

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И.Будкера СО РАН

И.А. Котельников

К ТЕОРИИ ДИАМАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

ИЯФ 2003-62

НОВОСИБИРСК  
2003

## К теории диамагнитных измерений

*И.А. Котельников*<sup>1</sup>

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера  
630090 Новосибирск, СО РАН

### Аннотация

Получена формула, выражающая давление плазмы как функцию времени через напряжение на диамагнитной петле в общем случае, когда время скинирования магнитного поля через проводящие стенки вакуумной камеры не мало по сравнению с длительностью эксперимента.

### On the theory of diamagnetic measurements

*I.A. Kotelnikov*

Budker Institute for Nuclear Physics  
630090 Novosibirsk, Russia

A formula that expresses plasma pressure as a function of time through voltage on a diamagnetic loop is derived for a general case when the time for the magnetic flux to escape across conducting wall of vacuum chamber is not small as compared to the plasma confinement time.

© *Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН*

---

<sup>1</sup>E-mail: i.a.kotelnikov@inp.nsk.su

---

1. Для измерения газокINETического давления плазмы, находящейся в магнитном поле, широко используются диамагнитные зонды [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. В простейшем случае диамагнитный зонд представляет собой проводящую петлю или катушку, которая охватывает плазменный столб. Изменение давления плазмы сопровождается изменением магнитного потока через петлю, которое наводит в ней э.д.с. Результаты измерений сравнительно легко удается интерпретировать в импульсных экспериментах, когда длительность удержания плазмы столь мала, что можно пренебречь диффузией магнитного потока через стенки вакуумной камеры, считая их идеально проводящими [1, 2, 5]. С увеличением длительности удержания, характерном для современных экспериментов в области УТС, связь между напряжением на витке и давлением плазмы перестает быть локальной по времени. В общем случае она имеет следующий вид

$$\varepsilon(t) = \int_0^\infty d\tau f(\tau) \frac{d}{dt} p(t - \tau) \quad (1)$$

с характерным временем запаздывания, равным времени просачивания магнитного потока из вакуумной камеры. Для цилиндрической камеры радиуса  $R$  с толщиной стенок  $h \ll R$ , выполненной из материала с проводимостью  $\sigma$ , это время равно  $\tau_0 = 2\pi\sigma R h / c^2$ ; оно не зависит от магнитной проницаемости стенок  $\mu$  и примерно в  $R/(h\mu)$  раз меньше, чем время скинирования магнитного поля на толщину стенок. Функция отклика  $f(\tau)$  в уравнении (1) вычислена в работе [4], основанной на более ранней публикации [3], где предполагалось, что давление плазмы возникает скачком в начальный момент времени и далее остается постоянным. Для практических целей уравнение (1) требуется обратить, чтобы по измеренному напряжению на витке  $\varepsilon(t)$  восстановить зависимость давления плазмы от времени  $p(t)$ . Эта задача решена в данной заметке.

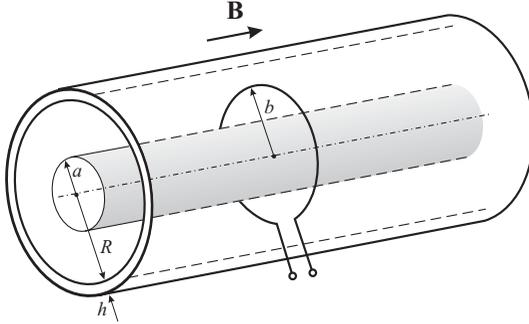


Рис. 1: Схема измерения диамагнетизма плазмы с помощью диамагнитного зонда.

2. Функции отклика  $f(\tau)$  представлена в работе [4] в виде бесконечного ряда, члены которого выражаются через функции Бесселя, причем для вычисления аргументов функций Бесселя необходимо ещё решить трансцендентное уравнение для каждого члена ряда, также содержащее функции Бесселя. Ниже мы покажем, что такое представление функции отклика избыточно и получим более простое выражение, которое обеспечивает достаточную точность при любом соотношении между  $\tau_0$  и длительностью эксперимента.

Для начала рассчитаем возмущение магнитного поля внутри цилиндрической проводящей камеры, которое возникает при изменении давления аксиально-симметричного столба плазмы бесконечной длины, показанного на Рис. 1. Предполагается, что магнитное поле направлено вдоль оси камеры и столба плазмы.

Пусть с течением времени давление плазмы формально изменяется по гармоническому закону,  $p = p_\omega(r) e^{-i\omega t}$ . Позднее мы восстановим произвольную зависимость давления от времени, выполнив обратное преобразование Фурье:

$$p(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} p_\omega(r) e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Из уравнения радиального равновесия плазмы в магнитном поле

$$\frac{B^2}{8\pi} + p = \text{const}$$

в линейном приближении по величине давления находим возмущение магнитного поля внутри проводящей камеры:

$$B_\omega(r) = B_{\omega,\text{in}} - 4\pi p_\omega(r)/B_0, \quad (3)$$

где  $B_0$  — индукция стационарного однородного поля в камере в отсутствие плазмы, а  $B_{\omega,\text{in}}$  — величина возмущения индукции магнитного поля на внутренней поверхности стенки камеры.

Возмущение магнитного поля на внешней поверхности стенки  $B_{\omega,\text{out}}$  связано с  $B_{\omega,\text{in}}$  граничным условием

$$B_{\omega,\text{out}} - B_{\omega,\text{in}} = -\frac{4\pi}{c} I, \quad (4)$$

где  $I$  — полный ток на единицу длины стенки камеры. В приближении слабого скин-эффекта глубина скин-слоя велика по сравнению с толщиной стенки,  $\delta \gg h$ , а величина плотности тока  $j_\omega = \sigma E_\omega$  постоянна по сечению стенки равно как и напряженность вихревого электрического поля  $E_\omega$ , которую можно найти из закона электромагнитной индукции:

$$E_\omega = \frac{i\omega}{cR} \int_0^R dr r B_\omega(r). \quad (5)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений, необходимо определить возмущение магнитного поля на внешней поверхности стенки камеры  $B_{\omega,\text{out}}$ . Но эта величина сколь-нибудь заметно отлична от нуля только вблизи концов столба плазмы. Поэтому мы примем, что

$$B_{\omega,\text{out}} = 0. \quad (6)$$

Такое приближение неявно использовалось в цитированных выше работах [3, 4], где поправки, вызванные влиянием концевых эффектов, не учитывались, в отличие от ряда других работ, в частности [2, 6]. Подставляя  $I = h\sigma E_\omega$  в уравнение (4), в результате

несложных вычислений находим возмущение магнитного поля на внутренней поверхности стенки проводящей камеры:

$$B_{\omega,\text{in}} = \frac{-ihR/\mu\delta^2}{1 - ihR/\mu\delta^2} \frac{a^2}{R^2} \frac{4\pi\bar{p}_\omega}{B_0}, \quad (7)$$

где  $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}$  — глубина скин-слоя, а  $\bar{p}_\omega = (1/\pi a^2) \int_0^a dr 2\pi r p_\omega(r)$  — давление плазмы, усредненное по сечению радиуса  $a$ , достаточно большого, что давление на этом радиусе уже можно считать исчезающе малым. При  $hR \ll \mu\delta^2$  величина  $B_{\omega,\text{in}}$  стремится к нулю. Это означает, что скиновые токи на соответствующих частотах в проводящей стенке камеры успевают затухнуть, не препятствуя проникновению магнитного потока. В противоположном случае,  $hR \gg \mu\delta^2$ , первый дробный множитель в правой части (7) стремится к 1. При этом обращается в нуль правая часть уравнения (5), то есть магнитный поток через внутреннее сечение проводящей камеры сохраняется. Тот же результат получился бы в случае сильного скин-эффекта, когда формально  $\delta \leq h$ . Таким образом, уравнение дает правильный результат не только в случае  $\delta \gg h$ , для которого оно было получено, но и при произвольном соотношении между глубиной скин-слоя и толщиной стенки. Единственным условием применимости уравнения (7) является малость толщины стенки по сравнению с радиусом проводящей камеры,  $h \ll R$ . Заметим, что уравнение (7) легко обобщается на случай камеры с произвольной формой сечения — достаточно заменить  $hR$  на  $2S/\oint(dl/h)$ , где  $S$  — площадь сечения камеры, а интегрирование выполняется по периметру сечения.

3. Теперь нетрудно вычислить электродвижущую силу  $\varepsilon = 2\pi b E_\alpha$ , наводимую переменным магнитным полем на измерительном витке. Для определенности будем считать, что круглый виток радиуса  $b > a$  находится внутри проводящей камеры, т. е.  $b < R$ .

Тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon_\omega &= \frac{i\omega}{c} \int_0^b dr 2\pi r B_\omega(r) \\ &= -\frac{i\omega}{c} \left[ 1 + \frac{b^2}{R^2} \frac{ihR/\mu\delta^2}{1 - ihR/\mu\delta^2} \right] \frac{4\pi^2 \bar{p}_\omega a^2}{B_0}.\end{aligned}\quad (8)$$

Дальнейшие вычисления удобно проделать в безразмерном виде. Перепишем последнее уравнение в виде

$$\epsilon_\omega = -i\omega \left[ 1 - s + \frac{s}{1 - i\omega} \right] \beta_\omega.\quad (9)$$

Оно связывает Фурье-амплитуды параметра  $\beta = 8\pi p/B_0^2$ , характеризующего давление плазмы, и электродвижущей силы  $\epsilon = 2c\tau_0\varepsilon/\pi a^2 B_0$ , обезразмеренной на удвоенную величину э.д.с., генерируемой при изменении магнитного поля от  $B_0$  до нуля за время  $\tau_0 = 2\pi\sigma hR/c^2$ . Параметр  $s = b^2/R^2$  равен отношению площади измерительного витка к площади сечения проводящей камеры. Для безразмерных частоты и времени сохранены прежние обозначения  $\omega$  и  $t$  соответственно, но теперь  $\omega$  обозначает прежнее произведение  $\omega\tau_0$ , а  $t$  на самом деле есть  $t/\tau_0$ .

Применив к обоим частям уравнения (9) обратное преобразование Фурье (2), получим

$$\epsilon(t) = [1 - s] \frac{d}{dt} \beta(t) + s \int_0^\infty d\tau e^{-\tau} \frac{d}{dt} \beta(t - \tau).\quad (10)$$

Сравнивая (10) с уравнением (1), нетрудно найти формальное выражение для функции отклика:

$$f(\tau) = [1 - s] \delta(\tau) + s e^{-\tau},$$

где  $\delta(\tau)$  — дельта-функция Дирака.

Чтобы разрешить интегродифференциальное уравнение (10) относительно функции  $\beta(t)$ , т.е. выразить  $\beta$  через  $\epsilon$ , достаточно

продифференцировать его по  $t$ . Полученное уравнение содержит только производные:

$$\frac{d\epsilon}{dt} + \epsilon = [1 - s] \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{d\beta}{dt}. \quad (11)$$

Решая его относительно функции  $\beta(t)$ , находим искомую зависимость

$$\beta(t) = \int_0^\infty d\tau \epsilon(t - \tau) + \frac{s}{1 - s} \int_0^\infty d\tau \exp\left[-\frac{\tau}{1 - s}\right] \epsilon(t - \tau). \quad (12)$$

Тот же результат можно получить, если разрешить уравнение (9) относительно  $\beta_\omega$  и затем выполнить обратное преобразование Фурье. При таком подходе следует дополнить способ вычисления интеграла по частоте  $\omega$  правилом обхода особой точки подынтегрального выражения  $\omega = 0$  на вещественной оси  $\text{Im}(\omega) = 0$ , по которой выполняется интегрирование в комплексной плоскости частоты  $\omega$  при использовании метода Фурье. Впрочем оказывается, что результат не зависит от того, обходится ли особая точка  $\omega = 0$  сверху или снизу, поскольку вычет в указанной точке равен интегралу  $\int_{-\infty}^\infty d\tau \epsilon(t - \tau)$ , который в свою очередь равен нулю, так как полное изменение магнитного потока через измерительный виток за все время импульсного эксперимента очевидным образом равно нулю.

4. Соотношение (12) является основным результатом данной заметки. Оно позволяет вычислить зависимость от времени среднего по сечению давления плазменного столба по результатам измерения параметров плазмы с помощью диамагнитного зонда. Специфический вид интегралов в правой части (12) дает основания предположить, что они могут быть вычислены аналоговым устройством. Методика эмпирического подбора параметров подобного устройства описана в работе [7]. Более высокую точность могут обеспечить устройства (или программные средства) цифровой обработки сигналов.

Можно показать, что скин-эффект не влияет на измерение тока в плазме с помощью пояса Роговского, если ток течет вдоль столба плазмы, как это имеет место в экспериментах по нагреву

плазмы пучком релятивистских электронов (см., напр. [8, 9]). Действительно, пояс Роговского изменяет азимутальную компоненту магнитного поля, создаваемую продольным током. Внутри проводящей камеры круглого сечения эта компонента магнитного поля вообще не зависит от обратного тока, который может протекать или не протекать по стенкам камеры (это зависит от условия замыкания тока на торцах установки). Однако в системах с током требует уточнения сама формула (12), поскольку ток создает парамагнитную добавку к измеренной величине э.д.с. диамагнитной петли (см., напр., [10]). Опуская детали вычислений, укажем, что для учета парамагнитного эффекта в уравнениях (8)–(12) достаточно заменить  $\beta$  на  $\beta - B_\alpha^2(a)/B_0^2$ , где  $B_\alpha(a) = 2I_b/ca$  — азимутальное поле, создаваемое током пучка  $I_b$  на поверхности плазмы.

Автор благодарит А.В. Бурдакова, указавшего на задачу, рассмотренную в данной заметке, П.А. Багрянского и Б.А. Князева, обративших внимание автора на ряд публикаций, а также Ю.А. Цидулко и А.Д. Хильченко за полезные обсуждения.

## Список литературы

- [1] Л.Л. Горелик, ЖТФ **34**(3), 496 (1964).
- [2] Л.В. Бржецко, О.С. Павличенко, О.М. Швец, Атомная энергия **20**, 52 (1965).  
L.V. Brzhechko, O.S. Pavlichenko, O.M. Shvets, Plasma Physics (Journal of Nuclear Energy Part C) **8**, 799–800 (1966).
- [3] M.A. Rothman, Plasma Physics **10**, 86–91 (1968).
- [4] F. Bottiglioni, Plasma Physics **12**, 131–135 (1970).
- [5] V.S. Mukhovatov, V.D. Shafranov, Nucl. Fusion **11**, 605–633 (1971).
- [6] Ю.В. Готт, Р.И. Соболев, в кн. *Диагностика плазмы* (Москва: Атомиздат, 1973), т. 3, с. 525–529.
- [7] J.H. Booske, W.D. Getty, R.M. Gilgenbach, Plasma Phys. Contr. Fusion **28**, 1449–1459 (1986).
- [8] M.A. Agafonov, A.V. Arzhannikov, V.T. Astrelin, *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **38**, A93-A103 (1996).
- [9] A.V. Arzhannikov *et al.*, in *Proc. 8th Int. Conf. High-Power Particle Beams, Novosibirsk, 1990*, Vol. 1, p. 14.
- [10] A.N. Aleynikov, B.N. Breizman, V.S. Cherkassky, B.A. Knyazev. Phys. Plasma **1**, 1117–1122 (1994).

*И.А. Котельников*

**К теории диамагнитных измерений**

*I.A. Kotelnikov*

**On the theory of diamagnetic measurements**

ИЯФ 2003-62

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 30.09.2003 г.

---

Сдано в набор 1.10.2003 г.

Подписано в печать 2.10.2003 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0.7 печ.л., 0.5 уч.-изд.л.

Тираж 95 экз. Бесплатно. Заказ № 62

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
роталпринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН

*Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*