

В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков

ДИФФУЗИЯ В ГЛАДКИХ
ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

ИЯФ 2001-59

Новосибирск
2001

В работе исследуется семейство моделей, заданное гладким каноническим 2D-отображением, зависящим от двух параметров. Представлены предварительные результаты численных экспериментов, которые наглядно демонстрируют существенное подавление глобальной диффузии в широкой области значений величины возмущения за счет относительно нового и мало известного явления сохранения сепаратрис резонансов и других инвариантных кривых в условиях сильного локального хаоса движения. Такое общее подавление диффузии имеет место несмотря на то, что инвариантные кривые сохраняются лишь для счетного множества значений параметра нулевой меры. Получены и подтверждены численно простые уточненные оценки для скорости диффузии в гладких системах без инвариантных кривых. Найдено полуэмпирическое выражение в безразмерных переменных для основной границы подавления диффузии в семействе моделей с инвариантными кривыми. Проведен статистический анализ результатов и получено интегральное распределение вероятности подавления диффузии.

Diffusion in smooth Hamiltonian systems

B. V. Chirikov, V. V. Vecheslavov

A family of models specified by the smooth canonical 2D-mapping depending on the two parameters is studied. Preliminary results of numerical experiments are presented which graphically demonstrate significant suppression of the global diffusion in a wide range of the perturbation strength. This is related to a new and relatively less-known phenomenon of the conservation of separatrices and of other invariant curves among a strong local chaos of motion. Such a general diffusion suppression persists even though the invariant curves exist for a countable set of the parameter values of zero measure only. Simple improved estimates for the diffusion rate in the smooth systems without invariants curves are derived and numerically confirmed. A semiempirical relation in dimensionless variables for the main border of the diffusion suppression in the family of models with invariant curves is found. Statistical analysis of the results is carried out, and the integral probability distribution for the diffusion suppression is obtained.

PACS 05.45.+b

Ключевые слова: Гамильтонова система; Сепаратриса резонанса; Фрактальная диффузия; Инвариантные кривые.

Email: vecheslavov@inp.nsk.su, Email: chirikov@inp.nsk.su

© Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, Россия

1 Введение

Одним из основных представлений современной теории нелинейных гамильтоновых систем является утверждение о том, что расщепление сепаратрисы нелинейного резонанса и образование на ее месте хаотического слоя в типичной (то есть неинтегрируемой) системе происходят при почти любом возмущении. Считается также, что именно сепаратрисы разрушаются в первую очередь, поскольку период движения по ним бесконечен и взаимодействие нелинейных резонансов в их окрестности всегда существенно (см., например, [1,2,3]). По мере роста возмущения разрушаются и исчезают инвариантные кривые (поверхности), что, как правило, приводит в конце концов к перекрытию хаотических слоев всех резонансов и возникновению так называемого "глобального" хаоса.

С самого начала было ясно, что условия образования глобального хаоса и возможность диффузии по всей единой хаотической компоненте в фазовом пространстве зависят не только от величины, но и от гладкости возмущения. Последнюю удобно характеризовать скоростью убывания Фурье-амплитуд. Для аналитического возмущения убывание является экспоненциальным. В этом случае всегда существует пороговая величина возмущения ε_{tr} и глобальная диффузия возникает лишь при $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{tr}$. Если же $\varepsilon \lesssim \varepsilon_{tr}$, то хаос локализован в относительно узких хаотических слоях (которые образуются при любом $\varepsilon > 0$) и глобальная диффузия при числе степеней свободы консервативной системы $\mathcal{N} \leq 2$ невозможна.

Заметим, что при $\mathcal{N} > 2$ глобальная диффузия может иметь место, но только для весьма специальных начальных условий (диффузия Арнольда, см., например, [1]). Скорость этой диффузии и мера ее области при $\varepsilon \rightarrow 0$ убывают экспоненциально по параметру $1/\varepsilon$.

Характер движения существенно изменяется для гладкого возмущения гамильтониана, Фурье-амплитуды которого убывают как некоторая степень $\beta+1$ их номера n (см., например, [5] и ссылки там). В простейшем случае 2D-отображения, которым мы и ограничимся в настоящей рабо-

те, порог $\varepsilon_{tr} > 0$ возникновения глобального хаоса существует всегда при $\beta > \beta_{cr} = 3$. Это значение критической гладкости получено из простой оценки в [5] (см. также раздел 3 ниже), однако оно еще требует проверки в численных экспериментах. Насколько нам известно, строгое доказательство удалось получить только для $\beta_{cr} = 5$ (см. [6], где было также высказано предположение, что на самом деле $\beta_{cr} = 4$). В настоящей работе такая неопределенность не существенна, поскольку для рассматриваемой нами модели (раздел 2) неравенство $\beta = 2 < \beta_{cr}$ заведомо выполняется. Интересно отметить, что именно для этого показателя $\beta = 2$ ситуация долгое время оставалась неясной.

Уже в ранних численных экспериментах с системами, гладкость которых ниже критической наряду с глобальной диффузией наблюдались случаи, когда траектории в течение весьма длительного времени счета не выходили за пределы некоторой ограниченной части фазового пространства [7,8]. Однако, это было не более чем подозрение на подавление или ослабление диффузии. Строгий результат здесь был получен Булитом [9], который для симметричного кусочно-линейного 2D-отображения (СКЛО, $\beta = 2$, см. (2.1), (2.2) ниже) доказал существование глобальных инвариантных кривых как с иррациональными, так и с рациональными числами вращения (см. также [10] и раздел 2). Именно глобальные инвариантные кривые имеют полную протяженность по фазе, что исключает неограниченную диффузию по действию. В работе [9] впервые было найдено, что среди инвариантных кривых с рациональными числами вращения присутствуют также (при специальных значениях параметра возмущения) неразрушенные сепаратрисы нелинейных резонансов. Особенно важным и неожиданным оказалось то, что система при этом отнюдь не становится интегрируемой, однако сепаратриса не только сохраняется в условиях сильного хаоса, но и запирает глобальную диффузию.

Интересно, что значительно позже и для той же самой модели аналогичная теорема была доказана Овсянниковым [11]. Он не только указал счетное множество значений параметра, при которых сепаратриса целого резонанса сохраняется, но и нашел для нее явное (и очень простое) выражение. Хотя Овсянников доказал свою теорему независимо, такое совпадение моделей не случайно, поскольку решение линейного (хотя бы и кусочно) отображения существенно упрощает задачу. Отметим, что полное решение даже линейного отображения возможно только при сохранении сепаратрисы, так как в противном случае две ветви расщепленной сепаратрисы образуют случайные траектории. По этой же причине модель СКЛО не может быть упрощена до чисто линейного отображения типа отображения Арнольда, в котором сепаратрисы нелинейных резонан-

сов всегда расщеплены. Математические работы Булита и Овсянникова ограничены поэтому исследованием только самих инвариантных кривых нового типа, первые примеры которых были предсказаны в [10].

Именно теорема Овсянникова послужила для нас толчком к интенсивному исследованию СКЛО и его модификаций [12-15]. К сожалению, эта теорема не была опубликована автором (ее полный текст содержится в приложении к работе [14]). Вместо этого в [16] была предпринята попытка обобщить теорему на произвольные значения параметра отображения, что в общем случае противоречит результатам работы [9] и нашим численным экспериментам.

Каждой инвариантной кривой в СКЛО (в том числе нового типа с рациональным числом вращения, включая сепаратрисы целых и дробных резонансов) отвечает определенное значение параметра возмущения. Множество всех таких чисел является канторовым (см. рис.2,3 в [9]) и имеются интервалы значений параметра, где глобальная диффузия определенно имеет место (один такой интервал прямо указан в [9], см. также раздел 5 ниже). Однако, поскольку плотность этого множества достаточно высока, то можно ожидать сильное (хотя и не полное) подавление глобальной диффузии при любом значении параметра возмущения. Исследованиям в этом направлении и посвящена настоящая работа.

2 Модель

Выбранная модель является двумерным отображением в канонических переменных действие p - фаза x

$$\bar{p} = p + Kf(x), \quad \bar{x} = x + \bar{p} \pmod{1}. \quad (2.1)$$

Здесь $K = \varepsilon > 0$ - параметр возмущения (не обязательно малый), а "сила" $f(x)$ имеет форму антисимметричной ($f(-y) = -f(y)$, $y = x - 1/2$) кусочно-линейной "пилы" с периодом 1.

Мы будем исследовать сразу целое семейство пилообразных возмущений¹ (см. рис.1 в [15])

$$f(x) = \begin{cases} 2x/(1-d), & \text{если } |x| \leq (1-d)/2, \\ -2y/d, & \text{если } |y| \leq d/2, \end{cases} \quad (2.2)$$

¹аналогичное но не идентичное модели в [9]

где $y = x - 1/2$, а $0 \leq d \leq 1$ - расстояние между "зубьями" пилы $|f(x)| = 1$, расположенными в точках $y = y_{\pm} = \pm d/2$. Наиболее изученный частный случай СКЛО соответствует значению параметра перекося $d = 1/2$.

Нас интересует глобальная диффузия по импульсу, которая подавляется инвариантными кривыми, имеющими полную протяженность по фазе. Мы называем их глобальными и в дальнейшем будем иметь ввиду только их, если это не оговорено специально. Заметим, что такие инвариантные кривые (в том числе неразрушенные сепаратрисы целых и дробных резонансов) при специальных значениях K имеют место для любой величины параметра перекося из интервала $0 < d < 1$ [9,12-15].

При $0 < d < 1$ сила (2.2) может быть представлена своим рядом Фурье

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{f_n}{n^\beta} \sin(2\pi nx), \quad (2.3)$$

где

$$f_n = -\frac{2}{\pi^2} \frac{\cos(n\pi) \sin(n\pi d)}{d(1-d)}, \quad \beta = 2. \quad (2.4)$$

Из последних формул предельным переходом для разрывной пилы $d \rightarrow 0$ получаем

$$f_n = -\frac{2}{\pi} \cos(n\pi), \quad \beta = 1. \quad (2.5)$$

Видно, что показатель гладкости системы β в пределе $d = 0$ на единицу меньше его значения внутри интервала и оба они меньше критической величины $\beta_{cr} = 3$ (второй предел $d \rightarrow 1$ в данной работе нас не интересует, поскольку движение при этом становится регулярным, см. [15]).

Отображение (2.1) может быть представлено в виде непрерывной системы с гамильтонианом, явно зависящим от времени и с возмущением в форме толчков [1,2,3,14]:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + K \sum_{n \geq 1} \frac{f_n}{2\pi n^{\beta+1}} \cos(2\pi nx) \delta_1(t), \quad (2.6)$$

где $\delta_1(t) = 1 + 2 \sum_{m \geq 1} \cos(2\pi mt)$ обозначает δ -функцию периода 1. Отметим, что выбор δ -функции в указанном виде фиксирует также единицу времени непрерывной системы, которая равна одной итерации исходного отображения.

Каждое из слагаемых двойной суммы в (2.6) пропорционально $\cos[2\pi(n x - m t)]$ с целыми m, n и определяет "свой" первичный нелинейный резонанс (подробности см., например, в [1]). В предположении, что

эти резонансы не взаимодействуют друг с другом любой из них описывается гамильтонианом "маятника"

$$H_{nm}(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \frac{K f_n}{2\pi n^{\beta+1}} \cos[2\pi(nx - mt)]. \quad (2.7)$$

Если ввести резонансное значение импульса $p_{nm} = \dot{x}_{nm} = m/n$, то в новых переменных $\tilde{x} = nx - mt$ и $\tilde{p} = (p - p_{nm})/n$ каждый такой одиночный резонанс оказывается консервативной системой со строго ограниченным по импульсу движением. Возвращаясь к старым переменным, определяем частоту фазовых колебаний

$$\Omega_n^2 = \frac{2\pi K f_n}{n^{\beta-1}} \quad (2.8)$$

и полную ширину резонанса по импульсу

$$(\delta p)_n = 4\sqrt{\frac{K f_n}{2\pi n^{\beta+1}}}. \quad (2.9)$$

В следующем разделе приведенные здесь соотношения будут использованы для получения весьма простых и неожиданно аккуратных оценок скорости диффузии для гладкого отображения без инвариантных кривых.

3 Оценки скорости диффузии

Наши оценки основаны на критерии перекрытия нелинейных резонансов (см. [1-3,5]), который в простейшей форме имеет вид

$$\mathcal{P} \sim 1, \quad (3.1)$$

где

$$\mathcal{P} \sim \sum_{n \geq 1} n(\delta p)_n = 4\sqrt{\frac{K f_0}{2\pi}} \mathcal{S}, \quad \mathcal{S} = \sum_{n \geq 1} n^{(1-\beta)/2} \quad (3.2)$$

есть приближенная сумма ширин (2.9) всех первичных резонансов в единичном интервале по импульсу p (для простоты мы положили, что все коэффициенты Фурье $f_n = f_0$ равны).

Сразу же отметим, что эта сумма расходится при $\beta \geq 3$, что и определяет указанное выше значение критической гладкости $\beta_{cr} = 3$ в рассматриваемом приближении. В этом случае глобальная диффузия происходит

при любом K , в том числе и при $K \rightarrow 0$, а ее скорость зависит, вообще говоря, от всех резонансов (2.7) и описывается весьма сложными и громоздкими выражениями (ср. [17]). Наши простые оценки ниже основаны, как и в [5], на следующей гипотезе, которая представляется нам физически правдоподобной и подтверждается ниже численными экспериментами. Конкретно мы предполагаем, что средняя скорость глобальной диффузии при $\beta \leq 3$ определяется, в основном, конечным числом резонансов вплоть до некоторой критической гармоники $n = n_c$, которые (в комбинации с разными значениями m в (2.7)) и обеспечивают перекрытие (3.1). Действительно, более сильные резонансы ($n < n_c$) вызывают более быструю диффузию, однако она является только локальной из-за неполного перекрытия этих резонансов. С другой стороны, более слабые резонансы ($n > n_c$), хотя и обеспечивают перекрытие с избытком, однако скорость диффузии на них

$$D = \frac{\overline{(\delta p)^2}}{t} \sim \frac{(\delta p)_n^2 \Omega_n}{2\pi} \quad (3.3)$$

быстро падает с n . Здесь в качестве динамических масштабов диффузии выбраны полная ширина резонанса (2.9) и период фазовых колебаний на нем $2\pi/\Omega_n$ (2.8).

Заменяя в (3.2) сумму приближенно интегралом по $n \gg 1$, получаем

$$\mathcal{S} \approx \frac{2}{3-\beta} n^{\frac{3-\beta}{2}}. \quad (3.4)$$

Из (3.2) номер критической гармоники равен

$$n_c \sim \left[\frac{\pi (3-\beta)^2}{32 K f_0} \right]^{\frac{1}{3-\beta}}. \quad (3.5)$$

Наконец, для скорости диффузии из (3.3) находим

$$D_{\beta < 3}(K) \sim \frac{4\sqrt{2\pi}}{\pi^2} \left(\frac{32}{\pi(3-\beta)^2} \right)^{\frac{3\beta+1}{2(3-\beta)}} (K f_0)^{\frac{5}{3-\beta}}. \quad (3.6)$$

В общем случае это выражение дает лишь оценку по порядку величины. Однако, мы сознательно оставляем в нем различные численные коэффициенты, рассчитывая существенно улучшить точность этой оценки путем введения эмпирических поправочных множителей. Это будет сделано в следующем разделе при рассмотрении простого и хорошо изученного уже ранее примера такой диффузии.

Отметим, что все полученные оценки справедливы только при $K \ll 1$. Это связано с тем, что диффузия в рассматриваемой системе имеет, как отмечалось выше, два динамических масштаба:

$$(\delta p)_c \sim 4 \sqrt{\frac{K f_0}{2\pi n_c^{\beta+1}}} \sim K^{\frac{2}{3-\beta}} \lesssim 1 \quad (3.7)$$

по импульсу (2.9) и

$$t_c \sim \sqrt{\frac{2\pi n_c^{\beta-1}}{K f_0}} \sim K^{-\frac{1}{3-\beta}} \gtrsim 1 \quad (3.8)$$

по времени (из (2.8)). Оба масштаба ограничены из-за периодичности p и дискретности t . Отсюда, как следствие, ограничение по параметру системы:

$$K \lesssim 1. \quad (3.9)$$

То же самое ограничение возникает и из условия на критическую гармонику (3.5): $n_c \gtrsim 1$. При $K \ll 1$ время затухания корреляций возмущения $t_c \gg 1$, при $K \sim 1$ это время сокращается до $t_c \sim 1$, а при $K \gg 1$ корреляции между соседними толчками становятся вообще пренебрежимо малыми. В последнем случае скорость диффузии определяется просто среднеквадратичным возмущением

$$D_{K \rightarrow \infty} = K^2 \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{K^2}{3} \quad (3.10)$$

и для всего нашего семейства отображений (2.1),(2.2) не зависит от параметра перекоса d .

4 Численные эксперименты для модели без инвариантных кривых

Рассмотрим вначале простейший пример гладкого 2D-отображения, который соответствует в нашем семействе (2.2) параметру $d = 0$. В [15] показано, что в этом предельном случае инвариантные кривые полностью отсутствуют и глобальная диффузия происходит при любом положительном $K > 0$. Диффузия в такой модели была подробно исследована численно и аналитически в довольно старой работе [17], авторы которой, по-видимому, не знали о полученных к тому времени результатах Булита

[9] и потому не опасались никакого "подвоха" вроде сохранившихся сепаратрис; им повезло. Заметим, что нормировки как скорости диффузии, так и параметра возмущения K в этой работе и у нас различаются, поэтому ниже приводятся данные из работы [17], пересчитанные к нашей модели.

По формуле (3.6) с $\beta = 1$ и $f_0 = 2/\pi$ (см. (2.5)) имеем $D_{\beta=1}(K) = 0.84K^{2.5}$, тогда как полученный в [17] численный результат (после пересчета) равен

$$D_1(K) = A_1 K^{B_1} = C_D D_{\beta=1}(K), \quad A_1 = 0.568 \pm 0.0034, B_1 = 2.494 \pm 0.0008, \quad (4.1)$$

где поправочный коэффициент к скорости диффузии $C_D = 0.68$. В дальнейшем мы принимаем $B_1 = 2.5$, также как это сделали авторы [17] при сравнении со своей теорией.

Поправка C_D к нашей теоретической оценке невелика, однако она очень сильно зависит от показателя гладкости β . Обсудим это на примере $\beta = 2$. Из (3.6) имеем $D_{\beta=2}(K) = 1199K^5$, а наш численный результат (см. (5.1) и рис.2 ниже) $D_2(K) \approx 0.8K^5$. Сравнение этих чисел дает поправочный коэффициент $C_D = 6.7 \times 10^{-4}$ (!), что лишает его какого-либо разумного физического смысла.

Все дело оказывается в том, что главное приближение при построении оценок связано не непосредственно со скоростью диффузии D , а с промежуточным результатом при формулировке условия перекрытия резонансов (3.1),(3.2). В таком виде это условие всегда переоценивает эффект перекрытия, поскольку в него входят максимальные ширины сепаратрис резонансов, тогда как на деле сепаратрисы могут иметь взаимные сдвиги по фазе. Для учета этого важного обстоятельства следует вместо C_D ввести другую поправку C_s в виде

$$\mathcal{P} = C_s > 1. \quad (4.2)$$

Существенная разница с поправкой C_D в (4.1) состоит в том, что новая поправка C_s возводится в некоторую степень, которая зависит от β и может быть весьма большой:

$$D_{\beta < 3}(K) \approx \frac{4\sqrt{2}\pi}{\pi^2} \left(\frac{32}{\pi(3-\beta)^2 C_s^2} \right)^{\frac{3\beta+1}{2(3-\beta)}} (K f_0)^{\frac{5}{3-\beta}}. \quad (4.3)$$

Для того, чтобы получить теперь $C_D \approx 1$ для обсуждаемого случая $\beta = 2$, достаточно взять $C_s \approx 2.84$ (см. (5.1)), что показывает высокую эффективность такого способа введения эмпирической поправки в оценки по порядку величины.

Однако, для другого значения $\beta = 1$ соответствующая поправка значительно меньше: $C_s \approx 1.2$. Причина этого кроется в данном случае в том, что при $\beta = 1$ спектр возмущения содержит все гармоники, тогда как при $\beta = 2$ остаются только нечетные гармоники. В результате сумма (3.2) уменьшается в два раза. Этот дополнительный эффект легко учесть в (4.3) заменой $C_s \rightarrow 2C_s$. Необходимая величина поправки для $\beta = 2$ снижается при этом с 2.84 до 1.42 что уже совсем близко к указанному выше значению $C_s \approx 1.2$ для $\beta = 1$.

Основные результаты исследования простейшей модели с $d = 0$ представлены на рис.1 вместе с найденной в [17] подгоночной прямой (4.1), которая также неплохо описывается нашей простой теорией (4.3) с небольшой поправкой $C_s = 1.2$. Оба выражения хорошо согласуются с эмпирическими данными вплоть до $K \sim 1$, где происходит переход к режиму (3.10).

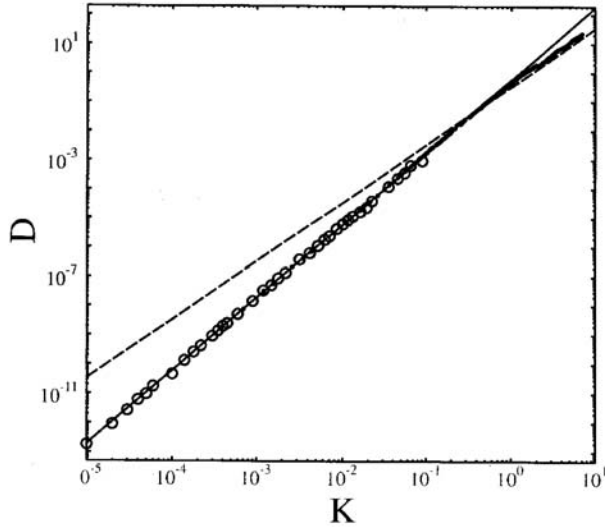


Рис. 1: Скорость диффузии $D(K)$ в модели (2.2) с параметром $d = 0$ (без инвариантных кривых): данные [17] (точки); наши данные (кружки), среднее по 250 траекториям со случайными начальными условиями по $t_0 = 4 \times 10^7$ итераций каждая. Сплошная прямая - степенная зависимость (4.1), пунктирная - предельный режим (3.10).

В [17] численные данные сравнивались с весьма сложной теорией авторов, которая также основана на концепции перекрытия резонансов (точнее, их разрушенных сепаратрис), но претендует на точные результаты, а не просто оценки по порядку величины. Действительно, в этой те-

ории нет никаких подгоночных параметров, однако фактически достигнутая с ее помощью точность невелика ($\sim 10\%$, см. рис.2 в [17]). Более того, эта теория относится на самом деле к качественно другой модели с *аналитическим* гамильтонианом, поскольку в его Фурье-разложении всегда сохраняется (по необходимости !) лишь конечное число гармоник n . Такое "обрезание" спектра сопровождается появлением характерного для аналитических систем порога возникновения глобальной диффузии, что ограничивает применение этой теории в наиболее интересной области малых значений параметра $K \lesssim K_c(n)$. В примере [17] (см. там рис.2) $n_c = 21$ и $K_c \sim 0.02$ (в нашей нормировке). По механизму это похоже на ограничение критической гармоники (3.5) в нашей теории, однако у нас это ограничение оказывается значительно мягче. Так, при $n_c = 21$ и $C_s = 1.2$ минимальное

$$K \approx K_c(n_c) \approx \left(\frac{\pi C_s}{4n_c} \right)^2 \approx 0.002, \quad (4.4)$$

т.е. на порядок меньше, чем в [17].

Перейдем теперь к наиболее интересной части наших исследований, когда параметр перекоса модели (2.2) $d \neq 0$. В работе [9] доказано, что существует такое критическое значение параметра возмущения K_B , что при $K > K_B$ (глобальных) инвариантных кривых в системе нет. Точное выражение для K_B в нашей нормировке принимает вид

$$K_B(d) = \frac{2d^2}{1+d}, \quad 0 < d < 1. \quad (4.5)$$

Согласно [9-15], имеется, вообще говоря, счетное множество специальных значений $K \leq K_B$, при которых в системе в условиях сильного локального хаоса образуются инвариантные кривые.

Главная проблема, которая больше всего интересует нас здесь: как сильно наличие этих инвариантных кривых будет подавлять глобальную диффузию при произвольных значениях K несмотря на то, что мера множества специальных значений этого параметра, как и вероятность случайного попадания в него, равны нулю?

5 Подавление диффузии "виртуальными" инвариантными кривыми

Рассмотрим прежде всего наиболее исследованный пример семейства (2.2) с параметром перекоса $d = 1/2$, для которого результаты наших численных экспериментов приведены на рисунках 2,3.

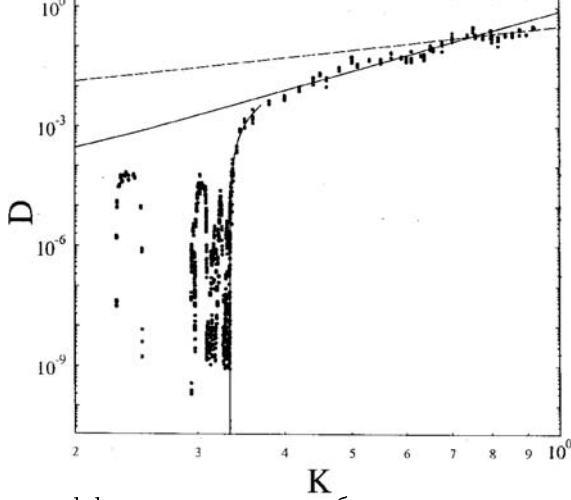


Рис. 2: Пример диффузии в гладком отображении с инвариантными кривыми нулевой меры: модель (2.2) с параметром $d = 1/2$; 50 траекторий; время счета $t_0 = 2.5 \times 10^6$. Сплошная прямая - $D_2 = 0.8K^5$ по (5.1). Пунктирная прямая - предельный режим (3.10).

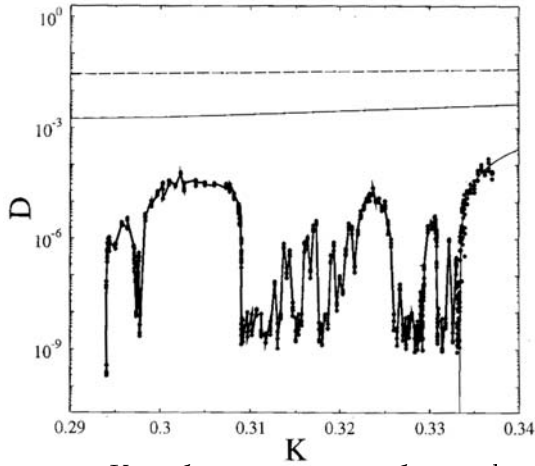


Рис. 3: Растянутое по K изображение части области фрактальной диффузии с инвариантными кривыми на рис.2. Параметры счета те же кроме времени счета $t_0 = 4 \times 10^7$ для большинства точек. Для некоторых из них, включая и крайнюю левую с $K = 0.294$, время счета $t_0 = 10^9$. Гладкая кривая в правой части рисунка, построенная по (5.5), аппроксимирует границу основной диффузионной области.

При проведении вычислений весь интервал счета по времени разбивался на четыре равных части и величина скорости диффузии выдавалась в конце каждой из них. По этой причине на рисунках 2-5 каждому значению K отвечают в общем случае четыре точки. Их расположение по вертикали позволяет отличить диффузионный случай от недиффузионного. Для последнего характерно убывание скорости диффузии по времени, что приводит к взаимному "разбеганию" этих точек. В диффузионном случае разброс точек характеризует точность численных значений скорости диффузии. В области без инвариантных кривых эта точность вполне удовлетворительна ($\sim 10\%$) как и для $d = 0$. Однако в области с (виртуальными) инвариантными кривыми и вблизи нее (при $K \sim K_B$) ошибка увеличивается и достигает иногда фактора 2. Такого же порядка и систематическое уменьшение средней скорости диффузии за счет неэргодичности движения в этой области. Последнее приводит к образованию устойчивой компоненты движения очень сложной структуры (так называемая критическая структура, см. например, [5]). Пока что нам не удалось существенно увеличить точность определения скорости диффузии, однако нам кажется, что для предварительных данных об общей структуре диффузии в рассматриваемой модели этого достаточно.

Значение $d = 1/2$ единственное (кроме предельного $d = 0$), когда еще возможно упрощение $|f_n| = const$ в (3.2), которое существенно облегчает теоретический анализ численных данных. Поэтому соотношение (4.3) применимо с $|f_n| = 8/\pi^2$ для нечетных гармоник и $f_n = 0$ для четных при $\beta = 2$ и поправкой $C_s = 2.84$ (см. (2.4) и предыдущий раздел), но только в области без инвариантных кривых и справедливо в весьма ограниченном интервале параметра возмущения (см. рис.2):

$$D_2(K) = 0.8K^5, \quad 0.4 \lesssim K \lesssim 0.8. \quad (5.1)$$

Верхняя граница определяется здесь хорошо известным переходом к предельному режиму диффузии без корреляций (3.10). Существенно новым элементом диффузионной картины является нижняя граница, связанная, очевидно, с появлением инвариантных кривых, которые и подавляют диффузию. Согласно (4.5), при $d = 1/2$ инвариантные кривые полностью отсутствуют при

$$K > K_B \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}. \quad (5.2)$$

Однако сильное подавление диффузии (как это хорошо видно из рисунков 2,3) начинается значительно раньше, т.е. в области (по K), где ин-

вариантных кривых фактически нет! Отсюда наш новый термин "виртуальная инвариантная кривая". Иными словами, каждая реальная инвариантная кривая, которая образуется при некотором точно определенном специальном значении $K = K_0$, на самом деле существенно искажает структуру фазовой плоскости системы в некоторой конечной окрестности K_0 .

Впервые для системы (2.2) с $d = 1/2$ диффузия в окрестности единственной инвариантной кривой – неразрушенной сепаратрисы целого резонанса, образующейся при $K = K_0 = 1/8$ - исследовалась в работе [13]. Первое, что здесь было обнаружено - резкая несимметрия при $K > K_0$ и при $K < K_0$.

При $K > K_0$ сепаратриса начинает пропускать другие траектории, но среднее время (число итераций) $\langle T_c \rangle$ прохождения резонанса зависит от величины расстройки $K - K_0 > 0$. Для выяснения этой зависимости в интервале $1.25 \cdot 10^{-7} \leq K - K_0 \leq 1.25 \cdot 10^{-5}$, где нет других инвариантных кривых, были выполнены следующие измерения. В области между двумя соседними целыми резонансами (см. рис.4 в [13]) запускалось 100 случайных хаотических траекторий и фиксировалось время T_c первого появления каждой из них в областях либо ниже нижнего, либо выше верхнего резонансов. Для облегчения сравнения этих данных с результатами настоящей работы мы приводим ниже выражение для скорости диффузии :

$$D_c(K) \approx 1 / \langle T_c \rangle = 0.089 (K - K_0)^{1.193}, \quad K > K_0 = \frac{1}{8}. \quad (5.3)$$

Отношение $F_{ex} = D_2(K)/D_c(K)$, где $D_2(K)$, согласно (5.1), определяет скорость диффузии в предположении полного отсутствия в системе инвариантных кривых, является количественной мерой подавления диффузии. Например, во всем обследованном диапазоне $K - K_0$ этот коэффициент изменяется от 40000 до 200 раз, что свидетельствует о значительном подавлении диффузии (см. также рис.2 и 3).

Забегая вперед, отметим определенное сходство формулы (5.3) и формулы (5.5) для границы основной диффузионной области, к которому мы еще вернемся ниже.

При $K < K_0$ и сколь угодно близко к сепаратрисе обнаружилось много густо расположенных инвариантных кривых, наличие которых сделало практически невыполнимыми измерения времени прохождения резонанса. Вопрос о диффузии в этой области остался без ответа.

Все эти довольно простые наблюдения представляется нам и наиболее значительными, поскольку они определенно указывают на то, что нуле-

вая мера множества инвариантных кривых и даже их конечная плотность не препятствуют сильному подавлению диффузии в рассматриваемой модели.

Следующим интересным и важным вопросом является количественная оценка подавления диффузии. Полное подавление возможно, по-видимому, лишь при специальных значениях K_0 , т.е. только для реальных инвариантных кривых. В общем случае все зависит от их структуры в пространстве параметров системы (K, d) . Структура эта представляется очень сложной и является, по-видимому, фрактальной. В частности, она включает в себя и целые области конечной ширины без инвариантных кривых. Одна из таких областей $0.2295 < K < 0.2500$ была предсказана в [9] и хорошо видна слева на рис.2. На границах этой области скорость диффузии резко убывает, также как и на основной границе $K = 1/3$ (5.2) и это приводит к подавлению диффузии даже в максимуме. Ширина области $\Delta K \approx 0.02$, а фактор подавления диффузии

$$F_{ex} = \frac{D_2(K_{max})}{D_{max}} \approx 14. \quad (5.4)$$

Здесь $D_{max} \approx 4.6 \cdot 10^{-5}$ - максимальная измеренная скорость диффузии вблизи центра области $K_{max} \approx 0.24$, а $D_2(K_{max}) \approx 6.4 \cdot 10^{-4}$ - ожидаемая там же согласно (5.1) скорость в предположении полного отсутствия в системе инвариантных кривых.

Грубую оценку F_{ex} можно получить из сравнения границы этой области с основной границей $D_B(K)$, которая по данным рис.2 удовлетворительно аппроксимируется выражением вида (слева от стрелки)

$$D_B(K) \approx \frac{1}{2}(K - 1/3)^{3/2} \quad \rightarrow \quad D_b(K) \approx \frac{1}{2}(K - K_b)^{3/2}. \quad (5.5)$$

Этот частный случай подтверждает естественное предположение о том, что критическое число K_B по (4.5), являющееся пограничным для основной области без инвариантных кривых, совпадает (или близко) с точкой K_D на границе $D_B(K_D) = 0$ основной диффузионной области.

Помимо этого мы делаем предположение (которое также предстоит проверить), что границы всех диффузионных областей ведут себя подобным образом и потому выражение в (5.5) справа от стрелки применимо к любой области без инвариантных кривых с левой границей K_b .

Из (5.5) находим

$$F_{th} \approx \frac{2 \cdot D_2(1/3)}{D_b(K_{max})} \approx 13. \quad (5.6)$$

Здесь множитель 2 характеризует интерференцию двух границ области, которая усиливает подавление диффузии, $K_b \approx 0.23$ и $K_{max} \approx 0.24$ – левая граница и центр исследуемой области, $D_b(K_{max}) \approx 5 \cdot 10^4$ – диффузия в центре области, полученная из уравнения границы (5.5). Наконец, $D_2(1/3) \approx 3.28 \cdot 10^{-3}$ – вычисленная по (5.1) диффузия на границе основной области в предположении отсутствия инвариантных кривых (мы пренебрегли здесь малой поправкой $K_{max} - K_b$ и взяли точно $K = 1/3$).

В рассматриваемом случае совпадение измеренной (5.4) и теоретической (5.6) величин очень хорошее, что подтверждает сделанное выше предположение о подобии границ диффузионных областей. Если, по аналогии с (4.1), ввести поправочный эмпирический фактор $C_F = F_{ex}/F_{th} \approx 1.1$, то он оказывается удивительно близким к единице. Однако отметим сразу, что аппроксимация (5.5) годится только для $d = 1/2$ (см. ниже), а ее приложение к узким диффузионным областям справедливо, по-видимому, лишь вблизи основной границы.

Вновь подчеркнем уже отмечавшееся выше сходство зависимостей (5.3) для скорости диффузии $D_c(K)$ вблизи одной инвариантной кривой и (5.5) для границы $D_B(K)$ основной области: они обе не только степенные, но и показатели их степеней различаются не сильно. Это различие, возможно, связано с тем, что (5.3) вычислялась при $K = 1/8$, а (5.5) при $K = 1/3$.

На рис.2 видны также и несколько других более узких диффузионных областей. В увеличенном виде они показаны отдельно на рис.3, причем эмпирические точки соединены ломаной линией, которая помогает различить близкие узкие области. В центрах этих областей без инвариантных кривых диффузия также подавлена тем сильнее, чем уже область. Для 17 областей, которые удалось различить, были проведены вычисления по формулам (5.4)-(5.6) аналогично тому, как это было сделано выше. Сводные данные приведены в таблице, куда включены также измеренные поправочные множители $C_F = F_{ex}/F_{th}$. В последней колонке таблицы помещены ширины областей, вычисленные по (5.5) при дополнительном требовании обеспечить равенство $C_F \equiv 1$. Согласие с эмпирической оценкой здесь значительно хуже, что объясняется по-видимому трудностью определения ширины узкой области ΔK при ограниченном числе просчитанных значений параметра возмущения K (см. ниже).

Подавление диффузии при нескольких значениях параметра перекоса d представлено на рис.4. Бросается в глаза подобие зависимости $D(K)$ при разных d , что порождает надежду на возможность построить единое описание диффузии в некоторых безразмерных переменных.

Таблица. Параметры диффузионных областей на рис.3

K_{max}	D_{max}	F_{ex}	C_F	$100 * \Delta K$	$100 * \delta K$
0.3322	$9.9 \cdot 10^{-7}$	$3.26 \cdot 10^3$	$1.99 \cdot 10^0$	0.080	0.051
0.3309	$4.0 \cdot 10^{-6}$	$7.93 \cdot 10^2$	$1.30 \cdot 10^0$	0.155	0.130
0.3282	$1.0 \cdot 10^{-8}$	$3.05 \cdot 10^5$	$1.20 \cdot 10^2$	0.060	0.003
0.3270	$5.0 \cdot 10^{-8}$	$5.98 \cdot 10^4$	$1.85 \cdot 10^1$	0.051	0.007
0.3240	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$2.60 \cdot 10^2$	$1.65 \cdot 10^0$	0.382	0.274
0.3216	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$1.38 \cdot 10^3$	$1.15 \cdot 10^0$	0.099	0.090
0.3204	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$2.70 \cdot 10^4$	$5.58 \cdot 10^0$	0.039	0.012
0.3196	$8.0 \cdot 10^{-7}$	$3.34 \cdot 10^3$	$1.73 \cdot 10^0$	0.072	0.050
0.3178	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$1.30 \cdot 10^3$	$4.01 \cdot 10^{-1}$	0.051	0.094
0.3163	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$2.53 \cdot 10^3$	$1.84 \cdot 10^0$	0.090	0.060
0.3146	$4.0 \cdot 10^{-7}$	$6.16 \cdot 10^3$	$1.58 \cdot 10^0$	0.045	0.033
0.3139	$8.0 \cdot 10^{-7}$	$3.05 \cdot 10^3$	$7.81 \cdot 10^{-1}$	0.045	0.053
0.3130	$5.0 \cdot 10^{-8}$	$4.81 \cdot 10^4$	$2.04 \cdot 10^1$	0.063	0.008
0.3043	$4.0 \cdot 10^{-5}$	$5.22 \cdot 10^1$	$1.59 \cdot 10^0$	1.090	0.798
0.2978	$3.0 \cdot 10^{-7}$	$6.25 \cdot 10^3$	$4.05 \cdot 10^{-1}$	0.018	0.033
0.2960	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$7.27 \cdot 10^2$	$3.22 \cdot 10^0$	0.301	0.138
0.2941	$4.3 \cdot 10^{-7}$	$4.06 \cdot 10^3$	$2.00 \cdot 10^{-1}$	0.0150	0.044

Пояснения к таблице: K_{max}, D_{max} - параметр возмущения и скорость диффузии в центре области; F_{ex} - измеренный фактор подавления диффузии там же; $C_F = F_{ex}/F_{th}$ - измеренное значение, где F_{th} вычислялся по формуле (5.6); ΔK - измеренная ширина области; δK - ширина, пересчитанная по (5.5) при дополнительном требовании обеспечить равенство $C_F \equiv 1$.

В предположении $K_D \approx K_B$ (см. выше) для безразмерной величины параметра возмущения K^* естественно принять

$$K^* = K/K_B = \frac{1+d}{2d^2} \cdot K. \quad (5.7)$$

Нахождение второй безразмерной переменной D^* связано с большими трудностями из-за того, что явное выражение для функции $D(K)$ получить не удастся, поскольку в общем случае $|f_n| \neq const$ (см. раздел 3). Однако приближенно это возможно при условии, что аргумент синуса в (2.4) мал. Тогда $\sin(\pi nd) \approx \pi nd$ и (см. (2.3))

$$|f_n| \approx n f_0, \quad f_0 \approx \frac{2}{\pi}, \quad \beta = 1 \quad (5.8)$$

Видно, что зависимость $D(K)$ при $d \ll 1$ получается такая же, как и в пределе $d = 0$.

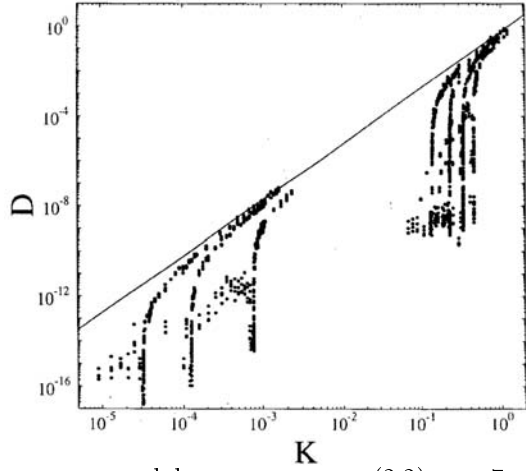


Рис. 4: Общая картина диффузии в модели (2.2) при 7 значениях параметра перекоса $d = 0.004, 0.008, 0.02, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ (слева направо). Число траекторий от 50 до 250, время счета $t_0 = 2.5 \times 10^6$ итераций. Наклонная прямая - верхняя граница скорости диффузии (4.1), см. также рис.5 и текст.

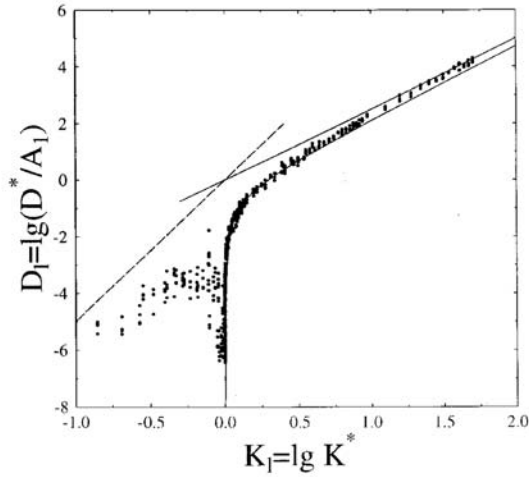


Рис. 5: То же, что на рис.4 для 3 наименьших значений параметра $d = 0.004, 0.008, 0.02$ в безразмерных переменных (5.7) и (5.15), логарифм десятичный. Кривая - эмпирическая аппроксимация основной границы диффузии (5.16). Наклонные прямые показывают асимптотики диффузии без инвариантных кривых: сплошная - (4.1) с $\beta = 1$, пунктирная - (5.13) с $\beta = 2$ в приближении (5.14).

Это приближение (а значит и асимптотика (4.1)) справедливо при (см. (3.5) с $\beta = 1$)

$$K \gtrsim K_1 = \frac{\pi^4 d^2}{16} \approx \frac{\pi^4}{32} K_B \approx 3K_B \quad (5.9)$$

С другой стороны, при обратном неравенстве ($\pi n_c d \gtrsim 1$, $d \ll 1$, $\beta = 2$) можно усреднить $\sin(\pi n d)$ в (2.4) по n . Так как сумма (3.2) пропорциональна $\sqrt{f_n} \propto \sqrt{|\sin(\pi n d)|}$, введем новый параметр

$$S_0 = \langle \sqrt{|\sin(\pi n d)|} \rangle \approx 0.76 \quad (5.10)$$

и положим ($d \ll 1$)

$$f_0 \approx \frac{2}{\pi^2} \frac{S_0^2}{d}, \quad \beta = 2 \quad (5.11)$$

Условие усреднения можно записать также в виде:

$$K \lesssim K_2 \approx \left(\frac{\pi^2 d}{8S_0} \right)^2 \approx 2.6 d^2 \approx 1.3 K_B < K_1 \quad (5.12)$$

При этом

$$D(K) \approx A_2 K^5, \quad A_2 \approx \frac{A_1}{K_{cr}^{2.5}} \quad (5.13)$$

где значение A_1 берется из (4.1), а K_{cr} - точка пересечения двух асимптотик: (5.13) и (4.1). Положение этой точки неизвестно и неясно, как его определять, поскольку при $d \ll 1$ (в отличие от случая $d = 1/2$ на рис.2) область диффузии с $\beta = 2$ просто отсутствует. Вместе с тем, обе границы K_1 и K_2 достаточно близки к K_B и по этой причине для абсциссы точки пересечения асимптотик мы приближенно принимаем

$$K_{cr} \approx K_B. \quad (5.14)$$

В таком приближении вторую безразмерную переменную с учетом (5.7) и (5.13) можно выбрать в виде

$$D^* = \left(\frac{1+d}{2d^2} \right)^{5/2} \cdot D \quad (5.15)$$

Строго говоря, переменные (5.7) и (5.15) годятся только для $d \ll 1$, пока можно пользоваться простыми асимптотиками (4.1) и (5.13). Однако общая картина подобия сохраняется и до $d \sim 1$, но не для $d \rightarrow 1$.

Для трех значений $d \ll 1$ данные наших численных экспериментов в безразмерных переменных показаны на рис.5 вместе с двумя асимптотиками (4.1) и (5.13). Гладкая кривая, которую с трудом можно проследить

в плотной системе точек, представляет собой найденную нами чисто эмпирическую универсальную границу основной диффузионной области

$$D_l = \frac{5}{2} K_l - \frac{0.4}{\sqrt{K_l}}, \quad (5.16)$$

$$D_l = \lg(D^*/A_1), \quad K_l = \lg K^*,$$

записанную в десятичных логарифмах безразмерных переменных.

В этом соотношении использованы безразмерные переменные (4.5) и (5.15), которые уже содержат в себе предположение о равенстве критического числа K_B и точки K_D на границе основной диффузионной области. Предварительные эксперименты (см. рис.3-5) показывают, что это предположение действительно выполняется с хорошей точностью ($(K_D - K_B)/K_B \lesssim 10^{-3}$). Однако интересный вопрос о точном равенстве этих параметров остается открытым.

В [9] была явно найдена лишь одна область без инвариантных кривых (см. выше) и высказано предположение, что таких областей бесконечно много при $K \rightarrow 0$. Наши результаты (рис.3) ясно показывают, что множество таких областей имеется и непосредственно вблизи основной границы диффузии. Важным вопросом является статистика таких областей, связанная с распределением скорости диффузии по параметру возмущения K и, соответственно, с ее подавлением виртуальными инвариантными кривыми.

Мы провели статистическую обработку экспериментальных величин коэффициента подавления диффузии F_{ex} для $N = 134$ значений параметра K в интервале $0.293 < K < 0.333$ шириной всего $\Delta \approx 0.04$ (см. рис.3). Для получения статистически значимого распределения $P(F_{ex})$ при столь бедной статистике весьма эффективным оказывается специальный метод построения интегрального распределения с "плавающей" шириной ячейки (см. [18] и ссылки там). Обычно такой метод называется также "упорядоченная статистика редких событий" (rank-ordering statistics of extreme events). Этот эффективный метод был впервые предложен в 1949 г. и использовался в исследованиях по математической лингвистике [19]. Оказывается, что достаточно просто расположить все значения $F_{ex}(n)$, $n = 1, 2, \dots, N$ в нисходящем порядке: $F_{ex}(n+1) < F_{ex}(n)$ и тогда искомое распределение приближенно равно

$$P(F_{ex}) \approx \frac{n}{N}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (5.17)$$

Полученное таким простым способом распределение изображено на рис.6. Наиболее интересной его особенностью является чрезвычайно мед-

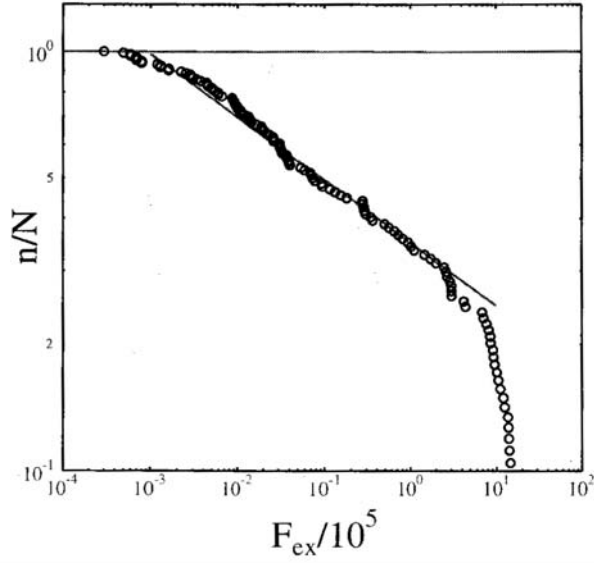


Рис. 6: Первые эмпирические результаты по статистике коэффициента подавления диффузии F_{ex} (5.4) виртуальными инвариантными кривыми по данным наших численных экспериментов, представленных на рис.3 ($d = 1/2$). Наклонная прямая - интегральное степенное распределение (5.18). Полное число точек (значений F_{ex}) равно 134, из которых 100 лежат в основном интервале $F_{ex} < 3 \times 10^5$ (см. текст).

ленное убывание вероятности сильного подавления диффузии:

$$P(F_{ex}) \approx \frac{2}{F_{ex}^{0.15}}, \quad 100 < F_{ex} < 3 \times 10^5 = F_{max}(t_0) \quad (5.18)$$

Здесь левая граница связана с очень малым исследованным интервалом K шириной всего $\Delta \approx 0.04$. Быстрое падение вероятности $P(F_{ex})$ при $F_{ex} > 3 \times 10^5$ объясняется ограниченным временем счета ($t_0 = 4 \times 10^7$). Действительно, поскольку регулярные осцилляции $\Delta p \sim K \approx 0.3$, то минимальная наблюдаемая скорость диффузии оказывается равной

$$D_{min} \sim \frac{(\Delta p)^2}{t_0} \sim 10^{-9}, \quad (5.19)$$

что хорошо совпадает с экспериментальными данными на рис.3. При меньших K этот минимум убывает вплоть до $D \approx 10^{-17}$ при $K \approx 3 \times 10^{-5}$,

$t_0 = 4 \times 10^9$ (см. рис.4 выше). Интересно отметить, что при таком медленном убывании вероятности (5.18) как среднее значение F_{ex} , так и его дисперсия определяются значением F_{max} , и расходятся примерно пропорционально $t_0 \rightarrow \infty$ (см. (5.19)).

Небольшие отклонения эмпирического распределения на рис.6 от закона (5.18) связаны по-видимому с неоднородностями распределения использованных значений K_n . В дальнейших исследованиях это может быть легко исправлено, однако требует значительного времени счета или существенного сокращения статистики.

Эмпирический закон (5.18) можно использовать, в частности, для анализа непонятного "застревания" траектории, обнаруженного в старой работе [7] и до сих пор не получившего объяснения. Этот случай также относится к отображению (2.2) с $d = 1/2$, но в несколько иной нормировке (как в [9]). В наших теперешних обозначениях он соответствует $K = 0.29 < 1/3$ и, следовательно, случайно попал в область с виртуальными инвариантными кривыми. При времени счета $t_0 = 3 \times 10^6$ минимальный коэффициент диффузии $D_{min} \sim 3 \times 10^{-8}$, что соответствует минимальному фактору подавления диффузии $F_{min} \sim 10^5$ с разумной вероятностью $P \approx 36\%$.

Вместо отдельных значений $F_{ex}(n)$ можно взять значения F_m (мы упростили обозначение $F_{ex}(m) \rightarrow F_m$) для центров всех $m = 1, 2, \dots, M = 17$ различимых в выделенном интервале $K = 0.293 - 0.333$ областей диффузии (см. таблицу). Тогда вероятность будет пропорциональна нормированной сумме ширин этих областей dK_m , которые определяются либо эмпирически по рис.3 (ΔK в таблице), либо пересчетом по формуле (5.5) из эмпирического значения фактора подавления F_m (δK в таблице). Нормировка производится по полной ширине исследованного интервала K путем замены $dK_m \rightarrow dK_m/\Delta$, где $\Delta = 0.04$. Кроме того необходимо учесть, что нормированная сумма ширин всех $M = 17$ диффузионных областей $S \approx 0.664$ для ΔK и $S \approx 0.468$ для δK . В обоих случаях происходит существенная потеря узких областей с большим $F \gtrsim 10^4$ (см. рис.7). Окончательно получаем

$$P(F_m) \approx 1 - S + \sum_{i=m}^M dK_i \quad (5.20)$$

Результат такой обработки эмпирических данных таблицы показан на рис.7 вместе с данными рис.6, которые представлены жирной прямой (5.18). При столь малой статистике согласие обоих методов можно считать удовлетворительным. Особенно это касается данных для δK (в пре-

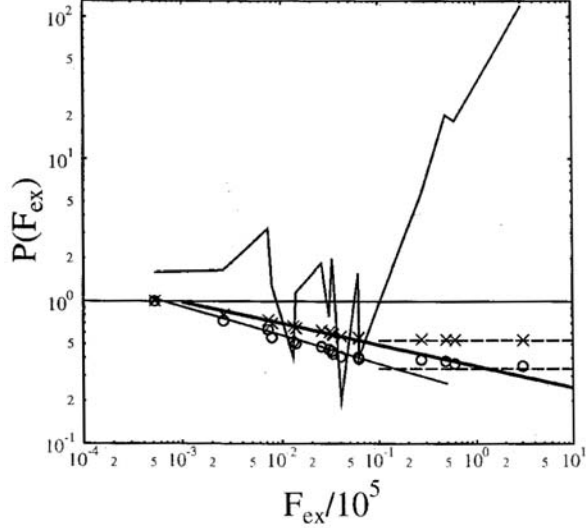


Рис. 7: То же, что и на рис.6, но по ширине 17 различных диффузионных областей (см. таблицу и текст): данные рис.6 представлены жирной прямой (5.18); кружки - интегральная вероятность (5.21) по измеренной ширине ΔK диффузионных областей; кресты - то же для ширины δK , пересчитанной по (5.5); ломаная линия - измеренная поправка C_F к (5.6); штриховые горизонтальные линии показывают долю "потерянных"(неразличимых) областей при больших $F \gtrsim 10^4$.

делах упомянутого выше ограничения $F \lesssim 10^4$). Отметим, что вне этой области, то есть при $F \gtrsim 10^4$, где вероятность $P(F) \approx const$ остается почти постоянной, одновременно резко возрастает эмпирическая поправка C_F (см. рис.7).

Для ΔK согласие хуже, причем наблюдается не просто разброс точек, а систематическое, хотя и небольшое, отклонение. Эмпирическое распределение остается по-прежнему степенным (см. нижнюю наклонную прямую на рис.7), но с несколько иным показателем:

$$P(F) \approx \frac{2.3}{F^{0.20}}, \quad 64 < F \lesssim 10^4 \quad (5.21)$$

где левая граница определяется просто минимальным значением F в исследованном интервале K . Причина такого расхождения неизвестна и требует дальнейших исследований. Мы предполагаем, что наблюдаемые расхождения связаны, в основном, с недооценкой эмпирической шири-

ны области ΔK , возрастающей вместе с F . Скорее всего это происходит при перекрытии соседних областей, которое также возрастает с F . Во всяком случае разница между эмпирическими соотношениями (5.18) и (5.21) составляет всего около 30% по показателю и 20% по вероятности (в пределах применимости (5.21)), что совсем не так плохо для предварительных результатов. Разумеется, все это требует дальнейшей серьезной проверки.

Отметим, что упомянутые выше флуктуации скорости диффузии (в худшем случае в два раза) приводят к изменению вероятности (5.18) в $2^{0.15} \approx 1.11$ раз, то есть всего на 11%.

6 Заключение

Исследование семейства кусочно-линейных отображений типа (2.1)(2.2) имеет давнюю историю (см., например, [7,9,11-15,17] и ссылки там). В настоящей работе мы используем такие простейшие модели для исследования относительно нового и мало известного, но очень сложного явления фрактальной диффузии под действием виртуальных глобальных инвариантных кривых в условиях сильного локального хаоса.

Вначале, однако, полезно понять почему изучение столь упрощенных конструкций, как кусочно-линейные отображения заслуживает внимания. Обратимся вновь к работе [17], где для выяснения свойств такого отображения рассматривалась сложная (с 21 Фурье-гармоникой) аналитическая функция и в их динамическом поведении было установлено определенное сходство. Значит, можно поступать и наоборот - в случае сложной (например, с крутыми изгибами) непрерывной аналитической функции подыскивать близкую к ней кусочно-линейную функцию и исследовать соответствующее отображение, что оказывается намного проще. Это направление представляется нам достаточно перспективным, но требующим специального рассмотрения и в настоящей работе мы не будем в него углубляться.

Прежде всего наши исследования показали, что в рассматриваемом семействе моделей (2.1,2) всегда существует относительно широкая (основная) область "нормальной" диффузии как и в других гладких системах без инвариантных кривых. В этой области нам удалось получить весьма простые и довольно точные оценки скорости диффузии (разд. 3, 4), которые существенно помогли при анализе основного в настоящей работе эмпирического материала по фрактальной диффузии в области с виртуальными инвариантными кривыми (разд. 5).

Исследования проведены в интервале параметра перекоса $0 < d < 0.6$ (с инвариантными кривыми при $K < K_B$, см.(4.5)). Надежно установлено, что наличие множества инвариантных кривых (несмотря на то, что его мера равна нулю) вызывает сильное подавление диффузии при $K < K_B$, что и побудило нас предложить новый термин "виртуальная инвариантная кривая".

Наиболее подробно изучен случай $d = 1/2$, для которого удалось получить количественные оценки подавления диффузии. Предварительная обработка эмпирических данных позволила построить интегральное распределение (5.18) вероятности коэффициента подавления диффузии F_{ex} . Наиболее интересной особенностью этого распределения является чрезвычайно медленное убыванием вероятности F_{ex} , настолько медленное, что среднее значение F_{ex} расходится с увеличением времени счета (см. раздел 5). Проведено также подробное исследование серии узких диффузионных областей слева от основной границы (см. таблицу). Это позволило подтвердить важный результат (5.18) также и другим методом (см. (5.21)). Причина столь необычной статистики F_{ex} (а, следовательно, и скорости фрактальной диффузии D_{max} в (5.4)) неизвестна и требует дальнейшего исследования.

Изучение зависимостей $D(K)$ при различных значениях d обнаружило явное подобие в их поведении, что указывало на возможность универсального описания. Нам удалось это сделать при дополнительном предположении $d \ll 1$ и построить в безразмерных переменных эмпирическую зависимость (5.16) для границы основной диффузионной области. Это весьма простое соотношение неплохо описывает характерный резкий переход из хаотической области без инвариантных кривых с хорошо известной регулярной диффузией в также хаотическую область, но с плотной системой инвариантных кривых нового вида и с совершенно неизвестной очень нерегулярной (фрактальной) диффузией.

В целом, все это новое явление представляется нам достаточно интересным и важным и, по нашему мнению, безусловно заслуживает дальнейшего исследования.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 01-02-16836).

- [1] *B.V. Chirikov*. Phys. Reports **52**, 263 (1979).
- [2] *A. Lichtenberg and M. Lieberman*, Regular and Chaotic Dynamics, Springer (1992).
- [3] *Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев*. Введение в нелинейную физику, Наука, Москва (1988).
- [4] *J. Green*, J. Math.Phys, **20**, 1183 (1979).
- [5] *B.V. Chirikov*. Chaos, Solitons and Fractals, **1**, 79 (1991).
- [6] *J.Moser*. Stable and Random Motion in Dynamical Systems, Princeton University Press, Princeton (1973).
- [7] *B.V. Chirikov, E. Keil and A. Sessler*. J. Stat. Phys., **3**, 307 (1971).
- [8] *M. Hénon, J. Wisdom*. Physica D, **8**, 157 (1983).
- [9] *S. Bullett*. Commun. Math. Phys., **107**, 241 (1986).
- [10] *M. Wojtkowski*. Commun. Math. Phys., **80**, 453 (1981); Ergodic Theory Dyn. Syst., **2**, 525 (1982).
- [11] *Л.В. Овсянников*. Частное сообщение, май 1999.
- [12] *В.В. Вечеславов*. Необычная динамика пилообразного отображения, Препринт ИЯФ 99-69, Новосибирск, 1999.
- [13] *В.В. Вечеславов*. Динамика пилообразного отображения: 1. Новые численные результаты, Препринт ИЯФ 2000-27, Новосибирск, 2000; E-print archive nlin.CD/0005048.
- [14] *В.В. Вечеславов*. ЖЭТФ, **119**, 853 (2001).
- [15] *В.В. Вечеславов, Б.В. Чуриков*. ЖЭТФ, **120**, 740 (2001).
- [16] *Л.В. Овсянников*, ДАН, **369**, 743 (1999).
- [17] *I.Dana, N.W.Murray, and I.C.Percival*. Phys. Rev. Lett., **62**, 233 (1989).
- [18] *D. Sornette, L. Knopoff, Y. Kagan and C. Vanneste*. J. Geophys. Research, **101**, 13883 (1996).
- [19] *G. Zipf*. Human Behavior and the Principle of Least Effort, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1949.

В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков

Диффузия в гладких гамильтоновых системах

B.V. Chirikov, V.V. Vecheslavov

Diffusion in smooth Hamiltonian systems

ИЯФ 2001-59

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 30.08.2001 г.

Сдано в набор 3.09.2001 г.

Подписано в печать 3.09.2001 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.3 печ.л., 1.9 уч.-изд.л.

Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 59

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН

Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.