

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И.Будкера СО РАН

А.Д.Букин

О КИНЕМАТИЧЕСКОЙ
РЕКОНСТРУКЦИИ СОБЫТИЙ

ИЯФ 2003-27

НОВОСИБИРСК
2003

О кинематической реконструкции событий

А.Д.Б укин

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090 Новосибирск, СО РАН

Аннотация

В работе рассматриваются несколько вариантов кинематической реконструкции событий на примере процесса $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\gamma$. Для минимизации функции правдоподобия используются программы безусловной минимизации MINUIT, VMMSOM (специально написанная программа для этой цели), а также две программы условной минимизации KINEMI и DONLP2. Проведено сравнение всех вариантов по качеству реконструкции и времени счёта.

On kinematic reconstruction of events

A.D. Bukin

Budker Institute of Nuclear Physics
630090 Novosibirsk, RF

Abstract

In the paper several variants of kinematic reconstruction of events are considered using simulated events of the process $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\gamma$. For the likelihood function minimization two programs of non-constrained minimization are used: MINUIT, VMMSOM (written particularly for this analysis), as well as two programs of constrained minimization KINEMI and DONLP2. Comparison of different variants is carried out for the quality of reconstruction and computing time.

1 Введение

Процедурой кинематической реконструкции событий называется процедура уточнения измеренных параметров частиц в событии, используя известные кинематические связи. На установках со встречными пучками известны полная энергия и импульс начальных частиц, и это даёт возможность ввести четыре уравнения связи из законов сохранения энергии-импульса. Часто кинематическая реконструкция проводится в предположении какой-то гипотезы о промежуточных нестабильных частиц. Тогда каждая нестабильная частица добавляет ещё одно уравнение связи, которое приравнивает инвариантную массу частиц от распада этой частицы известному значению массы. Процедура кинематической реконструкции позволяет для измеренных параметров существенно уточнить их значения, а для не измеренных в данном событии параметров ϵ получить оценку их значения.

Обычно проводится минимизация функции правдоподобия, равной половине суммы квадратов нормированных на точность измерения отклонений измеренных значений параметров от предполагаемых теоретических. Удвоенное значение этой функции является значением χ^2 для критерия согласия теории с экспериментом. Правда, минимальное значение χ^2 редко используется для отбраковки гипотезы по критерию согласия χ^2 , потому что распределения вероятностей для отклонения измеренных значений параметров в редких случаях близки к Гауссовому распределению, что исключает возможность использования табличных значений вероятности по критерию согласия. Однако, минимальное значение χ^2 является хорошим параметром отделения эффекта от фона.

Минимизация проводится по теоретическим значениям. В случае многих частиц численная минимизация функции в многомерном пространстве при наличии сильных корреляций становится тяжёлой технической задачей. Очевидно, что принятие ложного решения о достижении точки минимума становится вполне вероятным для любого алгоритма. Кроме того, положение осложняется возможным наличием локальных минимумов, в которых любой правильный алгоритм имеет законное право завершить работу. Так как в реальных задачах ответ неизвестен, то помочь

сделать правильное заключение в этом случае может применение альтернативной программы минимизации. В данной работе кроме широко известной программы MINUIT [1] использовалась специально написанная для этой работы программа VMMSOM. Краткое описание алгоритма минимизации в этой программе приведено в Приложении А. В реальных случаях, когда ответ неизвестен, более правильный результат минимизации тот, который соответствует меньшему значению функции.

Прежде чем заняться реконструкцией событий, в работе проводится проверка (и сравнение) программ MINUIT и VMMSOM на «абстрактных» функциях, про которые точно известно, что нет ни локальных минимумов, ни седловых точек. Однако некоторые из этих восьми функций создают большие трудности для их численной минимизации.

2 Тестовые функции

Для проверки работы программы VMMSOM и получения сравнительной характеристики относительно широко используемой программы MINUIT используем следующие функции.

1. Простая квадратичная форма (рис. 1) в двумерном пространстве:

$$F_1 = (x + y + 4)^2 + 1000(2x - y + 2)^2.$$

Минимум в точке $x = -2, y = -2$.

2. Квадратичная форма в десятимерном пространстве

$$F_2 = \sum_{i=1}^{10} i^2 \cdot \left[\alpha_i - \sum_{j=1}^{10} A_{ij} x_j \right]^2,$$

где матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

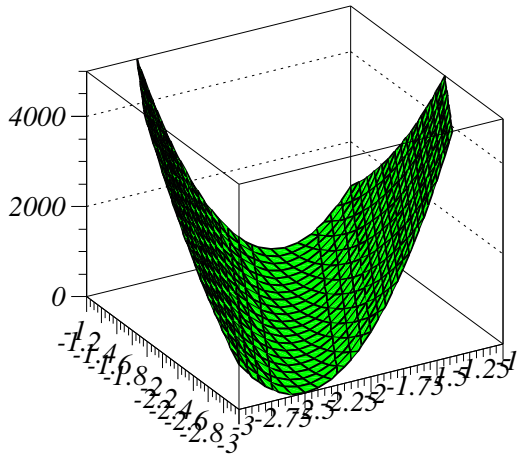


Рис. 1: Первая тестовая функция ч простая квадратичная форма.

и константы α_i равны

$$\alpha_i = \{15, 25, 35, 45, 45, 35, 25, 15, 5, -65\}.$$

Минимум достигается в точке $x_i = -5$.

3. Негладкая функция двух переменных (рис. 2)

$$F_3 = 1000 \cdot |x^2 + y^2 - 800| + |x + y + 40|.$$

Минимум достигается в точке $x = -20, y = -20$.

В то время как первые две функции являются довольно простыми, третья функция отличается тем, что её профиль представляет собой ущелье с крутыми стенками. Уравнение для точек дна ущелья нелинейное:

$$x^2 + y^2 = 800,$$

и в точках дна ущелья не определён градиент.

4. Гладкая функция двух переменных (рис. 3) со спиралевидной траекторией дна «ущелья». Введём вспомогательный вектор R в

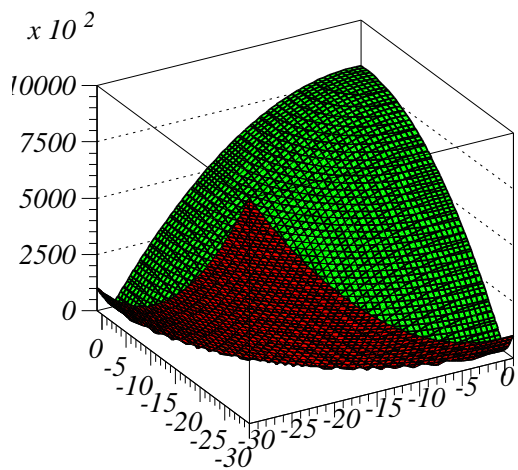


Рис. 2: Третья тестовая функция ч негладкая функция двух переменных.

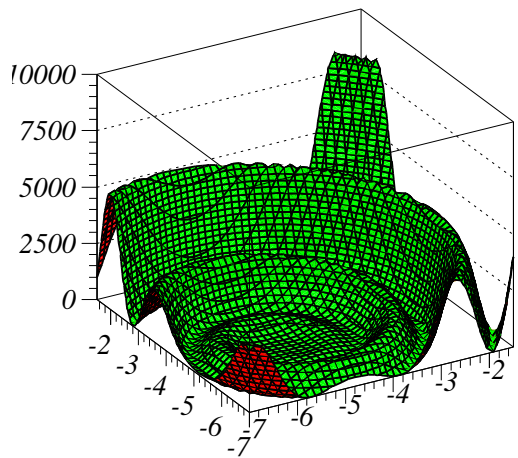


Рис. 3: Четвёртая тестовая функция ч гладкая функция двух переменных со спиралевидной траекторией «дна ущелья».

n -мерном пространстве, зависящий от параметра ρ :

$$\begin{aligned}
 R_1 &= -5 + \rho \cdot \cos 5\rho, \\
 R_2 &= -5 + \rho \cdot \sin 5\rho \cdot \cos 6\rho, \\
 R_3 &= -5 + \rho \cdot \sin 5\rho \cdot \sin 6\rho \cdot \cos 7\rho, \\
 &\dots \\
 R_{n-1} &= -5 + \rho \cdot \sin 5\rho \cdot \sin 6\rho \cdots \sin(n+2)\rho \cdot \cos(n+3)\rho, \\
 R_n &= -5 + \rho \cdot \sin 5\rho \cdot \sin 6\rho \cdots \sin(n+2)\rho \cdot \sin(n+3)\rho.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Теперь определим в двумерном пространстве ($n = 2$) минимизируемую функцию следующим образом:

$$\begin{aligned}
 F_4 &= 0.1\rho + 100(\mathbf{r} - \mathbf{R})^2 = \\
 &= 0.1\rho + 100(x + 5 - \rho \cos 5\rho)^2 + 100(y + 5 - \rho \sin 5\rho)^2,
 \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{(x + 5)^2 + (y + 5)^2}$.

Несмотря на то, что градиент для этой функции вычисляется в любой точке пространства, функция трудна для минимизации ϵ для достижения минимума из удалённой точки надо совершить несколько оборотов вокруг точки минимума по спирали, причём градиент в нижней точке ущелья очень мал.

5. Негладкая функция двух переменных со спиралевидной траекторией дна «ущелья». В всё так же, как в предыдущем пункте, только

$$F_5 = 0.1\rho + 100 \cdot \sqrt{(r - R)^2}.$$

Градиент в нижней точке «дна ущелья» не определён.

Следующие три варианта повторяют идеи предыдущих трёх, только в десятимерном пространстве.

6. Гладкая функция десяти переменных со сложной траекторией дна «ущелья». В всё так же, как в п. 4, только в десятимерном пространстве:

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i + 5)^2}, \quad F_6 = 0.1\rho + 100 \sum_{i=1}^{10} (x_i - R_i)^2.$$

7. Негладкая функция десяти переменных со сложной траекторией дна «ущелья». В всё так же, как в п. 6, только основная часть функции определяется не квадратом расстояния до ближайшей точки

дна «ущелья», а расстоянием. Из-за этого в точках «дна ущелья» градиент не определён.

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i + 5)^2}, \quad F_7 = 0.1\rho + 100\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i - R_i)^2}.$$

8. Функция десяти переменных со сложной траекторией дна «ущелья» и бесконечным градиентом на дне «ущелья». В сѐ так же, как в п. 6, только основная часть функции определяется не квадратом расстояния до ближайшей точки «ущелья», а корнем квадратным из этого расстояния. Из-за этого в точках «дна ущелья» градиент неограниченно возрастает.

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i + 5)^2}, \quad F_8 = 0.1\rho + 100\sqrt[4]{\sum_{i=1}^{10} (x_i - R_i)^2}.$$

3 Варианты кинематической реконструкции с использованием программ безусловной минимизации

Для следующих вариантов функций возьмѐм реальную проблему кинематической реконструкции событий в эксперименте на встречных электрон-позитронных пучках. Для этого используем такую упрощѐнную модель события $\phi \rightarrow \eta\gamma$, $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$, $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, зарегистрированного детектором: в столкновении e^+ и e^- при полной энергии в системе центра масс $W = 1020$ МэВ рождаются коллинеарные η -мезон (масса 550 МэВ) и фотон, затем η -мезон распадается на три пиона (возьмѐм для простоты одинаковую массу $m_\pi = 135$ МэВ для заряженных и нейтральных пионов) с равномерным распределением по фазовому объѐму. Рождѐнный нейтральный пион тоже распадается изотропно в своей системе покоя на два фотона. В итоге у нас получается две заряженные частицы и три фотона с известными углами и энергиями. Чтобы имитировать экспериментальное разрешение детектора, «испорти́м» полученные характеристики частиц, добавив Гауссовы отклонения в углы и энергии со следующими среднеквадратичными отклонениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_E}{E} \% &= \frac{4\%}{\sqrt[3]{E(\text{ГэВ})}} \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi &= \sqrt{0.6^2 + \frac{0.8^2}{E(\text{ГэВ})}} \circ \end{aligned} \right\} \text{ для фотонов,} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= 2^\circ \\ \sigma_\varphi &= 0.5^\circ \end{aligned} \right\} \text{ для заряженных пионов.}$$

Чтобы распределение вероятностей по измеренной в «эксперименте» энергии фотона больше напоминало реальную экспериментальную ситуацию, возьмём в качестве нашей функции разрешения свёртку указанного выше Гауссова распределения с распределением

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_E} \cdot \exp\left(\frac{x}{\sigma_E}\right), & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

а чтобы компенсировать смещение пика распределения в сторону меньших энергий, сместим полученное распределение на $+0.7\sigma_E$.

При этом распределение по измеренной энергии фотона отдачи получается таким, как показано на рис. 4 (истинное значение этой энергии в нашем примере всегда равно 361.7 МэВ). Гауссово распределение с заданным при моделировании параметром σ_E средним значением, равным истинной энергии фотона отдачи, изображено пунктирной линией. Сплошной линией показано распределение

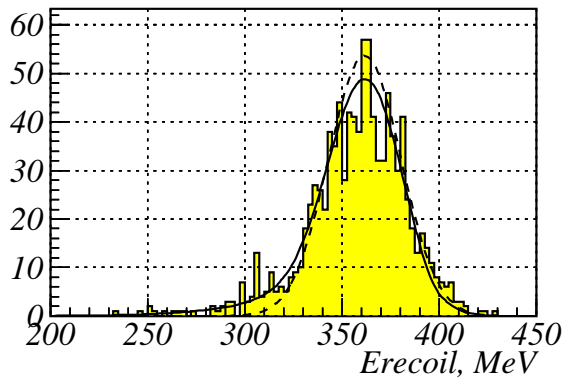


Рис. 4: Распределение событий по «экспериментально измеренной» энергии фотона отдачи.

$$F_{ex}(x) = \frac{1-Q}{\sqrt{2\pi}\sigma_E} \cdot e^{-\frac{(x-E_0)^2}{2\sigma_E^2}} + \begin{cases} 0, & x > E_0 + 2\sigma_E, \\ \frac{Q \cdot (E_0 + 2\sigma_E - x)^2}{2\sigma_E^3} \cdot e^{-\frac{x-E_0-2\sigma_E}{\sigma_E}}, & x < E_0 + 2\sigma_E, \end{cases} \quad (3)$$

где $Q = 0.276$. Это распределение немного лучше описывает «хвост» распределения ($\chi^2/n_D = 73/63$, в то время как при подгонке гауссовым распределением с фиксированным параметром σ_E получается $\chi^2/n_D = 105/61$).

Примем, что в эксперименте нет системы измерения импульса заряженных частиц (немагнитный детектор), что вполне допустимо для малочастичных событий, когда импульсы частиц можно определить процедурой кинематической реконструкции.

Для того, чтобы сделать наше моделирование ещё немного более похожим на эксперимент, введём пороговые энергии и углы: угол θ каждой частицы должен быть в интервале $20^\circ \div 160^\circ$, энергии ϵ больше 20 МэВ. Хотя эти величины и не имеют большого значения, так как это моделирование очень далеко от обычно используемого детального моделирования эксперимента. События, не удовлетворяющие приведённым «условиям запуска», будем отбрасывать.

Возьмём одно из полученных таким образом событий (табл. 1). В конечном состоянии 5 частиц и 13 измеренных характеристик. Для проведения процедуры кинематической реконструкции составляется логарифмическая функция правдоподобия

$$L = \sum_{charged} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta_i - \tilde{\theta}_i}{\sigma_{\theta_i}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_i - \tilde{\varphi}_i}{\sigma_{\varphi_i}} \right)^2 \right] + \sum_{neutral} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta_j - \tilde{\theta}_j}{\sigma_{\theta_j}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_j - \tilde{\varphi}_j}{\sigma_{\varphi_j}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{E_j - \tilde{E}_j}{\sigma_{E_j}} \right)^2 \right], \quad (4)$$

которую надо минимизировать, варьируя теоретические параметры частиц $\theta_i, \tilde{\varphi}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\varphi}_j, \tilde{E}_j$. Однако, эти параметры не являются полностью свободными ϵ надо учитывать кинематические связи. В нашем случае это законы сохранения энергии-импульса и равенство инвариантной массы двух последних фотонов массе пиона. Инвариантную массу трёх пионов не будем фиксировать, предполагая использовать её восстановленное значение для отделения эффекта от фона.

Теперь проведём кинематическую реконструкцию в нескольких вариантах. Так как с математической точки зрения задача минимизации этих функций ничем не отличается от минимизации предыдущих восьми

Таблица 1: Истинные и «экспериментально измеренные» характеристики частиц в одном из событий процесса $\phi \rightarrow \eta\gamma, \eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$.

Частица	Истинные параметры			«Экспер.» параметры		
	Импульс, МэВ/c	θ°	φ°	Импульс, МэВ/c	θ°	φ°
Фотон отдачи η -мезона	361.7	120.9	96.7	359.6	120.5	97.5
π^+	189.6	107.2	-77.9	ε	110.8	-78.6
π^-	281.2	52.6	-119.2	ε	54.0	-118.2
Первый фотон от распада π^0 -мезона	34.3	82.0	140.4	25.7	81.2	141.1
Второй фотон от распада π^0 -мезона	153.2	62.6	-14.7	148.3	62.6	-14.9

функций, то для удобства ссылок нумерацию функций здесь продолжим. Новые функции отличаются тем, что неизвестно точное минимальное значение (забегая вперёд, можно сказать, что для данного события и данной формы функции правдоподобия минимальное значение близко к 3.20). Кроме того, при наличии нелинейных связей между параметрами функция не является квадратичной формой и возможны локальные минимумы.

9. Учёт кинематических связей в виде дополнительных фиктивных слагаемых в функции правдоподобия:

$$\begin{aligned}
 F_9 = L + 10^2 \cdot & \left[\left(W - \sum_{neutral} \tilde{E}_j - \sum_{charged} \tilde{E}_i \right)^2 + \right. \\
 & + \left(\sum_{neutral} \tilde{P}_{xj} + \sum_{charged} \tilde{P}_{xi} \right)^2 + \left(\sum_{neutral} \tilde{P}_{yj} + \sum_{charged} \tilde{P}_{yi} \right)^2 + \\
 & \left. + \left(\sum_{neutral} \tilde{P}_{zj} + \sum_{charged} \tilde{P}_{zi} \right)^2 + (m(\gamma_4, \gamma_5) - 135)^2 \right]
 \end{aligned}$$

Такой вариант учёта кинематических связей очень легко реализуем,

но здесь есть проблема выбора весовых множителей в фиктивных слагаемых (в данном случае они выбраны достаточно произвольно). Чем выше значение этих множителей, тем точнее выполняются кинематические связи, но тем сложнее становится профиль функции и тем вероятнее ошибочно прекратить минимизацию вдали от истинного минимума.

Начальное значение параметров здесь удобно выбрать равным их экспериментально измеренным значениям, а для энергий заряженных пионов, где нет экспериментального значения, примем начальное значение полной энергии равным 270 МэВ.

10. Минимизируемую функцию примем равной логарифмической функции правдоподобия

$$F_{10} = L,$$

а набор параметров, от которых она зависит, выберем таким, чтобы при любом их значении кинематические связи выполнялись точно. Задача «исключения» лишних параметров неоднозначна, в этом примере попробуем выбрать 10 параметров, как отклонения от измеренных величин, что облегчит выбор начальной точки.

А именно:

- $\Delta P_{0x}, \Delta P_{0y}, \Delta P_{0z}$ \in отклонения истинных значений компонент импульса π^0 -мезона от измеренных значений,
- $\xi_1, \xi_2 \in$ параметры, определяющие направление импульса первого распадного фотона. При $\xi_1 = 0$ экспериментально измеренное направление совпадает с теоретическим.
- $\Delta P_{\gamma 1x}, \Delta P_{\gamma 1y}, \Delta P_{\gamma 1z}$ \in поправки к экспериментально измеренным компонентам импульса фотона отдачи.
- $\xi_3, \xi_4 \in$ параметры, определяющие отклонение направления теоретического импульса первого заряженного пиона от экспериментального направления. При $\xi_3 = 0$ направления совпадают.

Этот набор 10 параметров полностью определяет импульсы всех пяти конечных частиц. Более подробно процедура вычисления импульсов всех частиц описана в Приложении В.

Все частицы конечного состояния системы полностью определены. Всего получилось десять свободных переменных, что соответствует

разности полного числа параметров, которыми можно описать систему из пяти частиц, и числа связей между ними. Минимизация функции от 10 переменных — процедура гораздо более простая, чем минимизация функции 15 переменных, как в предыдущем примере (тем более, что при увеличении числа переменных ещё появляются и сильные корреляции между параметрами, ухудшающие профиль функции). Начальное состояние, задаваемое набором 10 введённых переменных с нулевыми значениями, близко к экспериментальным характеристикам частиц, что является удобной начальной точкой для численной минимизации логарифмической функции правдоподобия.

Однако, у способа реконструкции, рассматриваемого в данном примере, есть серьёзные недостатки: 1) программа реконструкции для каждого процесса должна разрабатываться заново, 2) имеются значительные «нефизические» области переменных, где по данным значениям параметров невозможно восстановить параметры всех частиц (например, импульс какой-то частицы получается отрицательный). Для борьбы с попаданием в нефизическую область самый простой способ — ввести «штрафные» функции, «вытесняющие» программу минимизации в физическую область, что сделано и в данном случае.

Начальная точка для минимизации в этом примере — пусть будут все параметры равны нулю.

11. Функцию выберем равной логарифмической функции правдоподобия, как в предыдущем примере

$$F_{11} = L,$$

но 10 параметров системы частиц выберем таким образом, чтобы последние три параметра были углами Эйлера поворота всего события, как целого. И по этим трём параметрам будем проводить минимизацию аналитически [2], в результате чего для численной минимизации останется 7 параметров. Точно аналитическую минимизацию здесь сделать невозможно, так как предлагаемый способ решения возможен, только если угловые разрешения детектора в направлении φ и θ были равны. Поэтому для заряженных частиц при аналитической минимизации будем использовать худшее из двух разрешений (σ_θ), но при вычислении функции правдоподобия использовать реальные значения разрешения.

Достоинством этого способа по сравнению с предыдущим является меньшее число параметров функции и допустимость любых значений параметров. Однако, трудно установить связи между наблюдаемыми параметрами частиц и значениями $\xi_1 \dots \xi_7$, что затрудняет выбор начальной точки минимизации (как мы увидим дальше, это чрезвычайно важно для успешной минимизации).

Можно было бы «облегчить» работу программ численной минимизации, рассчитав более близкое к экспериментальным параметрам частиц начальное состояние параметров $\xi_1 \dots \xi_7$, но это довольно трудоёмкая и неоднозначная процедура, и здесь мы примем за начальную точку минимизации $\xi_i = 0$.

Д сих пор все минимизируемые функции были дифференцируемые. Для полноты картины рассмотрим ещё два варианта обеспечения выполнения кинематических связей с помощью «штрафных» функций, как в девятом варианте, но только на этот раз «штрафные» функции будут не всюду дифференцируемые.

12.

$$F_{12} = L + \begin{cases} \left(\frac{B}{B_0}\right)^3, & B < B_0, \\ \left(\frac{B}{B_0}\right)^3 + \left(\frac{B-B_0}{B_0}\right)^{10}, & B_0 \leq B < 2B_0, \\ 2^3 + 1 + 22 \cdot \frac{B^3 - 8B_0^3}{12B_0^3}, & B \geq 2B_0, \end{cases}$$

где

$$B = \left(W - \sum_{neutral} \tilde{E}_j - \sum_{charged} \tilde{E}_i \right)^2 + \left(\sum_{neutral} \tilde{P}_{xj} + \sum_{charged} \tilde{P}_{xi} \right)^2 + \left(\sum_{neutral} \tilde{P}_{yj} + \sum_{charged} \tilde{P}_{yi} \right)^2 + \left(\sum_{neutral} \tilde{P}_{zj} + \sum_{charged} \tilde{P}_{zi} \right)^2 + (m(\gamma_4, \gamma_5) - 135)^2$$

Параметр, определяющий допустимую величину отклонения от законов сохранения энергии-импульса и массовой поверхности π^0 -мезона, примем равным $B_0 = 1$. Чем меньше этот параметр, тем будет точнее выполняться кинематические связи, но тем уже будет

«ширина ущелья», по которому надо будет двигаться в процессе минимизации.

Градиент этой функции определён везде, хотя функция и не аналитическая.

Начальные значения параметров примем равными экспериментально измеренным значениям, а энергии заряженных пионов примем равными 270 МэВ.

$$13. F_{13} = L + \begin{cases} \sqrt[4]{B}, & B < B_0, \\ \frac{B^3 - B_0^3}{12B_0^{11/4}} + \sqrt[4]{B}, & B > B_0. \end{cases}$$

Здесь величина нарушения кинематических связей B вычисляется так же, как в предыдущем варианте. Ширина допустимого коридора вокруг поверхности, определяемой кинематическими связями, является нулевой. Константа B_0 выбрана здесь равной 1 и используется для разделения областей с разной зависимостью от B . В идеале кинематические связи должны соблюдаться абсолютно точно. Но профиль функции становится крайне сложным для численной минимизации, поэтому степень нарушения кинематических связей надо будет контролировать. Градиент функции существует всюду, кроме «дна ущелья».

$$14. F_{14} = L.$$

Попробуем здесь модифицировать параметризацию события в аналогичном функции F_{11} подходе, но с тем прицелом, чтобы можно было легче выбирать оптимальную начальную точку минимизации, где углы частиц совпадают или близки к экспериментально измеренным значениям. Подробно параметризация события описана в Приложении D.

Учитывая важность выбора начальной точки для минимизации, была предпринята попытка попытка определить начальную точку так, чтобы углы всех частиц совпали с зарегистрированными значениями (это не всегда возможно). Вследствие нелинейности задачи этого достигнуть не удалось, но всё же углы получались близкими к «экспериментальным».

$$15. F_{15} = L.$$

Первые 7 параметров определим так же, как в предыдущем варианте, но минимизацию функции по углам поворота события, как целого, будем проводить на общих основаниях.

Три матрицы последовательных поворотов события определим следующим образом:

- ξ_8 определяет поворот события вокруг оси z со следующей матрицей поворота:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos \xi_8 & \sin \xi_8 & 0 \\ -\sin \xi_8 & \cos \xi_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

- ξ_9 определяет поворот вокруг оси x :

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi_9 & \sin \xi_9 \\ 0 & -\sin \xi_9 & \cos \xi_9 \end{pmatrix} \quad (6)$$

- ξ_{10} определяет ещё один поворот события вокруг оси z с матрицей поворота:

$$T_3 = \begin{pmatrix} \cos \xi_{10} & \sin \xi_{10} & 0 \\ -\sin \xi_{10} & \cos \xi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Поворот всех векторов, полученных в собственной системе координат события в соответствии со значениями первых семи параметров, производится матрицей $T_3 \cdot T_2 \cdot T_1$.

Программа BUROTAT использовалась здесь для получения начальных значений параметров ξ_8 и ξ_{10} .

4 Сравнение результатов минимизации

Начальные точки для минимизации «абстрактных» функций F_1 и F_8 выберем одинаковые ϵ — все параметры равны единице. Для этих функций известно, что минимум ϵ — единственный и минимальное значение функции равно нулю. Во всех вариантах с реконструкцией событий вопрос о наличии локальных минимумов, имеющих значение функции выше, чем

в точке глобального минимума, не изучен. Требуемую точность минимизации для программы VMMCOM всегда будем устанавливать равной $\Delta F_0 = 0.01$. Качество минимизации будем характеризовать количеством вычислений значения функции N_{cal} , необходимым для нахождения минимума, и достигнутым минимальным значением F_{min} . В табл. 2 представлены результаты сравнения программы VMMCOM с MINUIT. В программе MINUIT (версия 96.03) для нахождения минимума использовалась команда

```
MINIMIZE 1000000
```

с предварительной установкой режима

```
set strategy 2
```

В программе VMMCOM параметр требуемой точности был установлен равным $\Delta F_0 = 0.01$, ограничение на количество вычислений функции было установлено очень большим $\epsilon N_{cal} = 1000000$.

Из таблицы видно, что практически во всех вариантах программа MINUIT существенно раньше принимает решение, что минимум найден. Однако, не всегда результат лучше, чем в программе VMMCOM. Но такое может случиться только на сложных функциях. К сожалению, в задачах реконструкции функции всегда сложные, поэтому надо быть достаточно осторожным с выбором параметризации события и метода минимизации. Например, в программе MINUIT следует выбирать режим минимизации MINIMIZE, а не MIGRAD и, тем более, не SIMPLEX.

Последняя строка в таблице демонстрирует важность выбора начальной точки для минимизации. В наиболее простом для минимизации варианте с функцией F_9 выбрана очень далёкая от минимума точка. В этом случае обе программы не смогли найти минимум.

Интересно, что минимальное значение функции F_{12} получилось меньше, чем минимальное значение функции правдоподобия в других вариантах. Это возможно только из-за недостаточно точного выполнения кинематических связей ϵ можно исправить ситуацию, уменьшая параметр B_0 .

Судя по этой таблице, можно сделать вывод, что наилучший вариант реконструкции ϵ это функция F_{14} , минимизируемая программой MINUIT. Однако, по одному событию делать такое заключение неправильно. Данное событие, судя по минимальному значению функции правдоподобия, попало довольно хорошее. А в эксперименте встречаются всякие события, даже если они на самом деле являются событиями эффекта, а не фона.

Для разных событий успех в поиске глобального минимума может достигаться разными программами. Поэтому перспективы использования

этих программ минимизации для реконструкции правильнее проверять на статистике 1000 событий.

Таблица 2: Сравнение результатов минимизации тестовых функций программами MINUIT и VMMCOM. F_{min} – достигнутый минимум (истинное минимальное значение здесь для первых восьми функций равно нулю), N_{cal} – количество вычислений минимизируемой функции, потребовавшееся для достижения минимума.

Номер функции	Кол-во параметров	MINUIT		VMMCOM	
		N_{cal}	F_{min}	N_{cal}	F_{min}
1	2	35	$1.3 \cdot 10^{-17}$	72	$7.3 \cdot 10^{-26}$
2	10	235	$3.0 \cdot 10^{-14}$	660	$2.2 \cdot 10^{-18}$
3	2	148	80.00	3549	$8.6 \cdot 10^{-8}$
4	2	59	0.894	1461	$6.4 \cdot 10^{-10}$
5	2	279	4.082	1850	0.0049
6	10	1912	1.898	3182	1.898
7	10	16889	1.914	17737	1.898
8	10	13115	2.672	54324	1.901
9	15	2189	3.20	10045	3.20
10	10	3503	18.72	5221	3.20
11	7	4510	399.73	941	3.20
12	15	3744	3.07	22643	3.07
13	15	5879	3.33	77496	3.26
14	7	232	3.20	617	3.20
15	10	306	3.20	885	3.20
9 ^a	15	8632	10333.27	999001	7504.30

^aНачальная точка минимизации выбрана равной $E_i = 200$ МэВ, $\theta_i = \varphi_i = 100^\circ$ для всех частиц.

5 Сравнение результатов реконструкции на выборке из 1000 событий

Начнём с распределения по минимальному значению функции (рис. 5ч11). Обычно, это значение используют для отделения событий, соответствующих данной модели события. Если установить для параметра F_{min} границу отбора, скажем, $F_{min} < 25$, то получим эффективности регистрации, которые представлены в табл. 3.

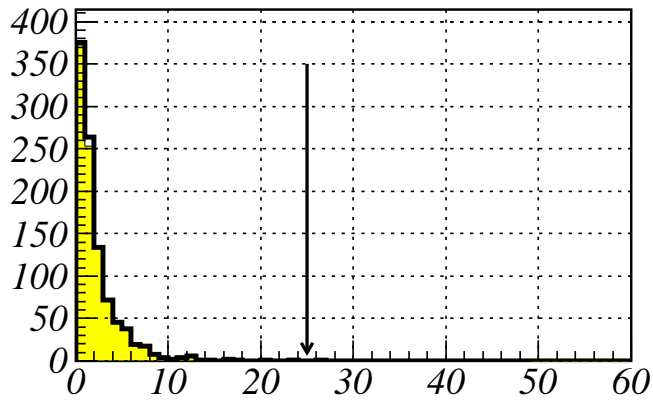


Рис. 5: Распределение событий по минимальному значению функции F_9 , достигнутое программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

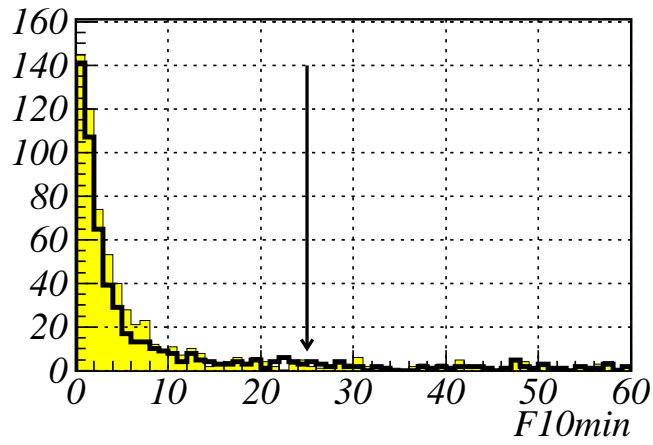


Рис. 6: Распределение событий по минимальному значению функции F_{10} , достигнутое программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

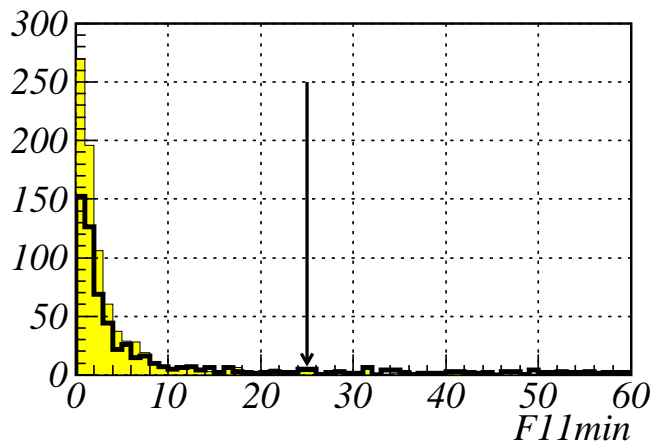


Рис. 7: Распределение событий по минимальному значению функции F_{11} , достигнутое программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

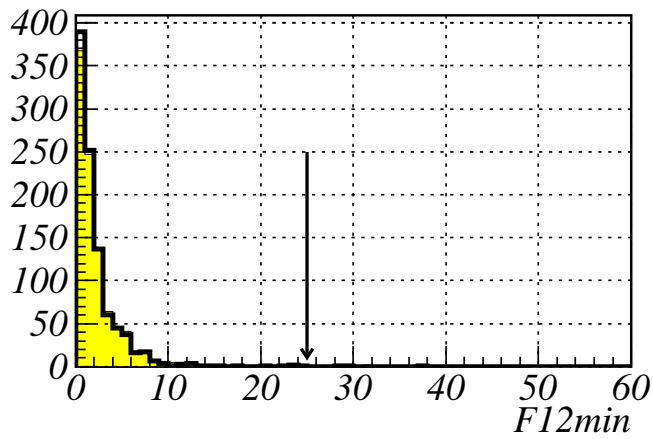


Рис. 8: Распределение событий по минимальному значению функции F_{12} , достигнутое программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

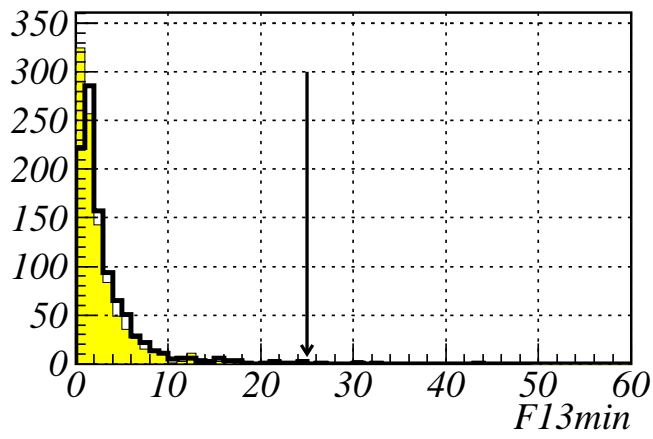


Рис. 9: Распределение событий по минимальному значению функции F_{13} , достигнутое программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

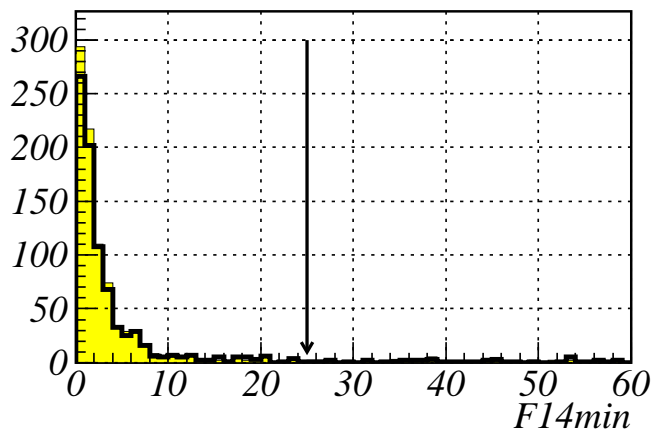


Рис. 10: Распределение событий по минимальному значению функции F_{14} , достигнутое программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

Таблица 3: Некоторые свойства программ минимизации и разных алгоритмов кинематической реконструкции, полученные на статистике 1000 событий моделирования процесса $\phi \rightarrow \eta\gamma, \eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$.

Характеристика	F_9		F_{10}		F_{11}	
	Minuit	Vmmcom	Minuit	Vmmcom	Minuit	Vmmcom
$\epsilon(F_{min} < 5), \%$	89.0	87.7	38.1	43.2	41.3	66.9
$\epsilon(F_{min} < 25), \%$	99.5	98.9	50.8	59.9	54.3	81.5
$\epsilon(F_{min} < 50), \%$	99.6	99.2	55.0	64.9	59.5	85.1
$\epsilon_{ m_{3\pi} - 550 < 50}, \%$	99.7	99.4	80.9	89.3	77.8	92.5
$m_{3\pi}^{(peak)}, \text{MeV}$	549.7 ± 0.4	549.7 ± 0.5	550.3 ± 0.8	548.8 ± 0.7	549.7 ± 0.4	550.5 ± 0.6
$m_{3\pi}^{(-)}, \text{MeV}$	546.43	546.43	541.35	541.75	535.20	544.10
$m_{3\pi}^{(+)}, \text{MeV}$	555.74	555.95	567.70	559.18	557.50	555.84
$\Delta m_{3\pi}, \text{MeV}$	9.31	9.52	26.35	17.43	22.30	11.74
\bar{N}_{cal}	4886	13280	2785	10110	2127	3857

Характеристика	F_{12}		F_{13}		F_{14}	
	Minuit	Vmmcom	Minuit	Vmmcom	Minuit	Vmmcom
$\epsilon(F_{min} < 5), \%$	88.4	86.1	82.4	85.8	67.7	72.9
$\epsilon(F_{min} < 25), \%$	98.2	97.2	99.2	98.2	81.2	85.9
$\epsilon(F_{min} < 50), \%$	98.5	97.9	99.6	99.1	84.3	89.2
$\epsilon_{ m_{3\pi} - 550 < 50}, \%$	98.9	98.9	99.5	99.1	95.1	96.4
$m_{3\pi}^{(peak)}, \text{MeV}$	549.5 ± 0.4	549.8 ± 0.6	550.4 ± 0.6	550.0 ± 0.6	550.4 ± 0.5	550.2 ± 0.5
$m_{3\pi}^{(-)}, \text{MeV}$	546.32	546.33	546.20	546.47	544.96	545.17
$m_{3\pi}^{(+)}, \text{MeV}$	555.83	556.04	556.02	556.02	556.18	555.94
$\Delta m_{3\pi}, \text{MeV}$	9.51	9.71	9.82	9.55	11.22	10.77
\bar{N}_{cal}	6376	36450	6236	76820	895	2971

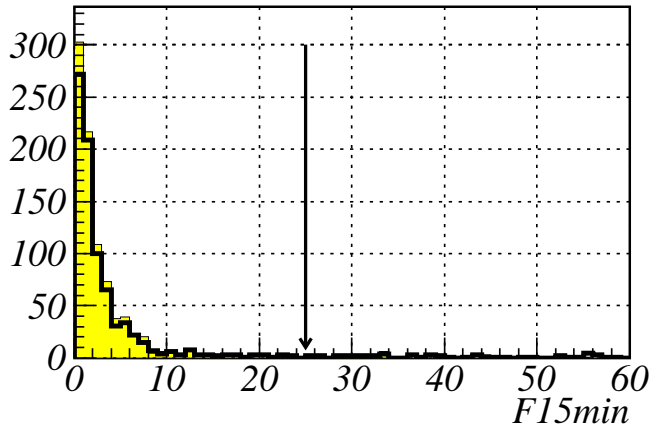


Рис. 11: Распределение событий по минимальному значению функции F_{15} , достигнутое программой VMMC (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

Без кинематической реконструкции вычислить инвариантную массу трёх пионов только по «экспериментальным» измерениям невозможно, так как импульс заряженных пионов не измеряется. Правда, можно вычислить массу отдачи фотона

$$m_{rec} = \sqrt{W^2 - 2W \cdot E_{\gamma 1}}$$

(см. рис. 12). Ширина пика между границами, отсекающими по 25% событий на краях спектра, равна

$$\Delta m_{rec} = 609.60 - 551.05 = 58.55 \text{ MeV},$$

с чем, в принципе, можно сравнивать ширину пика в распределении по $m_{3\pi}$, полученную полной кинематической реконструкцией события.

Кроме того, что можно отбирать события $\eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-3\gamma$ по логарифмической функции правдоподобия, можно ещё для такой же цели использовать восстановленную инвариантную массу трёх пионов $m_{3\pi}$ (рис. 13ч19).

Строка в таблице с $\epsilon(500 < m_{3\pi} < 600)$ показывает, какая эффективность отбора получается, если отбирать события, попадающие в симметричный интервал относительно значения массы $m_\eta = 550$ МэВ, использованного в данном моделировании. И здесь, и в реальной обработке

Таблица 3: (Продолжение) Некоторые свойства программ минимизации и разных алгоритмов кинематической реконструкции, полученные на статистике 1000 событий моделирования процесса $\phi \rightarrow \eta\gamma$, $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$.

Характеристика	F_{15}		F_9^a	
	Minuit	Vmmcom	Minuit	Vmmcom
$\epsilon_{(F_{min}<5)}, \%$	67.7	74.0	6.0	13.7
$\epsilon_{(F_{min}<25)}, \%$	80.3	87.3	8.4	15.8
$\epsilon_{(F_{min}<50)}, \%$	84.0	91.2	9.6	15.9
$\epsilon_{ m_{3\pi}-550 <50}, \%$	95.1	97.9	45.1	48.0
$m_{3\pi}^{(peak)}, \text{MeV}$	549.7 ± 0.5	549.9 ± 0.6	546.6 ± 1.4	550.1 ± 1.8
$m_{3\pi}^{(-)}, \text{MeV}$	545.05	545.03	533.63	546.93
$m_{3\pi}^{(+)}, \text{MeV}$	556.40	555.73	671.50	717.30
$\Delta m_{3\pi}, \text{MeV}$	11.35	10.70	137.87	170.37
\bar{N}_{cal}	1465	6410	15880	403500

^aНачальная точка минимизации выбрана равной $E_i = 200$ МэВ, $\theta_i = \varphi_i = 100^\circ$ для всех частиц всех событий.

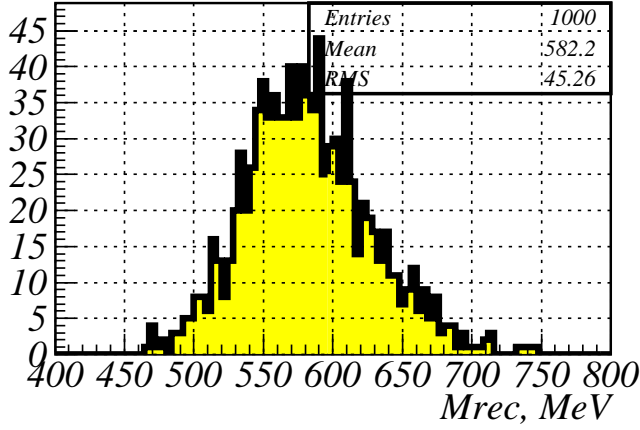


Рис. 12: Распределение событий по массе отдачи m_{rec} первого фотона.

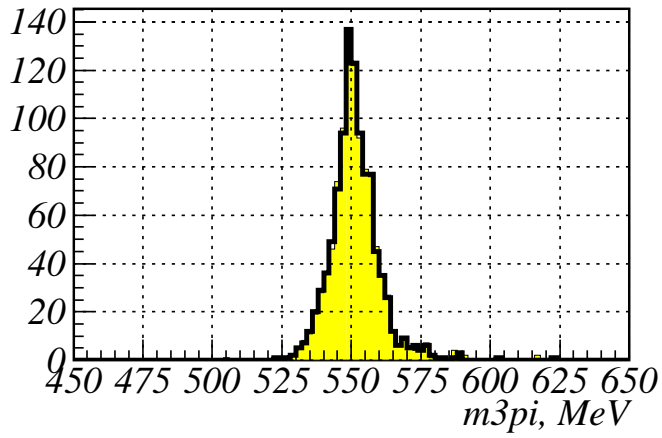


Рис. 13: Распределение событий по восстановленной массе $m_{3\pi}$ системы $\pi^+\pi^-\pi^0$. Использовалась функция F_9 , минимизируемая программой VMMSOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

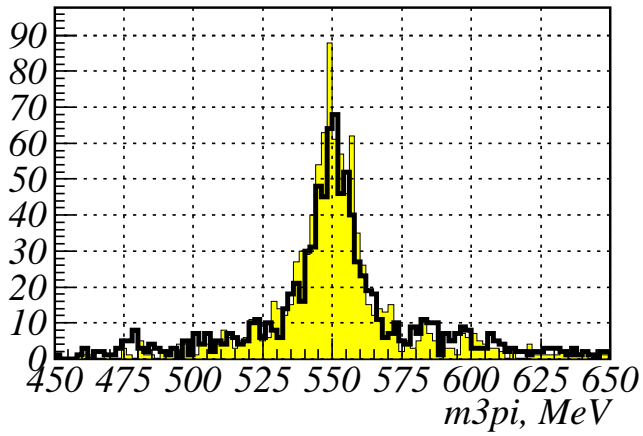


Рис. 14: Распределение событий по восстановленной массе $m_{3\pi}$ системы $\pi^+\pi^-\pi^0$. Использовалась функция F_{10} , минимизируемая программой VMMSOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

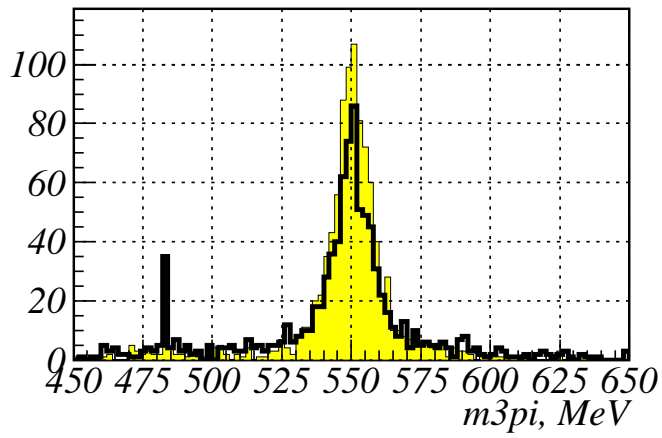


Рис. 15: Распределение событий по восстановленной массе $m_{3\pi}$ системы $\pi^+\pi^-\pi^0$. Использовалась функция F_{11} , минимизируемая программой VMMSOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

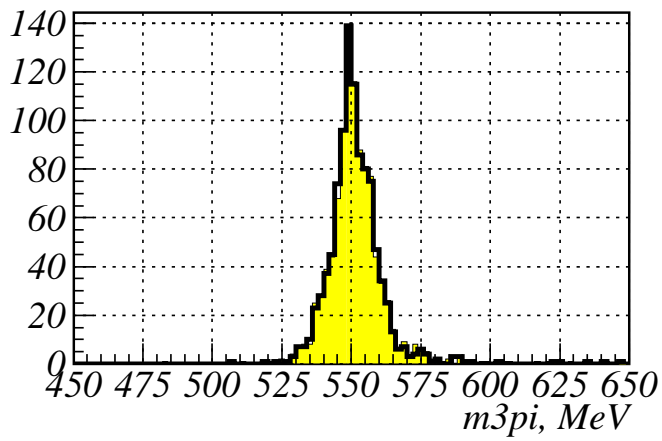


Рис. 16: Распределение событий по восстановленной массе $m_{3\pi}$ системы $\pi^+\pi^-\pi^0$. Использовалась функция F_{12} , минимизируемая программой VMMSOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

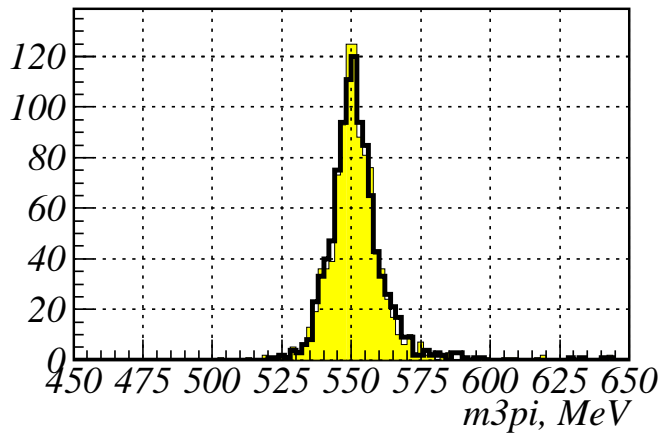


Рис. 17: Распределение событий по восстановленной массе $m_{3\pi}$ системы $\pi^+\pi^-\pi^0$. Использовалась функция F_{13} , минимизируемая программой VMMSOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

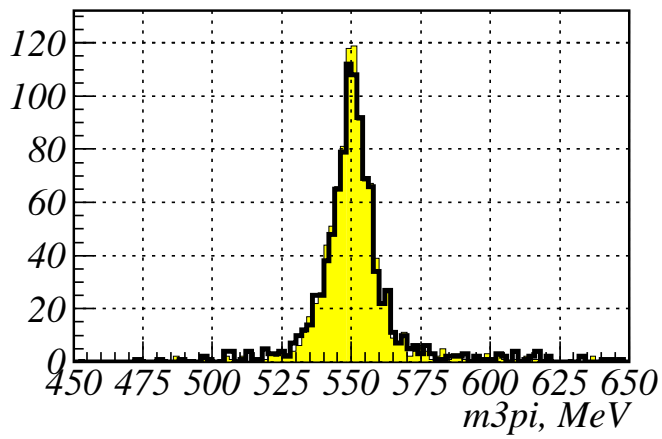


Рис. 18: Распределение событий по восстановленной массе $m_{3\pi}$ системы $\pi^+\pi^-\pi^0$. Использовалась функция F_{14} , минимизируемая программой VMMSOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

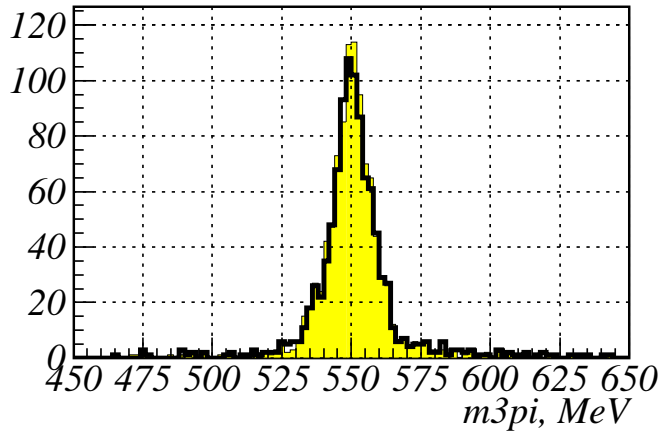


Рис. 19: Распределение событий по восстановленной массе $m_{3\pi}$ системы $\pi^+\pi^-\pi^0$. Использовалась функция F_{15} , минимизируемая программой VMMSOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

часто бывает, что пик распределения по восстановленной массе не совпадает с точным значением. Несмотря на то, что программами MINUIT и VMMSOM используются тождественные функции правдоподобия, качество минимизации вносит свой вклад и в смещение пика. Приведённое в таблице положение пика распределения $m_{3\pi}^{(peak)}$ получено подгонкой вершины распределения Гауссовым распределением. Чтобы учесть такой сдвиг при отборе событий, определим ещё две границы отбора:

1. $m_{3\pi}^{(-)}$ ϵ граница, для которой $\epsilon(m_{3\pi} < m_{3\pi}^{(-)}) = 25\%$,
2. $m_{3\pi}^{(+)}$ ϵ граница, для которой $\epsilon(m_{3\pi} > m_{3\pi}^{(+)}) = 25\%$.

Как видно из таблицы, интервал, обозначенный такими границами, получается по-разному смещённый для разных программ минимизации. Эффективность использования этих границ отбора для подавления фона можно характеризовать шириной интервала $\Delta m_{3\pi} = m_{3\pi}^{(+)} - m_{3\pi}^{(-)}$.

В приведённых результатах реконструкции есть некоторые странности. Неожиданно результаты реконструкции с функцией F_9 оказались существенно лучше, чем с функциями от меньшего числа параметров F_{10} и F_{11} . Однако, как выяснилось после изучения проблемы, это объяс-

няется большей удалённостью начальной точки от искомого минимума. Действительно, в случае с функцией F_{10} часть параметров близка к измеренным экспериментальным значениям, но зато остальные очень далеки от оптимума. В случае же функции F_{11} начальная точка для всех событий одна и та же. Легко проверяется, что если начальную точку выбирать произвольно, то во всех вариантах (и с обеими программами минимизации) результаты катастрофически ухудшаются.

Есть и ещё одна странность. В распределении по восстановленной массе на рис. 15 «вырос» нестатистический ложный пик. К тому же он не связан с качеством минимизации, так как обе программы произвели его на одном и том же месте. Напомним, что функцию F_{11} мы минимизировали не совсем правильно, предполагая при аналитической минимизации по трём угловым переменным, что разрешение по углу φ для заряженных частиц такое же плохое, как по углу θ , хотя в функции правдоподобия использовано правильное значение разрешения. Расследование этого обстоятельства показало, что влияние этого эффекта пренебрежимо.

Легко проверить, что ложный пик пропадает для «хороших» событий, у которых $F_{min} < 50$. На рис. 20 приведено распределение событий по восстановленной массе для этих событий. Для этих событий и ширина пика по массе должна быть меньше. Действительно, для распределе-

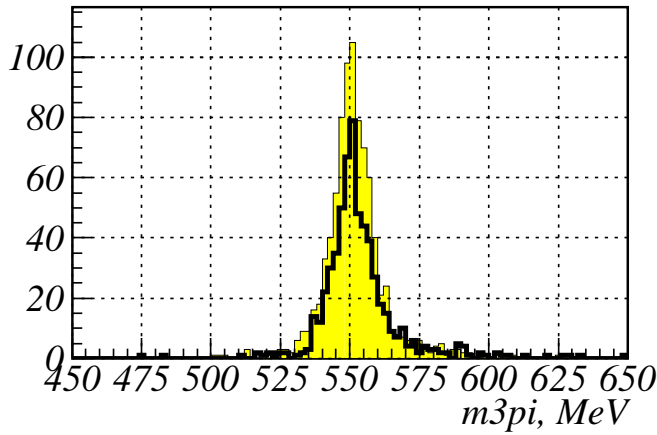


Рис. 20: Распределение событий по восстановленной массе $m_{3\pi}$ системы $\pi^+\pi^-\pi^0$. Использовалась функция F_{11} , минимизируемая программой VMCSOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT (незакрашенная гистограмма). Отобраны события с $F_{11} < 50$.

ния, полученного программой VMMCOM, границы 50%-ой части спектра равны $m_{3\pi}^{(-)} = 546.32$ и $m_{3\pi}^{(+)} = 556.15$, а ширина получается равной $\Delta m_{3\pi} = 9.83$, что много ближе к лучшему результату.

Эксперименты с различными начальными точками минимизации показали, что и положение этого пика, и интенсивность сильно зависят от начальной точки.

Успехи программы минимизации VMMCOM по сравнению с MINUIT (когда они есть) достигаются исключительно за счёт большего потребления времени процессора ЭВМ. Распределение событий по количеству вычислений минимизируемой функции представлено на рис. 21-27. Время счёта на большой статистике определяется средним числом вычислений функции, которое показано в последней строке табл. 3.

В случае специальной параметризации событий (функции F_{10} , F_{11} , F_{14} и F_{15}) кинематические связи выполняются точно. Проверка показала, что отклонение уравнений связи от нуля составляет порядка $10^{-14} \div 10^{-13}$, что объясняется ошибками округления. В то же время варианты реконструкции со штрафными функциями должны иметь заметные нарушения кинематических связей. На рис. 28-30 представлены распределения по отклонению суммарной энергии частиц после реконструкции от истинной.

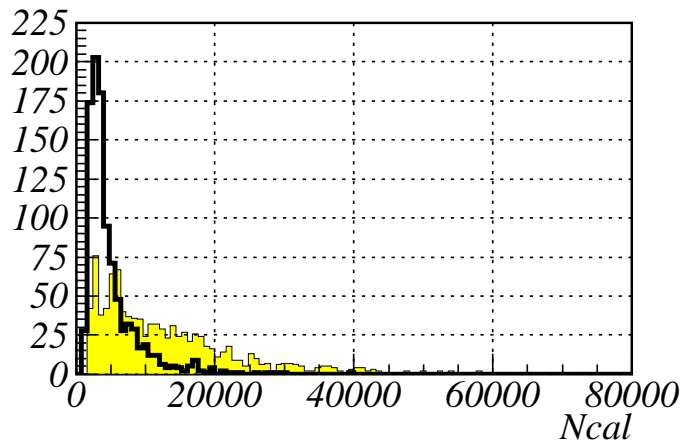


Рис. 21: Распределение событий по количеству вычислений минимизируемой функции, потребовавшееся для достижения минимума. Использовалась функция F_9 , минимизируемая программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

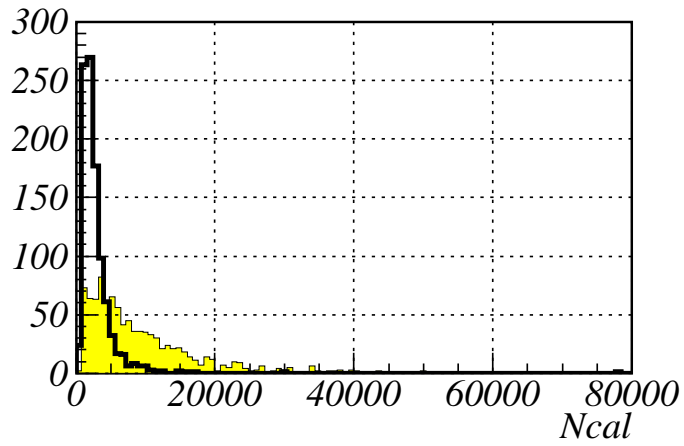


Рис. 22: Распределение событий по количеству вычислений минимизируемой функции, потребовавшееся для достижения минимума. Использовалась функция F_{10} , минимизируемая программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

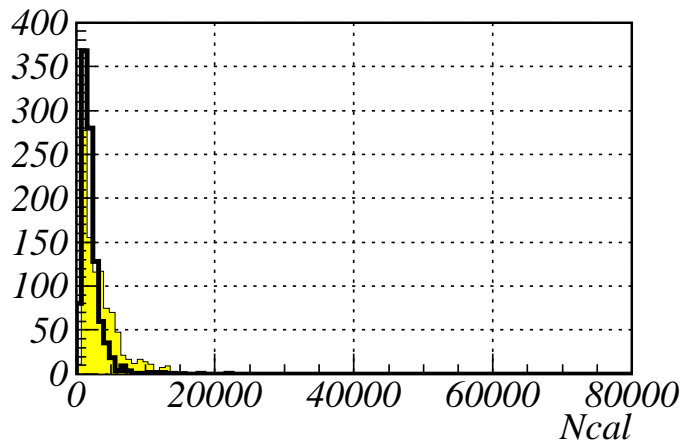


Рис. 23: Распределение событий по количеству вычислений минимизируемой функции, потребовавшееся для достижения минимума. Использовалась функция F_{11} , минимизируемая программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

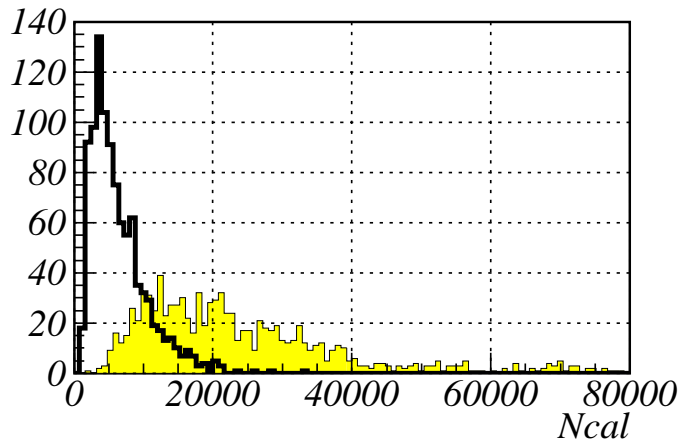


Рис. 24: Распределение событий по количеству вычислений минимизируемой функции, потребовавшееся для достижения минимума. Использовалась функция F_{12} , минимизируемая программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

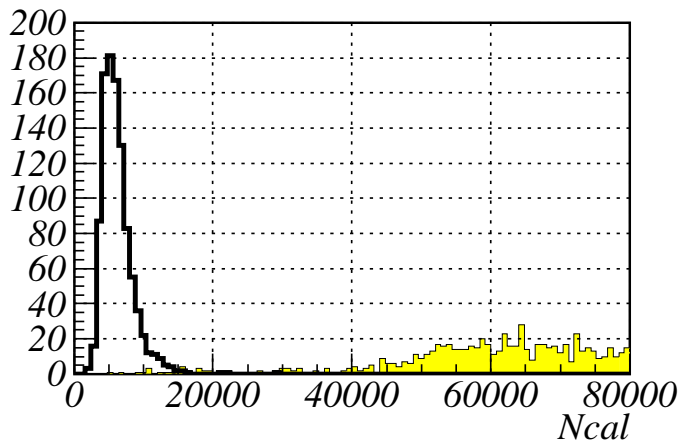


Рис. 25: Распределение событий по количеству вычислений минимизируемой функции, потребовавшееся для достижения минимума. Использовалась функция F_{13} , минимизируемая программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

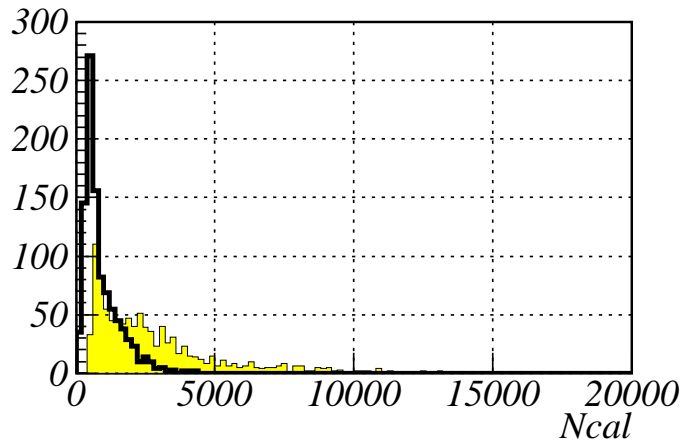


Рис. 26: Распределение событий по количеству вычислений минимизируемой функции, потребовавшееся для достижения минимума. Использовалась функция F_{14} , минимизируемая программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

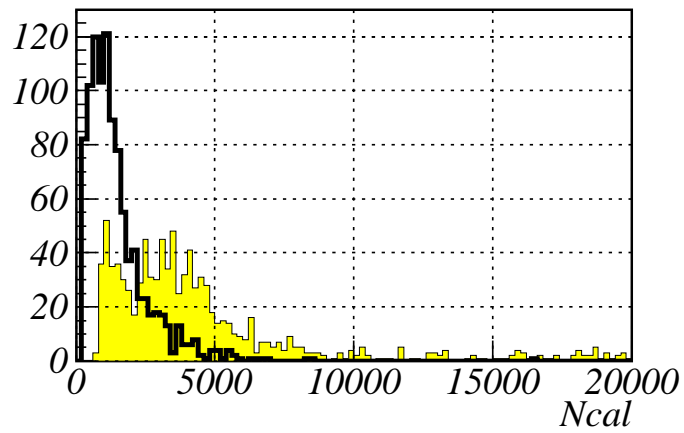


Рис. 27: Распределение событий по количеству вычислений минимизируемой функции, потребовавшееся для достижения минимума. Использовалась функция F_{15} , минимизируемая программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

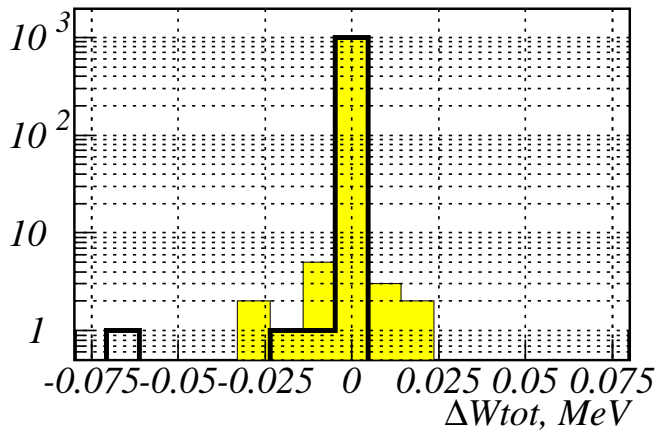


Рис. 28: Распределение событий по отклонению суммарной энергии частиц после реконструкции от истинной. Использовалась функция F_9 , минимизируемая программой VMMC (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

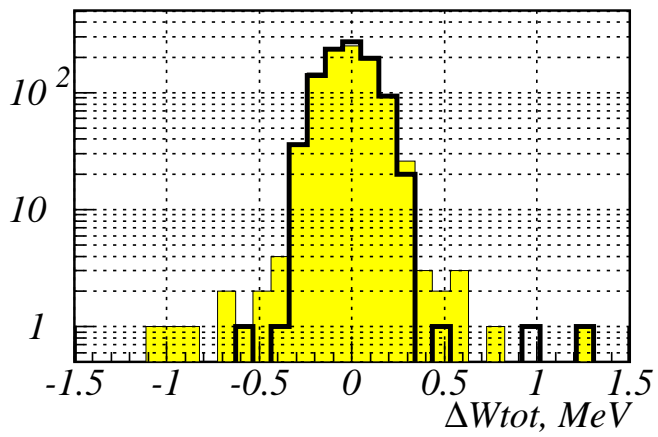


Рис. 29: Распределение событий по отклонению суммарной энергии частиц после реконструкции от истинной. Использовалась функция F_{12} , минимизируемая программой VMMC (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

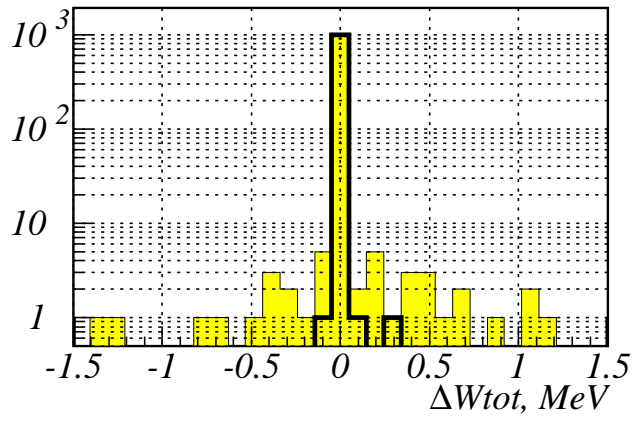


Рис. 30: Распределение событий по отклонению суммарной энергии частиц после реконструкции от истинной. Использовалась функция F_{13} , минимизируемая программой VMMCОM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

На рис. 31-33 представлены распределения по абсолютной величине суммарного импульса частиц после реконструкции.

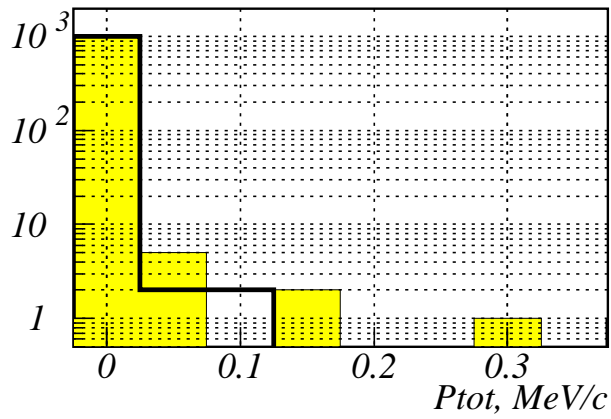


Рис. 31: Распределение событий по абсолютной величине суммарного импульса частиц после реконструкции. Использовалась функция F_9 , минимизируемая программой VMMCОM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

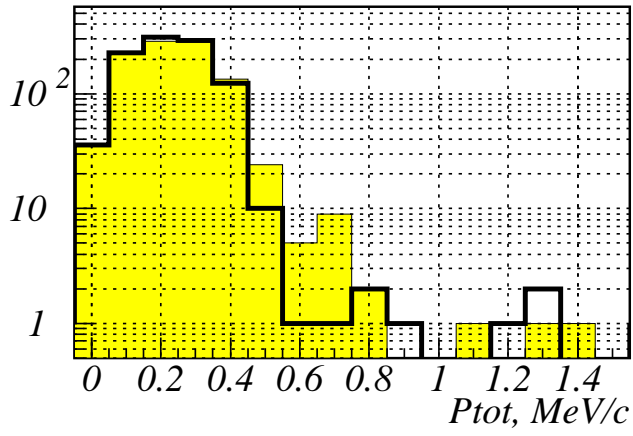


Рис. 32: Распределение событий по абсолютной величине суммарного импульса частиц после реконструкции. Использовалась функция F_{12} , минимизируемая программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

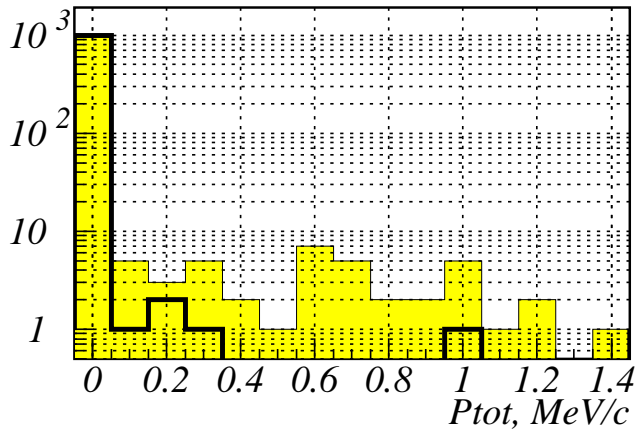


Рис. 33: Распределение событий по абсолютной величине суммарного импульса частиц после реконструкции. Использовалась функция F_{13} , минимизируемая программой VMMCOM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

На рис. 34-36 представлены распределения по отклонению инвариантной массы фотонов от распада π^0 от истинной массы.

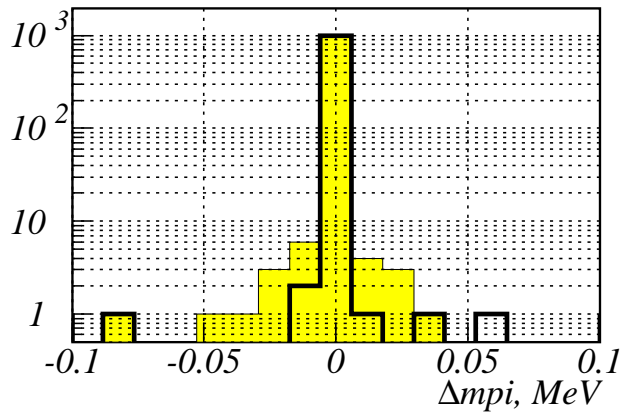


Рис. 34: Распределение событий по отклонению инвариантной массы фотонов от распада π^0 от истинной массы. Использовалась функция F_9 , минимизируемая программой VMMCОМ (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

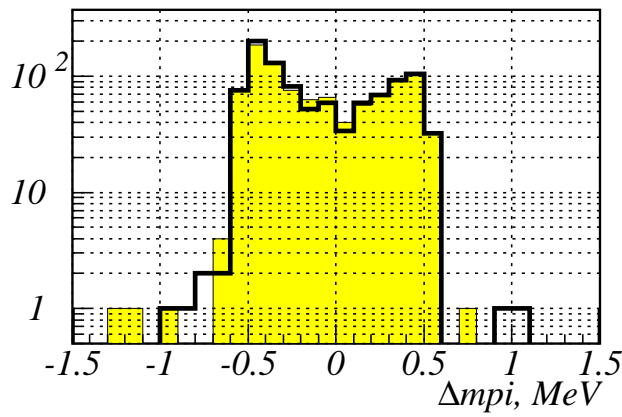


Рис. 35: Распределение событий по отклонению инвариантной массы фотонов от распада π^0 от истинной массы. Использовалась функция F_{12} , минимизируемая программой VMMCОМ (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

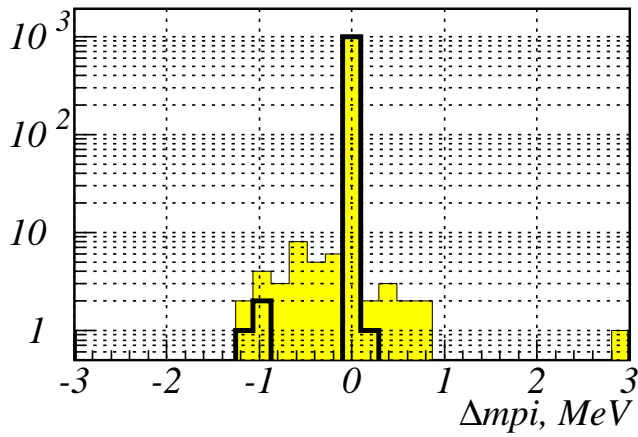


Рис. 36: Распределение событий по отклонению инвариантной массы фотонов от распада π^0 от истинной массы. Использовалась функция F_{13} , минимизируемая программой VMMC (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT.

Для иллюстрации утверждения, что неожиданные успехи реконструкции со «штрафными» функциями объясняются близостью начальной точки минимизации к искомому минимуму, проведена реконструкция тех же 1000 событий с функцией F_9 , но начальная точка минимизации выбрана произвольно: для всех событий $E_i = 200$ МэВ, $\theta_i = \varphi_i = 100^\circ$. Результат получился хуже, чем во всех предыдущих вариантах. На рис. 37 и 38 приведены распределения по минимальному значению функции и массе системы $\pi^+\pi^-\pi^0$.

Ещё один вопрос остался, который здесь уместно осветить: насколько изменится результат, если в функции правдоподобия вместо квадрата отклонения измеренной энергии от теоретической взять логарифм от функции распределения вероятностей из (3) со знаком минус. Проверку проведём с вариантом реконструкции F_9 .

Так как мы существенно изменили функцию (рис. 39), то бессмысленно сравнивать абсолютные значения функции. Прежний вариант функций правдоподобия начинался строго от нуля. В новом варианте начало распределения, скорее, на $F = 9$. Поэтому соответствующие границы для отбора событий по значению функции следует выбрать равными 14, 34 и 59. Эффективности регистрации в этих границах, полученные программой MINUIT, равны 92.5%, 99.7% и 99.7%. Программа VMMC вы-

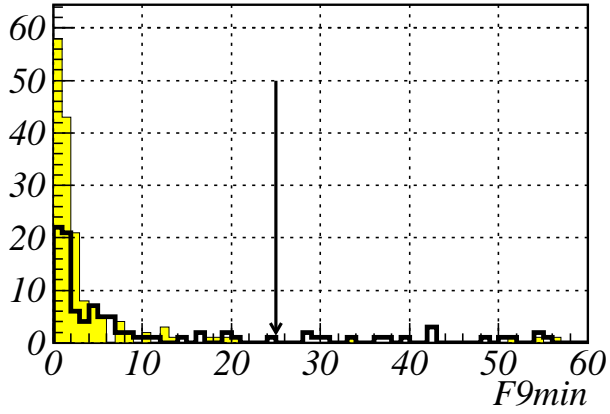


Рис. 37: Распределение событий по минимальному значению функции F_9 , достигнутое программой VMMCОM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT. Начальная точка минимизации выбрана произвольно: для всех событий $E_i = 200$ МэВ, $\theta_i = \varphi_i = 100^\circ$.

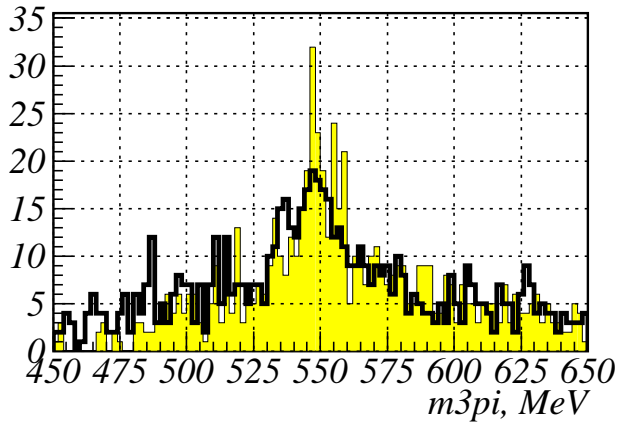


Рис. 38: Распределение событий по восстановленной массе $m_{3\pi}$ системы $\pi^+\pi^-\pi^0$. Использовалась функция F_9 , минимизируемая программой VMMCОM (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT. Начальная точка минимизации выбрана произвольно: для всех событий $E_i = 200$ МэВ, $\theta_i = \varphi_i = 100^\circ$.

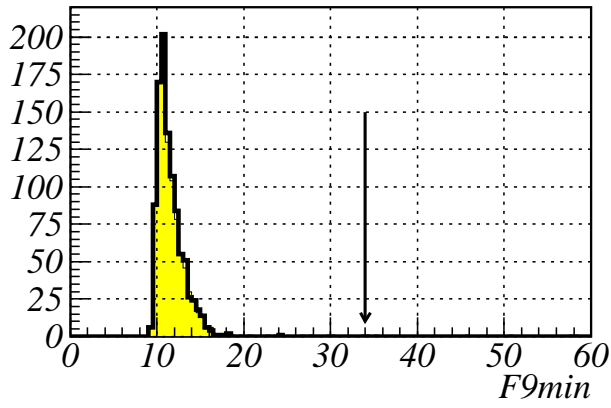


Рис. 39: Распределение событий по минимальному значению функции F_9 , достигнутое программой VMMCOS (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT. Изменена энергетическая составляющая функции правдоподобия.

дала такие эффективности: 90.4%, 98.3% и 98.9%. Хотя эффективности немного повысились, всё же однозначного вывода трудно сделать.

Более определённый результат может быть получен в распределении по инвариантной массе 3π (рис. 40).

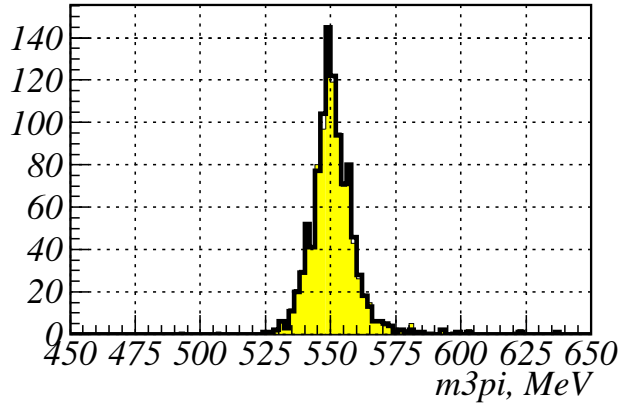


Рис. 40: Распределение событий по восстановленной массе $m_{3\pi}$ системы $\pi^+\pi^-\pi^0$. Использовалась функция F_9 , минимизируемая программой VMMCOS (закрашенная гистограмма) и программой MINUIT. Изменена энергетическая составляющая функции правдоподобия.

Эффективность регистрации при отборе событий с массой в интервале 500 – 600 МэВ получается с программой MINUIT 99.6 и с VMMCOM 99.1%, что незначительно хуже, чем в варианте с Гауссоподобной функцией правдоподобия. 50% ширина распределения с программой MINUIT получена равной $555.03 - 546.16 = 8.87$, а с программой VMMCOM $555.22 - 545.97 = 9.25$. Эти данные уже позволяют сделать вывод, что в данном случае использование в реконструкции более правильного распределения вероятностей по зарегистрированной энергии фотона может привести к более сильному подавлению фона (процентов на 5%).

Кроме рассмотренных вариантов применения программ безусловной минимизации для кинематической реконструкции для этой цели можно использовать специализированные программы условной минимизации. Рассмотрим результат применения двух таких программ для реконструкции тех же 1000 событий, что использовались выше.

6 Итерационная процедура KINEMI

Рассмотрим итерационную процедуру, описанную в работе [3]. Программа кинематической реконструкции KINEMI, написанная В.Н.Иванченко в соответствии с этим алгоритмом, успешно использовалась на детекторах СНД и КМД при изучении многих процессов.

Как в варианте реконструкции с F_9 , здесь мы имеем 15 параметров события ϵ энергии и углы всех частиц. Будем использовать тот режим программы KINEMI, когда все параметры имеют экспериментально измеренное значение с известной точностью. Так как первые две заряженные частицы в нашем случае не имеют экспериментального значения, то чтобы «вписаться» в данный режим, примем их измеренные значения равными 500 МэВ, а точность измерения для них 1000 МэВ. Это не должно как-то испортить качество реконструкции, в то же время формально позволяет пользоваться программой KINEMI. Все остальные параметры будут иметь точность измерения, приведённую в (2). Однако, в отличие от предыдущих вариантов реконструкции, здесь придётся вычислять точность параметра, в тех случаях когда она зависит от энергии частицы, по экспериментально измеренной энергии, а не теоретическому значению. В силу хорошей точности измерений, это не должно сказаться на результате. Для простоты ссылок на параметры в формулах, будем считать, что первые две частицы ϵ заряженные пионы, третья частица ϵ фотон отдачи, и две последние частицы ϵ фотоны от распада π^0 .

Теперь мы должны составить уравнения связи и вычислить производные по всем параметрам. Каждое уравнение связи ϵ это функция, которая должна быть для конечного реконструированного события равна нулю.

$$1. R_1 = \sum_{i=1}^5 E_i - W.$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial E_i} = 1; \quad \frac{\partial R_1}{\partial \theta_i} = \frac{\partial R_1}{\partial \varphi_i} = 0.$$

$$2. R_2 = \sum_{i=1}^5 \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \cos \theta_i.$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial E_i} = \frac{E_i}{\sqrt{E_i^2 - m_i^2}} \cdot \cos \theta_i; \quad \frac{\partial R_2}{\partial \theta_i} = -\sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \sin \theta_i; \quad \frac{\partial R_2}{\partial \varphi_i} = 0.$$

$$3. R_3 = \sum_{i=1}^5 \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \sin \theta_i \cdot \sin \varphi_i.$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial E_i} = \frac{E_i}{\sqrt{E_i^2 - m_i^2}} \cdot \sin \theta_i \cdot \sin \varphi_i; \quad \frac{\partial R_3}{\partial \theta_i} = \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \cos \theta_i \cdot \sin \varphi_i;$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial \varphi_i} = \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \sin \theta_i \cdot \cos \varphi_i.$$

$$4. R_4 = \sum_{i=1}^5 \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \sin \theta_i \cdot \cos \varphi_i.$$

$$\frac{\partial R_4}{\partial E_i} = \frac{E_i}{\sqrt{E_i^2 - m_i^2}} \cdot \sin \theta_i \cdot \cos \varphi_i; \quad \frac{\partial R_4}{\partial \theta_i} = \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \cos \theta_i \cdot \cos \varphi_i;$$

$$\frac{\partial R_4}{\partial \varphi_i} = -\sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \sin \theta_i \cdot \sin \varphi_i.$$

$$5. R_5 = 2E_4 \cdot E_5 \cdot [1 - \cos \theta_4 \cdot \cos \theta_5 - \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cos (\varphi_4 - \varphi_5)] - m_\pi^2.$$

$$\frac{\partial R_5}{\partial E_i} = \frac{\partial R_5}{\partial \theta_i} = \frac{\partial R_5}{\partial \varphi_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\frac{\partial R_5}{\partial E_4} = 2E_5 \cdot [1 - \cos \theta_4 \cdot \cos \theta_5 - \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \cos (\varphi_4 - \varphi_5)];$$

$$\frac{\partial R_5}{\partial E_5} = 2E_4 \cdot [1 - \cos \theta_4 \cdot \cos \theta_5 - \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \cos (\varphi_4 - \varphi_5)];$$

$$\frac{\partial R_5}{\partial \theta_4} = 2E_4 \cdot E_5 \cdot [\sin \theta_4 \cdot \cos \theta_5 - \cos \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \cos (\varphi_4 - \varphi_5)];$$

$$\frac{\partial R_5}{\partial \theta_5} = 2E_4 \cdot E_5 \cdot [\cos \theta_4 \cdot \sin \theta_5 - \sin \theta_4 \cdot \cos \theta_5 \cdot \cos (\varphi_4 - \varphi_5)];$$

$$\frac{\partial R_5}{\partial \varphi_4} = 2E_4 \cdot E_5 \cdot \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \sin (\varphi_4 - \varphi_5);$$

$$\frac{\partial R_5}{\partial \varphi_5} = -2E_4 \cdot E_5 \cdot \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \sin (\varphi_4 - \varphi_5).$$

Результат кинематической реконструкции первого события получился следующий: $N_{cal} = 6$, $F_{min} = 3.30$. Хороший результат, однако, на этом событии почти все варианты реконструкции показали хороший результат. Далее сравним на статистике 1000 событий качество реконструкции программой KINEM с качеством реконструкции в лучшем из предыдущих вариантов ϵ — минимизируемая функция F_9 , минимум находится программой MINUIT. На рис. 41 приведено распределение по минимальному значению функции правдоподобия.

Распределение по восстановленной инвариантной массе 3π приведено на рис. 42. В табл. 4 представлены некоторые количественные характеристики распределений.

При несколько худшем качестве кинематической реконструкции программа KINEM имеет намного большее быстродействие. Качество восстановления инвариантной массы 3π связано не только с недостижением минимума функции правдоподобия, но и с невыполнением кинематических связей. Рис. 43, 44 и 45 демонстрируют степень нарушения кинематических связей при реконструкции программой KINEM. Несмотря на то, что при реконструкции KINEM есть события, в которых нарушения кинематических связей очень большие, всё же процент событий с большими нарушениями невелик. А именно: 4% событий имеют отклонение суммарной энергии частиц от 1020 МэВ больше 10 МэВ, 10%

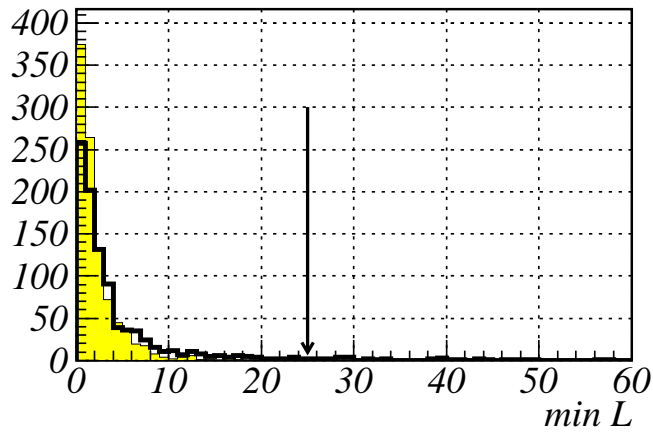


Рис. 41: Распределение событий по минимальному значению функции правдоподобия L , достигнутое программой MINUIT с минимизируемой функцией F_9 (закрашенная гистограмма) и программой KINEMI.

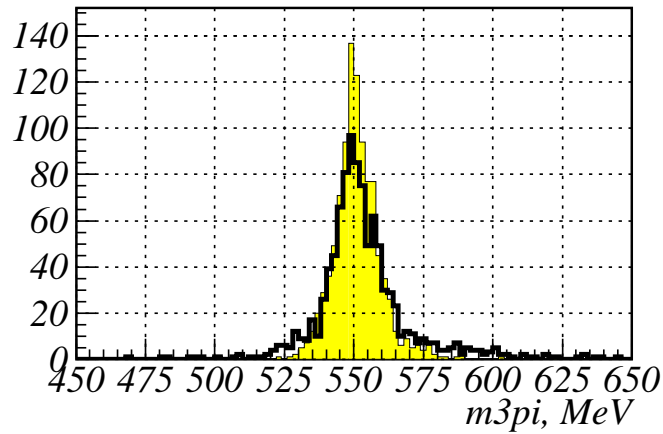


Рис. 42: Распределение событий по восстановленной массе $m_{3\pi}$ системы $\pi^+\pi^-\pi^0$. Реконструкция проводилась программой MINUIT с функцией F_9 (закрашенная гистограмма) и программой KINEMI.

Таблица 4: Результаты кинематической реконструкции, полученные на статистике 1000 событий моделирования процесса $\phi \rightarrow \eta\gamma$, $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$.

Характеристика	Minuit, F_9	KINEMI
$\epsilon(F_{min}<5)$, %	89.0	72.1
$\epsilon(F_{min}<25)$, %	99.5	92.2
$\epsilon(F_{min}<50)$, %	99.6	95.5
$\epsilon_{ m_{3\pi}-550 <50}$, %	99.7	94.4
$m_{3\pi}^{(peak)}$, MeV	549.7 ± 0.4	550.3 ± 0.5
$m_{3\pi}^{(-)}$, MeV	546.43	545.40
$m_{3\pi}^{(+)}$, MeV	555.74	558.90
$\Delta m_{3\pi}$, MeV	9.31	13.5
\bar{N}_{cal}	4886	17.2

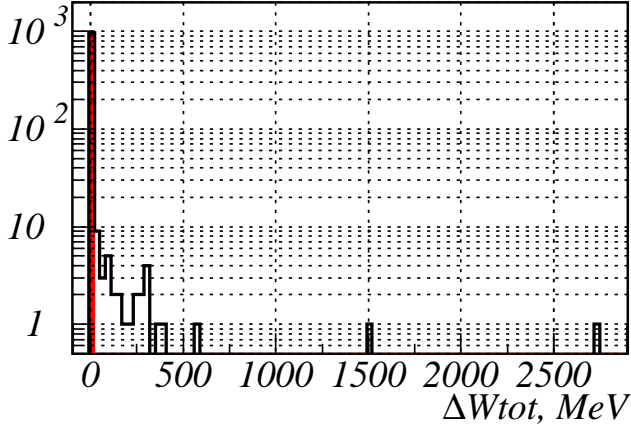


Рис. 43: Распределение событий по отклонению суммарной энергии частиц после реконструкции от истинной. Реконструкция проводилась программой MINUIT с функцией F_9 (закрашенная гистограмма) и программой KINEMI.

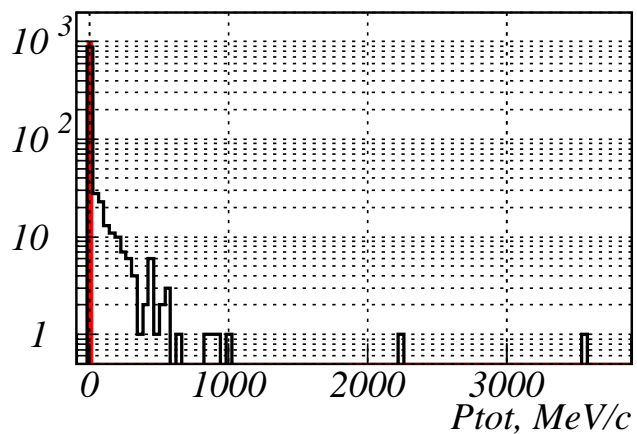


Рис. 44: Распределение событий по абсолютной величине суммарного импульса частиц после реконструкции. Реконструкция проводилась программой MINUIT с функцией F_9 (закрашенная гистограмма) и программой KINEMI.

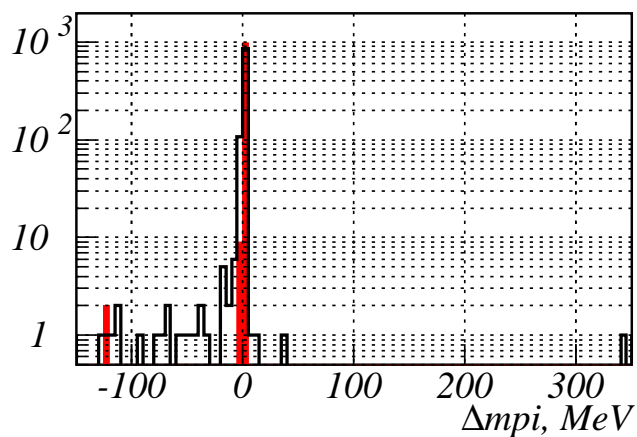


Рис. 45: Распределение событий по отклонению инвариантной массы фотонов от распада π^0 от истинной массы. Реконструкция проводилась программой MINUIT с функцией F_9 (закрашенная гистограмма) и программой KINEMI.

событий имеют суммарный импульс всех частиц больше 50 МэВ/с, и у 3% событий отклонение инвариантной массы двух фотонов от 135 МэВ превышает 10 МэВ.

По этим данным можно сделать заключение, что если 30-40%-ое увеличение числа фоновых событий при отборе событий, похожих по кинематике на процесс $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ не создаёт больших проблем в получении результата, то процедуру KINEM1 вполне можно использовать, имея при этом скорость обработки событий в сотни раз быстрее, чем при использовании программ безусловной минимизации со штрафными функциями.

7 Программа DONLP2

Среди алгоритмов минимизации функций при наличии условий на параметры в виде равенств и неравенств один из наиболее успешных реализован в программе DONLP2 [4].

Возьмём функции, описывающие кинематические связи, точно в том виде, как они были выбраны в предыдущем разделе при использовании процедуры KINEM1. Для установления границ физической области изменения параметров введём пять условий-неравенств вида $E_i - m_i \geq 0$.

Программа имеет много кодов завершения, которые надо тщательно проанализировать, чтобы составить список допустимых кодов, при которых реконструкции можно доверять. В данном анализе допустимыми приняты коды завершения, превышающие «-3». Для недопустимых кодов значение функции полагалось равным 10^5 . Из 1000 событий одно событие завершилось недопустимым кодом и при этом не достигло гиперповерхности, где выполнены все уравнения связи. В остальных событиях уравнения связи удовлетворяются достаточно хорошо, хотя и не абсолютно. Наиболее заметное отличие от нуля получилось в значении полного импульса системы (рис. 46), однако, и это следует признать удовлетворительным. Для «хороших» событий отличие уравнений связи от нуля после реконструкции составляет порядка 10^{-5} , что не может быть объяснено ошибками округления, но вполне приемлемо.

Первое событие завершилось после 234 вычислений минимизируемой функции достижением значения $L = 3.20$, т.е. успешно. Из 1000 событий ни одно не завершилось с кодом ниже «-3». Распределение событий по $\min L$ и $m_{3\pi}$ приведено на рис. 47 и 48. Распределения получились близкими. Количественные характеристики распределений приведены в табл. 5.

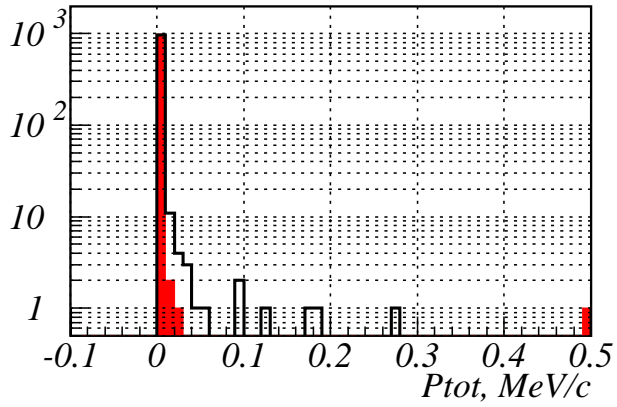


Рис. 46: Распределение событий по абсолютной величине суммарного импульса частиц после реконструкции. Реконструкция проводилась программой MINUIT с функцией F_9 (закрашенная гистограмма) и программой DONLP2.

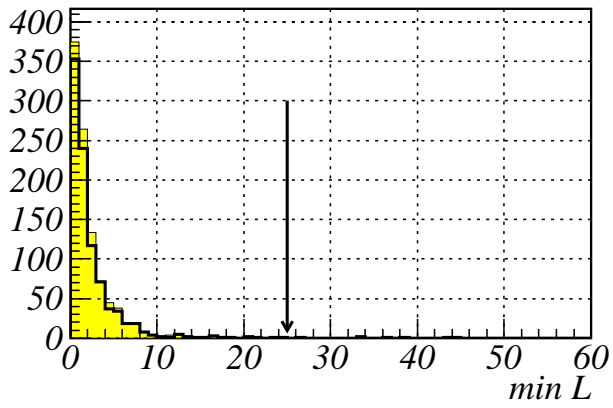


Рис. 47: Распределение событий по минимальному значению функции правдоподобия L , достигнутое программой MINUIT с минимизируемой функцией F_9 (закрашенная гистограмма) и программой DONLP2.

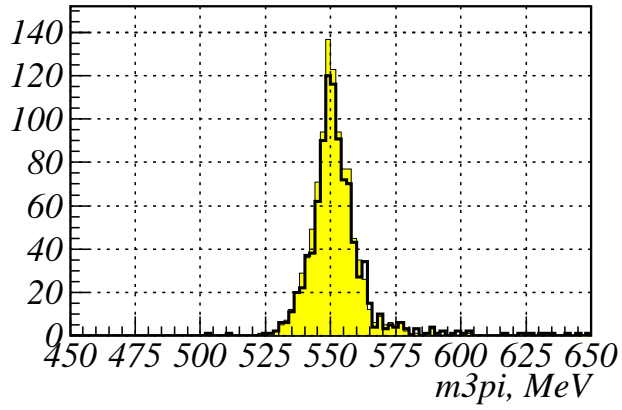


Рис. 48: Распределение событий по восстановленной массе $m_{3\pi}$ системы $\pi^+\pi^-\pi^0$. Реконструкция проводилась программой MINUIT с функцией F_9 (закрашенная гистограмма) и программой DONLP2.

Таблица 5: Результаты кинематической реконструкции, полученные на статистике 1000 событий моделирования процесса $\phi \rightarrow \eta\gamma$, $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$.

Характеристика	Minuit, F_9	DONLP2
$\epsilon_{(F_{min} < 5)}, \%$	89.0	81.8
$\epsilon_{(F_{min} < 25)}, \%$	99.5	92.2
$\epsilon_{(F_{min} < 50)}, \%$	99.6	92.9
$\epsilon_{ m_{3\pi} - 550 < 50}, \%$	99.7	93.5
$m_{3\pi}^{(peak)}, \text{ MeV}$	549.7 ± 0.4	550.7 ± 0.3
$m_{3\pi}^{(-)}, \text{ MeV}$	546.43	546.97
$m_{3\pi}^{(+)}, \text{ MeV}$	555.74	557.45
$\Delta m_{3\pi}, \text{ MeV}$	9.31	10.48
\bar{N}_{cal}	4886	502

Реконструкция с помощью DONLP2 занимает промежуточное место между KINEM1 и MINUIT со «штрафными» функциями. На данный момент мы получили, что наилучшее качество даёт минимизация функции F_9 с помощью MINUIT, но при этом время счёта в 10 раз больше, чем с DONLP2, и в 280 раз больше, чем с KINEM1.

Преимущество процедуры DONLP2 по сравнению с KINEM1, в частности, заключается в том, что можно минимизировать любую функцию правдоподобия, а в KINEM1 допускается только χ^2 — сумма квадратов нормированных отклонений измеренных значений от теоретических.

Вообще говоря, сравнивать напрямую работу программы MINUIT и DONLP2 в том виде, как мы сделали, несправедливо. Дело в том, что метод переменной метрики пространства существенным образом использует градиент функции, и большую часть времени тратит на нахождение градиента разностными методами. Для функции F_9 получить формулы для градиента — такая же работа, как формулы для градиентов в программе DONLP2.

8 Использование программы безусловной минимизации с вычислением градиента по аналитическим формулам

Вычисление градиента разностными методами приводит к потере времени, причём чем больше параметров события, тем больше эта потеря. Но при этом ещё и градиент находится неточно, из-за чего падает качество минимизации. Для иллюстрации последнего утверждения используем аналитические формулы для вычисления градиента при минимизации «абстрактной» функции F_2 . Программа MINUIT нашла минимум $F_2 = 3.0 \cdot 10^{-14}$ после 194 вычислений функции, программа VMMCOM достигла $F_2 = 5.9 \cdot 10^{-12}$ после 94 вычислений функции. Уменьшение необходимого количества вычислений функции меньше, чем ожидалось (в 10 раз), произошло из-за того, что в некоторых случаях приходится делать одномерную минимизацию, при этом градиент не вычисляется и нет экономии времени.

Сокращения числа вычислений функции в случае более сложной «абстрактной» функции F_6 происходит, только если программа доходит до того же уровня (обе программы ранее не справились с нахождением минимума этой функции). В этом случае, однако, аналитическое вычис-

Таблица 6: Результаты кинематической реконструкции (минимизация F_9 программами MINUIT и VMMCОM с аналитическим вычислением градиента), полученные на статистике 1000 событий моделирования процесса $\phi \rightarrow \eta\gamma, \eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$.

Характеристика	Minuit	VMMCОM
$\epsilon(F_{min}<5), \%$	88.0	87.1
$\epsilon(F_{min}<25), \%$	98.1	97.1
$\epsilon(F_{min}<50), \%$	98.1	97.1
$\epsilon(m_{3\pi}-550 <50), \%$	98.7	99.4
$m_{3\pi}^{(peak)}, \text{ MeV}$	549.8 ± 0.3	549.7 ± 0.4
$m_{3\pi}^{(-)}, \text{ MeV}$	546.31	546.50
$m_{3\pi}^{(+)}, \text{ MeV}$	555.85	555.75
$\Delta m_{3\pi}, \text{ MeV}$	9.54	9.25
\bar{N}_{cal}	1872	5570

ление градиента не избавляет от необходимости двигаться вдоль извилистого ущелья. Обе программы снова далеко не дошли до минимума: MINUIT дошла до значения $F_6 = 1.898$, после 532 вычислений функции, а VMMCОM ϵ до $F_6 = 0.031$ после 6443 вычислений функции. Программа MINUIT определила, что ковариационная матрица вблизи достигнутой точки ненормальна, но всё же присвоила статус `converged` процессу поиска. К сожалению, «сдвинуть» её с найденного псевдоминимума не удалось ни командой IMPROVE, ни SIMPLEX. Причина уважительная ϵ очень малое значение градиента «на дне ущелья».

Рассмотрим теперь вариант реконструкции с функцией F_9 , где достаточно легко вычисляется градиент. MINUIT дошла до значения $F_9 = 3.20$ за 1720 вычислений функции, VMMCОM ϵ до значения $F_9 = 3.21$ за 1707 вычислений функции. Распределения событий по F_{min} и $m_{3\pi}$ мало изменились, так как качество минимизации не должно ухудшиться при более точном вычислении градиента. Количественные характеристики распределений приведены в табл. 6. Программа VMMCОM в некоторых событиях уходит очень далеко от искомого минимума и впоследствии не может «найти» дорогу.

Время счёта существенно сократилось, но не в десятки раз. При этом разрыв между MINUIT и VMMCОM сократился, и по-прежнему MINUIT

минимизирует более качественно. Программа DONLP2 при несколько худшем качестве реконструкции имеет время счёта примерно в 4 раза меньше.

9 Заключение

Изучение такой сложной многопараметрической задачи, как кинематическая реконструкция событий, на примере конкретного процесса $\eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\gamma$, не может дать рекомендаций на все случаи жизни. Всё же для задач, близких к описанной, можно сделать следующие выводы, в которых количественная часть, скорее всего, изменится для других процессов, но качественные соотношения останутся в силе.

Наилучшее качество реконструкции достигается при использовании программы безусловной минимизации (для этого вполне подходит MINUIT). При этом кинематические связи надо учитывать с помощью «штрафных» функций гладкого типа и использовать аналитически вычисляемый градиент. Использование кинематических связей для исключения параметров, вообще говоря, упрощает задачу минимизации, но этот метод упирается в практически очень сложную задачу выбора начальной точки. Фактически, исключение числа параметров, равному количеству кинематических связей, эквивалентно проведению минимизации по нескольким параметрам аналитическим способом и не может не упростить задачу численной минимизации по остальным параметрам, но только при хороших начальных условиях. Дополнительной трудностью является то, что после исключения части параметров формула для функции правдоподобия становится сложной, и практически невозможно вычислять градиент аналитическим способом.

Если фоновые условия для обработки эксперимента не очень плохие и можно пойти на 10%-ое увеличение примеси фона при отбраковке по восстановленным инвариантным массам промежуточных частиц, то хорошим вариантом реконструкции может быть использование программы DONLP2, в которой можно использовать произвольный набор условий на оптимизируемые параметры в виде равенств и неравенств. Время счёта при этом сокращается примерно в 4 раза по сравнению с предыдущим вариантом.

Если можно принять ещё 30%-ый проигрыш в ширине распределений по восстановленным массам, то хороший результат получается при использовании рекуррентной процедуры KINEM1, которая даёт выигрыш

во времени счёта ещё в сотни раз. Точность оценки инвариантной массы даже в этом случае много лучше, чем вычисление массы по «сырым» экспериментальным измерениям.

Следует помнить, что результаты реконструкции кардинально зависят от выбора начальной точки минимизации в любом подходе. Поэтому все полученные в данной работе количественные характеристики применимы к «умеренно далёкой от минимума» начальной точке. Если предпринять специальные меры по выработке процедуры уточнения начальной точки, то можно существенно улучшить результаты реконструкции. Повысить надёжность результатов может помочь и реализация кинематической реконструкции в двух вариантах, например, с помощью программ KINEM1 и DONLP2. Различие полученных эффективностей отбора поможет понять устойчивость результата и возможную систематическую ошибку из-за «недоминимизации».

Автор благодарен Голубеву В.Б., Дужнину В.П. и Пахтусовой Е.В. за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант РФФИ 02-02-16134.

Приложение

А Краткое описание программы VMMCOM

А.1 Общая организация программы

В основе алгоритма должен быть метод переменной метрики пространства [5, 6, 7] (VMM), который на практике доказал свою эффективность. В общем случае минимизация состоит из нескольких заходов.

Каждый заход начинается с минимизации VMM. Минимизация VMM может закончиться нахождением минимума, но может и завершиться отказом. Если отказ произошёл по причине невозможности вычислить градиент, то минимизация в этом заходе завершается методом SIMPLEX [7, 8] до того уровня, когда все значения функций в симплексе отличаются друг от друга не больше, чем на заданную величину. Если оказалось, что VMM минимизация чем-то плоха, то лучшее достижение данного захода запоминается, выбирается новая начальная точка минимизации и производится следующий заход. Массив лучших достижений за серию заходов является основой для выбора начальной точки для следующего захода.

Процесс последовательных заходов минимизации прерывается, если

1. Вычисленный градиент очень мал ϵ меньше 10^{-6} .
2. Последняя минимизация VMM закончилась успешно.
3. Разность между достигнутыми минимумами в заходах меньше, чем 0.01 от требуемой точности.
4. Максимальная разность между достигнутыми минимумами в заходах меньше, чем требуемая точность, и последний лучший минимум не улучшался заданное число раз («топтанье на месте»)
5. Изменение лучшего по заходам минимума больше, чем на ΔF_0 , происходит на числе заходов, превышающем заданный предел (слишком медленная сходимость).
6. Исчерпан лимит на количество вызовов функции.

А.2 Интерфейс программы

Работа программы определяется только следующим набором аргументов (общие блоки VMMCSBUF1, VMMCSBUF2, VMMCSBUF3, VMMCSBUF4, VMMCSBUF5, VMMCSBUF6, VMMCSBUF7, VMMCSBUF8, VMMCSBUF9, VMMCSBUFA, VMMCSBUFB ϵ для внутреннего использования):

call VMMCOM(FCN, Npar, X, IFLmin, dFm, Ncal, Fmin)

где

FCN ϵ программа, вычисляющая функцию по вызову call FCN(Npar, F, X),

integer *4 Npar ϵ количество параметров минимизируемой функции, **real *8 X(Npar)** ϵ вектор параметров. Перед вызовом в нём должны быть начальные значения параметров, после минимизации в нём будут параметры точки минимума,

integer *4 IFLmin(Npar) ϵ указатели переменных параметров. Если IFLmin(i)=0, то параметр фиксирован, если же IFLmin(i)=1, то параметр оптимизируется,

real *8 dFm ϵ требуемая точность ΔF_0 минимизации (допустимое превышение найденного минимального значения функции над истинным минимумом),

integer *4 Ncal ϵ предельное количество вычислений функции (перед минимизацией), после минимизации в этой переменной будет занесено количество потребовавшихся вычислений функции для достижения минимума. Если оно больше исходного ограничения, то минимизация прервана по этому пределу.

real *8 Fmin ϵ найденное минимальное значение функции.

А.3 Вычисление градиента

При вычислении частных производных по переменным параметрам (компоненты градиента) надо найти оптимум по отношению к следующим «мешающим» эффектам:

- При слишком малом приращении аргумента неточности вычисления функции приводят к очень большим неточностям в производной.

- При слишком большом приращении аргумента функция очень далека от линейной, поэтому производная, найденная по конечным разностям далека от истинного значения.
- В ходе минимизации соотношение этих эффектов может меняться.

Чтобы обеспечить какую-то настройку системы, для каждого параметра хранится текущее приращение параметра h_i (используется и для нахождения производной, и для SIMPLEX-метода). В процессе минимизации этот шаг может меняться, но в конечных пределах $10^{-5} < h_i < 0.1$.

Основной формулой для вычисления производной принята следующая формула:

$$F'_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{F(x_i + h_i) - F(x_i - h_i)}{2h_i}. \quad (8)$$

Однако, эта формула приемлема, если шаг не слишком велик. Это проверяется по соотношению трёх разных оценок производных: указанной выше «центральной» производной F'_i и производных «слева» и «справа»:

$$F'_{i1} = \frac{F(x_i) - F(x_i - h_i)}{h_i}; \quad F'_{i2} = \frac{F(x_i + h_i) - F(x_i)}{h_i}. \quad (9)$$

Если какая-либо из этих трёх производных больше 10^{10} , то принимается, что градиента не существует. Если имеет место неравенство

$$\frac{\max\{|F'_{i1} - F'_i|, |F'_{i2} - F'_i|, |F'_{i1} - F'_{i2}|\}}{\max\{|F'_{i1}|, |F'_{i2}|, |F'_i|\}} > 0.2, \quad (10)$$

то делается попытка повысить точность уменьшением шага вдвое. При этом мы можем (и должны) использовать и ранее вычисленные значения функции ϵ проведём через 5 точек кубическую параболу и получим такую оценку производной:

$$F'_i = \frac{F(x_i - 2h_i) - F(x_i + 2h_i) + 8[F(x_i + h_i) - F(x_i - h_i)]}{12h_i}, \quad (11)$$

а заодно и оценку коэффициентов при второй и третьей степени Δx α_2 , α_3 :

$$\alpha_2 = \frac{2[F(x_i+2h_i)+F(x_i-2h_i)-F(x_i)]-F(x_i+h_i)-F(x_i-h_i)}{14h_i^2}; \quad (12)$$

$$\alpha_3 = \frac{F(x_i+2h_i)-F(x_i-2h_i)+2[F(x_i-h_i)-F(x_i+h_i)]}{12h_i^3}.$$

Кубическая парабола через 5 точек точно не проходит, поэтому минимальная сумма отклонений опорных точек от параболы

$$\overline{\Delta F} = \frac{|F(x_i + 2h_i) + F(x_i - 2h_i) + 6F(x_i) - 4[F(x_i + h_i) + F(x_i - h_i)]|}{\sqrt{70}} \quad (13)$$

может дополнительно использоваться для оценки неточности вычисления функции из-за ошибок округления. Если

$$|\alpha_3 h_i^2| < 0.1 \max\{|F'_i|, |\alpha_2 h_i|\},$$

то можно считать что третий член разложения является малой поправкой к первым двум, т.е. всё хорошо, но если при этом

$$\overline{\Delta F} > 0.1 \max\{|F'_i h_i|, |\alpha_2 h_i^2|\},$$

то это роняет подозрение, что среди этих 5 точек есть хаотические выбросы, и шаг h_i уменьшать неразумно.

Если же

$$|\alpha_3 h_i^2| > \max\{|F'_i|, |\alpha_2 h_i|\},$$

то шаг недостаточно мал и его надо уменьшать ещё дальше.

A.4 Метод переменной метрики пространства

Матрица метрики пространства V модифицируется на каждом шаге минимизации одним из двух способов в зависимости от значения параметра α :

$$\alpha = \frac{\Delta x_k^T \Delta g_k}{\Delta x_k^T \Delta g_k - \Delta g_k^T V_k \Delta g_k}. \quad (14)$$

Если $\alpha < 0$, то

$$V_{k+1} = V_k + \frac{(\Delta x_k - V_k \Delta g_k)(\Delta x_k - V_k \Delta g_k)^T}{\Delta g_k^T (\Delta x_k - V_k \Delta g_k)} \quad (15)$$

а если $\alpha > 1$, то

$$V_{k+1} = \left(1 - \frac{\Delta x_k \Delta g_k^T}{\Delta x_k^T \Delta g_k}\right) V_k \left(1 - \frac{\Delta x_k \Delta g_k^T}{\Delta x_k^T \Delta g_k}\right)^T + \frac{\Delta x_k \Delta x_k^T}{\Delta x_k^T \Delta g_k}, \quad (16)$$

где

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \quad \Delta g_k = g_{k+1} - g_k,$$

g_k — градиент функции в точке x_k . Координата x_{k+1} выбирается на основе информации, имеющейся в точке x_k . В начале вычисляется оценка положения минимума

$$x_{k+1} = x_k - Vg_k.$$

Если на предыдущем шаге тип преобразования матрицы метрики пространства был выбран в виде (15) и значение функции в точке x_{k+1} оказалось меньше, чем значение функции в x_k , то координата x_{k+1} принимается в качестве очередной точки траектории минимизации. В противном случае из точки x_k в направлении $-Vg_k$ проводится одномерная минимизация методом золотого сечения, и найденная точка минимума принимается в качестве очередной координаты x_{k+1} траектории минимизации.

В первом случае, когда мы выбрали новый шаг без одномерной минимизации, предполагалось, что матрица метрики пространства уже достаточно хорошо описывает квадратичную форму в районе минимума. В этом случае точка x_{k+1} сразу может быть точной оценкой положения минимума и в этом случае можно использовать предсказание величины функции в минимуме:

$$F_{min} = F(x_k) - \frac{1}{2}g_k^T V_k g_k \quad (17)$$

для проверки критерия достижения минимума. Если предсказание минимального значения отличается от реального значения $F(x_{k+1})$ меньше, чем требуемая точность нахождения минимума ΔF_0 , то минимум считается найденным, иначе производится выбор новой точки в траектории минимизации и всё повторяется по циклу.

Для уменьшения вероятности случайного принятия очередной точки за точку минимума, проверка критерия достижения минимума проводится, только если из начальной точки сделано больше шагов, чем размерность пространства (раньше сходимость матрицы метрики пространства к истинному значению маловероятна).

А.5 Минимизация симплекс-методом

Минимизация симплекс-методом проводится в качестве заключительного этапа в очередном заходе минимизации, если при вычислении градиента в очередной точке получается очень большое значение и тогда минимизация VMM становится невозможной.

Минимизация симплекс-методом проводится по стандартному алгоритму, и здесь мы только вкратце повторим последовательность действий.

1. Набирается симплекс из $(n + 1)$ точки, включающий начальную точку и n точек, сдвинутых поочерёдно по каждой координате.
2. Дается попытка заменить точку симплекса x_b с самым большим значением функции на более перспективную x_c с меньшим значением. Для этого выполняются следующие действия.
3. Вычисляется центр тяжести

$$x_c = \frac{1}{n} \sum_{i \neq b} x_i.$$

4. Вдоль направления от x_b к x_c выбирается пробная точка

$$x_{t1} = 3x_c - 2x_b.$$

Если значение функции в этой точке $F(x_{t1}) < F(x_b)$, то точка симплекса x_b заменяется на x_{t1} и управление возвращается в п.2.

5. Вычисляется ещё одна пробная точка

$$x_{t2} = 2x_c - x_b.$$

Если значение функции в этой точке $F(x_{t2}) < F(x_b)$, то точка симплекса x_b заменяется на x_{t2} и управление возвращается в п. 2.

6. Вычисляется ещё одна точка

$$x_{t3} = \frac{1}{2}(x_c + x_b)$$

и вычисляется значение функции в ней. Теперь на одной прямой мы имеем четыре точки и значения функции в них: $F(x_b)$, $F(x_{t1})$, $F(x_{t2})$ и $F(x_{t3})$. Эти значения интерполируются кубической параболой. Если старший коэффициент полинома

$$a_3 = \frac{8F(x_{t3}) + 2F(x_{t1}) - 5F(x_b) - 5F(x_{t2})}{15}$$

не равен нулю, и

$$D = 475F^2(x_b) - 1840F(x_b)F(x_{t3}) + 850F(x_b)F(x_{t2}) + 40F(x_b)F(x_{t1}) + \\ + 1792F^2(x_{t3}) - 2000F(x_{t3})F(x_{t2}) + 256F(x_{t3})F(x_{t1}) + 775F^2(x_{t2}) - \\ - 400F(x_{t1})F(x_{t2}) + 52F^2(x_{t1}) > 0,$$

то полином имеет два экстремума, причём тот из них, который является локальным минимумом, находится в точке

$$x_{t4} = x_c + \frac{x_c - x_b}{90a_3} \cdot \left[32F(x_{t3}) - 25F(x_b) - 5F(x_{t2}) - 2F(x_{t1}) + \sqrt{D} \right].$$

Если же третий коэффициент $a_3 = 0$, а

$$a_2 = \frac{5F(x_{t2}) + 2F(x_{t1}) + 25F(x_b) - 32F(x_{t3})}{30} > 0,$$

то оценка положения минимума существует

$$x_{t4} = x_c - (x_c - x_b) \cdot \frac{a_1}{2a_2},$$

где

$$a_1 = \frac{25F(x_{t2}) - 4F(x_{t1}) - 5F(x_b) - 16F(x_{t3})}{30}.$$

Теперь из новых точек $F(x_{t3})$ и $F(x_{t4})$ выбирается точка с меньшим значением функции и если это значение меньше $F(x_b)$, то самая плохая точка заменяется на эту новую. Если замену $F(x_b)$ произвести не удалось, то минимизация в данном заходе прекращается ϵ преобразование симплекса невозможно. Минимизация в заходе также прекращается, если выполнилось условие минимума ϵ разброс значений функции в симплексе меньше, чем требуемая точность ΔF_0 . Если преобразование симплекса прошло успешно, а условие достижения минимума ещё не выполнено, то минимизация продолжается с п. 2.

А.6 Выбор начальной точки для нового захода

Выбор начальной точки для нового захода минимизации зависит от того, сколько было перед этим заходов. От каждого захода минимизации используется его конечный результат — оценка точки минимума x_m и значение функции F_m в этой точке.

Если закончился только первый заход, то начальная точка второго захода определяется, как симметричная точка начальной точки x_0 первого захода по отношению к достигнутому минимуму x_1 .

Если уже закончился второй заход в точке x_2 , то начальная точка третьего захода выбирается в виде

$$x = 3x_{min} - 2x_{max},$$

где x_{min} \in точка с меньшим значением функции, а x_{max} \in точка с большим значением.

Для всех остальных случаев с количеством сделанных заходов минимизации $N \geq 3$ процедура выбора начальной точки следующего захода одинакова. Каждой точке приписывается вес

$$w_m = \frac{\Delta F_0}{F_m - F_{glob} + \Delta F_0},$$

где F_{glob} \in минимальное значение функции к данному моменту.

После этого определяется направление вытянутости множества точек x_m в пространстве, т.е. находится единичный вектор v , минимизирующий квадратичную форму

$$L = \sum_{m=1}^N w_m \cdot \left[(x_m - X_0)^2 - (x_m v - X_0 v)^2 \right], \quad (18)$$

где центр тяжести

$$X_0 = \frac{\sum_{m=1}^N w_m x_m}{\sum_{m=1}^N w_m}.$$

Процедура минимизации часто осложняется своеобразным профилем минимизируемой функции, который можно назвать «ущельем» \in в районе минимума имеется сильная корреляция параметров. Вектор v может указать направление дна «ущелья», при этом минимум может оказаться как вблизи группы уже найденных точек x_m , так и на значительном удалении от них.

Очевидно, что искомый вектор v является собственным вектором матрицы

$$A = \sum_{m=1}^N w_m (x_m - X_0) (x_m - X_0)^T, \quad (19)$$

соответствующим максимальному собственному значению. Находить этот собственный вектор удобнее всего итерационной процедурой. Взяв в качестве начального приближения какой-то вектор v_1 , следующие приближённые значения можно получать по формуле

$$v_{k+1} = \frac{A v_k}{|A v_k|}. \quad (20)$$

Если максимальное собственное значение матрицы значительно превышает остальные собственные значения, то процедура экспоненциально сходится к искомому решению.

Теперь сведём задачу к одномерной: каждой точке x_m припишем координату ξ_m вдоль «ущелья»:

$$\xi_m = (x_m - X_0) v. \quad (21)$$

Теперь аппроксимируем зависимость F_m от ξ_m параболой, минимизируя сумму квадратов отклонений

$$S = \sum_{m=1}^N (\beta_0 + \beta_1 \xi_m + \beta_2 \xi_m^2 - F_m)^2 \cdot w_m. \quad (22)$$

Если ввести вспомогательные суммы

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{m=1}^N w_m, & S_1 &= \sum_{m=1}^N w_m \xi_m, & S_2 &= \sum_{m=1}^N w_m \xi_m^2, \\ S_3 &= \sum_{m=1}^N w_m \xi_m^3, & S_4 &= \sum_{m=1}^N w_m \xi_m^4, \\ Y_0 &= \sum_{m=1}^N w_m F_m, & Y_1 &= \sum_{m=1}^N w_m F_m \xi_m, & Y_2 &= \sum_{m=1}^N w_m F_m \xi_m^2, \\ \Delta_0 &= S_4 S_1^2 - 2 S_1 S_2 S_3 + S_2^3 - (S_2 S_4 - S_3^2) S_0, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{\Delta_0} [S_2^2 Y_2 + S_3^2 Y_0 - (S_3 Y_2 - S_4 Y_1) S_1 - (S_3 Y_1 + S_4 Y_0) S_2], \\ \beta_1 &= \frac{1}{\Delta_0} [(S_2 Y_1 - S_3 Y_0) S_2 + (S_3 Y_2 - S_4 Y_1) S_0 - (S_2 Y_2 - S_4 Y_0) S_1], \\ \beta_2 &= \frac{1}{\Delta_0} [S_1^2 Y_2 + S_2^2 Y_0 - (S_2 Y_2 - S_3 Y_1) S_0 - (S_2 Y_1 + S_3 Y_0) S_1] \end{aligned}$$

и искомый минимум параболы находится в точке

$$\xi = -\frac{\beta_1}{2\beta_2},$$

что в нашем многомерном пространстве соответствует точке

$$x = X_0 + \xi v. \quad (23)$$

Эта точка используется как начальная точка для следующего захода минимизации.

В Параметризация события для кинематической реконструкции с функцией F_{10}

Минимизируемую функцию примем равной логарифмической функции правдоподобия

$$F_{10} = L,$$

а набор параметров, от которых она зависит, выберем таким, чтобы при любом их значении кинематические связи выполнялись точно. Задача «исключения» лишних параметров неоднозначна, в этом примере попробуем выбрать 10 параметров, как отклонения от измеренных величин, что облегчит выбор начальной точки.

А именно:

- $\Delta P_{0x}, \Delta P_{0y}, \Delta P_{0z} \in$ отклонения истинных значений компонент импульса π^0 -мезона от измеренных значений,
- $\xi_1, \xi_2 \in$ параметры, определяющие направление импульса первого распадного фотона. При $\xi_1 = 0$ экспериментально измеренное направление совпадает с теоретическим.
- $\Delta P_{\gamma 1x}, \Delta P_{\gamma 1y}, \Delta P_{\gamma 1z} \in$ поправки к экспериментально измеренным компонентам импульса фотона отдачи.
- $\xi_3, \xi_4 \in$ параметры, определяющие отклонение направления теоретического импульса первого заряженного пиона от экспериментального направления. При $\xi_3 = 0$ направления совпадают.

Этот набор 10 параметров полностью определяет импульсы всех пяти конечных частиц.

- ΔP_{0x} ч поправка к x -компоненте суммарного экспериментально измеренного импульса двух фотонов от распада π^0 -мезона,
- ΔP_{0y} ч поправка к y -компоненте суммарного экспериментально измеренного импульса двух фотонов от распада π^0 -мезона,
- ΔP_{0z} ч поправка к z -компоненте суммарного экспериментально измеренного импульса двух фотонов от распада π^0 -мезона.

После этого однозначно определяется теоретическое значение импульса \vec{P}_0 системы двух фотонов от распада π^0 -мезона. Составим

из экспериментальных векторов импульса $\mathbf{P}_{0\gamma_1}$ и $\mathbf{P}_{0\gamma_2}$ этих фотонов тройку ортонормированных векторов:

$$\mathbf{e}_{01} = \frac{\mathbf{P}_{0\gamma_1}}{|\mathbf{P}_{0\gamma_1}|}; \quad \mathbf{e}_{02} = \frac{\mathbf{P}_{0\gamma_2} - \mathbf{e}_{01} \cdot (\mathbf{e}_{01} \cdot \mathbf{P}_{0\gamma_2})}{\sqrt{P_{0\gamma_2}^2 - (\mathbf{e}_{01} \cdot \mathbf{P}_{0\gamma_2})^2}}; \quad \mathbf{e}_{03} = \mathbf{e}_{01} \times \mathbf{e}_{02}.$$

- $\xi_1 \in$ параметр, задающий отклонение направления теоретического импульса первого распадного фотона от экспериментального,
- $\xi_2 \in$ параметр, определяющий поворот отклонённого направления теоретического импульса первого распадного фотона вокруг экспериментального.

Направление теоретического импульса первого распадного фотона определяется по формуле:

$$\mathbf{e}_{0\gamma_1} = \frac{(1 - \xi_1^2) \cdot \mathbf{e}_{01}}{\xi_1^2 + 1} + \frac{2\xi_1}{\xi_1^2 + 1} \cdot \left[\mathbf{e}_{02} \frac{1 + \xi_2^4 - 6\xi_2^2}{(1 + \xi_2^2)^2} + \mathbf{e}_{03} \frac{4\xi_2 \cdot (1 - \xi_2^2)}{(1 + \xi_2^2)^2} \right].$$

Условие, что инвариантная масса этих двух фотонов должна быть равна m_π , позволяет определить абсолютную величину импульса первого фотона

$$P_{0\gamma_1} = \frac{m_\pi^2}{2 \left(\mathbf{P}_0^2 + m_\pi^2 - (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{e}_{0\gamma_1})^2 \right)} \cdot \left[(\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{e}_{0\gamma_1}) + \sqrt{\mathbf{P}_0^2 + m_\pi^2} \right]$$

и вектор импульса второго фотона

$$\mathbf{P}_{0\gamma_2} = \mathbf{P}_0 - P_{0\gamma_1} \cdot \mathbf{e}_{0\gamma_1}.$$

Теперь, используя законы сохранения энергии-импульса, мы определяем импульс и энергию оставшейся системы из двух заряженных пионов и фотона отдачи η -мезона:

$$\mathbf{P}_{\pi\pi\gamma} = -\mathbf{P}_0; \quad E_{\pi\pi\gamma} = W - P_{0\gamma_1} - |\mathbf{P}_{0\gamma_2}|.$$

- ΔP_{γ_1x} ч поправка к x -компоненте экспериментально измеренного импульса фотона отдачи,
- ΔP_{γ_1y} ч поправка к y -компоненте экспериментально измеренного импульса фотона отдачи,

- $\Delta P_{\gamma 1z}$ ч поправка к z -компоненте экспериментально измеренного импульса фотона отдачи,

Теперь полностью определён теоретический импульс $\mathbf{P}_{\gamma 1}$ фотона отдачи, а следовательно, энергия и импульс системы двух заряженных пионов

$$\mathbf{P}_{\pi\pi} = \mathbf{P}_{\pi\pi\gamma} - \mathbf{P}_{\gamma 1}; \quad E_{\pi\pi} = E_{\pi\pi\gamma} - |\mathbf{P}_{\gamma 1}|.$$

Аналогично процедуре реконструкции двух фотонов от распада π^0 , составим из экспериментальных направлений векторов импульса $\mathbf{n}_{\pi 1}$ и $\mathbf{n}_{\pi 2}$ тройку ортонормированных векторов:

$$\mathbf{e}_{\pi 1} = \mathbf{n}_{\pi 1}; \quad \mathbf{e}_{\pi 2} = \frac{\mathbf{n}_{\pi 2} - \mathbf{e}_{\pi 1} \cdot (\mathbf{e}_{\pi 1} \cdot \mathbf{n}_{\pi 2})}{\sqrt{1 - (\mathbf{e}_{\pi 1} \cdot \mathbf{n}_{\pi 2})^2}}; \quad \mathbf{e}_{\pi 3} = \mathbf{e}_{\pi 1} \times \mathbf{e}_{\pi 2}.$$

Теперь двумя параметрами зададим направление теоретического импульса первого пиона.

- ξ_3 є параметр, задающий отклонение направления теоретического импульса первого заряженного пиона от экспериментального,
- ξ_4 є угол поворота отклонённого направления теоретического импульса первого пиона вокруг экспериментального.

Направление теоретического импульса первого заряженного пиона определяется этими параметрами по формуле:

$$\tilde{\mathbf{e}}_{\pi 1} = \frac{(1 - \xi_3^2) \cdot \mathbf{e}_{\pi 1}}{\xi_3^2 + 1} + \frac{2\xi_3}{\xi_3^2 + 1} \cdot \left[\mathbf{e}_{\pi 2} \frac{1 + \xi_4^4 - 6\xi_4^2}{(1 + \xi_4^2)^2} + \mathbf{e}_{\pi 3} \frac{4\xi_4 \cdot (1 - \xi_4^2)}{(1 + \xi_4^2)^2} \right].$$

Абсолютная величина импульса первого заряженного пиона теперь может быть определена по формуле

$$P_{\pi 1} = \frac{(E_{\pi\pi}^2 - P_{\pi\pi}^2) \cdot (\mathbf{P}_{\pi\pi} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\pi 1})}{2(E_{\pi\pi}^2 - (\mathbf{P}_{\pi\pi} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\pi 1})^2)} + \frac{E_{\pi\pi} \cdot \sqrt{(E_{\pi\pi}^2 - P_{\pi\pi}^2)^2 - 4m_\pi^2 \cdot (E_{\pi\pi}^2 - (\mathbf{P}_{\pi\pi} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\pi 1})^2)}}{2(E_{\pi\pi}^2 - (\mathbf{P}_{\pi\pi} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\pi 1})^2)}$$

и вектор импульса второго заряженного пиона равен

$$\mathbf{P}_{\pi 2} = \mathbf{P}_{\pi\pi} - P_{\pi 1} \tilde{\mathbf{e}}_{\pi 1}.$$

Все частицы конечного состояния системы полностью определены. Всего получилось десять свободных переменных, что соответствует разности полного числа параметров, которыми можно описать систему из пяти частиц, и числа связей между ними.

С Параметризация события для кинематической реконструкции с функцией F_{11}

Определим семь параметров $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$, однозначно задающих импульсы и взаимные углы между импульсами так, что все 5 кинематических связей всегда точно выполняются.

- ξ_1 определяет массу системы 3π и энергию фотона отдачи:

$$m_{3\pi} = \frac{W + 3m_\pi}{2} + \frac{W - 3m_\pi}{2} \cdot \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}},$$

$$E_{\gamma 1} = \frac{W^2 - m_{3\pi}^2}{2W}.$$

- В системе покоя трёх пионов примем, что π^0 движется в направлении оси Z , а заряженные пионы разлетаются в плоскости XZ . Ещё один параметр ξ_2 определит в этой системе импульс π^0 и инвариантную массу $m_{2\pi}$ системы $\pi^+\pi^-$:

$$m_{2\pi} = \frac{m_{3\pi} + m_\pi}{2} + \frac{m_{3\pi} - 3m_\pi}{2} \cdot \frac{\xi_2}{\sqrt{1 + \xi_2^2}},$$

$$P_{\pi 0} = \frac{\sqrt{(m_{3\pi}^2 + m_\pi^2 - m_{2\pi}^2)^2 - 4m_{3\pi}^2 m_\pi^2}}{2m_{3\pi}}.$$

- ξ_3 определяет направление вылета первого заряженного пиона в системе покоя двух пионов π^\pm . Единичный вектор направления вылета $\mathbf{n}^{(+)}$ выражается через этот параметр следующим образом:

$$n_x^{(+)} = \frac{2\xi_3}{1 + \xi_3^2}; \quad n_y^{(+)} = 0; \quad n_z^{(+)} = \frac{1 - \xi_3^2}{1 + \xi_3^2}.$$

В этой системе отсчёта энергии заряженных пионов равны между собой и составляют $m_{2\pi}/2$, направления вылета противоположны.

- ξ_4 определяет полярный угол вылета первого распадного фотона в системе покоя π^0 ,
- ξ_5 определяет аксиальный угол вылета первого распадного фотона в системе покоя π^0 . Энергия каждого из распадных фотонов в системе покоя π^0 равна $m_\pi/2$, направления вылета противоположны, и единичный вектор направления вылета первого фотона выражается через ξ_4, ξ_5 следующим образом:

$$n_{\gamma 0x} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_4^2}} \cdot \frac{1-\xi_5^2}{1+\xi_5^2}; \quad n_{\gamma 0y} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_4^2}} \cdot \frac{2\xi_5}{1+\xi_5^2}; \quad n_{\gamma 0z} = \frac{\xi_4}{\sqrt{1+\xi_4^2}}.$$

- ξ_6 определяет полярный угол вылета фотона отдачи в системе покоя 3π ,
- ξ_7 определяет аксиальный угол вылета фотона отдачи в системе покоя 3π . Единичный вектор направления вылета этого фотона выражается через ξ_6, ξ_7 следующими формулами:

$$n_{\gamma rx} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_6^2}} \cdot \frac{2\xi_7}{1+\xi_7^2}; \quad n_{\gamma ry} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_6^2}} \cdot \frac{1-\xi_7^2}{1+\xi_7^2}; \quad n_{\gamma rz} = \frac{\xi_6}{\sqrt{1+\xi_6^2}}.$$

Теперь все энергии частиц и углы между ними определены, для минимизации угловой части логарифмической функции правдоподобия используется матрица поворота, получаемая аналитически [2]. Параметры, определяющие конечное состояние, заданы в различных системах отсчёта, поэтому для получения импульсов частиц в лабораторной системе необходимо применять преобразование Лоренца.

D Параметризация события для кинематической реконструкции с функцией F_{14}

Определим «собственную» систему координат события таким образом: ось X направим по импульсу π^+ , плоскость XU должна содержать в себе вектор импульса π^- , так чтобы Y -компонента импульса π^- была положительной. Таким образом для данного события система координат задаётся однозначно.

Единичный вектор $\mathbf{n}^{(+)}$ направления вылета π^+ уже определён. Теперь семью параметрами полностью определим взаимные углы всех импульсов и величины импульсов.

- ξ_1 определяет направление импульса π^- следующим образом:

$$n_x^{(-)} = \frac{\xi_1}{\sqrt{1+\xi_1^2}}, \quad n_y^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_1^2}}, \quad n_z^{(-)} = 0. \quad (24)$$

Параметр ξ_1 может быть получен из скалярного произведения векторов $\mathbf{n}^{(+)}$ и $\mathbf{n}^{(-)}$:

$$\xi_1 = \frac{(\mathbf{n}^{(+)} \cdot \mathbf{n}^{(-)})}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}^{(+)} \cdot \mathbf{n}^{(-)})^2}}.$$

- ξ_2 определяет направление

$$\mathbf{n}^{(\pm)} = \frac{\mathbf{P}^{\pm}}{|\mathbf{P}^{\pm}|}$$

суммарного импульса системы $\pi^+\pi^-$ через вектора $\mathbf{n}^{(+)}$ и $\mathbf{n}^{(-)}$:

$$\mathbf{n}^{(\pm)} = \frac{(\xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 + 1}) \cdot \mathbf{n}^{(+)} + (-\xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 + 1}) \cdot \mathbf{n}^{(-)}}{4\xi_2^2 + 2 + 2\xi_1/\sqrt{1+\xi_1^2}}. \quad (25)$$

Обратное соотношение:

$$\xi_2 = \frac{Z_2}{\sqrt{1-Z_2^2}}; \quad Z_2 = \frac{1 + (\mathbf{n}^{(+)} \cdot \mathbf{n}^{(-)})}{1 - (\mathbf{n}^{(+)} \cdot \mathbf{n}^{(-)})} \times \frac{(\mathbf{P}^{\pm} \cdot \mathbf{n}^{(+)}) - (\mathbf{P}^{\pm} \cdot \mathbf{n}^{(-)})}{(\mathbf{P}^{\pm} \cdot \mathbf{n}^{(+)}) + (\mathbf{P}^{\pm} \cdot \mathbf{n}^{(-)})}.$$

- ξ_3 и
- ξ_4 определяют направление $\mathbf{n}^{(r)}$ вылета фотона отдачи:

$$\begin{aligned} n_x^{(r)} &= \frac{\xi_3}{\sqrt{1+\xi_3^2}}; \quad n_y^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_3^2}} \cdot \frac{1-\xi_4^2}{1+\xi_4^2}; \\ n_z^{(r)} &= \frac{1}{\sqrt{1+\xi_3^2}} \cdot \frac{2\xi_4}{1+\xi_4^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

- ξ_5 определяет направление $\mathbf{n}^{(0)}$ вылета π^0 :

$$\mathbf{n}^{(0)} \sim \left(\xi_5 - \sqrt{\xi_5^2 + 1} \right) \cdot \mathbf{n}^{(r)} - \left(\xi_5 + \sqrt{\xi_5^2 + 1} \right) \cdot \mathbf{n}^{(\pm)}. \quad (27)$$

Обратное соотношение:

$$\xi_5 = \frac{Z_5}{\sqrt{1-Z_5^2}}; \quad Z_5 = \frac{1 + (\mathbf{n}^{(r)} \cdot \mathbf{n}^{(\pm)})}{1 - (\mathbf{n}^{(r)} \cdot \mathbf{n}^{(\pm)})} \times \frac{(\mathbf{n}^{(0)} \cdot \mathbf{n}^{(\pm)}) - (\mathbf{n}^{(0)} \cdot \mathbf{n}^{(r)})}{(\mathbf{n}^{(0)} \cdot \mathbf{n}^{(\pm)}) + (\mathbf{n}^{(0)} \cdot \mathbf{n}^{(r)})}.$$

Теперь определены направления движения четырёх частиц: π^+ , π^- , π^0 и фотона отдачи. Используя законы сохранения энергии-импульса, можно определить величины всех импульсов. В параметрическом виде решение может быть выражено через смешанные произведения векторов и произвольный параметр z :

$$P_+ = \lambda_+ \cdot z, \quad P_- = \lambda_- \cdot z, \quad P_0 = \lambda_0 \cdot z, \quad P_r = \lambda_r \cdot z, \quad (28)$$

где

$$\lambda_+ = (\mathbf{n}^{(0)} \cdot [\mathbf{n}^{(r)} \times \mathbf{n}^{(-)}]), \quad \lambda_- = (\mathbf{n}^{(0)} \cdot [\mathbf{n}^{(+)} \times \mathbf{n}^{(r)}]), \\ \lambda_0 = (\mathbf{n}^{(r)} \cdot [\mathbf{n}^{(+)} \times \mathbf{n}^{(-)}]), \quad \lambda_r = (\mathbf{n}^{(0)} \cdot [\mathbf{n}^{(-)} \times \mathbf{n}^{(+)}]).$$

Для определения параметра z надо решить уравнение сохранения энергии:

$$W = \lambda_r \cdot z + \sqrt{m_\pi^2 + \lambda_+^2 z^2} + \sqrt{m_\pi^2 + \lambda_-^2 z^2} + \sqrt{m_\pi^2 + \lambda_0^2 z^2}. \quad (29)$$

Знак z должен быть выбран так, чтобы произведение констант λ и z было положительным.

Решение единственное и представимо в таком виде, только если хотя бы одно смешанное произведение не равно нулю. Если все смешанные произведения равны нулю, то решений может быть бесконечное множество.

Осталось определить импульсы фотонов от распада π^0 -мезона.

- ξ_6 и
- ξ_7 определяют направление импульса первого распадного фотона

$$n_x^{(0\gamma1)} = \frac{\xi_6}{\sqrt{1+\xi_6^2}}; \quad n_y^{(0\gamma1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_6^2}} \cdot \frac{1-\xi_7^2}{1+\xi_7^2}; \\ n_z^{(0\gamma1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_6^2}} \cdot \frac{2\xi_7}{1+\xi_7^2}. \quad (30)$$

Отсюда можно вычислить величину импульса этого фотона

$$P_{0\gamma 1} = \frac{m_\pi^2}{2 \left[\sqrt{m_\pi^2 + P_0^2} - P_0 \cdot (\mathbf{n}^{(0)} \cdot \mathbf{n}^{(0\gamma 1)}) \right]} \quad (31)$$

и вектор импульса второго фотона:

$$\mathbf{P}_{0\gamma 2} = P_0 \cdot \mathbf{n}^{(0)} - P_{0\gamma 1} \cdot \mathbf{n}^{(0\gamma 1)}. \quad (32)$$

Событие полностью определено. Три угла поворота, как целого, определяются аналитической минимизацией угловой части функции правдоподобия.

Список литературы

- [1] *F.James, M.Roos.* 'MINUIT' A System for Function Minimization and Analysis of the Parameter Errors and Correlations, Computer Physics Communications 10 (1975) 343.
F.James. MINUIT. Function Minimization and Error Analysis. Reference Manual. CERN Program Library Long Writeup D506, March 1994.
- [2] *A.D.Bukin.* Optimal rotation procedure. Preprint BudkerINP 97-50, Novosibirsk, 1997.
A.D.Bukin. On the kinematic reconstruction of multiparticle events. Report at CHEP-97 (Computing in High Energy Physics), April 7-11, 1997, Berlin.
<http://www.ifh.de/CHEP97/paper/126.ps>
- [3] *J.P. Berge et al.* Rev.Sci.Instr. 32(1961) 538
- [4] *P.Spellucci.* An SQP method for general nonlinear programs using only equality constrained subproblems. Mathematical Programming 82(1998), p. 413-448.
- [5] *Fletcher R., Powell M.J.D.* A rapidly converging descent method for minimization / Comput.J. **6** (1963). P. 163.
- [6] *Fletcher R.* A new approach to variable metric algorithms / Comput.J. **13** (1970). P. 317.
- [7] *А.Д.Букин, С.И.Эйфельман.* ЭВМ в планировании и обработке эксперимента. Учебное пособие. Ред.-изд. центр НГУ, Новосибирск, 2002.
- [8] *Nelder J.A., Mead R.* A simplex method for function minimization / Comput. J. **7** (1965). P. 308.

Содержание

1	Введение	3
2	Тестовые функции	4
3	Варианты кинематической реконструкции с использованием программ безусловной минимизации	8
4	Сравнение результатов минимизации	16
5	Сравнение результатов реконструкции на выборке из 1000 событий	18
6	Итерационная процедура KINEM1	41
7	Программа DONLP2	47
8	Использование программы безусловной минимизации с вычислением градиента по аналитическим формулам	50
9	Заключение	52
A	Краткое описание программы VMMSOM	54
A.1	Общая организация программы	54
A.2	Интерфейс программы	55
A.3	Вычисление градиента	55
A.4	Метод переменной метрики пространства	57
A.5	Минимизация симплекс-методом	58
A.6	Выбор начальной точки для нового захода	60
B	Параметризация события для кинематической реконструкции с функцией F_{10}	63
C	Параметризация события для кинематической реконструкции с функцией F_{11}	66
D	Параметризация события для кинематической реконструкции с функцией F_{14}	67
	Список литературы	70

А.Д.Букин

О кинематической реконструкции событий

A.D.Bukin

On kinematic reconstruction of events

ИЯФ 2003-27

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 9.04.2003 г.

Сдано в набор 10.04.2003 г.

Подписано в печать 11.04.2003 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 4.7 печ.л., 3.8 уч.-изд.л.

Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 27

Обработано на IBM PC и отпечатано на

ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН

Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.