СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР 3

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Э.А.Кураев

ИНТЕГРАЛЫ, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ СЕЧЕНИЙ ПРОЦЕССОВ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

ПРЕПРИНТ 80-155

Новосибирск

ИНТЕГРАЛЫ, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ СЕЧЕНИЙ ПРОЦЕССОВ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Э.А.Кураев

А Н Н О Т А Ц И Я

Представлены интегралы по 4-импульсному пространству возникающие при вычислении в e^4 порядке т.в. амплитуд $e^+e^-\to e^+e^-$, $\mu^+\mu^-$, $\gamma\gamma$; $\gamma\gamma\to\gamma\gamma$. Интегралы по 3-импульсам мягких фотонов, а также в жесткой части спектра. 2-мерные эвклидовы интегралы и интегралы по пространству нецелой размерности. Некоторые азимутальные интегралы и, наконец, обобщения дилогарифмических интегралов Эйлера.

Цель настоящей работы - систематизировать интегралы, воз-никающие при вычислении радиационных поправок к процессам кван товой электродинамики (QED) в низших порядках теории возму-щений (т.в.), а также представить некоторые интегралы, встреча ющиеся при вычислении полных сечений, при интегрировании по фа зовому пространству конечных частиц.

В разделах (I-4) представлены интегралы по 4-импульсному пространству вида

$$(i\pi^2)^{-1}\int d^4k \, \frac{1,\ k_\mu,\ k_\mu k_\nu,\ k_\mu k_\nu k_\rho,\ k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{\prod_1^4 ((k+p_i)^2-m_i^2+i\varepsilon)} \qquad (I)$$

возникающие при нахождении амплитуд процессов в e^4 порядке т.в. Для процессов $e^+e^- \to e^+e^-$, $\gamma\gamma$ рассмотрен случай, когда $p_i p_j \gg m^2$, где p_i - 4-импульсы внешних реальных час-тиц, m - масса электрона. Для $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ считается $p_i p_j \sim m_\mu^2 \gg m^2$. Для процесса $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$ выписаны точные результаты. Тензора приведены в симметризованных выражениях.

В разделах 5-6 рассмотрены интегралы, возникающие при уче те вклада в сечение от излучения мягких реальных фотонов в не-которых ситуациях; а также при рассмотрении жесткой части спек тра в реакциях типа $a+b \to c+d+\gamma$.

В разделах I0,7,8 рассмотрены интегралы по двумерной эв-клидовой области, возникающие при использовании техники беско-нечного импульса, интегралы в пространстве нецелой размерности и некоторые однократные угловые интегралы, содержащие в знаме-нателе выражения вида ($a+b\cos\varphi$).

В разделе 9 рассмотрены интегралы вида[2] с целыми неотрица-тельными числами $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma \geq 0$ для случая
$\int_0^1 dx (\ln x)^a (\ln(1-x))^b (\ln(1+x))^c \, x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}(1+x)^{-\gamma}$, $\alpha+\beta+\gamma=1$, $1 \leq a+b+c \leq 4$,
представляющими собой обобщение дилогарифмов Эйлера.

Приводимые однократные интегралы в большинстве не предста лены в каких-либо справочниках типа Градштейна, Рыжика. Литера тура, где рассмотрены близкие к рассматриваемым интегралы ука-зана.

I. Интегрирование в (I) выполняется в псевдоэвклидовой ме трике $ab = a_0 b_0 - \vec{a}\vec{b}$, $d^4k = dk_0 d^3k$.

Рассмотрим процесс аннигиляции e^+e^- в два γ -кванта /I,6/

$$p_+ + p_- = q_1 + q_2 , \quad p_\pm^2 = m^2 , \quad q_{1,2}^2 = 0 .$$

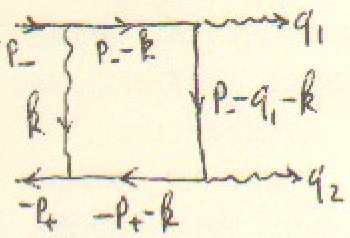
Величины (I) удобно выражать через вектора

$$P = \frac{1}{2}(p_- - p_+) , \; Q = \frac{1}{2}(p_- + p_+) , \; q = \frac{1}{2}(q_2 - q_1)$$

инварианты

$$\kappa = 2p_- q_1 , \; \tau = 2p_- q_2 , \; s = \kappa + \tau = (p_+ + p_-)^2 .$$

Для диаграммы, изображенной на рисунке имеем



$$(1) = (k - p_-)^2 - m^2 , \; (0) = k^2 - \lambda^2 ,$$
$$(2) = (k + p_+)^2 - m^2 , \; (k) = (p_- - q_1 - k)^2 - m^2 ,$$

$$\left(\frac{2i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k}{(0)(k)(1)(2)} = Y , \; \left(\frac{2i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k \, k_\mu}{(0)(k)(1)(2)} = a_1 P_\mu + a_2 q_\mu , \qquad \text{(I.I)}$$

$$\left(\frac{2i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k \, k_\mu k_\nu}{(0)(k)(1)(2)} = \{ b_1 g + b_2 (QQ) + b_3 (PP) + b_4 (qq) + b_5 (P,q) \}_{\mu\nu} ,$$

$$\left(\frac{2i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k \, k_\mu k_\nu k_\rho}{(0)(k)(1)(2)} = \{ c_1 (gP) + c_2 (gq) + c_3 (PQQ) + c_4 (qQQ) + c_5 (PPP) +$$

$$+ c_6 (qqq) + c_7 (Pqq) + c_8 (qPP) \}_{\mu\nu\rho}$$

Здесь и далее мы используем симметричные комбинации

$$(gP)_{\mu\nu\rho} = g_{\mu\nu} P_\rho + g_{\mu\rho} P_\nu + g_{\nu\rho} P_\mu , \; (PPP) = P_\mu P_\nu P_\rho , \; (PP)_{\mu\nu} = P_\mu P_\nu , \qquad \text{(I.2)}$$
$$(Pqq)_{\mu\nu\rho} = P_\mu (qq)_{\nu\rho} + P_\nu (qq)_{\mu\rho} + P_\rho (qq)_{\mu\nu} , \; (Pq)_{\mu\nu} = P_\mu q_\nu + P_\nu q_\mu .$$

Величины a_i , b_i , c_i имеют вид

$$a_1 = \frac{1}{2\kappa\tau}\left[-sF + (\tau - \kappa) z + 2\kappa G \right] , \; a_2 = \frac{1}{2\kappa\tau}\left[(\kappa - \tau) F + s z - 2\kappa G \right] ,$$

$$c_7 = (\kappa + 9\tau)/(3\kappa\tau) + c(2\kappa - \tau)(\kappa\tau^2)^{-1} - (3\tau^2 + 2\kappa^2 + \kappa\tau)(3\kappa\tau^2)^{-1}\rho + G(\kappa^2 - \tau^2)\tau^{-3} + sz(\tau^2 - \kappa^2)(2\kappa\tau^3)^{-1} +$$

$$+ F(-\kappa^3 - \tau^3 + \kappa\tau(\tau - \kappa))(2\kappa\tau^3)^{-1} ,$$

$$b_1 = \frac{1}{4\tau}\left[s(F + z) - 2\kappa G \right] , \; b_2 = -\frac{1}{\tau s}\left(s(F + z) - 2\kappa G \right) + \frac{2}{s} G + \frac{2}{\kappa s}(1 - c) ,$$

$$b_3 = \frac{1}{2\kappa\tau}\left[\frac{s}{\tau}(\kappa - \tau) F + \frac{2\kappa}{\tau}(\tau - \kappa) G + \frac{1}{\tau}(\kappa^2 + \tau^2) z - 4c + \frac{4}{s}(\kappa - \tau)\rho \right] ,$$

$$b_4 = \frac{1}{2\kappa\tau}\left[\frac{s^2}{\tau} z - \frac{2s\kappa}{\tau} G + \frac{1}{\tau}(\kappa^2 + 2\kappa\tau - \tau^2) F - 4c + \frac{4}{s}(\kappa - \tau)\rho + 16\frac{\tau}{s} \right] ,$$

$$b_5 = \frac{1}{2\kappa\tau}\left[\frac{s}{\tau}(\tau - \kappa) z + \frac{2\kappa}{\tau}(\kappa - \tau) G - \frac{1}{\tau}(\tau^2 + \kappa^2) F + 4c - 4\rho \right] ,$$

$$c_1 = \frac{\tau - \kappa}{8\tau^2}\left[s(z + F) - 2\kappa G \right] + \frac{1}{2\tau}(c - \rho) ,$$

$$c_2 = \frac{s}{8\tau^2}\left[s(z + F) - 2\kappa G \right] + \frac{1}{2\tau}(\rho - c) , \qquad \text{(I.3)}$$

$$c_3 = \frac{2}{s} G + \frac{\kappa - \tau}{2s\tau^2}\left[s(F + z) - 2\kappa G \right] + \frac{1}{\kappa s}(12 - 10c) + \frac{2}{\tau s}(\rho - c) ,$$

$$c_4 = -\frac{1}{2\tau^2}\left[s(F + z) - 2\kappa G \right] + \frac{1}{3\kappa}(2c - 6) + \frac{2}{3\tau}(c - \rho) ,$$

$$c_5 = -\frac{1}{2\kappa\tau^3}(\kappa^3 + \tau^3) F + \frac{1}{2\kappa\tau^3}(\tau^3 - \kappa^3) z + \frac{1}{3\tau^3}(\kappa^3 + \tau^3) G + \frac{2\kappa - 3\tau}{\kappa\tau^2} c + \frac{\kappa\tau - 2\kappa^2 - 3\tau^2}{3\kappa\tau^2}\rho + \frac{1}{\kappa\tau} ,$$

$$c_6 = \frac{s^3}{2\kappa\tau^3} F - \frac{s^2}{\tau^3} G + \frac{1}{2\kappa\tau^3}(s^3 - 2\tau^3) F - \frac{1}{\kappa\tau^2}(3\tau + 2\kappa) c + \frac{1}{3\kappa\tau^2}(2\kappa^2 + 5\kappa\tau - 3\tau^2)\rho + \frac{13\tau - \kappa}{3\kappa\tau} ,$$

$$c_8 = \frac{1}{2\kappa\tau^3}(\kappa^3 + \tau^3) z - \frac{1}{3\tau^3}(\kappa^3 + \tau^3) G + \frac{1}{2\kappa\tau^3}(\kappa^3 - \tau^3) F + \frac{2\kappa - 3\tau}{\kappa\tau^2}(\rho - c) - \frac{1}{\kappa\tau} ;$$

где $z = H + \kappa Y$, $c = \ln(\kappa/m^2)$, $\rho = \ln(s/m^2)$, а величины Y , F , G , H связаны со скалярными интегралами с 4-мя и тремя знаменателями:

$$Y = \left(\frac{2i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k}{(0)(k)(1)(2)} , \; F = \left(\frac{2i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k}{(1)(2)(k)} , \; G = \left(\frac{2i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k}{(1)(k)(0)} , \; H = \left(\frac{2i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k}{(1)(2)(0)} .$$

Эти величины мы приведем в приближении $\kappa, \tau, s \gg m^2$ (это же приближение использовано в (I.3)), и дадим пример вычисления некоторых из них .

$$Y = \frac{2}{\kappa s}\left[2\rho c - 2\rho \ln\frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{1}{2}\pi^2 \right] + \frac{4i\pi}{\kappa s}\left[-2\rho - c + \ln\frac{\lambda}{m} \right] , \qquad \text{(I.4)}$$

$$G = \frac{1}{k}\left(\rho^2 + \frac{2}{3}\pi^2\right), \quad F = \frac{1}{s}\left(\pi^2 - \rho^2 + 2i\pi\rho\right),$$

$$H = \frac{1}{s}\left[-\rho^2 + \frac{4}{3}\pi^2 + 2\rho \ln\frac{\lambda^2}{m^2} + i\pi\left(2\rho - 2 - \ln\frac{\lambda^2}{m^2}\right)\right], \qquad \text{(I.4)}$$

$$\operatorname{Re} Z = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{3}\pi^2 - \rho^2 + 4\rho c\right).$$

Пример вычисления интегралов.

Интегралы с 3-мя и 4-мя знаменателями используя тождество $a^{-n}b^{-1} = n\int_0^1 x^{n-1}[ax + b(1-x)]^{-n-1}dx$ можно свести к интегралам вида $\int d^4k\,[k^2 - 2kp + \ell]^{-n}$, которые после сдвижки $k = \ell - p$, перехода к эвклидовой метрике $k^2 = -z$; $d^4k = i\pi^2 z\,dz$ примут вид

$$i\pi^2\int_0^\infty \frac{z\,dz(-1)^n}{(z + p^2 - \ell)^n} = i\pi^2(-1)^n\frac{1}{(n-1)}\frac{(p^2-\ell)^{-(n-2)}}{(n-2)}$$

Интеграл F содержит в знаменателе (I) (2) (k). Объединяя сначала знаменатели (I) (2) с помощью параметра y, результат с (k) с помощью x и выполняя интегрирование по импульсу k получим

$$F = \frac{2}{m^2}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\,\frac{x}{1 - \frac{s}{m^2}x^2 y(1-y) - i\varepsilon} = -\frac{1}{s}(\rho^2 - \pi^2) + \frac{2i\pi}{m^2}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\cdot x\,\delta\left(1 - \frac{s}{m^2}x^2 y(1-y)\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left[\pi^2 - \rho^2 + 2i\pi\rho\right], \quad \rho = \ln(s/m^2).$$

Интеграл H содержит (I) (2) (0). Объединение (I) (2) приводит к выражению в знаменателе

$$k^2 - 2kP_y, \quad P_y = yP_+ - (1-y)P_-;$$

объединение с (0) и сдвижка: $k^2 - 2kP_y \to k^2 - 2kP_y\cdot x - \lambda^2(1-x) = (k - xP_y)^2 - x^2P_y^2 - \lambda^2(1-x)$, λ – масса фотона. После k -интегрирования

$$H = \int_0^1 \frac{dy}{P_y^2}\ln\frac{P_y^2}{\lambda^2}, \quad \frac{P_y^2}{m^2} = 1 - \frac{s}{m^2}y(1-y) - i\varepsilon$$

Пользуясь

$$\int_0^1\frac{dy}{P_y^2} = \frac{2}{s}\left(-\rho + i\frac{\pi}{2}\right), \quad \int_0^1\frac{dy}{P_y^2}\ln\frac{P_y^2}{m^2} = \frac{1}{s}\left[-\rho^2 + \frac{4}{3}\pi^2 + 2\rho\ln\frac{\lambda^2}{m^2} + i\pi\left(2\rho - 2 - \ln\frac{\lambda^2}{m^2}\right)\right],$$

получим (I.4).

Аналогичная процедура для G приводит к выражению

$$G = 2\int_0^1 dx\int_0^1\frac{dy}{m^2x + ky(1-x)} = \frac{2}{k}\left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}\ln^2(k/m^2)\right).$$

Рассмотрим наконец

$$J = \frac{2i}{\pi^2}\int d^4k\left\{(k^2 - \lambda^2)(k^2 + 2kP_y)(k^2 - 2kP_+)(k^2 + 2k(P_- - q_1) - k)\right\}^{-1}$$

Последовательность объединений

$$(1)(2) \to k^2 - 2kP_y, \quad (1)(2)(k) \to k^2 - 2k[vP_y + (1-v)(q_1 - P_-)] - k(1-v) \equiv$$

$$\equiv k^2 - 2kP_v - k(1-v);$$

$$(1)(2)(k)(0) \to k^2 - 2kP_v\cdot x - kx(1-v) - \lambda^2(1-x),$$

приведет его к виду:

$$J = \int_0^1 dy\,dv\,dx\cdot x^2 v\left[x^2(v^2P_y^2 + m^2v(1-v)) + (m^2 - k)(1-v) + kx(1-v) + \lambda^2(1-x)\right]^{-2}.$$

Интеграл по V разобьем на две области $\mathrm{I}: 0 < v < 1 - \varepsilon$, $\mathrm{II}: 1 - \varepsilon < v < 1$, $\varepsilon \ll 1$.

$$\mathrm{I} = \int_0^1 dx\int_0^{1-\varepsilon}dv\cdot v\left[x^2P_y^2 + \lambda^2 + (1-v)(2m^2x^2 + x(1-x)k)\right]^{-2} = \frac{1}{kP_y^2}\left[\ln\frac{1}{\varepsilon} + \int_0^1\frac{dv[v(P_y^2 - m^2) - m^2]}{v^2(P_y^2 - m^2) + m^2}\right].$$

При вычислении II введем еще один вспомогательный параметр

$$\lambda^2 \ll \sigma^2P_y^2 \ll \sigma\varepsilon\tau, \quad 0 < x < \sigma, \quad \sigma < x < 1:$$

$$\mathrm{II} = \int_0^\sigma\frac{\varepsilon x^2dx}{(x^2P_y^2 + \lambda^2)(\lambda^2 + x\varepsilon\tau)} + \int_\sigma^1\frac{\varepsilon\,dx}{xP_y^2(xP_y^2 + \varepsilon k)} = \frac{1}{2kP_y^2}\ln\frac{\sigma^2P_y^2}{\lambda^2} + \frac{1}{kP_y^2}\ln\frac{\varepsilon k}{\sigma P_y^2}.$$

В сумме I + II параметры ε, σ выпадают

$$J = \frac{-2}{k p_y^2}\left[\ln\frac{k}{m\lambda} - \int_0^1 dx\left(1 - \frac{s}{m^2}x^2 y(1-y)\right)^{-1}\right].$$

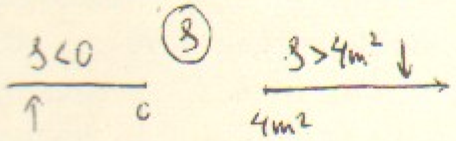
Оставшиеся интегрирования удобно провести для нефизической области параметра s : $s = 4m^2\sin^2\theta$. Делая подстановки $x = \sin\phi/\sin\theta$, $2y-1 = \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\phi$ и пользуясь

$$\int d\phi\,(\sin\theta - \sin\phi)^{-1} = \frac{1}{\cos\theta}\ln\frac{\sin\frac{\theta-\phi}{2}}{\cos\frac{\theta+\phi}{2}},$$

приведем его к виду

$$J = \frac{-4\theta}{k m^2 \sin 2\theta}\left[\ln\frac{k}{\lambda m} - \frac{2}{\theta}\int_0^\theta dx\cdot x\cdot\mathrm{ctg}\,x + \frac{1}{2\theta}\int_0^{2\theta} dx\cdot x\cdot\mathrm{ctg}\,x\right].$$

Продолжение в физическую область канала аннигиляции осуществляется в замене



$$\theta \to \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}, \quad v = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}.$$

При этом

$$\sin 2\theta \to -2i\frac{v}{1-v^2}, \quad \mathrm{ctg}\,2\theta \to -i\frac{1+v^2}{2v}, \quad \mathrm{tg}\,\theta \to \frac{i}{v},$$

$$\int_0^\theta x\,\mathrm{tg}\,x\,dx \to$$

$$\to -\frac{\pi}{4}\ln\frac{4v^2}{1-v^2} + i\left[\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}} dx\cdot x\cdot\mathrm{cth}\,x\right]$$

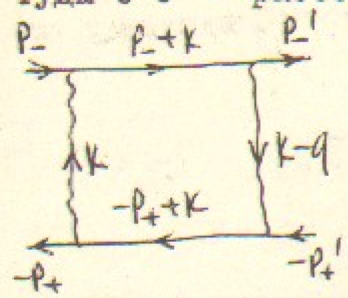
в результате

$$J = \frac{-4y}{k m^2\,\mathrm{sh}(2y)}\left[\ln\frac{k}{\lambda m} - 2h(y) + h(2y)\right], \quad y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}, \quad h(y) = \frac{1}{y}\int_0^y dx\cdot x\cdot\mathrm{cth}\,x.$$

Это точное выражение. В пределе $s \gg m^2$:

$$J = \frac{4}{ks}\left[\rho\ln\frac{k}{\lambda m} - \frac{\pi^2}{4} - i\pi\left(\ln\frac{k}{\lambda m} + 2\rho\right)\right].$$

2. При вычислении второго борновского приближения амплитуды e^+e^- - рассеяния (см.рис.) [2]



$$P_+ + P_- = P_+' + P_-', \quad P_\pm^2 = P_\pm'^2 = m^2$$

$$(1) = (k^2 - \lambda^2), \quad (2) = (q-k)^2 - \lambda^2, \quad (3) = k^2 - 2P_+k$$

$$(4) = k^2 + 2P_-k,$$

возникают интегралы

$$b = \left(\frac{-i}{\pi^2}\right)\int\frac{d^4k}{(1)(2)(3)(4)}, \quad b_\sigma = \left(\frac{-i}{\pi^2}\right)\int\frac{d^4k\,k_\sigma}{(1)(2)(3)(4)} = b_1\Delta_\sigma + b_2 q_\sigma,$$

$$b_{\rho\sigma} = \left(\frac{-i}{\pi^2}\right)\int\frac{d^4k}{(1)(2)(3)(4)} = \left(b_3(\Delta\Delta) + b_4(PP) + b_5(\Delta q) + b_6(qq) + b_7 g\right)_{\rho\sigma}, \tag{2.1}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(P_+ - P_-), \quad q = P_-' - P_-, \quad P = \frac{1}{2}(P_+ + P_-).$$

Мы приведем реальную часть b, b_i для случая $s = (P_+ + P_-)^2$, $-t = -(P_-' - P_-)^2 \gg m^2 = 1$, $-u = -(P_- - P_+')^2 \gg m^2$, $s + t + u = 0$.

$$b = \frac{2}{st}\ln s\ln(-t/\lambda^2), \quad b_7 = \frac{2}{s+t}(t\psi_t - s\psi_s) - \frac{1}{2(s+t)}\ln s\ln(-t/s),$$

$$b_1 = \frac{2}{s+t}\left[\frac{1}{s}\ln s\ln(-t/s) + \psi_s + \psi_t\right],$$

$$b_2 = \frac{1}{st}\ln s\ln(-t/\lambda^2) - \frac{1}{s+t}\left[\frac{1}{s}\ln s\ln(-t/s) + \psi_s + \psi_t\right], \tag{2.2}$$

$$b_3 = \frac{2(t-s)}{(t+s)^2}\left[\frac{1}{s}\ln s\ln(-t/s) + \psi_s + \psi_t\right] + \frac{4}{s+t}\left[\psi_t - \frac{1}{t}\ln(-t) - \frac{1}{s}\ln s\right],$$

$$b_4 = -\frac{4}{st}\ln(-t) + \frac{2}{s+t}\left[\frac{1}{s}\ln s\ln(-t/s) + \psi_s + \psi_t\right],$$

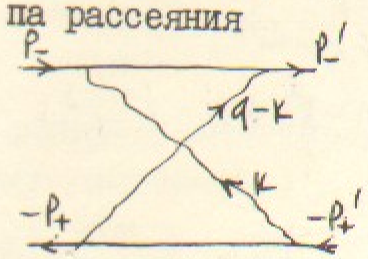
$$b_5 = \frac{2}{(t+s)^2}\ln s\ln(-t/s) + \frac{2}{t+s}\left(\frac{1}{t}\ln(-t) + \frac{1}{s}\ln s\right) + \frac{2}{(t+s)^2}(s\psi_s - t\psi_t),$$

$$b_6 = \frac{s^2}{t(t+s)^2}\left[\frac{1}{s}\ln s\ln(-t/s) + \psi_s + \psi_t\right] - \frac{1}{t}\left[\psi_s - \frac{1}{s}\ln s\ln\frac{s}{\lambda^2} + \frac{2}{s}\ln s + \frac{1}{t}\ln(-t)\right] -$$

$$-\left(s/t(s+t)\right)\left[\psi_t - \frac{1}{s}\ln s - \frac{1}{t}\ln(-t)\right],$$

где $\psi_s = \frac{1}{s}\left(\frac{2}{3}\pi^2+\frac{1}{2}\ln^2 s\right)$, $\psi_t = \frac{1}{t}\left(\frac{2}{3}\pi^2+\frac{1}{2}\ln^2(-t)\right)$.

Имеются еще три диаграммы этого типа. Рассмотрим диаграмму типа рассеяния

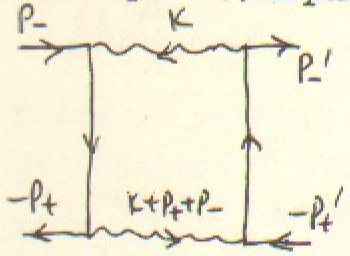


$$\tilde\Delta = \frac{1}{2}(-p_- - p'_+),\quad \tilde S = \frac{1}{2}(p_- - p'_+), \qquad (2.3)$$
$$\psi_{1u} = \frac{1}{u}\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\ln^2(-u)\right)$$

Соответствующие интегралы имеют вид (2.I), (2.2), где надо сделать замену

$$\ln s \to \ln(-u),\ q\to q,\ \Delta\to\tilde\Delta,\ S\to\tilde S,\ \psi_s\to\psi_{1u},\ s\to u. \qquad (2.4)$$

Рассмотрим диаграммы типа аннигиляции

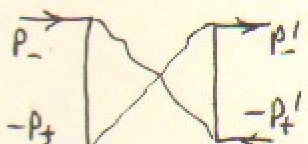


$$\varphi = \frac{1}{2}(p_- - p'_-),\quad P = -p_+ - p_-,\quad \chi = -\frac{1}{2}(p_- + p'_-), \qquad (2.5)$$
$$\psi_{1s} = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\ln^2 s\right),\quad \psi_{1t} = \frac{1}{t}\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\ln^2(-t)\right).$$

Соответствующие интегралы получатся из (2.I), (2.2) заменой

$$\psi_s\to\psi_{1t},\ \ln s\to\ln(-t),\ S\to\varphi,\ q\to P,\ \Delta\to\chi,\ \psi_t\to\psi_{1s},\ t\leftrightarrow s. \qquad (2.6)$$

Наконец, для диаграммы

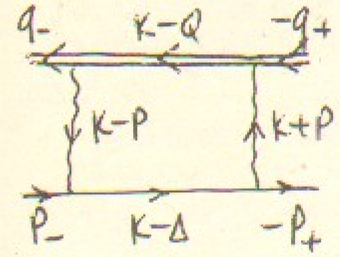


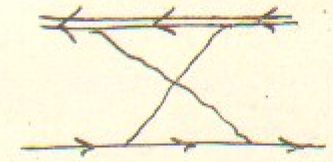
$$\tilde\varphi = \frac{1}{2}(p_- - p'_+),\quad \tilde\chi = -\frac{1}{2}(p_- + p'_+),\quad \tilde P = P \qquad (2.7)$$

все величины получатся из (2.4), (2.5) заменой

$$t\leftrightarrow u,\ \ln(-t)\leftrightarrow\ln(-u),\ \psi_{1t}\leftrightarrow\psi_{1u},\ \psi_{1s}\to\psi_{1s},\ \varphi\to\tilde\varphi,\ \chi\to\tilde\chi,\ P\to P. \qquad (2.8)$$

3. Рассмотрим интегралы, возникающие при вычислении второго борновского приближения для амплитуды процесса $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ (см.рис.) [2,3]





$$p_+ + p_- = q_- + q_+,\quad p_\pm^2 = m^2,\quad q_\pm^2 = \mu^2,$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(p_+ - p_-),\quad P = \frac{1}{2}(p_+ + p_-),\quad Q = \frac{1}{2}(q_+ - q_-), \qquad (2.I)$$

$$s = (p_+ + p_-)^2,\quad t = (p_- - q_-)^2,\quad u = (p_- - q_+)^2,\quad s+t+u = 2\mu^2+2m^2.$$

Интегралы

$$J, J_\mu, J_{\mu\nu} = (-i/\pi^2)\int d^4k\, \frac{1,\ k_\mu,\ k_\mu k_\nu}{(\Delta)(Q)(+)(-)}$$

где $(\Delta) = (k-\Delta)^2 - m^2$, $(Q) = (k-Q)^2 - \mu^2$, $(\pm) = (k\pm P)^2 - \lambda^2$ сводятся к вычислению аналогичных скалярных интегралов с меньшим количеством сомножителей в знаменателе

$$J_\mu = J_\Delta \Delta_\mu + J_Q Q_\mu$$
$$J_{\mu\nu} = \left(K_0 + K_P(PP) + K_\Delta(\Delta\Delta) + K_Q(QQ) + K_X(Q\Delta)\right)_{\mu\nu},$$
$$J_\Delta = \frac{1}{2d}\left[F(\tau - Q^2) + \tau F_\Delta - Q^2 F_Q\right],\quad J_Q = \frac{1}{2d}\left[F(\tau-\Delta^2) + \tau F_Q - \Delta^2 F_\Delta\right],$$
$$K_0 = -\frac{1}{2\tau}\left[Q^2 A_2 - \Delta^2 A_3 + \tau(H - A_1)\right],\quad K_P = \frac{-1}{2\tau\Delta^2}\left[-\Delta^2 A_3 + Q^2 A_2 + \tau(H + A_4 - A_1)\right], \qquad (2.2)$$
$$K_Q = \frac{-1}{2\tau d}\left[-\Delta^2\tau H + 2\Delta^4 A_3 + (\tau^2 - 2\Delta^2 Q^2)A_2\right],$$
$$K_\Delta = \frac{-1}{2\tau d}\left[-Q^2\tau H - Q^4 A_2 + (\tau^2 + \Delta^2 Q^2)A_3\right],$$
$$K_X = \frac{-1}{2\tau d}\left[\tau^2 H + Q^2\tau A_2 - 2\Delta^2\tau A_3\right],$$

где $\tau = \Delta Q$, $d = \Delta^2 Q^2 - \tau^2$, $A_1 = H_\Delta - 2P^2 J_\Delta$, $A_2 = H_Q - 2P^2 J_Q - G_Q$, $A_3 = H_\Delta - 2P^2 J_\Delta - G_\Delta$, $A_4 = H_P$, $H = F - G + H_P + 3H_\Delta - 6P^2 J_\Delta$.

Мы приведем значения F, G, H, J_Δ, J_Q в приближении $m^2 \ll \mu^2$; $s, |t|, |u| \sim \mu^2$.

$$J = \left(-\tfrac{i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k}{(\Delta)(Q)(+)(-)} = \frac{-1}{s(\mu^2-t)}\left(2\ln\frac{\mu^2-t}{\mu^2} + \ln\frac{\mu^2}{m^2}\right)\ln\frac{s}{\lambda^2},$$

$$F_\Delta = \left(-\tfrac{i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k}{(\Delta)(+)(-)} = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\ln^2(s/m^2)\right),$$

$$F_Q = \left(-\tfrac{i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k}{(Q)(+)(-)} = \frac{1}{s\beta}\left[\ln\frac{s}{m^2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} + 2\Phi\left(\frac{1-\beta}{2}\right) - 2\Phi\left(\frac{1+\beta}{2}\right) + 2\Phi\left(-\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - \frac{\pi^2}{6}\right],$$

$$H = \left(-\tfrac{i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k}{(\Delta)(Q)(+)} = -\frac{1}{2(\mu^2-t)}\left[\left(2\ln\frac{\mu^2-t}{\mu^2} + \ln\frac{\mu^2}{m^2}\right)\ln\frac{\mu^2}{\lambda^2} + \ln^2\left(\frac{\mu^2-t}{\mu^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\ln^2(\mu^2/m^2) + 2\Phi(-t/(\mu^2-t))\right],$$

$$G = \left(-\tfrac{i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k}{(\Delta)(Q)(-)} = H,$$

$$F = \frac{1}{2}sJ - G = \frac{-1}{2(\mu^2-t)}\left[\left(2\ln\frac{\mu^2-t}{\mu^2} + \ln\mu^2/m^2\right)\ln s/\mu^2 - \ln^2\left(\frac{\mu^2-t}{\mu^2}\right) + \frac{1}{2}\ln^2(\mu^2/m^2) - \right.$$
$$\left. - 2\Phi(-t/(\mu^2-t))\right],$$

$$H_P = G + \frac{1}{\mu^2-t}\left(2\ln\frac{\mu^2-t}{\mu^2} + \ln\mu^2/m^2\right), \quad H_Q = \frac{1}{t}\ln\frac{\mu^2-t}{\mu^2},$$

$$H_\Delta = \frac{-1}{\mu^2-t}\left[\left(\left(\frac{\mu^2}{t}\right)+1\right)\ln\frac{\mu^2-t}{\mu^2} + \ln\mu^2/m^2\right], \quad G_\Delta = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi^2}{6} - 2\ln\frac{s}{m^2} + \frac{1}{2}\ln^2\frac{s}{m^2}\right),$$

$$G_Q = \frac{1}{s-4m^2}\left(sF_Q - 2\ln s/m^2\right),$$

$$\left(-\tfrac{i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k\, k_\mu}{(\Delta)(Q)(+)} = H_P P_\mu + H_\Delta \Delta_\mu + H_Q Q_\mu,$$

$$\left(-\tfrac{i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k\, k_\mu}{(\Delta)(+)(-)} = G_\Delta \Delta_\mu, \quad \left(-\tfrac{i}{\pi^2}\right)\int \frac{d^4k\, k_\mu}{(Q)(+)(-)} = G_Q Q_\mu.$$

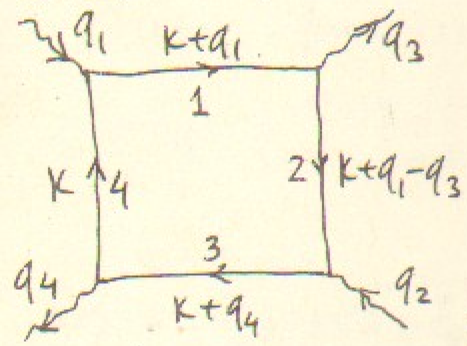
Соответствующие величины для интегралов, отвечающих диаграмме с перекрещенными фотонами получатся из приведенных заменами $s \to s$, $t \leftrightarrow u$, $q_- \leftrightarrow -q_+$.

Имеются два соотношения

$$H_P + H_\Delta + H_Q = G, \quad -4\Delta^2(G_\Delta + F_Q - F_\Delta) = -4Q^2 G_Q +$$
$$+ 2(\mu^2-t)H_\Delta + 2(\mu^2+t)H_Q.$$

4. Интегралы, возникающие при рассмотрении амплитуды рассеяния света на свете. Пример вычисления.

Рассмотрим для определенности 4-интегралы в импульсном пространстве, возникающие от диаграммы (Рис.)



$$q_1+q_2 = q_3+q_4, \quad z = (q_1+q_2)^2 > 0,$$
$$q_i^2 = 0, \quad s = (q_1-q_3)^2 < 0,$$
$$z+s+t = 0, \quad t = (q_1-q_4)^2 < 0.$$

Рис.

при объединении с помощью формулы Фейнмана $(abcd)^{-1} = 3!\int_0^1 d^4x\,\delta(\Sigma x-1)(\Sigma x_i a_i)^{-4}$, знаменателей фермионных пропагаторов возникает выражение ($m^2=1$)

$$\mathcal{D} = x_4(k^2-1) + x_3((k+q_4)^2-1) + x_2((k+q_1-q_3)^2-1) + x_1((k+q_1)^2-1) =$$

$$= (k+b)^2 - 1 + i\varepsilon + x_2x_4 s + x_1x_3 t, \quad b = (x_1+x_2)q_1 - x_2q_3 + x_3q_4.$$

Интегрирование по d^4k выражения

$$I = (i\pi^2)^{-1}\int d^4k\,(a_1a_2a_3a_4)^{-1}$$

осуществляется сдвижкой и последующим виковским поворотом: $k^2 \to -k^2 = -z$, $d^4k = i\pi^2 z\,dz$.

В результате остается интеграл только по Фейнмановским параметрам

$$I = \int_0^1 d^4x\,\delta(\Sigma x-1)\left[1 - i\varepsilon - x_2x_4 s - x_1x_3 t\right]^{-2}$$

Или, после выполнения элементарного интегрирования

$$I(\tau,st)=\int_0^1\frac{du}{\tau+stu(1-u)}\left[\ln\left(1-i\varepsilon-su(1-u)\right)+\ln\left(1-i\varepsilon-tu(1-u)\right)\right].$$

Выражения, возникающие при рассмотрении двух других диаграмм получаются из этого заменой $s\to\tau$ или $t\to\tau$. При этом величины I становятся комплексными, что обеспечивается присутствием малой мнимой добавки в аргументе логарифма. При рассмотрении интегралов, содержащих k_μ в числителях появляются кроме I еще два типа стандартных интегралов:

$$a_t=-\frac{1}{2t}\int_0^1\frac{du}{u(1-u)}\ln\left(1-i\varepsilon-tu(1-u)\right),\quad \alpha_t=-\frac{1}{t}\int_0^1 du\,\ln\left(1-i\varepsilon-tu(1-u)\right) \qquad (2)$$

и аналогичные выражения для a_s, α_s, $I(s,\tau t)$, $I(t,\tau s)$.

Они могут быть выражены через функции Спенса

$$\Phi(x)=\int_0^1\frac{dx}{x}\ln|1-tx|$$

$$\alpha_\tau=-\frac{1}{\tau}\int_0^1 dx\,\ln\left(1-i\varepsilon-\frac{\tau}{4}(1-x^2)\right)=\frac{-2}{\tau}\begin{cases}-1+\sqrt{\frac{4}{\tau}-1}\,\arcsin\sqrt{\frac{\tau}{4}}, & 0<\tau<4\\ -1+\frac{1}{2}\beta\left(\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}-i\pi\right), & \tau>4\\ -1+\frac{1}{2}\beta\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}, & \tau<0\end{cases}$$

$$a_\tau=-\frac{2}{\tau}\int_0^1\frac{dx}{1-x^2}\ln\left(1-i\varepsilon-\frac{\tau}{4}(1-x^2)\right)=-\frac{2}{\tau}\begin{cases}-\left(\arcsin\sqrt{\frac{\tau}{4}}\right)^2, & 0<\tau<4\\ \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}-i\pi\right)^2, & \tau>4\\ \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right), & \tau<0\end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{du}{\tau+stu(1-u)}\ln\left(1-i\varepsilon-\tau u(1-u)\right)=\frac{4}{\tau t}\int_0^1\frac{dx}{1+\frac{4s}{\tau t}-x^2}\ln\left(1-i\varepsilon-\frac{\tau}{4}(1-x^2)\right)=$$

$$=\frac{2}{\tau t a}\left\{\ln\left|\frac{a^2-b^2}{1-b^2}\right|\ln\frac{a+1}{a-1}+\Phi\left(\frac{a+1}{a+b}\right)+\Phi\left(\frac{a+1}{a-b}\right)-\Phi\left(\frac{a-1}{a+b}\right)-\Phi\left(\frac{a-1}{a-b}\right)+i\pi\theta(\tau-4)\ln\left|\frac{a-b}{a+b}\right|\right\},$$

где $\beta=\left(1-\frac{4}{\tau}\right)^{1/2}$, $a=\left(1+\frac{4s}{\tau t}\right)^{1/2}$, $b=\left(1-\frac{4}{\tau}\right)^{1/2}$.

В пределе $\tau,-t,-s\gg 1$, $\rho_s=\ln(-s)$, $\rho_t=\ln(-t)$, $\rho_\tau=\ln\tau$:

$$\alpha_t=-\frac{2}{t}\left(-1+\frac{1}{2}\rho_t\right),\quad \alpha_s=-\frac{2}{s}\left(-1+\frac{1}{2}\rho_s\right),\quad \alpha_\tau=-\frac{2}{\tau}\left(-1+\frac{1}{2}(\rho_\tau-i\pi)\right),$$

$$a_t=-\frac{1}{2t}\rho_t^2,\quad a_s=-\frac{1}{2s}\rho_s^2,\quad a_\tau=-\frac{1}{2\tau}\left(\rho_\tau^2-\pi^2-2i\pi\rho_\tau\right)$$

$$I(\tau,st)=\frac{2}{st}\left[-\pi^2+\frac{1}{2}\rho_t^2+\frac{1}{2}\rho_s^2-\Phi(-\tau/s)-\Phi(-\tau/t)\right],$$

$$I(s,\tau t)=\frac{2}{\tau t}\left[-\frac{\pi^2}{2}+\frac{1}{2}\rho_t^2+\frac{1}{2}\rho_\tau^2-\Phi(-s/t)-\Phi(-s/\tau)-i\pi\rho_t\right],$$

$$I(t,s\tau)=\frac{2}{\tau s}\left[-\frac{\pi^2}{2}+\frac{1}{2}\rho_s^2+\frac{1}{2}\rho_\tau^2-\Phi(-t/s)-\Phi(-t/\tau)-i\pi\rho_s\right].$$

В обратном пределе $\tau,-t,-s\ll 1$

$$\alpha_s=\alpha_t=\alpha_\tau=\frac{1}{6},\quad a_\tau=a_s=a_t=\frac{1}{2},\quad I=\frac{1}{6}.$$

Приведем результаты

$$a_1=(k+q_1)^2-1+i\varepsilon,\ a_2=(k+q_1-q_3)^2-1+i\varepsilon,\ a_3=(k+q_4)^2-1+i\varepsilon,\ a_4=k^2-1+i\varepsilon.$$

$$(i\pi^2)^{-1}\int\frac{d^4k}{\prod^4 a_i}=I$$

$$(i\pi^2)^{-1}\int\frac{d^4k\,k_\mu}{\prod^4 a_i}=(q_1-q_3)\left(\frac{t}{2\tau}I+\frac{1}{\tau}(a_s-a_t)\right)+(q_1+q_4)_\mu\left(\frac{s}{2\tau}I+\frac{1}{\tau}(a_t-a_s)\right),$$

$$(i\pi^2)^{-1}\int\frac{d^4k\,k_\mu k_\nu}{\prod^4 a_i}=\Big\{A_1g+A_2(q_1q_1)+A_3(q_3q_3)+A_4(q_4q_4)+A_5(q_1q_3)+$$

$$+A_6(q_3q_4)+A_7(q_1q_4)\Big\}_{\mu\nu},$$

где, $x = ts/\tau$,

$$A_1 = \left(1+\tfrac{1}{4}x\right)I + \frac{1}{2\tau}(s a_s + t a_t), \quad A_2 = \frac{1}{x}\left(1+\tfrac{1}{2}x\right)I + \frac{1}{st}(t\alpha_t + s\alpha_s),$$

$$A_3 = \frac{t}{s\tau}\left(1+\tfrac{1}{2}x\right)I + \frac{1}{\tau^2}\left(t a_s + (\tau - t)a_t\right) - \frac{1}{\tau}\alpha_s + \frac{\tau - s}{\tau s}\alpha_t,$$

$$A_4 = \frac{s}{t\tau}\left(1+\tfrac{1}{2}x\right)I + \frac{s}{\tau^2}a_t + \frac{\tau - s}{\tau^2}a_s - \frac{1}{\tau}\alpha_t + \frac{\tau - t}{\tau t}\alpha_s,$$

$$A_5 = \frac{1}{s}\left(1+\tfrac{1}{2}x\right)I + \frac{1}{\tau}(a_s - a_t) - \frac{1}{s}\alpha_t,$$

$$A_6 = -\frac{1}{\tau}\left(1+\tfrac{1}{2}x\right)I - \frac{t}{\tau^2}a_t - \frac{s}{\tau^2}a_s - \frac{1}{\tau}(\alpha_s + \alpha_t),$$

$$A_7 = \frac{1}{t}(I - \alpha_s);$$

$$(i\pi^2)^{-1}\int \frac{d^4k\, k_\mu k_\nu k_\rho}{\prod\limits^4 a_i} = \{B_1(g,q_1) + B_2(g,q_3) + B_3(g,q_4) + B_4(q_1^3) +$$

$$+ B_5(q_3^3) + B_6(q_4^3) + B_7(q_1^2 q_3) + B_8(q_1 q_3^2) + B_9(q_3^2 q_4) + B_{10}(q_3 q_4^2) +$$

$$+ B_{11}(q_1^2 q_4) + B_{12}(q_1 q_4^2) + B_{13}(q_1 q_3 q_4)\}_{\mu\nu\rho},$$

$$B_1 = -\frac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{4}x\right)I - \frac{1}{4\tau}(t a_t + s a_s),$$

$$B_2 = -\frac{t}{2\tau}\left(1+\tfrac{1}{4}x\right)I + \frac{1}{4\tau^2}(2\tau - t^2)a_t - \frac{1}{4\tau^2}(2\tau + ts)a_s + \frac{1}{4\tau}(s\alpha_s - t\alpha_t),$$

$$B_3 = \frac{s}{2\tau}\left(1+\tfrac{1}{4}x\right)I + \frac{1}{4\tau^2}(s^2 - 2\tau)a_s + \frac{1}{4\tau^2}(ts + 2\tau)a_t + \frac{1}{4\tau}(s\alpha_s - t\alpha_t),$$

$$B_4 = -\frac{\tau}{2st}(3+x)I - \frac{3}{2t}\alpha_s - \frac{3}{2s}\alpha_t,$$

$$B_5 = -\frac{t^2}{2\tau^2 s}(3+x)I + \frac{1}{2\tau s} + \frac{1}{ts} - \frac{t(ts+\tau)}{s\tau^3}a_s + \frac{1}{s}\left(-\frac{t^3}{\tau s} - \frac{1}{\tau} + \frac{t}{\tau^2} - 1 - \frac{2}{t}\right)a_t +$$

$$+ \frac{1}{2\tau^2}(s + 3t)\alpha_s + \frac{1}{2\tau^2 s}(t\tau - 2t^2 + 6\tau^2)\alpha_t,$$

$$B_6 = \frac{1}{t}\left\{-\frac{1}{2\tau} - \frac{1}{s} + \frac{s^2}{2\tau^2}(3+x)I + \frac{s}{\tau s}(st+\tau)a_t + \left(1 + \frac{2}{s} - \frac{s}{\tau^2} + \frac{1}{\tau} + \frac{s^3}{\tau^3}\right)a_s - \frac{t}{2\tau^2}(t +\right.$$

$$\left. + 3s)\alpha_t + (1/2\tau^2)(2s^2 - s\tau - 6\tau^2)\alpha_s\right\},$$

$$B_7 = \frac{1}{s}\left\{-\frac{1}{2}(3+x)I + \frac{3}{2}\alpha_t + \frac{s}{\tau}(a_t - a_s)\right\},$$

$$B_8 = \frac{1}{s}\left\{-\frac{t}{2\tau}(3+x)I - \frac{1}{2t} + \frac{2s - 3\tau}{2\tau}\alpha_t + \frac{s}{\tau}\alpha_s - \frac{1}{\tau^2}(ts+\tau)a_s + \left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{\tau} - \frac{t^2}{\tau^2}\right)a_t\right\},$$

$$B_9 = \frac{1}{\tau}\left\{-\frac{1}{2t} + \frac{t}{2\tau}(3+x)I + \frac{t-s}{2\tau}\alpha_s + \frac{1}{2\tau}(2t - \tau)\alpha_t + \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} + \frac{t^2}{\tau^2}\right)a_t + \frac{ts+\tau}{\tau^2}a_s\right\},$$

$$B_{10} = \frac{1}{\tau}\left\{-\frac{s}{2\tau}(3+x)I + \frac{1}{2s} + \frac{t-s}{2\tau}\alpha_t + \frac{\tau - 2s}{2\tau}\alpha_s - \frac{1}{\tau^2}(ts+\tau)a_t + \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{s} - \frac{s^2}{\tau^2}\right)a_s\right\},$$

$$B_{11} = \frac{1}{t}\left\{-\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\alpha_s\right\}, \quad B_{12} = \frac{1}{t}\left\{\frac{s}{2\tau}I + \frac{1}{2s} + \frac{1}{2}\alpha_s + \frac{1}{2}a_t + \frac{t}{\tau s}a_s\right\},$$

$$B_{13} = \frac{1}{s}\left\{\frac{s}{2\tau}\left(1 + \tfrac{1}{2}x\right)I + \frac{s}{2\tau}(\alpha_s + \alpha_t) + \frac{s}{2\tau^2}(t a_t + s a_s)\right\};$$

$$(i\pi^2)^{-1}\int \frac{d^4k\, k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{\prod\limits^4 a_i} = \{a_1(g,g) + a_2(gq_1^2) + a_3(gq_3^2) + a_4(gq_4^2) + a_5(gq_1q_3) +$$

$$+ a_6(gq_3q_4) + a_7(gq_1q_4) + a_8(q_1^4) + a_9(q_3^4) + a_{10}(q_4^4) + a_{11}(q_1^3q_3) + a_{12}(q_1^2q_3^2) +$$

$$+ a_{13}(q_1q_3^3) + a_{14}(q_3^3q_4) + a_{15}(q_3^2q_4^2) + a_{16}(q_3q_4^3) + a_{17}(q_1^3q_4) + a_{18}(q_1^2q_4^2) + a_{19}(q_1q_4^3) +$$

$$+ a_{20}(q_3^2q_1q_4) + a_{21}(q_4^2q_1q_3) + a_{22}(q_1^2q_3q_4)\}_{\mu\nu\rho\sigma},$$

где

$$a_1 = \frac{1}{24}\left(\ln\Lambda^2 - \frac{11}{6}\right) + \frac{5}{72} + \frac{1}{3}\left(1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16}x^2\right)I + \frac{6\tau + ts}{24\tau^2}(s a_s + t a_t) - \frac{1}{24\tau}(s^2\alpha_s + t^2\alpha_t),$$

$$a_2 = \frac{\tau}{3st}\left(1 + \tfrac{5}{4}x + \tfrac{1}{4}x^2\right)I + \frac{1}{6\tau}(s a_s + t a_t) + \frac{1}{3st}(s\alpha_s + t\alpha_t),$$

$$a_3 = -\frac{1}{12\tau} + \frac{t}{3s\tau}\left(1 + \tfrac{5}{4}x + \tfrac{1}{4}x^2\right)I + \frac{t}{6\tau^3}(s\tau + ts)a_s + \frac{1}{6\tau^3}(t^3 + 3\tau^2 - 3t\tau)a_t +$$

$$+ \frac{1}{12\tau^2}(2s^2 + 3s\tau - 4\tau)\alpha_s + \frac{1}{12\tau^2 s}(2t^2 s + 4\tau^2 - 4\tau s - st\tau)\alpha_t,$$

$$a_4 = -\frac{1}{12\tau} + \frac{s}{3t\tau}\left(1 + \tfrac{5}{4}x + \tfrac{1}{4}x^2\right)I + \frac{1}{6\tau^3}(s^3 + 3\tau^2 - 3s\tau)a_s + \frac{s}{6\tau^3}(s\tau + ts)a_t + \frac{1}{12\tau^2}(s^2 - st -$$

$$- \tau^2 - 4\tau)\alpha_t + \frac{1}{12\tau^2 t}(2s^2 t - s\tau t + 4\tau^2 - 4t\tau)\alpha_s,$$

$$a_5 = \frac{1}{3s}\left(1+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}x^2\right)I + \frac{1}{6z^2}(t^2-3z)a_t + \frac{1}{6z^2}(ts+3z)a_s - \frac{s}{6z}\alpha_s + \frac{1}{6zs}(ts-2z)\alpha_t,$$

$$a_6 = -\frac{1}{12z} - \frac{1}{3z}\left(1+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}x^2\right)I - \frac{1}{6z^3}(s^2t+3sz)a_s - \frac{1}{6z^3}(st^2+3tz)a_t + \frac{1}{12z^2}(s^2-$$

$$-st-4z)\alpha_s + \frac{1}{12z^2}(-2ts-tz-4z)\alpha_t,$$

$$a_7 = \frac{1}{3t}\left(1-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}x^2\right)I - \frac{1}{12z^2}(s^2a_s+sta_t) - \frac{1}{12zt}(st+4z)\alpha_s + \frac{t}{12z}\alpha_t,$$

$$a_8 = \frac{1}{9st} + \frac{z^2}{s^2t^2}\left(1+2x+\frac{1}{2}x^2\right)I + \frac{1}{6st^2}(11st+6z-2t)\alpha_s + \frac{1}{6s^2t}(11st+6z-2s)\alpha_t,$$

$$a_9 = \frac{1}{s}\left(\frac{19}{9t}+\frac{1}{2z}-\frac{t}{2z^2}\right) + \frac{t^2}{s^2z^2}\left(1+2x+\frac{1}{2}x^2\right)I + \frac{t^2}{z^4s}(ts+2z)a_s + \frac{1}{z^4t}\big(t(z-t)(z^2+t^2)+$$

$$+6z^3-4z^2t+2zt^2\big)a_t + \frac{1}{6z^3s}(-2sz^2+2z^2-6tz-3ts^2-9st^2)\alpha_s + \frac{1}{6s^2z^3t}\big(ts(22z^3+$$

$$+2tz^2+6t^3-3t^2z)+32z^3s+16stz^2+6z^2t^2-6szt^2\big)\alpha_t,$$

$$a_{10} = \frac{1}{t}\left(\frac{19}{9s}+\frac{1}{2z}-\frac{s}{2z^2}\right) + \frac{s^2}{t^2z^2}\left(1+2x+\frac{1}{2}x^2\right)I + \frac{s^2}{z^4t}(ts+2z)a_t + \frac{1}{z^4s}\big(s(z-s)(z^2+s^2)+$$

$$+6z^3-4z^2s+2zs^2\big)a_s + \frac{1}{6z^3t}(-2tz^2+2z^2-6sz-3st^2-9ts^2)\alpha_t + \frac{1}{6t^2z^3s}\big(ts(22z^3+$$

$$+2sz^2+6s^3-3s^2z)+32z^3t+16stz^2+6z^2s^2-6tzs^2\big)\alpha_s,$$

$$a_{11} = -\frac{1}{18st} + \frac{z}{s^2t}\left(1+2x+\frac{1}{2}x^2\right)I + \frac{1}{2}a_s - \frac{1}{2}a_t + \frac{1}{st}\alpha_s + \frac{1}{6s^2t}(-11st+6t+2s)\alpha_t,$$

$$a_{12} = \frac{8}{9st} + \frac{1}{s^2}\left(1+2x+\frac{1}{2}x^2\right)I + \frac{1}{s}\left(-1+\frac{2s}{zt}+\frac{t^2}{z^2}\right)a_t + \frac{1}{sz^2}(ts+2z)a_s - \frac{1}{2}\alpha_s +$$

$$+\frac{1}{6s^2zt}(11zts-6s^2t-6zt+4zs)\alpha_t,$$

$$a_{13} = -\frac{1}{2zs} - \frac{14}{9ts} + \frac{t}{s^2z}\left(1+2x+\frac{1}{2}x^2\right)I + \frac{t}{sz^3}(ts+2z)a_s + \frac{1}{stz^3}\big(t^4+z^3t+2szt-$$

$$-4sz^2\big)a_t + \frac{1}{2z^2s}(-2z-s^2-3st)\alpha_s + \frac{1}{6z^2s^2t}(6z^2t-6zst-20stz^2-16sz^2-3szt^2+6st^3),$$

$$a_{14} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{2z}-\frac{1}{18s}-\frac{5}{9t}\right) - \frac{t}{z^2s}\left(1+2x+\frac{1}{2}x^2\right)I - \frac{t}{z^4}(ts+2z)a_s + \frac{1}{z^4t}(-2tz^2+2t^2z+2z^3-$$

$$-t^4)a_t + \frac{1}{6z^3s}(2z^2-2z^2s+3s^3+9s^2t+6zs)\alpha_s + \frac{1}{6z^3st}(-2z^2st-16z^2s-6z^2t+6zst+3t^2sz-6t^3s)\alpha_t,$$

$$a_{15} = \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{9ts} + \frac{1}{z^2}\left(1+2x+\frac{1}{2}x^2\right)I + \frac{s}{z^4}(ts+2z)a_s + \frac{t}{z^4}(ts+2z)a_t + \frac{1}{6z^3s}(z^2s+6zs-4z^2+$$

$$+3s^2t-3s^3)\alpha_s + \frac{1}{6z^3t}(z^2t+6zt-4z^2+3t^2z-3t^3)\alpha_t,$$

$$a_{16} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{2z}-\frac{1}{18t}-\frac{5}{9s}\right) - \frac{s}{tz^2}\left(1+2x+\frac{1}{2}x^2\right)I + \frac{1}{z^4s}(-s^4+2s^2z-2z^2s+2z^3)a_s - \frac{s}{z^4}(ts+$$

$$+2z)a_t + \frac{1}{6z^3t}(z^2t+6zt+2z^2+3st^2-3s^2t)\alpha_t + \frac{1}{6z^3st}(6zts-6z^2s+3s^2tz-6s^3t-2z^2ts-16z^2t)\alpha_s,$$

$$a_{17} = -\frac{1}{18st} + \frac{z}{st^2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)I + \frac{1}{st}\alpha_t + \frac{1}{3st^2}(-st+3s+t)\alpha_s,$$

$$a_{18} = -\frac{1}{9st} + \frac{1}{t^2}I + \frac{1}{6st^2}(-6s-st+4t)\alpha_s,$$

$$a_{19} = -\frac{5}{9st} + \frac{s}{zt^2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)I + \frac{s-2z}{sz^2}a_s + \frac{s}{tz^2}a_t + \frac{1}{3t^2zs}(3zs-3ts-zst-8zt)\alpha_s - \frac{1}{tz}\alpha_t,$$

$$a_{20} = \frac{1}{18zs} + \frac{7}{18zt} - \frac{1}{3sz}\left(1+\frac{7}{2}x+x^2\right)I - \frac{1}{3z^3}(2st+3z)a_s + \frac{1}{3z^3t}(3zt-2t^3-3z^2)a_t + \frac{1}{3z^2s}(2s^2-$$

$$-z+sz)\alpha_s + \frac{1}{3z^2st}(3zst+zt+2s^2t+2zs)\alpha_t,$$

$$a_{21} = -\frac{1}{9sz} + \frac{1}{6tz} - \frac{1}{3zt}\left(1-x-\frac{1}{2}x^2\right)I + \frac{s}{3z^3}(sa_s+ta_t) + \frac{1}{6z^2st}(-2st+2zs+4zt+2s^2t)\alpha_s$$

$$+\frac{1}{6z^2t}(zt-2z+2st)\alpha_t,$$

$$a_{22} = \frac{1}{18st} + \frac{1}{3st}\left(1-x-\frac{1}{2}x^2\right)I - \frac{1}{3z^2}(sa_s+ta_t) - \frac{1}{3zts}(z+ts)\alpha_s - \frac{1}{3zts}(z+ts)\alpha_t.$$

Соотношения

$$a_3(ts) = a_4(st),\ a_6(st) = a_6(ts),\ a_9(ts) = a_{10}(st),\ a_{16}(ts) = a_{14}(st),$$

$$a_2 = a_3 + a_4 - 2a_6,\ a_5 = a_6 - a_3,\ a_{13} = a_{14} - a_9,\ a_{12} = a_9 + a_{15} - 2a_{14},$$

$$a_{11} = -a_9 + 3a_{14} - 3a_{15} + a_{16},\ 2a_{20} + a_{22} - a_{21} = a_{15} - a_{14}.$$

В работах де Толлиса и др. [4] приводятся аналогичные выражения в терминах спиральных амплитуд.

5. Рассмотрим интегралы, возникающие при вычислении вклада в сечения процессов от излучения мягкого дополнительного фотона. Вклад мягких фотонов находится по формуле

$$d\sigma = d\sigma_0 \left(-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3}\right) \int\limits_{\omega<\Delta\varepsilon} \frac{d^3k}{\omega} \left(\sum z_i \frac{p_i}{p_i k}\right)^2 \qquad (5.I)$$

где $z_i = \pm 1$, p_i – 4-импульс начальной или конечной заряженной частицы, по которым проводится суммирование. Эта величина зависит от выбора системы отсчета, в которой частота фотона считается малой, не превосходящей $\Delta\varepsilon$. Мы покажем стандартный путь вычислений и дадим выражения соответствующих интегралов для наиболее часто встречающихся физических ситуаций.

Рассмотрим величину

$$\int \frac{d^3k}{\omega} \left((p_1k)(p_2k)\right)^{-1},\quad \omega = (\vec{k}^2 + \lambda^2)^{1/2},\ \omega < \Delta\varepsilon,\ \Delta\varepsilon \ll p_{10} \sim p_{20} \qquad (5.2)$$

где λ – "масса" фотона.

Используя тождество $(ab)^{-1} = \int_0^1 dx\,(ax + b(1-x))^{-2}$ для "объединения" знаменателей в (2) можно привести его к виду

$$\int_0^1 \frac{dx}{E^2} \int_0^{\Delta\varepsilon} \frac{k^2\,dk}{(k^2+\lambda^2)^{1/2}} (\rho k^2 + \lambda^2)^{-1} = \int_0^1 \frac{dx}{E^2 \rho} \left\{ \ln\left(\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}} \right\}, \qquad (5.3)$$

где $E = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 (1-x)$, $\rho E^2 = (\vec{p}_1 x + \vec{p}_2 (1-x))^2$. Дальнейшее интегрирование по x целесообразно проводить с учетом специфики задачи.

Для случая

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|,\quad \chi = \sin^2\theta/2,\ \theta = \widehat{\vec{p}_1\vec{p}_2},\ p_1^2 = p_2^2 = m^2,\ m^2 \ll \varepsilon^2,\ p_{10} = p_{20} = \varepsilon$$

имеем

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3} \int\limits_{\omega<\Delta\varepsilon} \frac{d^3k}{\omega} \left(\frac{p_1}{p_1 k}\right)^2 = -\frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{m\Delta\varepsilon}{\lambda\varepsilon}\right),$$

$$(5.4)$$

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3} \int\limits_{\omega<\Delta\varepsilon} \frac{d^3k}{\omega} \frac{p_1p_2}{p_1k \cdot p_2k} = -\frac{\alpha}{\pi} \left\{ \ln\left(\frac{4\varepsilon^2\chi}{m^2}\right) \ln\left(\frac{m\Delta\varepsilon}{\lambda\varepsilon}\right) + \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{4\varepsilon^2\chi}{m^2}\right) - \frac{\pi^2}{6} - \Phi(1-\chi) \right\}.$$

Для случая

$$\vec{q}_1 = -\vec{q}_2,\ q_{01} = q_{02} = \varepsilon,\ \beta^2 = 1 - \frac{m^2}{\varepsilon^2} \sim 1,\ q_1^2 = q_2^2 = m^2$$

имеем

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3} \int \frac{d^3k}{\omega} \frac{m^2}{(q_1k)^2} = -\frac{\alpha}{\pi} \left(\ln\left(\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda}\right) - \frac{1}{2\beta} \ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \right),$$

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3} \int \frac{d^3k}{\omega} \frac{q_1q_2}{q_1k \cdot q_2k} = -\frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{1+\beta^2}{2\beta} \left\{ \ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \ln\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + \ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \ln\frac{1+\beta}{2\beta} - \right. \qquad (5.5)$$

$$\left. -(\pi^2/6) - \Phi((1-\beta)/(1+\beta)) \right\}.$$

Для случая

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2,\ \widehat{\vec{p}_1\vec{p}_2} = \theta \ll 1,\ \varepsilon_2 = \varepsilon_1 y;\ y \leq 1;\ \varepsilon_1\varepsilon_2\theta^2 \gg m^2:$$

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3} \int \frac{d^3k}{\omega} \left(\frac{p_{1,2}}{p_{1,2}k}\right)^2 = -\frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{m\Delta\varepsilon}{\lambda\varepsilon_{1,2}}\right) \qquad (5.6)$$

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3} \int \frac{d^3k}{\omega} \frac{p_1p_2}{p_1k \cdot p_2k} = -\frac{\alpha}{\pi} \left\{ \rho \ln\left(\frac{m\Delta\varepsilon}{\lambda\varepsilon}\right) + \frac{1}{4}\rho^2 - \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\rho\ln y - \frac{1}{4}\ln^2 y \right\},\ \rho = \ln\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\theta^2}{m^2}.$$

Для случая

$$p^2 = m^2,\ q^2 = M^2,\ p_0 = q_0 = \varepsilon,\ t = -(p-q)^2 \gg M^2 \gg m^2,\ \chi = \sin^2\frac{\theta}{2} \sim 1,\ \theta = \widehat{\vec{p}\vec{q}},$$

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3} \int \frac{d^3k}{\omega} \frac{pq}{pk \cdot qk} = -\frac{\alpha}{\pi} \left\{ \ln\left(\frac{M\Delta\varepsilon}{\lambda\varepsilon}\right) \ln\left(\frac{M^2-t}{mM}\right) + \frac{1}{4}\ln^2\left(1 - \frac{t}{M^2}\right) - \right. \qquad (5.7)$$

$$\left. -\frac{1}{8}\ln^2(M^2/m^2) - \pi^2/6 - \frac{1}{2}\Phi(1-\chi) \right\}$$

Для излучения мягкого фотона в лабораторной системе

$$p_1 = (M, 0),\ p_2 = (\varepsilon, \vec{p}),\ p_2^2 = m^2,\ \beta^2 = 1 - \frac{m^2}{\varepsilon^2}, \qquad (5.8)$$

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3}\int\frac{d^3k}{\omega}\left(\frac{p_1}{p_1k}\right)^2=-\frac{\alpha}{\pi}\left(\ln\left(\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda}\right)-1\right),$$

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3}\int\frac{d^3k}{\omega}\left(\frac{p_2}{p_2k}\right)^2=-\frac{\alpha}{\pi}\left(\ln\left(\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda}\right)-\frac{1}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\right), \tag{58}$$

$$-\frac{4\pi\alpha}{16\pi^3}\int\frac{d^3k}{\omega}\,\frac{p_1p_2}{p_1k\cdot p_2k}=-\frac{\alpha}{2\pi\beta}\left[\ln\left(\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda}\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{-2\beta}{1-\beta}\right)+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right)\right].$$

6. При интегрировании по фазовому объему трех частиц возникают однократные и двукратные интегралы, содержащие $\mathcal{D}^{-1/2}$ [6]

где $\mathcal{D} = 1-a^2-x_1^2-x_2^2+2x_1x_2a$, $|a|<1$, $0< x_1, x_2 < 1$,

по области $\mathcal{D}>0$.

Запишем $\mathcal{D}=(x_1-x_-)(x_+-x_1)$, $x_\pm = x_2a \pm (1-a^2)^{1/2}(1-x_2^2)^{1/2}$.

Замена $t^2=(x_+-x)/(x-x_-)$ приводит к результатам

$$\int_{x_-}^{x_+}\frac{dx_1}{\sqrt{\mathcal{D}}}=\pi,\qquad \int_{x_-}^{x_+}\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{\mathcal{D}}}=\pi a,$$

$$\int_{x_-}^{x_+}\frac{dx_1}{(1-\beta x_1)\sqrt{\mathcal{D}}}=\pi\left[(1-\beta x_-)(1-\beta x_+)\right]^{-1/2},$$

$$\int_{x_-}^{x_+}\frac{dx_1}{(1-\beta x_1)^2\sqrt{\mathcal{D}}}=\pi\,(1-\beta a x_2)\left[(1-\beta x_-)(1-\beta x_+)\right]^{-3/2}.$$

Полезно тождество

$$(1-\beta x_-)(1-\beta x_+)=(a-\beta x_2)^2+(1-\beta^2)(1-a^2).$$

Двукратный интеграл

$$\int_{-1}^{1}dx_2\int_{x_-}^{x_+}\frac{dx_1}{(1-\beta_1x_1)(1+\beta_2x_2)\sqrt{\mathcal{D}}}=\frac{\pi}{\sqrt{d}}\left[\ln\frac{4}{1-\beta_1^2}+\ln\frac{4}{1-\beta_2^2}+2\ln\frac{1-\beta_1\beta_2a+\sqrt{d}}{4}\right]$$

где $d=(1-\beta_1\beta_2a)^2-(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)$.

7. Азимутальные интегралы [7]

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\,(1-a\cos\varphi)^{-1}=2\pi(1-a^2)^{-1/2},\qquad a<1,$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\,(1+a\cos\varphi)^{-2}(1-a\cos(\varphi-\varphi_1))^{-1}=2\pi\left[1-\tfrac{1}{2}a^2\left(1+a^2\cos^2\tfrac{\varphi_1}{2}\right)\right](1-a^2)^{-3/2}\left(1-a^2\cos^2\tfrac{\varphi_1}{2}\right)^{-2},$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\,(1-a\cos\varphi)(1-a\cos(\varphi-\varphi_1))^{-1}(1-a\cos(\varphi-\varphi_2))^{-1}=2\pi\left[1-\tfrac{1}{2}a^2(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)\right](1-a^2)^{-1/2}\otimes$$

$$\otimes\left[1-a^2\cos^2\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right],$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\,(1+a\cos\varphi)^{-1}(1-a\cos(\varphi-\varphi_1))^{-1}(1-a\cos(\varphi-\varphi_2))^{-1}=\frac{\pi}{2}(1-a^2)^{-1/2}\left[\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right]^{-1}\otimes$$

$$\otimes\left[\frac{\sin\varphi_1}{1-a^2\cos^2\frac{\varphi_1}{2}}-\frac{\sin\varphi_2}{1-a^2\cos^2\frac{\varphi_2}{2}}+\frac{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}{1-a^2\cos^2\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)}\right];$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\,\ln\left[a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right]=4\pi\ln\frac{a+b}{2},\qquad a,b>0$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\,\ln^2\left[a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right]=2\pi\left\{\ln^2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)+2\ln\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)\ln\left(\frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2)}\right)+\right.$$

$$\left.+2\Phi\left(\frac{(a-b)^2}{2(a^2+b^2)}\right)-4\Phi\left(\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}\right)+\Phi\left(\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\right)\right\},\quad \Phi(x)=\int_0^x\frac{dt}{t}\ln(1-t);$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\,(a_1+b_1\cos\varphi)^{-1}(a_2+b_2\cos(\varphi-\varphi_1))^{-1}=2\pi\left[(a_1a_2-b_1b_2\cos\varphi_1)^2-(a_1^2-b_1^2)(a_2^2-b_2^2)\right]^{-1}\otimes$$

$$\otimes\left[\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}}(a_2b_1-a_1b_2\cos\varphi_1)+\frac{b_2}{\sqrt{a_2^2-b_2^2}}(a_1b_2-a_2b_1\cos\varphi_1)\right],\quad a_1>b_1,\ a_2>b_2;$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\,(a+b\cos\varphi)^{-1}\ln(a+b\cos\varphi)=-2\pi(a^2-b^2)^{-1/2}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2(a^2-b^2)}\right),\quad a>b,$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\,(a+b\cos\varphi)^{-1}\ln^2(a+b\cos\varphi)=2\pi(a^2-b^2)^{-1/2}\left\{\ln^2\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2(a^2-b^2)}\right)-2\Phi\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)\right\}.$$

8. Интегралы нецелой размерности [8] в импульсном пр-ве

$$d^n k = d k_0 \, d^{n-1} k , \quad k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 , \quad g_\mu^{\ \mu} = n$$

n - нецелое, α - любое

$$\int \frac{d^n k}{\mathcal{D}^\alpha} = Z , \quad \int \frac{d^n k \, k_\mu}{\mathcal{D}^\alpha} = -p_\mu Z , \quad \int \frac{d^n k \cdot k_\mu k_\nu}{\mathcal{D}^\alpha} = Z \Big((p^2) -$$

$$- \frac{1}{2} g \, \frac{m^2+p^2}{\alpha-1-\frac{n}{2}} \Big\}_{\mu\nu} , \quad \int \frac{d^n k \, k_\mu k_\nu k_\rho}{\mathcal{D}^\alpha} = Z \Big\{ \frac{1}{2} (g p) \frac{m^2+p^2}{\alpha-1-\frac{n}{2}} - (p^3) \Big\}_{\mu\nu\rho} ,$$

$$\int \frac{d^n k \, k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{\mathcal{D}^\alpha} = Z \Big\{ (p^4) - \frac{1}{2} (g p^2) \frac{m^2+p^2}{\alpha-1-\frac{n}{2}} + \frac{1}{4} (g, g) \frac{(m^2+p^2)^2}{(\alpha-1-\frac{n}{2})} \otimes$$

$$\otimes \left(\alpha-2-\frac{n}{2}\right)^{-1} \Big\}_{\mu\nu\rho\sigma} ,$$

где

$$\mathcal{D} = k^2 + 2kp - m^2 ,$$

$$Z = i(-1)^\alpha (m^2+p^2)^{\frac{n}{2}-\alpha} \, \Gamma\!\left(\alpha-\frac{n}{2}\right) / \Gamma(\alpha)$$

9. Интегралы типа

$$y^{(n)} = \int_0^1 dx \; x^{-\alpha_1} (1-x)^{-\alpha_2} (1+x)^{-\alpha_3} (\ln x)^{a_1} \big(\ln(1-x)\big)^{a_2} \big(\ln(1+x)\big)^{a_3}$$

где

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 , \quad a_1 + a_2 + a_3 = n$$

числа α_i , a_i - неотрицательные целые числа

Число n будем называть классом.

Ниже приводятся в сокращенном виде результаты вычисления $y^{(n)}$ для n = I,2,3,4 (в аналитической и числовой форме) полученные в работах Е.Ремидди и соавторов [9].

Приводимые результаты дополнены и проверены аналитическим и числовым интегрированием.

Автор благодарен Сысолетину и Поповой за проверку результатов на ЭВМ.

В целях экономии места дадим интегралы, которые не могут быть получены друг за друга заменой переменных или интегрированием по частям. Рассматриваем только сходящиеся интегралы

Класс n =I (Дилогарифмы Эйлера)

$\int_0^1 dx$	ζ_2	$\ln^2 2$	число
$\frac{1}{x} \ln(1-x)$	-1		-1.64493
$\frac{1}{x} \ln(1+x)$	$\frac{1}{2}$		0.822
$\frac{1}{1+x} \ln(1-x)$	$-1/2$	$1/2$	-0.582

Класс $n=2$

$\int_0^1 dx$	ζ_3	$\zeta_2 \ln 2$	$\ln^3 2$	число
$\frac{1}{x} \ln^2(1-x)$	2			2.404
$\frac{1}{x} \ln^2(1+x)$	$1/4$			0.300
$\frac{1}{x} \ln(1-x) \ln(1+x)$	$-5/8$			-0.751
$\frac{1}{x} \ln x \ln(1-x)$	1			1.202057
$\frac{1}{x} \ln x \ln(1+x)$	$-3/4$			-0.9015
$\frac{1}{1+x} \ln^2(1-x)$	$7/4$	-1	$1/3$	1.074
$\frac{1}{1+x} \ln x \ln(1-x)$	$13/8$	$-3/2$		0.243
$\frac{1}{1+x} \ln(1-x) \ln(1+x)$	$1/8$	$-1/2$	$1/3$	-0.3088

Класс $n=3$

$(\zeta_2)^2 = 2.706$; $\zeta_3 \ln 2 = 0.8335$; $\ln^4 2 = 0.2308$;

$a_4 = \sum 2^{-n} n^{-4} = 0.517$; $\zeta_2 \ln^2 2 = 0.7903$.

$\int_0^1 dx$	$(\zeta_2)^2$	a_4	$\zeta_3 \ln 2$	$\zeta_2 \ln^2 2$	$\ln^4 2$	число
$\frac{1}{x}\ln^3(1-x)$	$-12/5$					-6.49
$\frac{1}{x}\ln^3(1+x)$	$12/5$	-6	$-21/4$	$3/2$	$-1/4$	0.142
$\frac{1}{x}\ln^2 x\ln(1-x)$	$-4/5$					-2.16
$\frac{1}{x}\ln^2 x\ln(1+x)$	$7/10$					1.874
$\frac{1}{x}\ln x\ln^2(1-x)$	$-1/5$					-0.541
$\frac{1}{x}\ln x\ln^2(1+x)$	$3/2$	-4	$-7/2$	1	$-1/6$	-0.1755
$\frac{1}{x}\ln x\ln(1-x)\ln(1+x)$	$-27/40$	2	$7/4$	$-1/2$	$1/12$	0.2907
$\frac{1}{x}\ln(1-x)\ln^2(1+x)$	$-3/20$					-0.4658
$\frac{1}{x}\ln^2(1-x)\ln(1+x)$	$-1/4$	2	$7/4$	$-1/2$	$1/12$	1.447
$\frac{1}{1+x}\ln^3(1-x)$		-6				-0.3104
$\frac{1}{1+x}\ln^2 x\ln(1-x)$	$2/5$	-4		1	$-1/6$	-0.2357
$\frac{1}{1+x}\ln x\ln^2(1-x)$	$11/10$	-6			$-1/4$	-0.1862
$\frac{1}{1+x}\ln x\ln(1-x)\ln(1+x)$	$-4/5$	2	$21/8$	$-5/4$	$1/12$	0.0888
$\frac{1}{1+x}\ln(1-x)\ln^2(1+x)$	$-4/5$	2	2	-1	$1/3$	-0.1766
$\frac{1}{1+x}\ln^2(1-x)\ln(1+x)$	$-1/10$		2	-1	$1/4$	0.663

Класс $n=4$

$C_1 = \zeta_5 = 1.037$, $C_2 = \zeta_2\zeta_3 = 1.975$, $C_3 = a_5 = \sum 2^{-n} n^{-5} = 0.5084$

$C_4 = a_4 \ln 2 = 0.3586$, $C_5 = \zeta_2^2 \ln 2 = 1.875$, $C_6 = \zeta_3 \ln^2 2 = 0.577$, $C_7 = \zeta_2 \ln^3 2 = 0.5478$, $C_8 = \ln^5 2$

$\int_0^1 dx$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	
$\frac{1}{x}\ln^3 x\ln(1-x)$	6								6.222
$\frac{1}{x}\ln^3 x\ln(1+x)$	$-45/8$								-5.833

Класс $n=4$

$\int_0^1 dx$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	число
$\frac{1}{x}\ln^2 x\ln^2(1-x)$	8	-4							0.395
$\frac{1}{x}\ln^2 x\ln^2(1+x)$	$-29/8$	2							0.196
$\frac{1}{x}\ln^2 x\ln(1-x)\ln(1+x)$	$-27/16$	$3/4$							-0.267
$\frac{1}{x}\ln x\ln^3(1-x)$	12	-6							0.580
$\frac{1}{x}\ln x\ln^3(1+x)$	$99/16$	3	-12	-12		$-21/4$	2	$-2/5$	-0.576
$\frac{1}{x}\ln x\ln^2(1-x)\ln(1+x)$	$-7/2$	$-3/8$	4	4		$7/4$	$-2/3$	$2/15$	-0.235
$\frac{1}{x}\ln x\ln(1-x)\ln^2(1+x)$	$-25/16$	$7/8$							0.110
$\frac{1}{x}\ln^4(1-x)$	24								24.89
$\frac{1}{x}\ln^4(1+x)$	24		-24	-24		$-21/2$	4	$-4/5$	0.753
$\frac{1}{x}\ln^3(1-x)\ln(1+x)$	$-81/16$	$-21/8$	6	6		$21/8$	-1	$1/5$	-4.41
$\frac{1}{x}\ln^2(1-x)\ln^2(1+x)$	$-25/8$		4	4		$7/4$	$-2/3$	$2/15$	0.898
$\frac{1}{x}\ln(1-x)\ln^3(1+x)$	$3/4$	$21/8$	-6	-6		$-21/8$	1	$-1/5$	-0.234
$\frac{1}{1+x}\ln^3 x\ln(1-x)$	$273/16$	$-9/2$			$-9/2$				0.355
$\frac{1}{1+x}\ln^2 x\ln^2(1-x)$	$15/2$	$-13/2$	8		$2/5$		$2/3$	$-1/15$	0.097
$\frac{1}{1+x}\ln^2 x\ln(1-x)\ln(1+x)$	$213/16$	$-5/2$	-8	-4	$-49/20$	$7/4$	$1/3$	$-1/10$	-0.059
$\frac{1}{1+x}\ln x\ln^3(1-x)$	$-3/16$	$-21/4$	18		$9/10$			$-3/20$	0.240
$\frac{1}{1+x}\ln x\ln^2(1-x)\ln(1+x)$	$121/16$	-3	-2	-2	$-3/4$	$21/8$	$-2/3$	$-1/15$	-0.090
$\frac{1}{1+x}\ln x\ln(1-x)\ln^2(1+x)$	$19/2$	$-7/4$	-6		$-51/20$	$7/2$	-1	$1/20$	0.0328
$\frac{1}{1+x}\ln^4(1-x)$			24						12.2
$\frac{1}{1+x}\ln^3(1-x)\ln(1+x)$	$3/16$	-3	6		$-3/10$	3	-1	$3/20$	-2.12
$\frac{1}{1+x}\ln(1-x)\ln^3(1+x)$	6		-6		$-12/5$	3	-1	$1/4$	-0.105
$\frac{1}{1+x}\ln^2(1-x)\ln^2(1+x)$	$63/8$	-2	-4		$-9/5$	4	$-4/3$	$7/30$	0.419

10. Рассмотрим двумерные эвклидовы интегралы. Ограничивая область интегрирования $\vec{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 < \Lambda^2$, имеем

$$\pi^{-1}\int\frac{d^2k}{\mathcal{D}} = \ln\frac{\Lambda^2}{d} , \quad \mathcal{D} = k^2 - 2k\rho + \ell , \quad d = \ell - \rho^2,$$

$$\pi^{-1}\int\frac{d^2k\cdot k_\mu}{\mathcal{D}} = \rho_\mu\left(\ln\frac{\Lambda^2}{d} - 1\right),$$

$$\pi^{-1}\int\frac{d^2k\, k_\mu k_\nu}{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\left(\Lambda^2 - d\ln\frac{\Lambda^2}{d} - \frac{1}{2}\rho^2\right) + \rho_\mu\rho_\nu\left(\ln\frac{\Lambda^2}{d} - \frac{3}{2}\right),$$

$$\pi^{-1}\int\frac{d^2k\, k_\mu k_\nu}{\mathcal{D}^2} = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{d} - 1\right) + \frac{1}{d}\rho_\mu\rho_\nu ;$$

$$\pi^{-1}\int\frac{d^2k\, k^4}{\mathcal{D}^2} = \Lambda^2 - 2d\ln\frac{\Lambda^2}{d} - 8\rho^2 + d + \frac{1}{d}\rho^4,$$

$$\pi^{-1}\int\frac{d^2k\, k^2 k_\mu}{\mathcal{D}^2} = \rho_\mu\left(2\ln\frac{\Lambda^2}{d} - 3 + \frac{\rho^2}{d}\right),$$

$$\pi^{-1}\int\frac{d^2k\, k^2}{\mathcal{D}^2} = \ln\frac{\Lambda^2}{d} - 1 + \frac{\rho^2}{d} ,$$

$$\pi^{-1}\int\frac{d^2k\, k^6}{\mathcal{D}^3} = \Lambda^2 + (9\rho^2 - 3d)\ln\frac{\Lambda^2}{d} + \frac{5}{2}d - \frac{39}{2}\rho^2 + \frac{9}{2}\frac{\rho^4}{d} + \frac{\rho^6}{2d^2},$$

$$\pi^{-1}\int\frac{d^2k\, k^4 k_\mu}{\mathcal{D}^3} = \rho_\mu\left(3\ln\frac{\Lambda^2}{d} - \frac{11}{2} + 3\frac{\rho^2}{d} + \frac{\rho^4}{2d^2}\right),$$

$$\pi^{-1}\int\frac{d^2k\, k^2 k_\mu k_\nu}{\mathcal{D}^3} = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\ln\frac{\Lambda^2}{d} + \frac{1}{2}\rho_\mu\rho_\nu\left(\frac{3d+\rho^2}{d^2}\right) + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}\left(-3 + \frac{\rho^2}{d}\right),$$

$$\pi^{-1}\int\frac{d^2k\, k_\mu k_\nu k_\rho}{\mathcal{D}^3} = \frac{1}{4d}(g\rho)_{\mu\nu\rho} + \frac{3}{2d^2}(\rho^3)_{\mu\nu\rho} .$$

Двумерные эвклидовы интегралы возникают при использовании техники бесконечного импульса. Мы приведем здесь некоторые более сложные интегралы, возникающие при расчете сечения образования трехчастичных струй [10]. Замечательно, что результат можно выразить в логарифмических и рациональных выражениях только благодаря соотношению $c = 2a + b + 1$

$$I_n = \pi^{-2}\iint d^2z_1\, d^2z_2\, (z_1^2+1)^{-1}(z_2^2+1)^{-1}(z_1^2 + 2a\,\vec{z}_1\vec{z}_2 + z_2^2 b + c)^{-n}.$$

Так,

$$I_1 = \frac{1}{\lambda}L_1 + \frac{1}{\sigma}L_2 + \frac{b}{a\sigma}L_3 ,$$

$$I_2 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{3\lambda}\right)L_1 + \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{3\sigma}\right)L_2 + \frac{b^2}{a^2\sigma^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3\sigma}\right)L_3 - \frac{1}{3\sigma\lambda^2} ,$$

$$I_3 = \frac{1}{\lambda^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2\lambda} + \frac{a^2}{5\lambda^2}\right)L_1 + \frac{1}{\sigma^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2\sigma} + \frac{a^2}{5\sigma^2}\right)L_2 + \frac{b^3}{a^3\sigma^3}\left(\frac{1}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{b}{2\sigma} + \frac{b^2}{5\sigma^2}\right)L_3 + \frac{1}{\lambda a^2}\left(\frac{a}{30\sigma} + \frac{a^2}{5\sigma^2} + \frac{a^3}{5\sigma^3}\right) + \frac{1}{\lambda^2 a}\left(-\frac{a^2}{5\sigma^2} - \frac{3a}{10\sigma}\right) +$$

$$+ \frac{a}{5\lambda^3\sigma} - \frac{1}{2c\sigma^2} ,$$

где

$$L_1 = \ln\frac{c}{b-a^2} , \quad L_2 = \ln c , \quad L_3 = \ln\frac{b-a^2}{b} ,$$

$$\sigma = a + b, \quad \lambda = 1 + a .$$

Оглавление по разделам

Л и т е р а т у р а

I. M. Brown R. Feynman Phys Rev 85, 231 (1952), I. Harris M. Brown Phys Rev. 105, 1656 (57).

2. F.A. Berends, R. Gastmans „Electromagnetic Interactions of Hadrons" II, Plenum Press (78).

3. Э.А.Кураев, Г.В.Меледин. Препринт ИЯФ 76-9I.

4. V. Constantini B. de-Tollis G. Pistoni Nuovo Cimento 2A, 733 (1971).

5. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика. Наука, Москва I969 § 29.

6. Э.А.Кураев, С.И.Эйдельман. Препринт ИЯФ 76-II5.

7. И.Н.Иванченко и др. Препринт ИЯФ 78-92.

8. G. t'Hooft Veltman Diagrammar

9. E. Remiddi et al Il Nuovo Cimento 11A, 859 (1972), Phys. Rev D20, 2068 (1979).

IO. Э.А.Кураев, Л.Н.Липатов, М.И.Стрикман, ЯФ I8, I270 (1973).