(r_1, z) - N_2 \Phi(r_2, z), \quad (35)$$

причём подразумевается, что величина r_2 выбрана согласно формуле (34).

Диамагнитная петля, которая используется в эксперименте SHIP, имеет следующие параметры: радиус измерителя $r_1 = 10,8$ см, внешний радиус компенсатора $r_2 = 12,4$ см, количество витков в измерителе $N_1 = 7$, в компенсаторе $N_2 = 22$. Плазмод имеет ширину примерно $l = 4$ см и радиус $a = 7,5$ см [11]. Результаты расчётов величины $\Delta\Phi$ для такой петли в случае, когда влияние проводящей камеры не существенно, представлены на Рис. 6.

Для более аккуратных расчётов аппроксимируем профиль давления следующим образом:

$$p(r, z) = p_0 \left(1 - \frac{z^2}{(l/2)^2} \right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (36)$$

С помощью формул (33) и (25) можно определить величину потокосцепления из (35). Она будет пропорциональна энергосодержанию плазмоида $W = p_0 \pi a^2 l / 3$. На Рис. 7 изображена зависимость коэффициента пропорциональности α между $\Delta\Phi$ и энергосодержанием W от расстояния между центром плазмоида и диамагнитной петлей. Расчёты показали, что для иных профилей давления плазмы зависимость α от z мало отличается от показанной на Рис. 7.

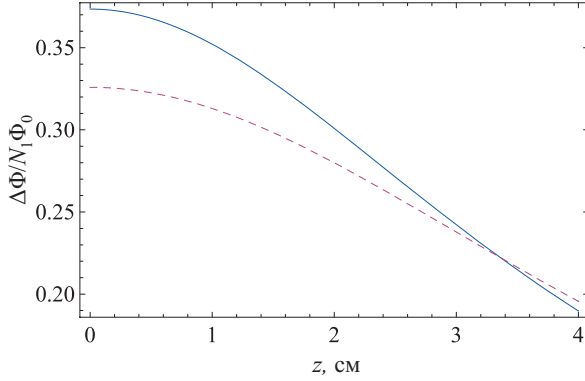


Fig. 6. Расчётная зависимость $\Delta\Phi$ в эксперименте SHIP (нормированная на $N_1\Phi_0$) от z для случая, когда влияние проводящей камеры не существенно. Сплошная линия — ступенчатый профиль давления, пунктирная — параболический профиль давления. Параметры диамагнитной петли: $N_1 = 7$, $N_2 = 22$, $r_1 = 10,8$ см, $r_2 = 12,4$ см.

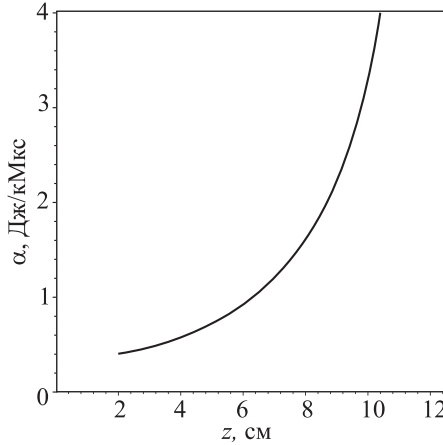


Fig. 7. Зависимость коэффициента пропорциональности α между потокоцеплением $\Delta\Phi$ и энергосодержанием плазмоида от расстояния между центром плазмоида и диамагнитной петлей.

Если при фиксированном числе витков в контурах диамагнитного зонда радиус компенсатора выбран в согласии с (34), потокоцепление $\Delta\Phi$ является функцией r_1 и z . Изолинии функции $\Delta\Phi(r_1, z)$ изображены на Рис. 8.

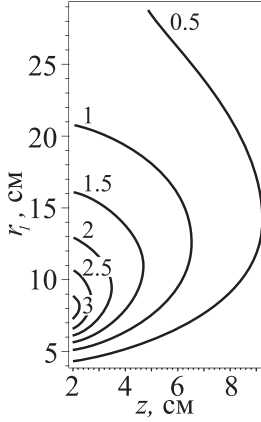


Fig. 8. Линии уровня потокосцепления $\Delta\Phi(r_1, z)$, нормированного на энергосодержание плазоида. Нормированный поток рассчитан в единицах кМакс/Дж. Количество витков в петлях фиксировано $N_1 = 7$, $N_2 = 22$. Профиль давления плазмы взят в соответствии с (36).

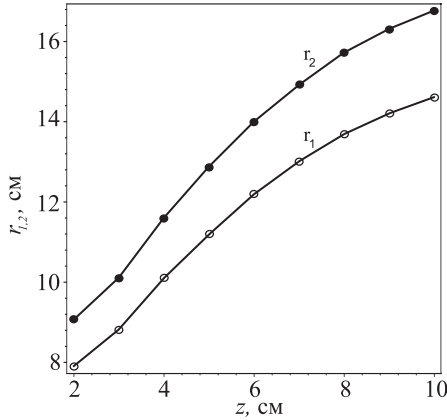


Fig. 9. Зависимость радиусов измерительной петли r_1 (выколотые кружки) и петли компенсатора (закрашенные кружки) от z при которых величина потокосцепления максимальна. Количество витков в петлях фиксировано $N_1 = 7$, $N_2 = 22$.

В каждом сечении $z = \text{const}$ величина $\Delta\Phi$ имеет один максимум. Это означает, что при фиксированном положении петли z можно подобрать такое значение радиуса измерительной петли r_1 , чтобы измеренный сигнал был максимален. На Рис. 9 приведена зависимость положения максимума потокоцепления по r_1 от z . Там же приведена соответствующая зависимость r_2 от z , рассчитанная по формуле (34).

7 Выводы

Формулы (8) и (26) являются основным результатом данной работы. Они позволяют вычислить энергосодержание компактного плазмоида по результатам диамагнитных измерений.

Расчётные формулы, связывающие энергосодержание плазмы с магнитным потоком через измерительный виток, получены как для случая, когда проводящие стенки вакуумной камеры не влияют на результат диамагнитных измерений, так и для случая, когда они существенным образом изменяют магнитный поток. Результаты расчётов представлены в виде интегрального преобразования, выражающего магнитный поток через радиальный профиль давления в плазмоиде или через его градиент. Найдено обратное преобразование, связывающее градиент давления с измеренным магнитным потоком.

Получены упрощенные приближенные выражения для ядра интегрального преобразования в ряде практически важных случаев. В качестве примера использования полученных формул вычислен коэффициент пропорциональности между энергосодержанием компактного плазмоида и измеренным магнитным потоком для конкретных параметров эксперимента SHIP [8] в случае однородного и параболического профилей давления.

Проведённые расчёты показывают, что скиновые токи существенно влияют на диамагнитные измерения, когда измерительный виток расположен недалеко от проводящих стенок камеры экспериментальной установки.

Авторы благодарят С.В. Полосаткина за постановку задачи, а также П.А. Багрянского и А.В. Анিকেева за поддержку и ценные консультации по эксперименту SHIP.

А Решение интегрального уравнения

Рассматривая интегральное уравнение (24) с приближённым симметричным ядром (30)², нетрудно найти его формальное решение, т. е. выразить dP/dr через Φ . Действительно, интегрируя обе части уравнения (24) с весом $J_1(\mu_j r/R)$ и учитывая условие ортогональности (23), получаем соотношение

$$\int_0^R dr J_1(\mu_j r/R) \Phi(r, z) = \frac{4\pi^2 R}{\mu_j H} e^{-\mu_j |z|/R} \int_0^R dr' r' J_1(\mu_j r'/R) \frac{dP(r')}{dr'}. \quad (37)$$

С другой стороны, $dP(r)/dr$, как и вообще любая функция, обращающаяся в нуль при $r = R$, может быть разложена в ряд по функциям Бесселя, также имеющими нули при $r = R$:

$$\frac{dP(r)}{dr} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_i r/R)}{J_0^2(\mu_i) R^2} \int_0^R dr' r' J_1(\mu_j r'/R) \frac{dP(r')}{dr'}.$$

Выражая интегралы в правой части от dP/dr' через интегралы от Φ с помощью (37), отсюда получаем формальное решение уравнения (25):

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{H}{2\pi^2 R^3} \int_0^R dr' K^*(r|r'; z) \Phi(r', z), \quad (38)$$

где

$$K^*(r|r'; z) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\mu_j |z|/R} \frac{\mu_i J_1(\mu_i r/R) J_1(\mu_j r'/R)}{J_0^2(\mu_i)} \quad (39)$$

суть ядро обратного преобразования. Полученное решение можно проверить прямой постановкой в уравнение (24) с ядром (30), которая приводит к тождеству

$$\delta(x^2 - y^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_i x) J_1(\mu_i y)}{J_0^2(\mu_i)}. \quad (40)$$

Почленно дифференцируя по z ряд, получающийся при подстановке (25) в (24), с помощью тождества (40) нетрудно вновь получить формулу (19).

Наличие экспоненциально растущих множителей $e^{\mu_i |z|/R}$ в (39) является отражением того факта, что восстановление радиального профиля давления по измеренному магнитному потоку относится в число математически некорректных задач. В данном случае эта формулировка

²Использование точного ядра (25) сделало бы вычисления чуть более громоздкими, не меняя сути дела.

означает, что формальное решение (38) неустойчиво относительно малого возмущения исходных данных, т.е. небольшие ошибки в измерении магнитного потока приводят к невозможности определения реального профиля давления без использования той или иной процедуры регуляризации решения.

В Альтернативная форма интегрального ядра

Получим альтернативную форму записи ядра интегрального преобразования (25) в пределе $L \rightarrow \infty$. Выполнив преобразование Фурье по z в уравнение (5), получим

$$\frac{d^2 A_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_k}{dr} - \frac{A_k}{r^2} - k^2 A_k = -\frac{4\pi}{H} \frac{dP}{dr}, \quad (41)$$

где

$$A_k(r) = \int_{-\infty}^{\infty} dz A_\alpha(r, z) e^{ikz}.$$

Решение уравнения (41) имеет вид

$$A_k(r) = -\frac{4\pi}{H} \int_0^r dr' \frac{dP(r')}{dr'} r' I_1(kr') \left[I_1(kr) \frac{K_1(kR)}{I_1(kR)} - K_1(kr) \right] + \\ -\frac{4\pi}{H} \int_r^R dr' \frac{dP(r')}{dr'} r' I_1(kr) \left[I_1(kr') \frac{K_1(kR)}{I_1(kR)} - K_1(kr') \right]$$

и может быть проверено непосредственной подстановкой. Так как подынтегральное выражение чётно относительно k , при восстановлении пространственной зависимости $A_\alpha(r, z)$ это обстоятельство можно явно учесть, сведя интегрирование по k к полубесконечному интервалу:

$$A_\alpha(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk A_k(r) \cos(kz).$$

Умножая это выражение на $2\pi r$ и сравнивая с (24), получаем (29). В случае конечной величины L , интеграл по k в (29) необходимо заменить суммой:

$$K(r|r'; z) = \frac{2R}{L} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{I_1(k_j r_{<})}{I_1(k_j R)} [I_1(k_j R) K_1(k_j r_{>}) - I_1(k_j r_{>}) K_1(kR)] \cos(k_j z),$$

где $k_j = (\pi/L)(1 + 2j)$.

С Асимптотика ядра при $r \rightarrow r'$ и $z = 0$

Вычислим асимптотику ядра (29). Для краткости нормируем все размеры на радиус проводящего цилиндра, формально приняв, что $R = 1$. Избегая громоздких обозначений $r_<$, $r_>$, примем для определённости, что $r < r'$:

$$K(r|r'; 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{I_1(kr)}{I_1(k)} [I_1(k)K_1(kr') - I_1(kr')K_1(k)]. \quad (42)$$

По завершении вычислений обратный случай, $r > r'$, восстанавливается путём перестановки $r \leftrightarrow r'$.

При малых значениях k , $k \ll 1/r$, подынтегральное выражение стремиться к

$$\frac{r}{2r'} (1 - r'^2),$$

причём здесь далее предполагается, что $r' \approx r$. В обратном предельном случае

$$\frac{e^{(r-r')k} - e^{(r+r'-2)k}}{2\sqrt{rr'}k}$$

Сообразно наличию двух асимптотик разобьём интервал интегрирования в (42) на две части, вводя подгоночный параметр $f \sim 1$ и обозначения $x = (r + r')/2$, $y = r' - r$:

$$K(r|r'; 0) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{f/x} \frac{1-x^2}{2} dk + \frac{1}{\pi} \int_{f/x}^\infty \frac{e^{-ky} - e^{k(2x-2)}}{k\sqrt{4x^2 - y^2}} dk.$$

Выполнив интегрирование и немного упростив результат в предположении, что $|y| \ll x$, получим

$$K(r|r'; 0) \approx \frac{f(1-x^2)}{\pi x} + \frac{1}{2\pi x} [\ln(x/f|y|) - E_i(2f/x - 2f) - \gamma], \quad (43)$$

где знак модуля поставлен для того, чтобы учесть оба варианта: $r < r'$ и $r > r'$, $\gamma \approx 0,58$ — число Эйлера, а

$$E_i(z) = \int_z^\infty t^{-1} e^{-t} dt.$$

Главное слагаемое в (43) содержит логарифм $\ln(x/f|y|)$, поэтому точное значение подгоночного параметра f не существенно. Оставляя только

этот логарифм, находим искомую асимптотику ядра интегрального преобразования:

$$K(r|r'; 0) \approx \frac{1}{\pi(r+r')} \ln \left| \frac{r+r'}{r-r'} \right|. \quad (44)$$

Список литературы

- [1] *Бржецко Л.В., Павличенко О.С., Швец О.М.* // Атомная энергия, 1965, т.20, с.52.
Brzhechko L.V., Pavlichenko O.S., Shvets O.M. // J. Nucl. Energy, Part C Plasma Phys, 1966, v.8, p.799.
- [2] *Rothman M.A.* // Plasma Physics, 1968, v.10, p.86.
- [3] *Bottiglioni F.* // Plasma Physics, 1970, v.12, p.131.
- [4] *Mukhovatov V.S., Shafranov V.D.* // Nucl. Fusion, 1971, v.11, p.605.
- [5] *Готт Ю.В., Соболев Р.И.* // Диагностика плазмы. /Под ред. С.Ю. Лукьянова, М.: Атомиздат, 1973, вып.3, с.525.
- [6] *Booske J.H., Getty W.D., Gilgenbach R.M.* // Plasma Phys. Contr. Fusion, 1986, v.28, p.1449.
- [7] *Kotelnikov I.A.* // Fusion Science and Technology, 2005, v.47(1T), p.312.
- [8] *Anikeev A.V., Bagryansky P.A., Ivanov A.A., et al.* // Journal of Fusion Energy, 2007, v.26, p.103.
- [9] *Котельников И.А.* // Лекции по физике плазмы, Новосибирск: НГУ, 2008.
- [10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Теоретическая физика, т.8. М.: Наука, 1982.
- [11] *Anikeev A.V., Bagryansky P.A., Ivanov A.A., et al.* // Proc. of the 34th EPS Conference on Plasma Phys., Warsaw, 2-6 July 2007. - ECA, vol.31F, P-1.155 (2007).

М.С. Чащин и И.А. Котельников

**Об измерении диамагнетизма
компактного плазмоида**

Maxim Chaschin, Igor Kotelnikov

**On interpreting the diamagnetism
of a compact plasmoid**

ИЯФ 2008-19

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев
Работа поступила 6.05.2008 г.

Сдано в набор 9.06.2008 г.

Подписано в печать 10.06.2008 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,6 печ.л., 1.2 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 19

Обработано на РС и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.