

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И.Будкера СО РАН

В.И. Волосов, С.С. Клёпов

ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНАЯ
РАЗНОСТНАЯ СХЕМА
ДЛЯ ФОККЕР-ПЛАНКОВСКИХ РАСЧЕТОВ
ТЕРМОЯДЕРНОГО РЕАКТОРА
НА ОСНОВЕ АСИММЕТРИЧНОЙ
ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ЛОВУШКИ

ИЯФ 2002-30

Новосибирск
2002

В.И. Волосов¹, С.С. Клёнов²

**Полностью консервативная разностная схема
для фоккер-планковских расчетов
термоядерного реактора
на основе асимметричной центробежной ловушки**

¹ Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090 Новосибирск, СО РАН

² Новосибирский государственный университет

Аннотация

Рассматривается численный метод решения двумерной задачи для уравнения Фоккера-Планка, описывающего поведение столкновительной плазмы. Реализована полностью консервативная разностная схема, которая позволяет находить решения при достаточно большом отношении времени удержания плазмы ловушке ко времени кулоновского рассеяния. Были проведены численные расчеты для модифицированной открытой магнитной ловушки типа АЦЛ.

V.I. Volosov¹, S.S. Klyonov²

**Absolutely conservative difference scheme
for Fokker-Plank calculation of a thermonuclear reactor
on the base of an asymmetric centrifugal trap**

¹ Budker Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk

² Novosibirsk State University

Abstract

A numerical method of solution of the two-dimensional problem for the Fokker-Plank equation describing behavior of collisional plasma is considered. An absolutely conservative difference scheme has been realized, which allows one to find solutions at a rather large ratio of the plasma confinement time to that of Coulomb scattering. Numerical computations for a modernized open magnetic trap of the ACT type have been carried out.

© *Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН*

Использование полностью консервативных разностных схем (ПКР схем) для решения уравнения Фоккера-Планка необходимо при решении задачи о нахождении параметров плазмы в модифицированной открытой магнитной термоядерной ловушке типа АЦЛ [1, 2, 3, 6, 7], поскольку время удержания в этой ловушке много больше характерного времени жизни частиц. В этой задаче требуется решать двумерное в пространстве скоростей уравнение Фоккера-Планка (УФП). Как было показано в [4], при достаточно большом отношении величины потенциального барьера, удерживающего плазму в ловушке, к температуре плазмы невозможно получить корректные решения этих задач, используя разностные схемы, в которых не выполняется принцип полной консервативности, поскольку аппроксимационные ошибки приводят к появлению фиктивных источников энергии и, как следствие, охлаждению плазмы в расчетах.

В данной работе произведен расчет асимметричной центробежной ловушки (АЦЛ) [2, 3] для безнейтронной реакции $p^{11}\text{B}$ с использованием ПКР схемы аналогично тому, как это было проведено в работе М. Пеккера [9]. В отличие от ранних расчетов, выполненных в [5, 9], в данном варианте ловушки время жизни отдельных компонент плазмы на два порядка (по оценке) превышает характерные (кулоновские) времена жизни этих частиц в такой системе, что требует в расчетах тщательного соблюдения консервативности схемы. Другая особенность рассматриваемой задачи – необходимость детального анализа двумерной функции распределения каждой из компонент плазмы. Эти расчеты ранее не проводились, т.к. при расчетах использовались только интегральные характе-

ристики плазмы. Поэтому потребовалась некоторая переработка схемы расчетов. Важным отличием является также то, что ранее производились расчеты в приближении однокомпонентной плазмы, в случае $p^{11}\text{В}$ реакции необходимо рассмотрение плазмы с двумя сортами ионов. Также, в отличие от ранних работ, в расчете были введены дополнительные условия для расчета потерь на тормозное излучение. Также необходимым является и изменение функции источника исходя из требований по соответственно налагаемым условиям удержания частиц в ловушке, уходу их из системы и потерям по энергии.

В данной работе была реализована полностью консервативная разностная схема с учетом перечисленных выше специальных требований, вытекающих из условий данной задачи. Приведены результаты численных расчетов. Показана применимость ПКР для расчета АЦЛ.

1. Уравнение Фоккера-Планка, описывающего временную эволюцию функции распределения частиц в пространстве скоростей в безразмерных координатах имеет вид [5, 10]

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \frac{4\pi e^4 z_\alpha^2}{m_\alpha^2} \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial v_k} \left[-\frac{\partial H_\alpha}{\partial v_k} f_\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial v_k \partial v_j} f_\alpha \right) \right] + S_\alpha, \quad (1)$$

здесь G и H – потенциалы Розенблюта, α – сорт частицы, m_α , z_α – масса и заряд частицы, f_α – функция распределения частиц по скоростям, S_α – функция источника,

$$H_\alpha = \sum_\beta h_\beta \ln \bar{\Lambda}_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta} \right) \frac{z_\beta^2}{z_\alpha^2},$$

$$G_\alpha = \sum_\beta \frac{z_\beta^2}{z_\alpha^2} g_\beta \ln \bar{\Lambda}_{\alpha\beta},$$

$\ln \bar{\Lambda}_{\alpha\beta}$ – кулоновский логарифм, $h_\beta = 2 \int f_\beta |v - v'|^{-1} d^3 v'$, $g_\beta = \int f_\beta |v - v'| d^3 v'$.

В магнитных ловушках функция распределения частиц не зависит от азимутального угла и симметрична относительно плоскости $\theta = 0$. Граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial f_\alpha(\theta v)}{\partial v} = 0 \quad \text{при} \quad v = 0,$$

$$\frac{\partial f_\alpha(\theta v)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad \text{и} \quad \pi/2,$$

$$f_\alpha = 0 \quad \text{на} \quad (R_H - 1)v^2 \sin^2 \theta - v^2 \cos^2 \theta + U_\alpha = 0,$$

где R_H – пробочное отношение [2, 3], U_α – потенциальный барьер, удерживающий частицы сорта α . Явный вид этого потенциала и функции источника определяется типом магнитной ловушки и методом инжекции.

2. Как было показано в [5, 9], построенная система разностных уравнений на равномерной сетке $V_j = j\delta V$, $\theta_k = k\delta\theta$, аппроксимирующих УФП (1), является неполностью консервативной, т.к. не имеет разностного аналога закона сохранения энергии. Энергия сохраняется с точностью δV^2 . Нетрудно видеть, что аппроксимационные ошибки по V являются фиктивными источниками энергии, которые приводят к охлаждению плазмы.

3. Для построения ПКР проанализируем УФП в прямоугольных координатах, как это было сделано в [9]: Выпишем в явном виде производные от функций G и H :

$$\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial v_i \partial v_j} = \int f_\alpha(v') \frac{\delta_{ij} (v - v')^2 - (v_i - v'_i)(v_j - v'_j)}{|v - v'|^3} dv',$$

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial v_i} = -2 \int f_\alpha(v') \frac{(v_i - v'_i)}{|v - v'|^3} dv',$$

Разностное уравнение, прямо соответствующее форме (1), имеет вид

$$(f_\alpha)_t = \sum_{i,j} \left(-\frac{\partial H_\alpha}{\partial v_i} f_\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial v_i \partial v_j} f_\alpha \right)_{i,j} \right),$$

где $(f)_i$ означает разностную производную по скорости v_x , например:

$$(u)_x = (u(v_x + h, v_y, v_z) - u(v_x - h, v_y, v_z)) / (2h) ,$$

$(f)_t$ означает разностную производную по времени: $(f)_t = (f(t + \tau) - f(t)) / \tau$. Будет ли эта схема консервативной, зависит от того, каким образом определить производные $\partial H_\alpha / \partial v_i$ и $\partial^2 G_\alpha / \partial v_i \partial v_j$. В самом деле, выражения для изменения энергии и импульса по времени:

$$\left(\sum_v \frac{1}{2} f v^2 h^3 \right)_t = \sum_v \left(\sum_i v_i \frac{\partial H_\alpha}{\partial v_i} + \frac{1}{2} \Delta G_\alpha \right) f_\alpha h^3 ,$$

$$\left(\sum_v f v_i h^3 \right)_t = \sum_v \left(\frac{\partial H_\alpha}{\partial v_i} f_\alpha h^3 \right) .$$

Равенство нулю правых частей можно во всяком случае обеспечить, если вычислять производные $\partial H_\alpha / \partial v_i$ и $\partial^2 G_\alpha / \partial v_i \partial v_j$, как аппроксимацию интегралов.

4. Выпишем разностную схему, которая использовалась для расчетов параметров плазмы в АЦЛ. Так как задача является аксиально-симметричной, то рассматривается в сферических переменных V, θ, φ (зависимость от φ отсутствует). УФП в этих переменных для каждой из компонент плазмы переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{V^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial V} \left[-V \tilde{H}_\alpha f_\alpha + \frac{1}{2V} \frac{\partial}{\partial V} (A_\alpha f_\alpha) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[B_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + C_\alpha f_\alpha + D_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial V} \right] \right\} + S_\alpha , \end{aligned} \quad (2)$$

Функции определяются двумерными интегралами по V и θ . Аппроксимируя эти интегралы двумерными суммами, несложно построить разностную схему, соответствующую (2), которая сохраняет энергию и число частиц. Функции $h_\alpha, \tilde{h}_\alpha, g_\alpha$ (а также производные g_α по V) можно вычислять, используя разложение в ряды по полиномам Лежандра:

$$h_{\alpha}(V, \theta) = \sum_{l=0}^L \frac{4\pi}{2l+1} \left(V^{-(1+l)} N_{\alpha l} + V^l M_{\alpha l} \right) P_l(\cos \theta),$$

$$\tilde{h}_{\alpha}(V, \theta) = \sum_{l=0}^L 4\pi \left(V^l M_{\alpha l} - V^{-(1+l)} N_{\alpha l} \right) P_l(\cos \theta),$$

$$g_{\alpha}(V, \theta) = \sum_{l=0}^L \frac{4\pi}{2l+1} \left[\frac{1}{2l+3} (V^{-(l+1)} E_{\alpha l} + V^{l+2} M_{\alpha l}) - \frac{1}{2l-1} (V^{1-l} N_{\alpha l} + V^l R_{\alpha l}) \right] P_l(\cos \theta),$$

$$\frac{\partial g_{\alpha}}{\partial V} = \sum_{l=0}^L \frac{4\pi}{2l+1} \left[\frac{1}{2l+3} \left((l+2)V^{l+1} M_{\alpha l} - (l+1)V^{-(l+2)} E_{\alpha l} \right) - \frac{1}{2l-1} \left(lV^{l-1} R_{\alpha l} - (l-1)V^{-l} N_{\alpha l} \right) \right] P_l(\cos \theta),$$

$$\frac{\partial^2 g_{\alpha}}{\partial V^2} = \sum_{l=0}^L \frac{4\pi}{2l+1} \left[\frac{(l+2)(l+1)}{2l+3} (V^l M_{\alpha l} + V^{-(l+3)} N_{\alpha l}) - \frac{(l-1)l}{2l-1} (V^{l-2} R_{\alpha l} + V^{-(l+1)} N_{\alpha l}) \right] P_l(\cos \theta), \quad (3)$$

где:

$$M_{\alpha l}(V) = \int_V^{\infty} f_{\alpha l}(V') V'^{1-l} dV', \quad N_{\alpha l}(V) = \int_0^V f_{\alpha l}(V') V'^{2+l} dV',$$

$$R_{\alpha l}(V) = \int_V^{\infty} f_{\alpha l}(V') V'^{3-l} dV',$$

$$E_{\alpha l}(V) = \int_0^V f_{\alpha l}(V') V'^{4+l} dV',$$

$$f_{\alpha l}(V) = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi f_\alpha(V, \theta) \sin \theta d\theta.$$

Верхний предел L в суммах, вообще говоря, равен ∞ . При подстановке функций (3) с конечным L в (2) получится приближенное дифференциальное уравнение. Существенным для нас является то обстоятельство, что это приближенное уравнение сохраняет энергию при любом L (сохранение числа частиц для этого уравнения очевидно и обеспечивается его дивергентной формой). В самом деле:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \sum_\alpha \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} f_\alpha d\vec{V} = \sum_\alpha \int m_\alpha V_\alpha^2 \tilde{H}_{\alpha L} f_\alpha d\vec{V} \\ &= 2\pi \sum_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) m_\alpha \sum_{l=0}^L \frac{4\pi}{2l+1} \int_0^\infty \left\{ \left(\int_{-1}^1 f_\alpha(V, \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) \right) \right. \\ & \times \left[\left(l + \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \right) V^{2+l} M_{\beta l} - \left(l + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right) V^{1-l} N_{\beta l} \right] \left. \right\} dV \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \frac{4\pi e^4 z_\alpha^2 z_\beta^2 (m_\alpha + m_\beta)}{m_\alpha m_\beta} \\ & \times \left(\sum_{l=0}^L \frac{16\pi^2}{(2l+1)^2} \int_0^\infty \left[\left(l + \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \right) f_{\beta l} N_{\alpha l}(V) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(l + \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \right) f_{\alpha l} N_{\beta l} \right] V^{1-l} dV \right) = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Итак, исходным для построения разностной схемы берется уравнение (2) с коэффициентами переноса (3), вычисляемыми с помощью (4). Для решения этой системы вводится равномерная разностная сетка по V , θ , t (определенные в области $0 \leq V \leq V_0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $t \geq 0$): $V_i + 1/2 = (i + 1/2)h_V$, $\theta_j + 1/2 = (j + 1/2)h_\theta$, $t_n = n\tau$. Введем вспомогательные сеточные функции:

$$R_{\alpha,i,j+1/2}^n = -\frac{1}{2} \left(V_{i+1/2} \tilde{H}_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^n + V_{i-1/2} H_{\alpha,i-1/2,j+1/2} \right) \\ + \frac{1}{(x_{i+1/2} + x_{i-1/2}) h_V} \left(A_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^n f_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^n \right. \\ \left. - A_{\alpha,i-1/2,j+1/2}^n f_{\alpha,i-1/2,j+1/2}^n \right) \quad \text{при } i \geq 1,$$

$$R_{\alpha,0,j+1/2} \equiv 0,$$

$$-P_{\alpha,i+1/2,j}^n = \frac{1}{2h_\theta} \left(B_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^n + B_{\alpha,i+1/2,j-1/2}^n \right) \quad (5)$$

$$\times \left(f_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^n - f_{\alpha,i+1/2,j-1/2}^n \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(C_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^n f_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^n + C_{\alpha,i+1/2,j-1/2}^n f_{\alpha,i+1/2,j-1/2}^n \right)$$

$$+ \frac{1}{8h_V} \left(D_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^n + D_{\alpha,i+1/2,j-1/2}^n \right)$$

$$\times \left(f_{\alpha,i+3/2,j+1/2}^n + f_{\alpha,i+3/2,j-1/2}^n - f_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^n - f_{\alpha,i-1/2,j-1/2}^n \right)$$

$$\text{при } 2J - 1 \geq j \geq 1,$$

$$P_{\alpha,i+1/2,0}^n = P_{\alpha,i+1/2,2J}^n \equiv 0.$$

Искомая разностная схема в обозначениях (5) имеет вид:

$$\frac{f_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^{n+1} - f_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^n}{\tau} \\ = \frac{1}{V_{i+1/2}^2} \left[\frac{R_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^n - R_{\alpha,i,j+1/2}^n}{h_V} + \frac{P_{\alpha,i+1/2,j}^n - P_{\alpha,i+1/2,j}^n}{\sin \theta_{j+1/2} h_\theta} \right]. \quad (6)$$

Закон сохранения числа частиц выполняется автоматически:

$$\frac{\Delta n_\alpha}{\tau} = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{2J-1} \frac{f_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^{n+1} - f_{\alpha,i+1/2,j+1/2}^n}{\tau} \frac{m_\alpha V_{i+1/2}^4}{2} \\ \times \sin \theta_{j+1/2} h_V h_\theta = 0.$$

Проверим закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{\tau} &= \sum_{\alpha} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{2J-1} \left(f_{\alpha, i+1/2, j+1/2}^{n+1} - f_{\alpha, i+1/2, j+1/2}^n \right) \\ &\quad \times \frac{m_{\alpha} V_{i+1/2}^4}{2} \sin \theta_{j+1/2} h_V h_{\theta} \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{2J-1} \frac{m_{\alpha} V_{i+1/2}^2}{2} H_{\alpha, i+1/2, j+1/2}^n f_{\alpha, i+1/2, j+1/2}^n \sin \theta_{j+1/2} h_V h_{\theta}. \end{aligned}$$

Последняя сумма, будучи аппроксимацией последнего интеграла в цепочке равенств (4), равна нулю. При расчетах число удерживаемых членов в разложениях (3) не должно превосходить числа точек по θ .

5. Расчеты с использованием выше приведенной схемы, позволяют получить много более детальную информацию о функции распределения, чем проведенные вычисления в [9]. Для демонстрации возможностей этой схемы ниже приведены результаты расчетов, выполненных на основе разностных уравнений (6), для $p^{11}B$ реакции в АЦЛ системе для некоторых параметров реактора. Оптимизации по параметрам не проводилось.

В заключение авторы благодарят Е.В. Бобуха за существенный вклад в работу над программой расчетов.

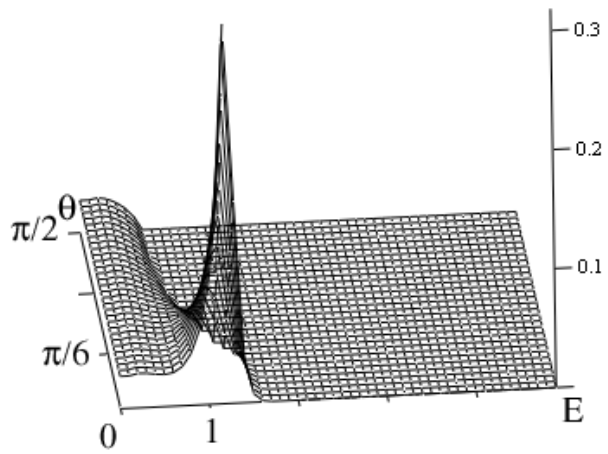


Рис. 1: Функция распределения протонов.

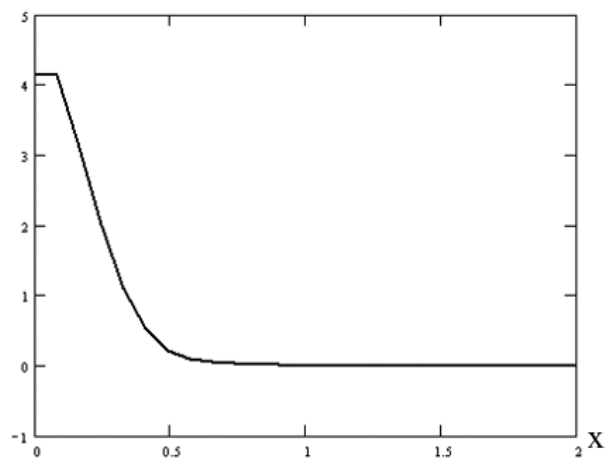


Рис. 2: Функция распределения ионов ^{11}B в зависимости от поперечной энергии при $\theta = 0$.

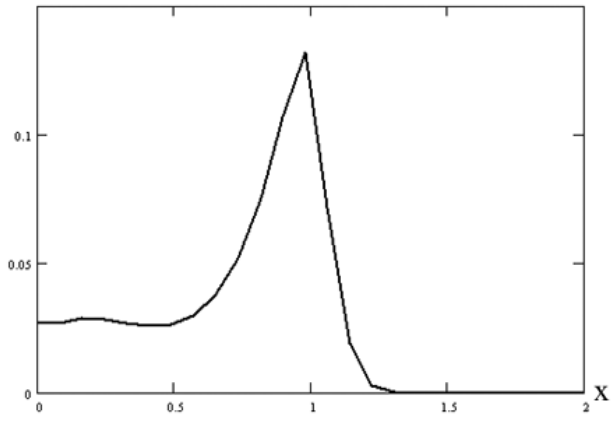


Рис. 3: Функция распределения протонов в зависимости от поперечной энергии при $\theta = 0$.

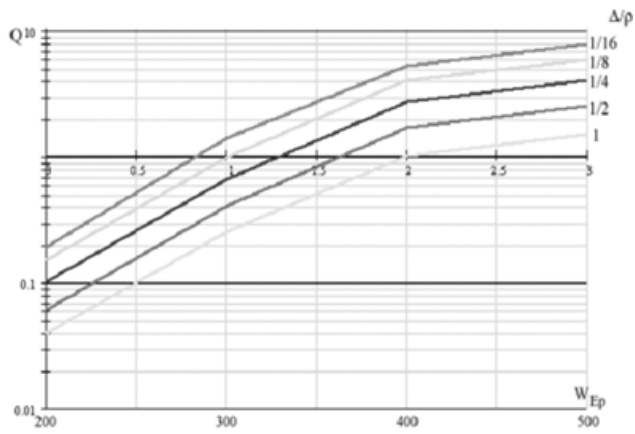


Рис. 4: Выход реакции в зависимости от энергии инжекции на протон и от параметра δ/ρ при $R_H = 4$, $R_{H\alpha} = 0.85$, $R_{r\alpha} = 5$.

Список литературы

- [1] *Буджер Г.И.* Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в электрическую. В сб. "Физ. Плазмы и пробл. Управляемых термоядерных реакций". Т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, с.3-31.
- [2] *Волосов В.И.* Асимметричная центробежная ловушка. Физика плазмы, 1997, т.23, №9, с.811-815.
- [3] *Volosov V.I.* Some problems of magnetic fusion reactor and asymmetrical centrifugal magnetic confinement device. Transaction of Fusion Technology, Jan. 1999, v.35, p.258-262.
- [4] *Волосов В.И., Пеккер М.С.* О точности численных расчетов потерь плазмы из открытых магнитных ловушек. В сб. "Числ. методы механ. сплошной среды". Т.10. Вып.1. Новосибирск: Наука, 1979, 11, с.45-56.
- [5] *Волосов В.И., Пеккер М.С.* О численных методах решения двумерной задачи для уравнения Фоккера-Планка. Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т.20, с.1341-1346.
- [6] *Димов Г.И., Закайдаков В.В.* Кишиневский М.Е. Термоядерная ловушка с двумя пробками. Физ. Плазмы, 1976, 2, №4, с.597-610.
- [7] *Lehnert B.* Rotating plasmas. Nucl, Phys., 1971, 11, p.485-533.
- [8] *Пеккер М.С.* Полностью консервативная разностная схема для двумерного уравнения Фоккера-Планка. Новосибирск, 1980, с.11 (Препринт ИЯФ 80-38).
- [9] *Пеккер М.С.* Продольное удержание в магнитной ловушке с вращающейся плазмой (численный расчет). Новосибирск, 1983, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. с.41-46.
- [10] *Rosenbluth M.N., MacDonald W.M., Judd D.L.* Fokker-Planck equation for an inverse-square force. Phys. Rev., 1957, 107, №1, p.1-6.

В.И. Волосов, С.С. Клёнов

**Полностью консервативная разностная схема
для фоккер-планковских расчетов
термоядерного реактора
на основе асимметричной центробежной ловушки**

V.I. Volosov, S.S. Klyorov

**Absolutely conservative difference scheme
for Fokker-Plank calculation of a thermonuclear reactor
on the base of an asymmetric centrifugal trap**

ИЯФ 2002-30

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 15.05.2002 г.

Сдано в набор 16.05.2002 г.

Подписано в печать 17.05.2002 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 0.7 печ.л., 0.6 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 30

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.