

Сибирское отделение Российской Академии наук  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им.Г.И. Будкера

Д.Ю. Голубенко, С.А. Никитин

ЭФФЕКТ ТУШЕКА В ПРИБЛИЖЕНИИ  
ДВУМЕРНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

ИЯФ 110

НОВОСИБИРСК  
1999

## Эффект Тушека в приближении двумерных столкновений

*Д.Ю. Голубенко, С.А. Никитин*

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера,  
630090, Новосибирск, Россия

### Аннотация

Развит подход для учета двумерного характера столкновений частиц в электронном релятивистском сгустке и оценке влияния этого фактора на параметры пучка в синхротроне. Найден модифицированный вид функции распределения по импульсу, а также выражений для скорости диффузии и времени жизни с введением дополнительного обобщенного параметра связи — отношения угловых разбросов в пучке по горизонтали и вертикали. Приведены численные примеры для коллайдера ВЭПП-4М. Показано, что в случае круглого пучка поправка к традиционной теории одномерного приближения в разбросе энергии в пучке и его размерах может составить 20%.

### Touschek effect in the two-dimensional collisions approach

*D.Yu. Golubenko, S.A. Nikitin*

Budker Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, Russia

### Abstract

The approach to account for the two-dimensional character of collisions of particles inside the relativistic electron bunch and to estimate this factor influence upon the bunch parameters in a synchrotron is developed. Modified forms of the function of distribution over momentums, the diffusion rate and the life time are found using the additional general parameter of coupling — the ratio between the vertical and horizontal angle spreads in the beam. The numerical examples are presented for the VEPP-4M collider. It is shown that in the round beam case, a correction to the traditional theory of the one-dimensional approach in respect of the beam energy spread and the beam sizes may be of 20%.

©Институт ядерной физики  
им. Г.И. Будкера СО РАН, Россия

# 1 Введение

Процессы взаимного рассеяния частиц внутри релятивистского сгустка, или эффект Тушека, во многом определяют размеры и время жизни электронных и позитронных пучков в накопительных кольцах и коллайдерах при достаточно низкой энергии. Известная теория этого эффекта, последовательно изложенная в [1], основана на одномерном приближении двухчастичного кулоновского взаимодействия, что практически справедливо для традиционных синхротронов с плоскими орбитами, в которых равновесный горизонтальный размер пучка намного превышает вертикальный. С развитием методов управления вертикальным размером с помощью продольных и скью-квадрупольных магнитных полей, и, особенно, с появлением концепции круглых пучков [2], указанное приближение может показаться недостаточным. Предлагаемая работа ставит своей целью развитие подхода для учета двумерного характера взаимодействия частиц внутри сгустка и оценке его влияния на параметры пучка.

## 2 Функция распределения частиц по импульсу в системе центра масс

### 2.1 Основные определения

Приведем некоторые качественные соображения, поясняющие основное отличие в описании процессов внутрисгусткового рассеяния частиц в двумерном электронном пучке по сравнению с обычным одномерным приближением (плоский пучок). Обозначим через  $p = |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|/2$  импульс частицы в системе центра масс (с.м.), движущейся вместе с пучком. Импульсы сталкивающихся частиц  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$  в общем случае имеют как горизонтальные ( $p_X$ ), так и вертикальные ( $p_Z$ ) составляющие. Как и в кинетической теории газов дисперсия импульса  $p$  удваивается по сравнению с одномерным случаем, если равны эффективные температуры по степеням свободы ( $\sigma_{p_X}^2 = \sigma_{p_Z}^2 = \sigma_p^2$ ):  $\langle p^2 \rangle = \sigma_p^2$ . Здесь температура для каждого из направлений движения определяется разбросом соответствующей компоненты поперечного импульса частиц, одинакового в лабораторной (lab) и сопутствующей системах (с.м.). Увеличение дисперсии означает изменение формы функции распределения по импульсу  $p$  и, следовательно, по относительной скорости сталкивающихся частиц  $\nu = 2p/m$  ( $m$  — масса электрона). Это должно влиять на эффективность процессов внутрисгусткового рассеяния в целом, так как мёллеровское

дифференциальное сечение обратно пропорционально четвертой степени  $\nu$ .

В первую очередь важно получить вид функции распределения  $f(p)$ , который бы определенным образом учитывал двумерный характер двухчастичного взаимодействия внутри электронного сгустка в условиях, когда вертикальная температура  $\sigma_{pz}^2$  не мала. Отметим, что только в единственном случае, а именно при равенстве  $X$  и  $Z$ -температур, функция  $f(p)$  принимает форму двумерного максвелловского распределения:  $f(p) \propto p \cdot \exp(-p^2/\sigma_p^2)$ .

Вид функции  $f(p)$  найдем сначала в одномерном, а затем в двумерном приближениях.

## 2.2 Одномерный случай (плоский пучок)

Пусть плоский электронный пучок в синхротроне характеризуется гауссовым распределением углов траекторий в горизонтальной плоскости ( $X'$ ) с разбросом  $\sigma_{X'}$ :

$$F(X')dX' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X'}} \cdot \exp\left(-\frac{X'^2}{2\sigma_{X'}^2}\right)dX'.$$

Обозначим через

$$\xi = \frac{|X'_1 - X'_2|}{2} = \frac{\nu}{2c}$$

скорость сталкивающихся частиц ("1" и "2") в системе с.м. в единицах скорости света. Функция плотности вероятности величины  $\xi$  равна

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(2\xi + X'_2) \cdot F(X'_2)dX'_2 + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} F(X'_2 - 2\xi)F(X'_2)dX'_2 = \frac{\exp(-\xi^2/\sigma_{X'}^2)}{\sqrt{\pi}\sigma_{X'}}. \end{aligned}$$

Импульс в с.м.-системе запишем как  $p = mc\gamma\xi = p_0\gamma\xi$ , а разброс поперечного импульса в пучке  $\sigma_p = p_0\gamma\sigma_{X'}$ , где  $\gamma$  — релятивистский фактор. В итоге, функция распределения  $f(p)$  для плоского пучка дается выражением[1]

$$f(p)dp = \frac{2}{\sqrt{\pi}\sigma_p} \exp\left(-\frac{p^2}{\sigma_p^2}\right)dp. \quad (1)$$

### 2.3 Приближение двумерных столкновений

Найдем распределение квадрата относительной скорости в электронном пучке

$$v^2 = v_X^2 + v_Z^2,$$

где введены обозначения ее компонент  $v_X$  и  $v_Z$ , которые в свою очередь определены как разности компонент скоростей частиц "1" и "2". При выводе функции распределения будем полагать, что величины  $v_X^2$  и  $v_Z^2$  статистически независимы. Это допущение, отвечающее в кинетической теории газов гипотезе "молекулярного хаоса", составляет основу используемого нами приближения.

Сначала получим вид функций распределения компонент  $v_{X,Z}$ , пользуясь приведенной выше функцией распределения углов в плоском пучке и формулой композиции:

$$F(v_{X,Z}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_{X',Z'}} \exp\left(-\frac{v_{X,Z}^2}{4\sigma_{X',Z'}^2}\right).$$

Введем вспомогательную функцию  $y = v_X^2$ . Соответствующая этой величине плотность вероятности определяется соотношением для двузначных случайных функций:

$$f_y = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}F(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}F(-\sqrt{y}), & y > 0 \end{cases}$$

Плотность вероятности величины  $Y = v^2$  с учетом указанного допущения дается интегралом

$$\begin{aligned} f_Y &= \int_0^\infty f_y(y)f_y(Y-y)dy = \frac{1}{4\pi^2\sigma_{X'}\sigma_{Z'}} \int_0^Y \frac{\exp\left(-\frac{y}{4\sigma_{X'}^2} - \frac{Y-y}{4\sigma_{Z'}^2}\right)}{\sqrt{(Y-y)y}} dy = \\ &= \frac{1}{4\sigma_{X'}\sigma_{Z'}} \exp\left[-\frac{Y}{2}\left(\frac{1}{4\sigma_{X'}^2} + \frac{1}{4\sigma_{Z'}^2}\right)\right] \cdot I_0\left[\frac{Y}{2}\left(\frac{1}{4\sigma_{X'}^2} - \frac{1}{4\sigma_{Z'}^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Здесь использован табличный интеграл [3];  $I_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя.

Нетрудно найти теперь функцию распределения по модулю скорости частиц в системе центра масс ( $\xi$ ):

$$f(\xi) = f_Y[Y(\xi)] \left| \frac{dY}{d\xi} \right| =$$

$$= \frac{2\xi}{\sigma_{X'}\sigma_{Z'}} \exp \left[ -\frac{\xi^2}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{X'}^2} + \frac{1}{\sigma_{Z'}^2} \right) \right] \cdot I_0 \left[ \frac{\xi^2}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{X'}^2} - \frac{1}{\sigma_{Z'}^2} \right) \right]. \quad (2)$$

Введем параметр

$$k = \frac{\sigma_{X'}}{\sigma_{Z'}}, \quad (3)$$

который характеризует отношение угловых размеров пучка по горизонтали и вертикали. В так называемом "круглом" пучке  $k \rightarrow 1$ , а в плоском  $k \rightarrow \infty$ .<sup>\*</sup> Искомая функция распределения по импульсу в системе центра масс находится из (2) и при использовании параметра  $k$  имеет вид<sup>†</sup>

$$f(k, p) dp = \frac{2kp}{\sigma_p^2} \cdot \exp \left[ -\frac{p^2}{2\sigma_p^2}(1 + k^2) \right] \cdot I_0 \left[ \frac{p^2}{2\sigma_p^2}(1 - k^2) \right] dp. \quad (4)$$

На Рис. 1 приведены графики функции  $f(k, \tilde{p})$  при разных  $k$ , где

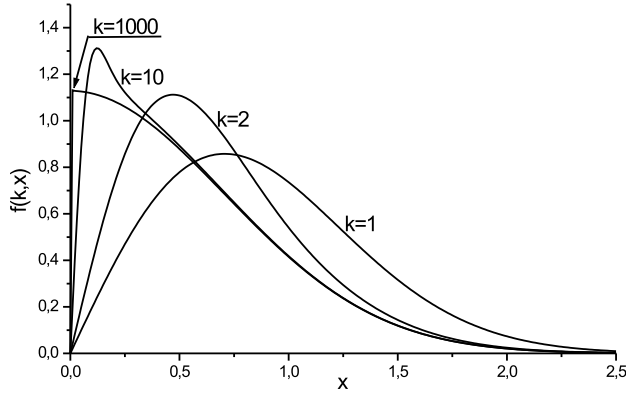


Рис. 1: Функция распределения  $f(k, x)$ ,  $x = p/\sigma_p$ .

<sup>\*</sup> Обращаем внимание на отличие данного параметра от традиционного коэффициента связи, равного отношению вертикального фазового объема к горизонтальному фазовому объему, т.е. величине  $< 1$  в обычных условиях (см. далее).

<sup>†</sup> Получено независимо от [4], где, как впоследствии нам стало известно, приведена функция распределения, имеющая подобную структуру. Подходы и цели работы [4] отличны от нашей: в ней обосновывается возможность измерения горизонтальной динамической апертуры на ВЭПП-2М с использованием зависимости тушековского времени жизни от напряжения ВЧ резонаторов.

$\tilde{p} = p/\sigma_p (f(k, p)dp = f(k, \tilde{p})d\tilde{p})$ . В расчетах применен способ вычисления функции Бесселя при больших значениях аргумента путём разложения в ряд по многочленам Чебышева [5]. Видно, что при  $k \rightarrow \infty$  функция стремится к виду, отвечающему одномерному случаю (1). Это же легко показать аналитически, найдя асимптотику функции Бесселя в (4) :  $\lim_{x \rightarrow \infty} I_0(x) \sim e^x/\sqrt{2\pi x}$ . При  $k \rightarrow 1$  распределение становится двумерным максвелловским.

### 3 Модифицированная скорость диффузии энергии частиц в процессе многократного внутреннего рассеяния

Рассматривая процесс многократного рассеяния пробной частицы в релятивистском пучке на малые углы можно найти скорость диффузии ее энергии в лабораторной системе [1]

$$\{w < \delta E^2 >\}_{lab} = \frac{1}{2}c^2\bar{n}_{lab} \{\sigma\nu < \delta p_{\perp}^2 >\}_{c.m.}.$$

Здесь  $w$  — число актов рассеяния в единицу времени;  $< \delta E^2 >$  — усредненное по углам рассеяния приращение квадрата энергии;  $\bar{n}_{lab}$  — средняя плотность в пучке, выражаемая через полное число частиц в пучке  $\mathcal{N}$  и его объем  $V$ , т.е. через среднеквадратичные размеры по вертикали ( $\sigma_Z$ ), горизонтали ( $\sigma_X$ ) и вдоль орбиты ( $\sigma_S$ ):

$$\bar{n}_{lab} = \frac{\mathcal{N}}{V} = \frac{\mathcal{N}}{8\pi^{3/2}\sigma_X\sigma_Z\sigma_S};$$

$\sigma$  - мёллеровское сечение;  $< \delta p_{\perp}^2 >$  - средний квадрат приращения поперечного импульса в плоскости рассеяния. В системе центра масс

$$\sigma < \delta p_{\perp}^2 > = 2\pi \left( \frac{r_0 p_0^2}{p} \right)^2 \ln \left( \frac{p}{p_m} \right),$$

где  $r_0$  - классический радиус электрона;  $p_0 = mc$ ;  $p_m = p_0 \sqrt{r_0/b_{max}}$  — классический нижний предел переданного импульса;  $b_{max}$  — максимальный масштаб прицельного параметра. Критерий этого масштаба запишем подобно определению  $b_{max}$  в кинетике электронного охлаждения [6]:

$$b_{max} = \min\{d, (\bar{n}_{lab}/\gamma)^{-1/3}, \sigma_{\perp, \min}\}.$$

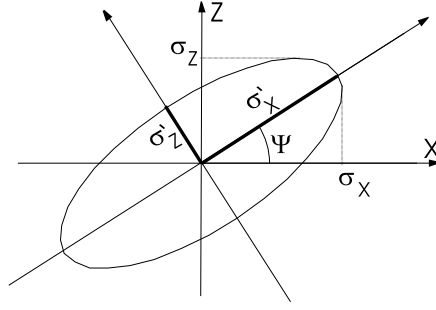


Рис. 2: Поперечное сечение пучка.

Дебаевский радиус  $d \sim v_{\perp, min}/\omega_p$  определяется разбросом проекции поперечной скорости ( $v_{\perp, min}$ ) на направление, в котором этот разброс минимален, и значением плазменной частоты  $\omega_p = 4\pi\bar{n}_{lab}e^2/(\gamma m)$  в системе покоя пучка;  $\sigma_{\perp, min}$  — наименьший поперечный размер пучка. Например, для характерных параметров пучка в ВЭПП-4М в области энергий 1 – 2 ГэВ

$$(\bar{n}_{lab}/\gamma)^{-1/3} \lesssim d \ll \sigma_{\perp, min}.$$

В [7] в качестве определяющего выбран размер  $\sigma_{\perp, min}$ . Для исследования основных свойств двумерного внутреннего рассеяния ограничимся далее обычным определением  $b_{max}$  через среднюю плотность в пучке в сопутствующей системе:

$$b_{max} = \left( \frac{8\pi^{3/2}\gamma\sigma_X\sigma_Z\sigma_S}{N} \right)^{1/3}.$$

Очевидно, что при наличии сильной связи колебаний вместо указанных размеров по вертикали и горизонтали для вычисления  $V$  надо использовать размеры полуосей  $\sigma'_X$  и  $\sigma'_Z$  эллипса, представляющего поперечное сечение пучка и повернутого на некоторый угол  $\Psi$  (см. Рис. 2):

$$\sigma'_X = \sqrt{\left| \frac{\sigma_X^2 \cos^2 \Psi - \sigma_Z^2 \sin^2 \Psi}{\cos 2\Psi} \right|},$$

$$\sigma'_Z = \sqrt{\left| \frac{\sigma_Z^2 \cos^2 \Psi - \sigma_X^2 \sin^2 \Psi}{\cos 2\Psi} \right|}.$$



Выражение  $\{w < \delta E^2 >\}_{lab}$  надо усреднить по ансамблю частиц в пучке, т.к. оно зависит от величины относительного импульса пробной частицы. Применяя с этой целью функцию распределения двумерного приближения (4), получим модифицированную скорость диффузии энергии в пучке

$$\overline{\{w < \delta E^2 >\}_{lab}} = \frac{4\sqrt{\pi}r_0^2 m^3 c^4}{\sigma_p} \cdot B(k, \chi_m). \quad (5)$$

Новым здесь является вид функции  $B$ , которая зависит теперь не только от параметра  $\chi_m = p_m/\sigma_p$ , как в обычной теории [1], но и от параметра связи  $k$ :

$$B(k, \chi_m) = \sqrt{\pi}k \int_{\chi_m}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{\chi}} \cdot \ln\left(\frac{\chi}{\chi_m}\right) \cdot e^{-\frac{\chi}{2}(1+k^2)} \cdot I_0\left[\frac{\chi}{2}(1-k^2)\right] d\chi. \quad (6)$$

Функция  $B(k, \chi_m)$  построена на Рис. 3 при разных  $k$ . В пределе  $k \rightarrow \infty$  она совпадает с кривой для плоского пучка [1]. При  $\chi_m \sim 10^{-9}$  (ВЭПП-4М) и  $k \rightarrow 1$  величина  $B$  более чем в 3 раза меньше предела одномерного приближения. Ниже будет рассмотрено, в какой степени такие изменения могут влиять на энергетический разброс и размеры пучка.

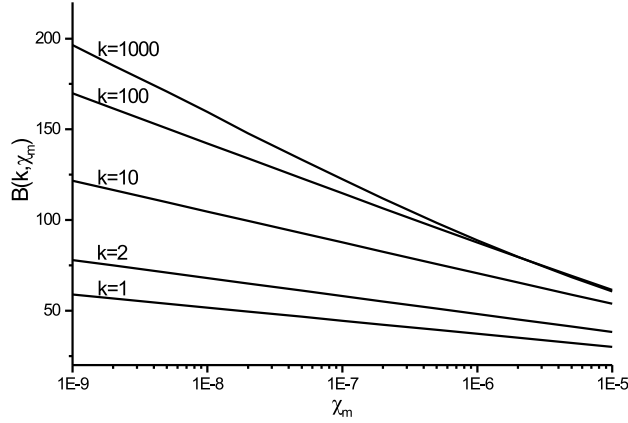


Рис. 3: Модифицированная "функция Тушека", описывающая зависимость скорости диффузии от параметра  $\chi_m$ .

## 4 Модифицированная ”функция потерь” при однократном рассеянии

Эффективный объем, в котором пробная частица испытывает в единицу времени рассеяние на сравнительно большой угол и выбывает из ускорителя, равен произведению относительной скорости  $\nu$  на сечение потерь  $\sigma_{\Pi}$  [1]:

$$\nu\sigma_{\Pi} = \begin{cases} \frac{\pi r_0^2 m^3 c^4}{p^3} \left[ \frac{1}{\mu^2} + \ln \mu - 1 \right], & p \geq \frac{A_p}{\gamma} \\ 0, & p < \frac{A_p}{\gamma} \end{cases}$$

Здесь  $A_p$  — ”апертура” по отклонению продольного импульса от равновесного значения, которая определяется либо размерами ВЧ сепаратрисы, либо реальной апертурой вакуумной камеры  $A_X$  через соотношение  $A_p = mcA_X/D_X$ , где  $D_X$  -радиальная дисперсионная функция. Величина  $\mu = A_p/(\gamma p)$  равна косинусу критического угла, образованного направлением импульса после рассеяния и продольной осью в системе центра масс.

Используя (4), найдем среднее по пучку значение

$$\overline{\nu\sigma_{\Pi}} = \int_{A_p/\gamma}^{\infty} \nu\sigma_{\Pi} f(k, p) dp = \frac{\sqrt{\pi} r_0^2 m^3 c^4}{\sigma_p^3 \varepsilon} C(k, \varepsilon),$$

где ”функция потерь”  $C$  зависит от параметров  $k$ ,  $\varepsilon = (\frac{A_p}{\gamma\sigma_p})^2$  и имеет вид

$$C = \sqrt{\pi} k \varepsilon \int_{\varepsilon}^{\infty} \chi^{-\frac{3}{2}} \left[ \frac{\chi}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \ln \frac{\chi}{\varepsilon} - 1 \right] e^{-\frac{\chi}{2}(1+k^2)} I_0 \left[ \frac{\chi}{2}(1-k^2) \right] d\chi. \quad (7)$$

При  $k \rightarrow \infty$  ”функция потерь” совпадает с аналогичной функцией одномерного приближения [1]:

$$C(\infty, \varepsilon) = \varepsilon \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{\chi^2} \left[ \frac{\chi}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \ln \frac{\chi}{\varepsilon} - 1 \right] e^{-\chi} d\chi.$$

На Рис. 4 построен график ”функции потерь” при различных  $k$ . Видно, что при  $\varepsilon < 10^{-2}$  и небольшом  $k$  величина  $C$  становится меньше, чем в

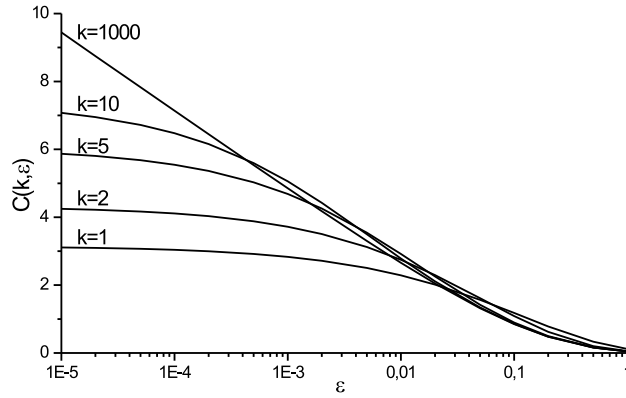


Рис. 4: Модифицированная "функция потерь".

одномерном пределе. При  $\varepsilon \sim 10^{-4}$  (ВЭПП-4М) и  $k \rightarrow 1$  это уменьшение составляет более, чем 2 раза. Тем не менее, окончательный результат по времени жизни пучка существенно зависит и от других параметров, в частности, от  $\sigma_p$ , который также изменяется вместе с параметром  $k$ .

## 5 Расчет влияния "двумерного" эффекта Тушека на параметры пучка в гладком приближении

Определяющим процессом в полном эффекте Тушека является диффузия энергии, вызванная многократным рассеянием частиц в пучке. В результате флуктуаций энергии при рассеянии происходит возбуждение бетатронных и фазовых колебаний, дополняющее аналогичное воздействие радиационного механизма. Потери частиц (время жизни) при однократном рассеянии зависят в свою очередь от установившихся размеров пучка и являются в этом смысле вторичным процессом. Связью колебаний определяется соотношение поперечных размеров, в частности, параметр  $k$ , а также поворот сечения пучка ( $\Psi$ ). Отметим, что их расчет является независимой процедурой по отношению к учету процессов внутрисгусткового рассеяния и может быть проведен с привлечением одних лишь радиационных эффектов.

Для выявления главных особенностей двумерного подхода будем полагать, что указанная геометрия пучка задана и, например, описывается в терминах теории разностного резонанса связи. Кроме того, используем гладкое приближение для амплитудных функций синхротрона.

Обозначим  $u = (\sigma_\gamma/\gamma)^2$  — квадрат относительного энергетического разброса;  $v = \mathcal{E}_X$  — радиальный фазовый объем;  $\varkappa = \mathcal{E}_Z/\mathcal{E}_X$  — коэффициент связи вертикального и радиального фазовых объемов, зависящий от мощности резонанса и резонансной отстройки. В равновесных условиях разброс и фазовый объем находятся из системы уравнений

$$u = u_R + u_T = \frac{\tau_\gamma}{2}(D_{R\gamma} + D_{T\gamma}), \quad (8)$$

$$v = v_R + v_T = \frac{\tau_X}{2}(D_{RX} + D_{TX}).$$

Здесь индексы  $R, T$  помечают вклады радиации ( $R$ ) и эффекта Тушека ( $T$ );  $D_{RX, TX}$  и  $D_{R\gamma, T\gamma}$  — соответствующие коэффициенты диффузии размеров и энергии;  $\tau_{X, \gamma}$  характерные времена радиационного затухания.

Радиационный коэффициент диффузии энергии  $D_{R\gamma}$ , а также величины  $\tau_{X, \gamma}$  даны, в частности, в [1]. Коэффициент диффузии при многократном рассеянии внутри пучка находится с использованием (6):

$$D_{T\gamma} = \frac{1}{2} \overline{\{w < \delta E^2 > \}}_{tab}.$$

(множитель  $1/2$  возник из-за усреднения по синхротронным колебаниям). В гладком приближении имеют место следующие соотношения:

$$\frac{D_{RX}}{D_{R\gamma}} = \frac{D_{TX}}{D_{T\gamma}} = \mathcal{H} = \frac{R}{Q_X^3}, \quad (9)$$

$$\frac{v_R}{u_T} = \frac{v_T}{u_T} = \mathcal{G} = const,$$

$$k = \sqrt{\frac{\beta_Z}{\varkappa\beta_X}},$$

$$\sigma_X\sigma_Z = \frac{u\beta_Z}{k}\mathcal{G};$$

$R$  — средний радиус;  $\beta_{X, Z} = R/Q_{X, Z}$  — бетатронные амплитудные функции;  $Q_{X, Z}$  — бетатронные частоты. Продольный размер пучка равен

$\sigma_S = R\alpha\sqrt{u}/Q_S$ , где  $Q_S$  — частота синхротронных колебаний,  $\alpha$  — фактор уплотнения орбит. С учетом (9)

$$D_{T\gamma} = \frac{\mathcal{N}r_0^2 c Q_S k \sqrt{\beta_X} B(k, \chi_m)}{16\pi\gamma^3 R\alpha u^2 \beta_Z \sqrt{\mathcal{G}}(\mathcal{G} + \mathcal{H})}, \quad (10)$$

$$\chi_m = \left( \frac{\mathcal{N}}{8\pi^{3/2}\gamma^7 \sigma_X \sigma_Z \sigma_S} \right)^{1/3} \cdot \frac{r_0 \beta_X}{u(\mathcal{G} + \mathcal{H})}.$$

В гладком приближении  $D_{T\gamma}$  и  $\chi_m$  являются функциями только одной переменной -  $u$ . Тем самым система (8) сводится к единственному уравнению

$$u^3 = \frac{\mathcal{N}\tau_\gamma r_0^2 c Q_S k \sqrt{\beta_X} B(k, \chi_m)}{32\pi\gamma^3 R\alpha\beta_Z \sqrt{\mathcal{G}}(\mathcal{G} + \mathcal{H})} + u_R u^2. \quad (11)$$

В отличие от [1] данное уравнение учитывает влияние двумерности столкновений внутри пучка с помощью модифицированной функции  $B(k, \chi_m)$ .

Выражение для обратного времени жизни пучка получено с использованием найденной выше величины  $\nu\overline{\sigma_{II}}$  и модифицированной "функции потерь" (7):

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sqrt{\pi}r_0^2 m^3 c^4 \mathcal{N}}{\sigma_p A_p^2 V} \cdot C(k, \varepsilon) = \frac{\mathcal{N}r_0^2 m^3 c^5 Q_S k \sqrt{\beta_X}}{8\pi R\alpha\beta_Z \mathcal{G}^{3/2} A_p^2 u^2} \cdot C(k, \varepsilon). \quad (12)$$

## 6 Численные примеры для ВЭПП-4М

### 6.1 Зависимость параметров пучка от энергии

На Рис. 5,6 приведены результаты расчета энергетического разброса и времени жизни пучка из (11) и (12) для коллайдера ВЭПП-4М в зависимости от энергии частиц при разных значениях параметра связи  $k$ . Для сравнения на Рис. 5 показаны также экспериментальные результаты, полученные путем измерения продольного размера пучка при фиксированной частоте синхротронных колебаний [8]. Расчетные кривые  $\sigma_E/E$  нормированы на постоянный коэффициент так, чтобы в области высоких энергий, где влияние эффектов внутрисгусткового рассеяния мало, они совпадали с экспериментальными данными. Это необходимо для учета систематической погрешности, связанной с точностью определения параметров магнитной структуры. Видно, что в области энергии 1 ГэВ эффект Тушека начинает играть определяющую роль.

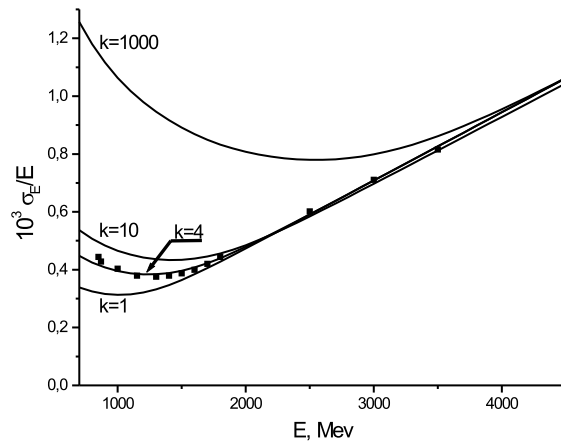


Рис. 5: Расчетные и экспериментальные зависимости энергетического разброса от энергии частиц в коллайдере ВЭПП-4М.

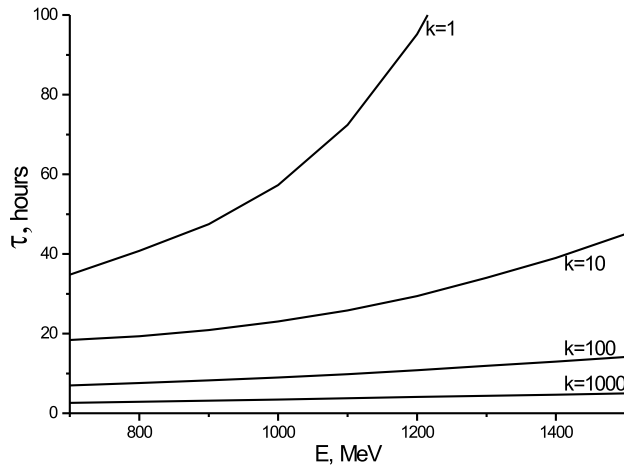


Рис. 6: Расчетная зависимость времени жизни пучка от энергии частиц в коллайдере ВЭПП-4М.

Наилучшее согласие с экспериментом в данных по энергетическому разбросу достигается при  $k \simeq 4$ , что соответствует наблюдаемому соотношению фазовых объемов. Рис. 7 иллюстрирует различие в результатах расчета  $\sigma_E/E$  в одномерном и двумерном приближениях.

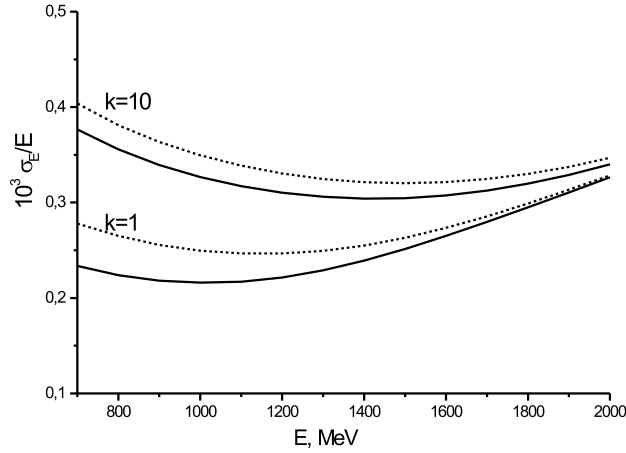


Рис. 7: Результаты расчета энергетического разброса; сплошные линии — в приближении двумерных столкновений, пунктирные — одномерных.

## 6.2 Зависимость от параметра связи

Интересно рассмотреть, в какой степени влияет учет двумерности столкновений, если предположить, что эффект Тушека доминирует над процессами излучения (диффузия) и над процессами рассеяния на остаточном газе (время жизни).

С этой целью найдем отношение размеров и времен жизни пучка для разных значений параметра связи  $k$ , но при равных прочих условиях. Из (12) следует, что

$$\frac{1}{\tau} \propto \frac{k}{u^2} C(k, \varepsilon).$$

Так как  $u$  с точки зрения зависимости  $C$  от  $\varepsilon(u)$  меняется мало, то для

двух случаев  $k = k_1$  и  $k = k_2$  можно положить  $\varepsilon = const$ . Тогда

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \sim \frac{k_1}{k_2} \cdot \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 \cdot \frac{C_1}{C_2}.$$

В пределе  $u_R \ll u$  (см. (11))

$$u^3 \propto kB(k, \chi_m),$$

поэтому

$$\frac{u_2}{u_1} \sim \left(\frac{k_2 B_2}{k_1 B_1}\right)^{1/3}$$

и

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \sim \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^{2/3} \cdot \frac{C_1}{C_2}.$$

Пример:  $k_1 = 10$ ,  $B_1 \simeq 120$ ,  $C_1 \sim 7$  (ВЭПП-4М, 1 ГэВ:  $\varepsilon \sim 10^{-4}$  (см. Рис. 4));  $k_2 = 1$ ,  $B_2 \simeq 60$ ,  $C_2 \sim 3$ :

$$\sqrt{\frac{u_1}{u_2}} \sim 1.6,$$

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \sim 3.$$

Здесь мы положили  $\chi_m$  в обоих случаях одинаковым ( $\chi_m \sim 10^{-9}$ ), поскольку зависимость  $f$  от  $\chi_m$  достаточно слабая. Таким образом, если эффект Тушека доминирует, то радиальный размер и разброс энергии в "круглом" пучке заметно меньше, а время жизни заметно больше, чем в пучке с обычным на практике значением параметра связи ( $k \sim 10$ ).

### 6.3 Случай фиксированной плотности частиц

При фиксированной плотности частиц ( $N/V = const, V \propto u^{3/2}/k$ ), но разных  $k$  имеем

$$k_1 = 10, B(k_1, \chi_m) \approx 120; k_2 = 1, B(k_2, \chi_m) \approx 60.$$

$$\sqrt{\frac{u_1}{u_2}} = \left[\frac{B(k_1, \chi_m)}{B(k_2, \chi_m)}\right]^{1/3} \approx 1.26,$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{u_1}{u_2}} \cdot \frac{C(k_2, \varepsilon)}{C(k_1, \varepsilon)} \approx 0.54.$$



Отметим важное следствие для случая источников СИ. При одинаковой "яркости" в круглом пучке требуется иметь намного меньший ток, поскольку отношение числа частиц

$$\frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_2} = \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{3/2} \cdot \frac{k_2}{k_1} \approx 0.2.$$

#### 6.4 Оценка расхождений с традиционным подходом

Оценим насколько меняются результаты по отношению к теории, основанной на приближении одномерных столкновений (величины с индексом \*). Заметим, что в традиционной теории "двумерность" учтена только при вычислении плотности, зависящей от поперечных размеров пучка.

При  $B(\infty, \chi_m) \approx 200$ ,  $B(1, \chi_m) \approx 60$  отношение размеров

$$\left(\frac{u_*}{u}\right)^{1/2} = \left(\frac{B(\infty, \chi_m)}{B(k, \chi_m)}\right)^{1/6} \approx 1.22;$$

отношение времен жизни

$$\frac{\tau}{\tau_*} \approx \left(\frac{u}{u_*}\right)^2 \frac{C(\infty, \varepsilon)}{C(k, \varepsilon)} \approx 1.05.$$

Таким образом, в случае круглого пучка поправка в разбросе энергии и размерах составляет 20% (Рис. 7); время жизни практически не меняется вследствие одновременного изменения размеров и "функции потерь".

## 7 Заключение

С учетом двумерного характера взаимодействия частиц в эффекте Тушека найден модифицированный вид функции распределения по импульсу, скорости диффузии и скорости потерь с введением дополнительного обобщенного параметра связи — отношения угловых разбросов по горизонтали и вертикали. Построены универсальные характеристические функции, описывающие эффект при разных значениях этого параметра и в пределе плоского пучка переходящие в известные зависимости.

Приведены численные примеры для коллайдера ВЭПП-4М в области энергии вблизи 1 ГэВ, где влияние внутрисгусткового рассеяния частиц становится определяющим.

Показано, что в случае круглого пучка поправка к традиционной теории в разбросе энергии и размерах может составить 20%, при этом поправка ко времени жизни несущественна.

Авторы благодарят И.А. Коопа, любезно согласившегося прочитать рукопись и высказавшего полезные замечания.

## Литература

- [1] *Г.Брук*, Циклические ускорители заряженных частиц, М. Атомиздат, 1970.
- [2] *Л.М.Барков и др.*, Труды 14-ой Межд. Конф. Уск. Выс. Эн., Цукуба (Япония), с.1385 (1989).
- [3] *И.С.Градштейн, И.М.Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М. Физматгиз, 1962.
- [4] *A.A.Valishev, I.N.Nesterenko, Yu.M.Shatunov*, Dynamic aperture measurement at VEPP-2M, Frascati Physics Series Vol. X (1998), p. 233–238
- [5] *Ю.Люк*, Специальные математические функции и их аппроксимации, М. Мир, 1980.
- [6] *Ya.S.Derbenev, A.N.Skrinsky*, The kinetics of electron cooling of beams in heavy particle storage rings, Particle Accelerators, Vol.8, p.1-20 (1977).
- [7] *V.V.Anashin et al.*, Damping ring for electrons and positrons BEP, Preprint INP 84-114(1984).
- [8] *В.А.Киселев, С.А.Никитин, И.Я.Протопопов*, Matching and use of dipole wigglers in the collider VEPP-4M to control beam parameters at low energy range of operation, Proc. XVII Intern. Conf. on High Energy Accelerators, p.103-105, Dubna, Russia 1998.