НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И.Будкера СО РАН

В.В. Вечеславов

ДИНАМИКА ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СИЛОЙ

ИЯФ 2004-54

НОВОСИБИРСК
2004

Динамика гамильтоновых систем с кусочно-линейной силой

В.В. Вечеславов[1]

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090 Новосибирск, СО РАН

Аннотация

Рассматривается семейство гладких двухпараметрических гамильтоновых систем с кусочно-линейной силой, представленных как в виде отображений, так и в непрерывной форме. Обсуждаются полученные к настоящему времени аналитические и численные результаты исследований обстоятельств возникновения хаоса и глобальной диффузии в таких системах. Описываются динамические эффекты, не имеющие аналогов в классе аналитических гамильтонианов. Проводится сравнение с хорошо изученным случаем возмущенного маятника и подчеркиваются кардинальные различия в динамическом поведении гладких и аналитических систем. Отмечаются нерешенные вопросы.

PACS 05.45.+b

[1]email: vecheslavov@inp.nsk.su

1 Введение

Двумерные канонические отображения

$$\overline{p} = p + K \cdot f(x)\,, \quad \overline{x} = x + \overline{p} \quad (mod\; 1), \tag{1.1}$$

где K параметр возмущения, уже давно и широко используются в нелинейной физике как весьма удобные и чрезвычайно информативные модели [1,2,3].

Отображение (1.1) можно записать в полностью эквивалентной ему форме непрерывной системы с гамильтонианом, явно зависящим от времени и возмущением в виде толчков [1,2,3]

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2} + K \cdot V(x) \cdot \delta_1(t) = H_0(x,p) + H_1(x,t)\,, \tag{1.2}$$

где $V(x) = -\int f(x)dx$ есть потенциал силы и $\delta_1(t) = 1 + 2\sum_{n\geq 1} \cos{(2\pi n t)}$ обозначает δ–функцию периода 1.

Невозмущенная часть

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + K \cdot V(x) \tag{1.3}$$

представляет в (1.2) основной (целый) резонанс, а

$$H_1(x,t) = K \cdot V(x)(\delta_1(t) - 1) \tag{1.4}$$

рассматривается как возмущение с периодом $T = 1$ и частотой $\Omega = 2\pi/T = 2\pi$ от всех остальных резонансов.

Основной резонанс (1.3) является интегрируемой системой без всяких признаков хаоса и его сепаратрисы устроены следующим образом. Прежде всего, имеется седло – неподвижная точка, которую следует рассматривать как самостоятельную траекторию (невозмущенный маятник может находиться в ней бесконечно долго). От седла в противоположных направлениях отходят и затем асимптотически к нему же приближаются еще две траектории (сепаратрисы), каждая из которых является пограничной между вращением фазы (вне резонанса) и ее колебанием (внутри резонанса). На фазовой плоскости в окрестности седла образуется характерный крест с двумя приходящими и двумя уходящими траекториями (см. рис.2.1 в [1]). Условимся называть сепаратрису с положительным импульсом $p_s > 0$ верхней, и с $p_s < 0$ нижней. Следует отметить, что на самом деле обе невозмущенные сепаратрисы состоят из двух пространственно совпадающих траекторий для направлений времени вперед и назад соответственно. Возмущение, как известно, расщепляет каждую сепаратрису на две ветви, которые пересекаются в так называемых гомоклинных точках.

Возмущенная система (1.2) является, как правило, неинтегрируемой и ее фазовое пространство в общем случае оказывается разделенным на хаотическую и регулярную компоненты. Одной из важных для практики задач является выяснение условий образования единой хаотической компоненты и возникновения глобального хаоса. Эти условия в решающей степени определяются функциональными свойствами потенциала основного резонанса $V(x)$.

Создатели теории КАМ с самого начала отмечали, что возникновение глобального хаоса и возможность диффузии по всей единой хаотической компоненте в фазовом пространстве зависят не только от величины, но и от гладкости системы. Гладкость удобно характеризовать скоростью убывания Фурье-амплитуд. Для аналитических функций убывание является экспоненциальным. В этом случае всегда существует пороговая величина K_{tr} и глобальный хаос возникает лишь при $K \gtrsim K_{tr}$. Если же $K \lesssim K_{tr}$, то хаос локализован в относительно узких хаотических слоях (которые образуются при любом $K > 0$) и глобальная диффузия при числе степеней свободы консервативной системы $N \leq 2$ невозможна.

Характер движения существенно изменяется для гладкого потенциала $V(x)$, у которого Фурье-амплитуды убывают как некоторая степень $\beta + 1$ их номера n (см. [4] и ссылки там). В простейшем случае 2D-отображения порог $K_{tr} > 0$ возникновения глобального хаоса существует всегда при $\beta > \beta_{cr} = 3$. Это значение критической гладкости получено из простой оценки в [4], однако оно еще требует проверки в численных экспериментах. Строгое доказательство удалось получить только для $\beta_{cr} = 5$ (см. [5], где было также высказано предположение, что на самом деле $\beta_{cr} = 4$).

Возвращаясь к отображению (1.1) отметим, что оно изучалось для случаев как аналитических, так и гладких функций. Аналитической функции $f(x) = \sin(2\pi x)$, например, отвечает известное стандартное отображение Чирикова, результаты обширных исследований которого (как и его непрерывного варианта – гамильтониана маятника) внесли заметный вклад в современную нелинейную динамику.

Вместе с тем, гладкие функции до относительно недавнего времени привлекали меньшее внимание. Сейчас ситуация заметно изменилась, поскольку именно в классе гладких функций были обнаружены некоторые новые динамические эффекты, о которых я напомню ниже и которые не имеют места в аналитическом случае.

Настоящая работа посвящена гладким гамильтоновым системам, в которых синусоидальная сила заменена ее кусочно-линейным аналогом – пилой, с показателем гладкости $\beta = 2$ (см. раздел 2). Интересно отметить, что именно для этого показателя ситуация долгое время оставалась неясной и здесь уместно кратко напомнить историю этого вопроса.

Уже в ранних численных экспериментах с системами, гладкость которых была ниже критической $\beta < \beta_{cr} = 3$ наряду с глобальной диффузией наблюдались случаи, когда траектории в течение весьма длительного времени счета не выходили за пределы некоторой ограниченной части фазового пространства [6,7]. Однако, зто было не более чем подозрение на подавление или ослабление диффузии. Строгий результат здесь был получен Булитом [8]. Для симметричного кусочно-линейного 2D-отображения (СКЛО) с $\beta = 2$ Булит доказал существование глобальных инвариантных кривых как с иррациональными, так и с рациональными числами вращения (см. также [9]). Такие глобальные инвариантные кривые имеют полную протяженность по фазе, что исключает неограниченную диффузию по действию.

В работе [8] впервые было показано, что среди инвариантных кривых с рациональными числами вращения присутствуют также неразрушенные сепаратрисы целых и дробных нелинейных резонансов. Особенно важным и неожиданным оказался тот факт, что система при этом отнюдь не становится интегрируемой и сепаратрисы сохраняются и запирают глобальную диффузию в условиях сильного локального хаоса. Этот пример Булита опровергает чрезвычайно распространенное представление о том, что поскольку период движения по сепаратрисам бесконечен и взаимодействие резонансов здесь всегда существенно, то возмущение в первую очередь разрушает именно сепаратрисы резонансов и порождает на их месте хаотические слои [1,2,3].

По непонятным причинам эта важная и интересная работа Булита не получила в свое время широкой известности и значительно позже для той же самой модели СКЛО аналогичная теорема была независимо доказана Овсянниковым [10]. Он не только указал счетное множество значений параметра K, при которых в условиях локального хаоса сохраняются сепаратрисы целых резонансов, но и нашел для них явное (и очень простое) выражение. Именно сообщение Овсянникова послужило для нас толчком к интенсивному исследованию СКЛО и его модификаций, результаты которых представлены в работах [11-17]. К сожалению, теорема Овсянникова нигде не была опубликована и с разрешения автора мы поместили ее полный текст в приложениях к работам [12,13]). Замечу попутно, что в первых публикациях [11,12] на эту тему статья Булита не упоминается по той простой причине, что тогда она еще не была мне известна.

Следует подчеркнуть, что математические работы Булита и Овсянникова ограничены исследованием только самих инвариантных кривых нового типа, так как в противном случае две ветви расщепленных сепаратрис образуют не поддающиеся аналитическим исследованиям случайные траектории (это может быть сделано только в эксперименте – численном [11-17] или физическом).

Каждой инвариантной кривой в СКЛО отвечает определенное значение параметра возмущения K. В работе [11] предложено называть такие значения критическими и обозначать их символом $K_{Q,n}$, где Q означает номер резонанса ($Q = 1$ – целый, $Q \geq 2$ – дробный), а n порядковый номер этого критического числа. Например, для критических чисел целого резонанса по теореме Овсянникова имеем

$$K_{1,n} = \sin^2(\alpha_n/2), \;\; n = 1, 2, \dots, \tag{1.5}$$

где α_n есть наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{2}\sin(n\alpha/2) = \cos(\alpha/2)\,. \tag{1.6}$$

В работах [11-14] при численном отыскании критических чисел $K_{Q,n}$ использовался тот факт, что в случае кусочно–линейной силы именно для этих чисел угол пересечения ветвей сепаратрис в центральной гомоклинной точке проходит через нуль (для нечетных номеров n плавно, для четных скачком меняет знак, см. рис.1 в [12]). В литературе уже отмечался тот факт, что из всех атрибутов хаоса только этот угол может быть измерен сколь угодно точно. Надо заметить, что в общем случае обращение угла пересечения сепаратрис в нуль не является признаком их обязательного сохранения. В [17] приведен пример, когда ветви расщепившихся сепаратрис лишь касаются в гомоклинной точке, которая при этом оказывается точкой перегиба.

Множество всех критических чисел является канторовым (см. рис.2,3 в [8]) и имеются интервалы значений параметра K, где глобальная диффузия определенно имеет место (один такой интервал $0.2295 < K < 0.2500$ для $d = 1/2$ указан в [8]).

Дальнейшее изучение показало, что каждая из обнаруженных Булитом глобальных инвариантных кривых (включая нерасщепленные сепаратрисы целых и дробных резонансов), возникающая при точном значении параметра $K_{Q,n}$, на самом деле существенно искажает структуру фазовой плоскости и в некоторой конечной окрестности этого значения. Это дало основание в работе [15] предложить новый термин – виртуальная инвариантная кривая. Наличие таких виртуальных кривых приводит к совершенно новому и очень сложному типу транспортного процесса в гладкой системе – так называемой фрактальной диффузии, изучение которой только началось (см. [15,16] и раздел 6).

Выше уже отмечалась важная роль, которая в нелинейной динамике принадлежит стандартному отображению и его непрерывному варианту – гамильтониану возмущенного маятника. При разработке теории хаотического слоя маятника Чириков широко использовал введенные им интегралы Мельникова-Арнольда, которые определяют величину амплитуды отвечающего за формирование хаотического слоя сепаратрисного отображения системы во всем диапазоне частот возмушений [1].

При исследовании гладких систем с кусочно-линейной силой также оказалось очень полезным наряду с отображением (1.1) рассматривать непрерывный гамильтониан (раздел 2). Аналитические выражения интегралов Мельникова-Арнольда для этого случая впервые, насколько мне известно, были введены в работах [13,17]. Они полностью отражают весьма своеобразную динамическую специфику системы, включая наличие критических чисел и сохранение сепаратрис в условиях локального хаоса. Знание этих интегралов используется ниже для выяснения деталей формирования хаоса (раздел 3).

Полученные для непрерывной системы с кусочно–линейной силой результаты сравниваются с хорошо изученным случаем возмущенного маятника и отмечаются сходства и различия в динамическом поведении этих двух систем (разделы 4,5).

В разделе 6 дается краткий обзор результатов начатых недавно исследований по фрактальной диффузии в гладких системах.

2 Гамильтониан задачи

Наряду с отображением (1.1) рассмотрим также непрерывную систему с гамильтонианом вида

$$H(x,p,t) = H_0(x,p) + U(x,t)\,, \quad H_0(x,p) = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2\, V(x)\,, \tag{2.1}$$

и двухчастотным, в общем случае несимметричным, возмущением

$$U(x,t) = \varepsilon_1\, \cos(2\,\pi\, m_1\, x - \Omega_1\, t) + \varepsilon_2\, \cos(2\,\pi\, m_2\, x - \Omega_2\, t)\,, \tag{2.2}$$

где m_1, m_2 целые числа и ε_1, $\varepsilon_2 \ll 1$.

Оба члена в (2.2) также являются резонансами. Будем всегда полагать первую частоту положительной $\Omega_1 > 0$ и называть ее верхней гармоникой возмущения (на фазовой плоскости она находится выше основного резонанса). Второй член в (2.2) при $\Omega_2 < 0$ будем считать по аналогии нижней гармоникой.

Потенциал системы (2.1) $V(x) = 1/4 - \int f(x)\, dx$ порождается антисимметричной $f(-x) = -f(x)$ кусочно-линейной силой с периодом 1

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x/(1-d), & \text{если } 0 \le x < (1-d)/2\,, \\ (1-2\,x)/d, & \text{если } (1-d)/2 \le x \le (1+d)/2\,, \\ 2\,(x-1)/(1-d), & \text{если } (1+d) < x < 1\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

Он может быть представлен своим рядом Фурье [15]

$$V(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n\ge 1} \frac{f_n}{2\pi n^{\beta+1}} \cos(2\pi n x)\,, \quad f_n = -\frac{2}{\pi^2} \frac{\cos(n\pi)\sin(n\pi d)}{d(1-d)}\,, \tag{2.4}$$

где $\beta = 2$ есть показатель гладкости.

Формулы (2.3),(2.4) содержат параметр перекоса d, что позволяет исследовать сразу целое семейство пилообразных зависимостей [8,14]. К настоящему времени наиболее полно изучен случай СКЛО с $d = 1/2$. Отметим, что обнаруженные в [8,10-17] новые динамические эффекты и глобальные инвариантные кривые имеют место во всем открытом интервале $0 < d < 1$ значений параметра перекоса при следующем найденном в [8] условии на параметр возмущения K (1.1):

$$K \le K_B(d) = \frac{2d^2}{1+d}\,. \tag{2.5}$$

При $K > K_B$ глобальные инвариантные кривые в системе (1.1),(2.3) полностью отсутствуют.

Из формул (2.4) для особого случая разрывной пилы $d = 0$ предельным переходом получаем

$$f_n = -\frac{2}{\pi}\cos(n\pi)\,, \qquad \beta = 1\,. \tag{2.6}$$

Видно, что показатель гладкости системы β в пределе $d = 0$ на единицу меньше его значения внутри интервала и оба они меньше критической величины $\beta_{cr} = 3$. В этом случае движение оказывается эргодическим, инвариантные кривые полностью отсутствуют и глобальная диффузия происходит при любом $K > 0$. Заметим попутно, что обратный предел $d = 1$ неинтересен, поскольку движение при этом становится регулярным [14].

Характерной особенностью силы (2.3) является наличие на ее периоде двух участков: с отрицательной ("эллиптический"участок) и положительной ("гиперболический"участок) значениями производной df/dx. На границах этих участков имеет место сингулярность – разрыв первой производной.

Движение по верхней невозмущенной сепаратрисе ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$) описывается функцией безразмерного времени $\psi = 2\,\omega_0\,t$ вида

$$x_s(\psi_s) = \left\{ \begin{array}{ll} A_d\,\exp(\psi_s/\sqrt{2\,(1-d)}), & \text{если } -\infty < \psi_s < -\psi_{s,1}\,, \\ (1+\sqrt{d}\,\sin{(\psi_s/\sqrt{2\,d})})/2, & \text{если } -\psi_{s,1} \le \psi_s \le \psi_{s,1}\,, \\ 1 - A_d\,\exp(-\psi_s/\sqrt{2\,(1-d)}), & \text{если } \psi_{s,1} < \psi_s < \infty\,, \end{array} \right. \tag{2.7}$$

импульс находится дифференцированием $p_s = \dot{x} = 2\,\omega_0\,dx_s/d\psi_s$ и использованы обозначения

$$\psi_{s,1} = \sqrt{2\,d}\,\arcsin\sqrt{d}\,, \qquad A_d = \frac{(1-d)}{2}\,\exp\left(\frac{\psi_{s,1}}{\sqrt{2\,(1-d)}}\right). \tag{2.8}$$

Относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии обозначено $w = H_0/H_{0,s} - 1$ при значении гамильтониана на сепаратрисе $H_{0,s} = \omega_0^2/4$. Период движения T_0 вблизи сепаратрисы вычисляется по формуле

$$T_0(w) = 2\,T_{s,1} + \frac{1}{\omega_2}\,\ln\frac{4\,\sqrt{1-d}\,\cos(\omega_1\,T_{s,1})}{|w|}\,, \tag{2.9}$$

где

$$\omega_1 = \omega_0\,\sqrt{\frac{2}{d}}\,, \quad \omega_2 = \omega_0\,\sqrt{\frac{2}{1-d}}\,, \quad T_{s,1} = \frac{\arcsin\sqrt{d}}{\omega_1} \tag{2.10}$$

При численном определении размеров хаотического слоя используется связь относительной энергии w с периодом движения T_0, которая описывается обратной к (2.9) зависимостью

$$w(T_0) = 4\sqrt{(1-d)}\,\cos(\omega_1\,T_{s,1})\,\exp(-\omega_2\,(T_0 - 2\,T_{s,1}))\,, \qquad (2.11)$$

Вывод формул (2.7)–(2.11) можно найти в работе [17].

В следующих разделах мы будем сравнивать обстоятельства возникновения хаоса в исследуемых гладких системах со случаем хорошо изученного возмущенного маятника, гамильтониан которого запишем в виде

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2} + \cos(x) + U(x,t)\,, \qquad (2.12)$$

где частота малых колебаний принята за единицу и возмущение в общем случае определяется выражением (2.2).

3 Интеграл Мельникова-Арнольда для системы (2.1)

Возмущение, как известно, в общем случае разрушает сепаратрисы основного резонанса и образует на их месте хаотический слой, в котором следует различать три части: 1) верхняя – вращение фазы при $p > 0$, 2) средняя – колебания фазы и 3) нижняя – вращение фазы при $p < 0$. При несимметричном возмущении размеры этих частей могут сильно различаться. Заметим, что верхняя часть слоя формируется под влиянием в основном верхних резонансов, нижняя под влиянием нижних, а средняя – тех и других (см. рис.2 в [17]). Мы будем для определенности как правило исследовать верхнюю часть хаотического слоя.

Рассмотрим пока одну верхнюю гармонику в возмущении (2.2) и, следуя описанной в [1] методике, будем искать вызванное этой гармоникой изменение невозмущенной энергии H_0 за полупериод колебаний или период вращения:

$$\Delta H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \{H,\, H_0\}\, dt = -\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, \frac{\partial U}{\partial x}\, dt$$

$$= 2\,\pi\, m\, \varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, \sin(2\,\pi\, m_1\, x - \tau - \tau_0)\, dt \,= 2\,\pi\, m_1\, \varepsilon_1\, \sin\tau_0\, W_{MA}\,,$$

где $\{\,,\}$ скобка Пуассона, $\tau = \Omega_1 t$ и W_{MA} интеграл Мельникова-Арнольда

$$W_{MA} = -\int_{-\infty}^{\infty} p_s(t)\, \cos[2\,\pi\, m_1\, x_s(t) - \Omega_1\, t]\, dt\,. \tag{3.1}$$

Здесь учтена только четная функция в разложении $\sin(2\,\pi\, m_1\, x - \tau - \tau_0)$ и предположено, что система движется вблизи невозмущенной сепаратрисы.

Заметим попутно, что входящий в подынтегральное выражение (3.1) множитель p_s снимает известную проблему специальной нормировки этого интеграла для подавления его осциллирующей части, поскольку при движении по невозмущенной сепаратрисе асимптотически стремится к нулю на обоих бесконечных пределах интегрирования (подробности в разделе 4.4 обзора [1]).

Амплитуда гармоники сепаратрисного отображения частоты Ω полностью определяется свойствами и поведением интеграла Мельникова-Арнольда, поскольку пропорциональна ему

$$W = \pm\,\max\,|\overline{w} - w| = \pm\frac{\Delta H_0}{H_{0,s}} = \frac{8\,\pi\, m\,\varepsilon}{\omega_0^2}\, W_{MA}\,. \tag{3.2}$$

Переходя к безразмерному времени $\psi = 2\,\omega_0\, t$ и вычисляя соотношение (3.1) вдоль невозмущенной сепаратрисы (2.7), находим, что вклад верхней гармоники возмущения в верхнюю часть хаотического слоя определяется выражением:

$$\begin{aligned} W_{MA}(\lambda_1 > 0) \;\; = \;\; & \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\psi_{s,1}} \cos\left(\frac{\psi}{\sqrt{2\,d}}\right)\, \cos\left[\pi m_1 \sqrt{d}\sin\left(\frac{\psi}{\sqrt{2\,d}}\right) - \lambda_1\psi\right] d\psi \\ & - A_d\sqrt{\frac{2}{1-d}}\,\int_{\psi_{s,1}}^{\infty} \exp\left(\frac{-\psi}{\sqrt{2\,(1-d)}}\right) \\ & \times\;\cos\left[2\pi m_1 A_d \exp\left(\frac{-\psi}{\sqrt{2\,(1-d)}}\right) + \lambda_1\psi\right] d\psi\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\lambda_1 = \Omega_1/2\,\omega_0$ есть параметр адиабатичности [1].

Нетрудно проверить, что для вычисления вклада нижней гармоники возмущения в верхнюю часть хаотического слоя вместо (3.3) надо использовать формулу

$$W_{MA}(\lambda_2 < 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\psi_{s,1}} \cos\left(\frac{\psi}{\sqrt{2\,d}}\right) \cos\left[\pi m_2 \sqrt{d} \sin\left(\frac{\psi}{\sqrt{2\,d}}\right) + |\lambda_2|\psi\right] d\psi$$

$$+ A_d \sqrt{\frac{2}{1-d}} \int_{\psi_{s,1}}^{\infty} \exp\left(\frac{-\psi}{\sqrt{2\,(1-d)}}\right)$$

$$\times \cos\left[2\pi m_2 A_d \exp\left(\frac{-\psi}{\sqrt{2\,(1-d)}}\right) - |\lambda_2|\psi\right] d\psi\,, \qquad (3.4)$$

где $\lambda_2 = \Omega_2/2\,\omega_0$.

Полная амплитуда сепаратрисного отображения для верхней части слоя определяется с помощью (3.2) как сумма вкладов в эту часть слоя от всех входящих в возмущение гармоник. В следующих двух разделах мы используем полученные здесь соотношения для анализа поведения системы (2.1) с симметричным и несимметричным возмущением (2.2).

4 Симметричное возмущение

Выберем параметры возмущения (2.2) так, чтобы сделать его симметричным

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon\,, \quad m_1 = m_2 = m\,, \quad \Omega_1 = -\Omega_2 = \Omega\,. \qquad (4.1)$$

Вначале напомню особенности образования хаоса в зависимости от частоты симметричного возмущения в случае маятника (2.12). Весь диапазон частот условно разбивается на участки низких частот, средних или умеренных частот и высокочастотный.

Исследования Чирикова, выполненные в [1], показали, что в высокочастотном пределе $\Omega \to \infty$ амплитуда W сепаратрисного отображения и энергетический размер хаотического слоя с ростом частоты убывают экспоненциально и что все три части слоя имеют при этом одинаковую ширину

$$w_{tp} = |w_{md}| = w_{bt} = \lambda\,W\,, \qquad (4.2)$$

где для маятника (2.12) $\lambda \equiv \Omega$ и $w = p^2/2 + \cos x - 1$ – относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии.

В недавней работе [18] также для симметричного возмущения маятника рассматривалась низкочастотная асимптотика $\Omega \to 0$ и было найдено, что в этом случае амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, а ширина слоя вообще от нее не зависит.

Обе эти асимптотики $\Omega \gg 1$ и $\Omega \ll 1$ устроены относительно просто и наиболее трудной для анализа является область средних частот, где отсутствует какой-либо малый (или большой) параметр адиабатичности. Основная трудность здесь состоит в том, что размер хаотического слоя в этой области оказывается разрывной функцией амплитуды сепаратрисного отображения W (см. рис.1 в [20]). Такая структура в рамках современной динамики объясняется тем, что с ростом W происходит последовательное разрушение инвариантных кривых с иррациональными числами вращения. Если такая кривая является границей между основным хаотическим слоем и ближайшим к нему резонансом сепаратрисного отбражения, то при ее разрушении происходит слияние этих объектов и размер слоя прирастает на конечную величину – фазовый объем присоединившегося резонанса.

Весьма полезными здесь оказались так называемые резонансные инварианты, которые неплохо передают топологию отдельных резонансов. Техника построения и примеры использования таких инвариантов первых трех порядков, соответствующих резонансам 1:1, 1:2 и 1:3, предложены для стандартного отображения Чирикова в работе [19] и для одночастотного сепаратрисного отображения в [20]. В настоящей статье мы не будем затрагивать область средних частот, которая требует специального рассмотрения.

Вернемся вновь к гладкой системе и выясним особенности образования хаоса при низких и высоких частотах. Суммируя вклады от обеих гармоник, получаем выражение результирующего интеграла Мельникова-Арнольда для верхней части слоя

$$W_{MA}(\lambda) = \sqrt{2}\int_0^{\psi_{s,1}} \cos\left(\frac{\psi}{\sqrt{2\,d}}\right) \sin\left[\pi\, m \sqrt{d}\, \sin\left(\frac{\psi}{\sqrt{2\,d}}\right)\right] \sin\lambda\,\psi\, d\psi$$

$$+ 2\,A_d \sqrt{\frac{2}{1-d}} \int_{\psi_{s,1}}^{\infty} \exp\left(\frac{-\psi}{\sqrt{2\,(1-d)}}\right)$$

$$\times \sin\left[2\,\pi\, m\, A_d\, \exp\left(\frac{-\psi}{\sqrt{2\,(1-d)}}\right)\right] \sin\lambda\,\psi\, d\psi\,, \qquad (4.3)$$

где $\lambda = \Omega/2\,\omega_0$. Первое слагаемое в этой формуле описывает вклад от "эллиптического"участка силы (2.3), второе – от остальной части.

Начнем со случая $\lambda \to 0$. Выполним в обеих частях (4.3) замену $\sin\lambda\,\psi \to \lambda\,\psi$, вынесем λ за знак интеграла и найдем, что в низкочастотном пределе интеграл Мельникова-Арнольда (а значит и амплитуда сепаратрисного отображения W) растет линейно с частотой

$$W \sim W_{MA} \sim \lambda \,. \tag{4.4}$$

Подчеркнем, что учет бесконечных пределов интегрирования в (4.3) ничего не меняет, поскольку, как отмечено выше, вклад "хвостов"этого интервала подавлен асимптотически стремящейся к нулю величиной импульса на невозмущенной сепаратрисе.

В работе [18] показано, что если амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, то ширина хаотического слоя от нее не зависит. Рис.1, построенный для симметричной системы (2.1), (2.2) с параметрами $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01$, подтверждает этот факт и мы убеждаемся, что в низкочастотном пределе система с кусочно-линейной силой и маятник ведут себя качественно одинаково.

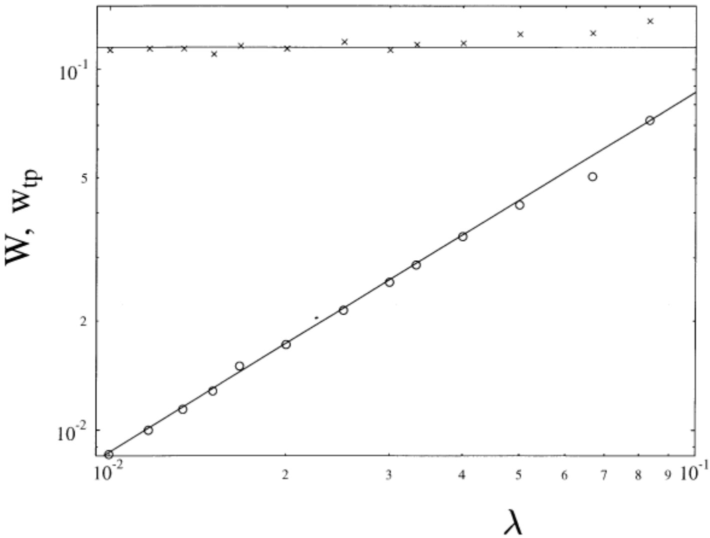

Рис. 1: Низкочастотная асимптотика $\Omega \to 0$ системы (2.1) при симметричном возмущении. Кружки - полученные численно амплитуды сепаратрисного отображения W. Кресты - размер верхней части хаотического слоя w_{tp}, найденный с помощью итерациий сепаратрисного отображения. Сплошная наклонная прямая есть интеграл Мельникова-Арнольда, построенный по формуле (4.3) и умноженный на подгоночный множитель 0.75.

Любопытной особенностью системы (2.1) является то, что ее сепаратрисное отображение при $\lambda \ll 1$ содержит две гармоники – с одинарной и двойной частотой и близкими амплитудами. В области средних частот вторая гармоника исчезает и сепаратрисное отображение становится одночастотным. Напомним, что у маятника все наоборот: двойная частота имеет место только в области средних частот и исчезает при подходе к обоим всимптотическим участкам $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$ [21].

Перейдем к анализу случая высокой частоты $\Omega \to \infty$, где картина резко и качественно меняется. В этом пределе оба слагаемых в (4.3) оказываются колебательными и знакопеременными, их колебания находятся почти в противофазе. Результирующая функция $W_{MA}(\lambda)$ также является знакопеременной и колебательной (см. ниже рис.2).

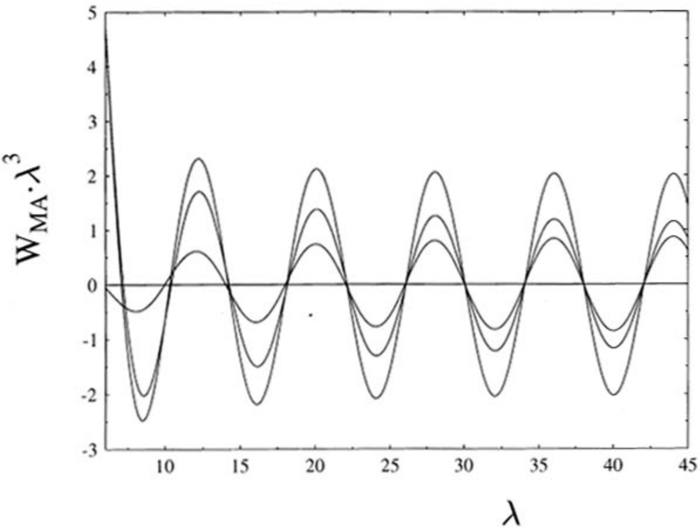

Рис. 2: Высокочастотная асимптотика $\Omega \to \infty$ системы (2.1) при симметричном возмущении. Внешняя кривая описывает совместное действие верхней и нижней гармоник возмущения, средняя - одной верхней и внутренняя одной нижней гармоники.

В работе [17] выполнены некоторые асимптотические ($\lambda \to \infty$) оценки интегралов Мельникова-Арнольда (3.3), (3.4), которые позволяют сделать следуюшие выводы.

Эти интегралы при $\lambda \gg 1$ оказываются периодическими по λ функциями

$$W_{MA}(\lambda) \approx (-1)^m \, \frac{|\lambda|^{-3}}{4\,d} \sqrt{\frac{1-d}{2}} \left[1 \pm \pi \, |\lambda|^{-1} \sqrt{\frac{1-d}{2}} \right] \sin\left(\pi \, m \, d \mp |\lambda| \, \psi_{s,1}\right), \tag{4.6}$$

(верхние знаки отвечают верхней гармонике) с периодом

$$T_\lambda = \frac{2\,\pi}{\psi_{s,1}} = \frac{\pi}{\arcsin\sqrt{d}} \sqrt{\frac{2}{d}}, \tag{4.7}$$

На рис.2 построены зависимости приведенного интеграла Мельникова-Арнольда $W^*_{MA} = W_{MA} \cdot \lambda^3$ для симметричной пилы $d = 1/2$. При значениях $d \neq 1/2$ характер этих зависимостей остается таким же, но гармоники сдвигаются по фазе. Видно, что формулы (4.6) качественно правильно передают характер этих зависимостей, хотя и нуждаются в числовых поправках.

Выполненное в [13] итерирование сепаратрисного отображения для полученных через интеграл Мельникова-Арнольда амплитуд показало, что найденная Чириковым связь (4.2) между шириной хаотического слоя и амплитудой сепаратрисного отображения W неплохо выполняется и для гладкой системы

$$w_{tp} \approx \lambda \, |W| \,, \tag{4.8}$$

причем даже в окрестности нулевых W. При $\lambda = \Omega/2\omega_0 > 10$, например, имеет место неравенство $0.94 \leq w_{tp}/\lambda \, |W| \leq 1.3$

Полученные выше для непрерывной гладкой системы (2.1) результаты можно прямо связать с отображением (1.1) [13]. Будем называть критическими те значения $\lambda_{1,n}$, $n = 1, 2, ..$, при которых интеграл Мельникова-Арнольда проходит через нуль $W_{MA}(\lambda_{1,n}) = 0$ (первый индекс относится к основному резонансу). Чтобы перевести непрерывную систему (2.1) с параметром λ в отображение (1.1) с параметром K или наоборот, надо воспользоваться соотношением

$$K = {\omega_0}^2 = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 , \quad n = 1, 2, ...$$

Последнее равенство позволяет пересчитать критические значения $\lambda_{1,n}$ непрерывной системы в критические значения параметра отображения. Обозначив найденные путем такого пересчета величины через K^*, получим

$$K^*_{1,n} = \left(\frac{\pi}{\lambda_{1,n}}\right)^2 , \quad n = 1, 2, ..$$

Эти числа следует сравнить с величинами $K_{1,n}$, вычисленными по формулам Овсянникова (1.5), (1.6). Результат такого сравнения хорошо описывается приближенной формулой

$$\frac{K_{1,n}}{K^*_{1,m}} \approx 1 + 0.676\, n^{-0.875}\,, \quad n = 1, 2, ...$$

В асимптотичеком пределе ($n \gg 1$) множества $K_{1,n}$ и $K^*_{1,n}$ совпадают, что и оправдывает применение полученных здесь результатов в отношении отображения (1.1).

Найденные при $\Omega \gg 1$ для гладкой системы периодические зависимости с убывающей по степенному закону $\sim \lambda^{-3}$ амплитудой резко отличаются от случая аналитического потенциала, где $W_{MA}(\lambda)$ всегда монотонная и экспоненциально убывающая функция λ. Более того, при одинаковых по модулю частотах вклад нижней гармоники в верхнюю часть хаотического слоя меньше вклада верхней гармоники в $\exp(-\pi\,|\lambda|)$ раз [1]. В системе с кусочно-линейной силой все не так – с ростом частоты вклады в сепаратрисное отображение верхней и нижней гармоник сближаются. Столь глубокие различия двух обсуждаемых типов систем связаны, по-видимому, с существенно разным расположением сингулярностей интеграла Мельникова-Арнольда: для гладкого потенциала они находятся на действительной оси времени, а для маятника в комплексной плоскости.

5 Несимметричное возмущение

Несимметричное возмущение (2.2) с высокими частотами Ω_1, $|\Omega_2| \gg 1$, насколько мне известно, впервые было рассмотрено в работах [22,23] на примере гамильтониана маятника (2.12). Именно в этом случае в возмущении на комбинациях первичных (явно входящих в гамильтониан) частот возникают вторичные гармоники порядка $\sim \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$

$$\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2\,, \qquad \Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1\,, \tag{5.1}$$

которые при $\varepsilon_1\,, \varepsilon_2 \ll 1$ оказываются много слабее первичных.

Уже первые численные эксперименты с этой системой позволили обнаружить тот удивительный на первый взгляд факт, что именно эти весьма слабые вторичные гармоники возмущения при определенных условиях полностью определяют амплитуду сепаратрисного отображения и размер хаотического слоя.

В работе [23] дан пример такой системы с параметрами $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.075$, $\Omega_1 = 13$, $\Omega_2 = -10$, причем образующаяся на сумме частот $\Delta\Omega_+ = 3$ вторичная гармоника имела в возмущении амплитуду $\approx 4.5 \cdot 10^{-5}$, что в ~ 1700 раз меньше амплитуд первичных гармоник. Несмотря на это, ее вклад в амплитуду отвечающего за образование хаоса сепаратрисного отображения верхней части слоя превысил суммарный вклад от первичных гармоник почти в 400 раз. Размеры и спектральный состав отдельных частей слоя оказались при этом существенно различными. Все это есть следствие упоминавшейся выше экспоненциальной зависимости ширины хаотического слоя маятника от частоты при $\Omega \gg 1$, что и позволяет очень слабым, но низкочастотным вторичным гармоникам решающим образом влиять на образование хаоса.

Для гладкой системы такая же картина имеет место в отношении гармоник на сумме частот, в то время как на разности эффект оказывается заметно слабее, чем для маятника [17].

Амплитуды вторичных гармоник возмущения заранее неизвестны и их необходимо найти. Строгая теория здесь пока отсутствует, однако общий подход к проблеме и способ получения приближенных аналитических соотношений был предложен в работе [22]. Следуя этой работе (см. также [17]), необходимо сделать в (2.1), (2.2) замену переменных, введя вместо координаты $x(t)$ и импульса $p(t)$ их отклонения от значений на невозмущенной сепаратрисе $x_s(t)$, $p_s(t)$ (2.7). Считая эти отклонения малыми и пренебрегая членами порядка выше второго, можно показать, что в возмущении появляются вторичные гармоники как на сумме частот

$$\varepsilon_+ \cos\left(2\,\pi\, m_+ x_s - \Delta\Omega_+ t\right), \quad \varepsilon_+ = -2\,\pi^2\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2 \left[\frac{m_2}{\Omega_1^2} + \frac{m_1}{\Omega_2^2}\right], \tag{5.2}$$

где $m_+ = m_1 + m_2$, так и на их разности

$$\varepsilon_- [\cos\left(2\,\pi\, m_- x_s - \Delta\Omega_- t\right), \quad \varepsilon_- = -2\,\pi^2\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2 \left[\frac{m_1}{\Omega_2^2} - \frac{m_2}{(\Omega_1^2}\right], \tag{5.3}$$

где $m_- = m_2 - m_1$ (при выводе последних формул предполагались выполненными неравенства $|\Omega_{1,2}| \gg 2\,\pi\, m_{1,2}\, p_{s,max}$).

Ограничимся наиболее интересным случаем суммы частот и будем рассматривать близкие по модулю первичные частоты. Возникающая при этом вторичная гармоника оказывается низкочастотной и предстоит выяснить, следует ли она зависимостям, найденным в предыдущем разделе при $\lambda \ll 1$ для первичных частот в симметричном случае.

Вначале рассмотрим систему (2.1), (2.2) с высокочастотным симметричным возмущением

$$\omega_0^2 = 0.09\,,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05\,,\ m_1 = m_2 = 1\,, \Omega_1 = 30.0\,,\ \Omega_2 = -30\,. \quad (5.4)$$

Картинка построенного численно (подробности в [22]) сепаратрисного отображения выглядит чистой синусоидой с амплитудой $W = 1.65 \cdot 10^{-4}$. Итерации этого отображения показали, что размеры всех трех частей слоя одинаковы и равны $w_{tp} = |w_{md}| = w_{bt} \approx 0.013$.

Сделаем теперь возмущение слегка несимметричным, изменив частоту нижней гармоники и породив тем самым низкочастотную вторичную гармонику на сумме частот

$$\Omega_1 = 30.0\,, \quad \Omega_2 = -29.5\,, \quad \Delta\Omega_+ = 0.5\,. \quad (5.5)$$

Результат численного построения сепаратрисного отображения для системы (2.1), (5.5) представлен на рис.3 (где t_π – моменты прохождения положения устойчивого равновесия $x = 0.5$, см. [22]). Здесь также изоб-

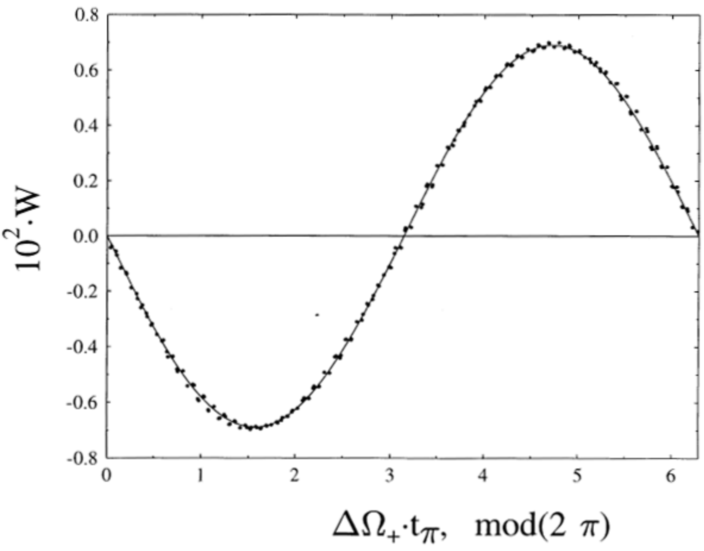

Рис. 3: Сепаратрисное отображение системы (2.1) с несимметричным возмущением (5.5). Точки - численный счет, сплошная линия есть результат подгонки наименьшими квадратами.

ражена полученная по методу наименьших квадратов синусоида, но с амплитудой $W = 6.91 \cdot 10^{-3}$ и, что самое главное, с совершенно другой частотой $\Delta\Omega_+ = 0.5$. Размер верхней части слоя также увеличился почти в сорок раз $w_{tp} \approx 0.50$. Спектральный анализ показал, что суммарный вклад первичных гармоник составил менее двух процентов. Возникает впечатление, что в возмущении нет двух высокочастотных гармоник, а есть одна низкочастотная (факт, получивший полное численное подтверждение в работе [23]).

Видно, что качественно повторяется картина, которая имеет место и для маятника. Слабые, но иизкочастотные вторичные гармоники "перехватывают инициативу"у первичных в формировании хаоса.

Дополнительные исследования показали также, что для очень низкочастотных вторичных гармоних, как и для первичных в случае симметричного возмущения, амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, а размер верхней части хаотического слоя практически от нее не зависит.

6 Фрактальная диффузия в системе (1.1), (2.3)

В этом разделе кратко излагаются основные результаты двух работ [15,16], выполненных под руководством Чирикова. В первой изучалась статистика скорости диффузии $< D(K) >$, усредненной по ансамблю траекторий со случайными начальными условиями. Во второй исследовались индивидуальные траектории при заданном значении возмущения K и в качестве характеристики использовалось интегральное распределение $F(D)$.

Вначале обсудим особый случай $d = 0$, $\beta = 1$ (см. (2.6)). Движение при этом является эргодическим, глобальная диффузия имеет место при любом $K > 0$, инвариантные кривые и критическая структура отсутствуют (на самом деле вопрос о критической структуре здесь совсем не так прост, как кажется на первый взгляд и мы вернемся к нему в конце этого раздела).

Оценки скорости диффузии для $d = 0$, построенные в предположении резонансной структуры движения с помощью критерия перекрытия резонансов, оказались неожиданно аккуратными. Так, по формуле (4.3) из [15] с поправкой $C_s = 1.2$ находим

$$D(K) \,=\, \frac{\overline{(\Delta p)_t^2}}{t} \,\approx \frac{256}{\pi^5}\, K^{5/2} \,\approx 0.57\, K^{5/2}\,, \tag{6.1}$$

где t – число итераций отображения в предположении $K \ll 1$. Последнее выражение в (6.1) есть результат интенсивного счета, выполненного в [24] и подтвержденного в [15] для $K \leq 0.1$.

Зависимость (6.1) $D(K) \propto K^{5/2}$ отличается от $D(K) \propto K^2$ (см. (6.2)), что объясняется динамическими корреляциями за время, определяемое частотой фазовых колебаний нелинейного резонанса.

В противоположном предельном случае $K \gg 1$, когда корреляциями между последовательными величинами x можно пренебречь, мы приходим к "обычному"выражению для скорости диффузии

$$D(K) \,=\, K^2 \int_0^1 f^2(x)\, dx = \frac{K^2}{3} \tag{6.2}$$

Зависимость скорости диффузии от времени можно представить в виде

$$D(K;t) \,\sim\, D_\infty(K) \,+\, \frac{B(K)}{t}\,. \tag{6.3}$$

Точка с запятой здесь означает, что процесс диффузии состоит из двух частей: собственно диффузии (по импульсу) и некоего фона $B(K)$.

Пример диффузионной кинетики представлен на рис. 1 в [16]. Наибольший интерес и удивление вызывает самое начало этого процесса – плато, которое выглядит как настоящая диффузия. Зависимость $D(K) = K^2/3$ здесь точно та же самая, что и в противоположном пределе некоррелированного движения при больших $K \gg 1$, но только для короткого времени (тем короче, чем сильнее возмущение) (?!) Непонятна также причина постоянства скорости диффузии на всем протяжении плато.

В настоящее время у нас нет объяснения столь странного эффекта.

В [16] найдено приближенное, но вместе с тем простое и аккуратное описание процесса диффузии во времени, согласующееся с качественной картиной (6.3)

$$D(t) \,\approx\, \frac{D_0 \,+\, \tau\, D_\infty}{\left(1 \,+\, \tau^\gamma\right)^{1/\gamma}}\,, \qquad \tau \,=\, c\Lambda\, t \tag{6.4}$$

Здесь τ безразмерное время, $c \approx 1$ и $\gamma \approx 4$ подгоночные параметры. На рис.1 в [16] зависимости (6.4) представлены сплошными линиями в безразмерных переменных τ и $D^* \,=\, D/D_\infty$ где D_∞ асимптотическое ("настоящее") значение скорости диффузии. Для различных величин K эти кривые оказываются подобны и сходятся при $\tau \to \infty$.

Нас в основном интересовали распределения D при $D \to 0$ ("хвосты"). Как известно, форма хвоста является важной характеристикой критической структуры движения. Первое наблюдение такой структуры в присутствии виртуальных инвариантных кривых было сделано в [15].

Так как статистика далеких хвостов всегда бедная, то был использован эффективный вариант интегрального распределения с "плавающей"шириной ячейки (см. [25] и ссылки там). Этот метод называется также "упорядоченная статистика редких событий"(rank-ordering statistics of extreme events).

$$F(D) = \int_0^D f(D')dD' \approx \frac{j}{J}\,. \tag{6.5}$$

События $D(j)$ необходимо выстроить в восходящем порядке $D(j+1) > D(j),\ j = 1, 2, ..., J$ и тогда интегральная вероятность приблизительно равна отношению j/J.

Примеры измеренных распределений для различных времен счета приведены на рис.2 в [16]. Если распределение по импульсу p является гауссовым, то распределение D

$$f(D) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\, D^{\lambda-1}\, \mathrm{e}^{-\alpha D} \tag{6.6}$$

оказывается Г-распределением Пирсона с параметрами $\alpha = \lambda = 1/2$. С учетом этого можно найти

$$f(D^*) = \frac{(D^*)^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-D^*/2}}{\sqrt{2\pi}} \quad \to \quad F(D^*) = \int_0^{D^*} f(D')\, dD' \to \sqrt{\frac{2}{\pi}\, D^*}\,, \tag{6.7}$$

где последнее выражение дает асимптотическую величину $D^* \to 0$, которая находится в очень хорошем согласии с эмпирическими данными вплоть до значений $D^* = 0.1$ (см. рис.2 в [16]).

Перейдем к обсуждению неэргодического случая $d > 0$, $\beta = 2$. Наиболее важной чертой движения при этом является, как отмечалось, наличие разделенного на регулярную и хаотическую компоненты фазового пространства. При построении диффузионной статистики влияние регулярной компоненты надо исключить. Стандартным приемом здесь является вычисление для каждой траектории показателя Ляпунова Λ, который определяет скорость локальной экспоненциальной неустойчивости движения [1,2,3]. Текущее значение этого показателя определялось соотношением

$$\Lambda(t) = \frac{< \ln \rho(t) >}{t}, \tag{6.9}$$

где угловые скобки означают усреднение по всем траекториям. Заметим, что экспериментальный показатель Ляпунова $\Lambda(t)$, в отличие от теоретического, всегда зависит от времени.

На рис.3 в [16] приведены распределения $F(\Lambda)$ для $K = 0.45$ и $d = 1/2$, где наиболее интересной оказывается средняя область (она представлена относительно малым отрезком $\Delta F \approx 0.06$ правее $\Lambda \approx 0.03$), распределение в которой не зависит от времени движения и которая характеризует истинную критическую структуру.

Критические структуры всегда имеются при неэргодическом движении с его границами хаоса и являются частным и весьма важным случаем инвариантных кривых. Напомним, что имеется несколько различных типов таких структур. Первый - локальная инвариантная кривая (ЛИК), которая окружает любую регулярную область, не препятствует глобальной диффузии (ГД) и оказывается грубой (сохраняется при малых изменениях параметров K и d).

Более интересен второй тип – глобальные инвариантные кривые (ГИК), которые пересекают фазовый цилиндр и полностью блокируют ГД. Они не являются грубыми и существуют только при строго определенных критических значениях $K = K_{Q,n}$ (см. раздел 1). Отметим, что хотя множество значений $K = K_{Q,n}$ бесконечно, вероятность случайного попадания на него равна нулю.

Оказалось, что эффект присутствия ГИК при $K = K_{Q,n}$ сохраняется и в некоторой области вокруг $K_{Q,n}$! Мы назвали такие ГИК виртуальными инвариантными кривыми (ВИК). Заметим, что ВИК, в отличие от ГИК, являются грубыми. ЛИК и ГИК создают критическую структуру движения со степенными критическими показателями.

На рис.4 в [16] даны три распределения $F(D^*)$ нормализованной скорости диффузии $D^* = D/D_{norm}$, где D_{norm} указывается в каждом конкретном случае и возле каждого распределения указаны его критические показатели.

Штриховая кривая, которая характеризуется в асимптотике $D \to 0$ степенным законом $c_0 = 0.5$, относится к эргодическому ("невозмущенному") случаю $d = 0$ без инвариантных кривых. Важным отличием неэргодической динамики от эргодической является то, что для первой все критические показатели меньше, чем для второй $c_n < c_0$ [4].

Первое распределение (верхняя сплошная кривая) для $K = 0.45$ находится далеко в области без ВИК (последние, согласно (2.5), возникают при $K \leq K_B(d = 0.5) = 1/3$. Однако, регулярные траектории вместе с ЛИК и критической структурой присутствуют. В результате это распределение сильно отклоняется от невозмущенного распределения при $d = 0$. Такой тип критической структуры в узких слоях вокруг ЛИК изучен к настоящему времени достаточно хорошо, включая его отклонения от чисто степенной зависимости. Напомним, что при степенном законе имеет место точная масштабная инвариантность критической структуры как в пространстве, так и во времени. Колебания критического показателя вокруг среднего значения отражают хаотические флуктуации всей структуры фазовой плоскости вблизи границы хаоса при переходе от одного масштаба к другому [4]. Все это имеет место для обсуждаемого распределения со средним значением критического показателя $c_1 = 0.3$ и отклонениями от него $\sim (c_1' - c_1) = 0.1$.

Картина качественно меняется при переходе к новому типу критической структуры, с которой мы неоднократно сталкивались и которая порождается ВИК, а не ЛИК.

Не являясь инвариантными кривыми, ВИК могут лишь имитировать ГИК на протяжении какого-то отрезка $\ln D$. ВИК, в отличие от ГИК, не блокируют ГД, а лишь подавляют ее за счет застревания траектории внутри очень сложной критической структуры. Это застревание тем сильнее (длиннее), чем меньше пространственный и/или дольше временной масштабы этой критической структуры. Для ВИК-структуры оба масштаба строго ограничены, но это ограничение тем слабее, чем выше плотность ВИК. В рассматриваемой системе плотность ВИК высока, что и обеспечивает сильное подавление ГД при любом K. Для ВИК-структуры типичны малые критические показатели (см. $c_2 = 0.09$ на рис.4), и потому вероятность подавления высока даже для короткой критической структуры. Такое медленное убывание вероятности подавления часто наблюдалось нами в численных экспериментах, но до сих пор не получило надежного объяснения.

Все это видно на рис.4 в верхней части распределения с критическим показателем $c_2 = 0.09$ и параметром $K = 0.335$ (точки). Возмущение здесь лишь слегка превышает границу (2.5) $K_B(0.5) = 1/3$ и попадает в область со множеством ВИК и отсутствием ГИК. В результате зона действия критического показателя $c_2 = 0.09$ весьма коротка $\Delta \ln D^* \approx 5$ по сравнению с полным диапазоном ≈ 25. Большая часть этого распределения близка к невозмущенному, но не совпадает с ним. Означает ли это отсутствие критической структуры или ее резкое изменение при $\ln D \leq 2$ является интересным открытым вопросом.

Отметим также, что критический показатель второго распределения

$c_2 = 0.45$ оказался близок к локальному критическому показателю первого распределения $c_1 = 0.4$. Но первое распределение получено в области без ВИК и ГИК и чем оправдать такую близость – неясно.

Наконец, третье распределение на рис.4 в [16] (нижняя сплошная кривая) фактически совпадает с невозмущенным движением ($D_{norm} = D_\infty$), хотя относится к области со многими ВИК и сильно подавленной диффузией ($K = 0.3294$, см. рис.3 в [15]). Отклонения при малом D^* можно объяснить бедной статистикой. Однако совпадение этих двух распределений не только асимптотическое $F \to 0$, но полное, включая противоположный предел $F \to 1$, и это несмотря на наличие значительной регулярной компоненты движения. Все это также ждет своего объяснения.

Изучение зависимостей $D(K)$ при различных значениях параметра перекоса d обнаружило явное подобие в их поведении, что указывало на возможность их универсального описания. Нам удалось это сделать при дополнительном предположении $d \ll 1$ и построить в безразмерных переменных эмпирическую зависимость для границы основной диффузионной области (см. (5.16) в [15]). Это весьма простое соотношение неплохо описывает характерный резкий переход из хаотической области без инвариантных кривых с хорошо известной регулярной диффузией в также хаотическую область, но с плотной системой инвариантных кривых нового вида и с совершенно неизвестной очень нерегулярной фрактальной диффузией.

Вернемся вновь к нашему "простейшему"случаю с $d = 0$ и эргодическим движением (штриховая кривая на рис.4 в [16]). Можно ли здесь выявить какую-то структуру на том основании, что это распределение $F(D)$ также подчиняется степенному закону? Такой вопрос не возникает, если $K \gg 1$ и скорость диффузии подчиняется стандартной зависимости (6.2) $D \propto K^2$. Но при $K \ll 1$ эта зависимость (6.1) качественно иная $D \propto K^{5/2}$ и, что самое главное, в работе [15] она была фактически найдена из резонансной структуры движения. Для неэргодической динамики с разделенным фазовым пространством такая структура была бы четко видна.

Мы предполагаем, что и в обсуждаемом случае некоторая подобная структура существует. Но обусловлена она сильными скрытыми временными корреляциями, а не пространственной геометрией фазового пространства. Если это так, то затухание корреляций вообще может быть не степенным. В модели [26], например, такое "скрытое"затухание оказалось чисто экспоненциальным (см. там рис.6). Может ли такое качественное отличие зависеть от частных характеристик критической структуры? Этот вопрос также остается открытым.

7 Заключение

Исследование семейств гладких гамильтоновых систем с кусочно-линейной силой, начатое математической работой Булита, обнаружило новую и во многом необычную (или лучше сказать – непривычную) динамику.

Сохранение сепаратрис нелинейных резонансов при наличии хаоса и полное подавление диффузии в критических режимах, фрактальный характер этой диффузии в окрестности (по параметру возмущения) таких режимов, периодическая и степенная зависимость интегралов Мельникова-Арнольда от частоты и другие эффекты не имеют аналогов в случае аналитических гамильтонианов. Открытие этих зффектов заставляет пересмотреть некоторые, казалось бы надежно установленные, представления. К числу последних относятся утверждения о том, что возмущение всегда в первую очередь разрушает сепаратрисы резонансов с рациональными числами вращения, а инвариантные кривые с иррациональными числами вращения разрушаются в последнюю очередь.

Особенно богатый набор открытых и ждущих своего решения вопросов породило изучение диффузии в системах с кусочно-линейной силой, см. раздел 6.

Поиск ответов на все эти вопросы, также как и поиск других систем с таким же или близким динамическим поведением необходимо, по нашему мнению, продолжить.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке комплексной научной программы РАН "Математические методы в нелинейной динамике".

Список литературы

[1] B.V. Chirikov. Phys. Reports, **52**, 263 (1979).

[2] A. Lichtenberg and M. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer, Berlin, (1992).

[3] Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев. *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).

[4] B.V. Chirikov, Chaos, Solitons and Fractals, **1**, 79 (1991).

[5] J.Moser, *Stable and Random Motion in Dynamical Systems,* Princeton Unversity Press, Princeton (1973).

[6] B.V. Chirikov, E. Keil and A. Sessler. J. Stat. Phys., **3**, 307 (1971).

[7] M. Hénon, J. Wisdom. Physica D, **8**, 157 (1983).

[8] S. Bullett, Commun. Math. Phys., **107**, 241 (1986).

[9] M. Wojtkowski. Commun. Math. Phys., **80**, 453 (1981); Ergodic Theory Dyn. Syst., **2**, 525 (1982).

[10] Л.В. Овсянников. Частное сообщение, май 1999.

[11] В.В. Вечеславов. *Необычная динамика пилообразного отображения*, Препринт ИЯФ 99-69, Новосибирск, 1999.

[12] В.В. Вечеславов. *Динамика пилообразного отображения: 1. Новые численные результаты.* Препринт ИЯФ 2000-27, Новосибирск, 2000; E-print archive nlin.CD/0005048.

[13] В.В. Вечеславов. ЖЭТФ, **119**, вып.4, 853 (2001).

[14] В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков. ЖЭТФ, **120**, вып.3, 740 (2001).

[15] В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков. ЖЭТФ, **122**, вып.1, 175 (2002).

[16] B.V. Chirikov and V.V. Vecheslavov. ЖЭТФ, **122**, вып.3, 647 (2002).

[17] В.В. Вечеславов. ЖТФ, **73**, вып.9, 1 (2003).

[18] В.В. Вечеславов. ЖТФ, **74**, вып.5, 1 (2004).

[19] В.В. Вечеславов. ЖТФ, **58** вып.1, 20 (1988).

[20] В.В. Вечеславов. ЖТФ, **72** вып.2, 20 (2002).

[21] В.В. Вечеславов. ЖЭТФ, **125**, вып.2, 399 (2004).

[22] В.В. Вечеславов. ЖЭТФ, **109**, вып.6, 2208 (1996).

[23] В.В. Вечеславов. ПЖЭТФ, **63**, вып.12, 989 (1996).

[24] I. Dana, N. Murray, and I. Percival. Phys. Rev. Lett., **62**, 233 (1989).

[25] D. Sornette, L. Knopoff, Y. Kagan and C. Vanneste, J. Geophys. Research, **101**, 13883 (1996).

[26] B.V. Chirikov. *Poincaré recurrences in microtron and the global critical structure*, preprint, Budker INP 1999-7, 1999.

В.В. Вечеславов

Динамика гамильтоновых систем
с кусочно-линейной силой

V.V. Vecheslavov

Dynamics of the Hamiltonian systems
with piecewise-linear force

ИЯФ 2004-54

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев
Работа поступила 15.07.2004 г.

Сдано в набор 19.07.2004 г.
Подписано в печать 20.07.2004 г.
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.7 печ.л., 1.4 уч.-изд.л.
Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 54

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.