ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт- 79

Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев

О пределах статистического описания нелинейного волнового поля

НОВОСИБИРСК 1966

Рассматривается система нелинейно взаимодействующих колебаний с малой нелинейностью в среде с дисперсией. Выводится условие, при котором рассматриваемую систему можно приближенно описывать статистически. Получен критерий хаотизации фаз волн вследствие нелинейного взаимодействия и найдено характерное время потери фазовой памяти в системе. Это позволяет получить кинетическое уравнение для волн без априорного предположения о хаотических начальных фазах. Найдены спектральные границы применимости кинетического уравнения и установлена связь между временем хаотизации фаз и инкрементом распадной неустойчивости.

Вывод кинетического уравнения для волн в нелинейной турбулентной среде основан на хорошо известном предположении об отсутствии фазовой корреляции между фурье-амплитудами гармоник. Примером может служить кинетическое уравнение для фононов в твердом теле и кинетическое уравнение для волн в слаботурбулентной плазме (см., например, /I/). Предположение о расцеплении фазовых корреляций обычно называется приближением хаотических фаз (ПХФ) и связано со следующим представлением о физической картине процесса. В результате развития неустойчивости или какого-либо другого процесса возбуждается очень большое число волн, нелинейно взаимодействующих друг с другом. Взаимодействие носит распадный характер, т.е. условие резонансов:

$$\sum_j n_j \omega_j = 0$$

(где ω_j – частоты волн, n_j – какие-либо целые числа) может быть выполнено бесконечным числом способов. Сложность взаимодействия и большое число степеней свободы позволяют рассчитывать на возникновение статистического ансамбля волн и, как следствие этого, потере фазовой корреляции. В настоящей работе исследуются условия, при которых система нелинейно взаимодействующих колебаний может быть с некоторой степенью точности описана статистическими законами, и находится критерий расцепления фазовой корреляции волн. Качественный вывод подобного рода критерия для взаимодействующих гармоник нелинейной струны (так называемая проблема Ферми-Паста-Улама /2/) был дан в /3/. О связи этой задачи с вопросами, рассматриваемыми в данной статье, будет сказано ниже. Строгий вывод основного кинетического уравнения нелинейного волнового поля в предположении хаотичности начальных фаз был проведен в работе Пригожина и Броута /4/. Полученный ниже критерий стохастизации системы позволяет избавиться от априорной гипотезы ПХФ.

§ I. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мы рассмотрим одномерный пакет волн, потенциальная энергия взаимодействия которых определяется выражением:

$$V = \frac{1}{2}\sum_k \omega_k^2 u_k^2 + \beta \sum_{k_1+k_2+k_3=0} V_{k_1k_2k_3} u_{k_1} u_{k_2} u_{k_3} + \beta^2 \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=0} V_{k_1k_2k_3k_4} + \dots \qquad (I.I)$$

Здесь β – малый параметр, ядра $\hat{V}$ удовлетворяют обычным свойствам симметрии:

$$V_{k_1 k_2 k_3} = V_{k_2 k_1 k_3} = \cdots \; ; \quad V_{k_1 k_2 k_3 k_4} = V_{k_2 k_1 k_3 k_4} = \cdots$$

u_k – амплитуда k -ой гармоники. Спектр предполагается дискретным с характерным расстоянием между гармониками $\sim \Delta k$ и с расстоянием между частотами

$$\Omega_k = \frac{d\omega_k}{dk}\,\Delta k \tag{I.2}$$

Кроме того, будем считать спектр распадным в первом порядке. Это означает, что одновременно с законом сохранения импульса фононов

$$k_3 = k_1 + k_2$$

может выполняться следующий закон сохранения энергии (условие резонанса)

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \; ; \qquad (\omega_i \equiv \omega_{k_i}) \tag{I.3}$$

В дальнейшем будет рассмотрен более общий случай спектра $\omega_k = \omega(k)$.

Ограничимся в (I.I) выписанными членами и учтем, что член $\sim \beta^2$ дает нелинейную поправку к частоте:

$$\Delta\omega_k \sim \beta^2 \sum_{k+k_1=0} V_{kk_1} u_k^2 u_{k_1}^2$$
$$V_{kk_1} = V_{k k_1 k_2 k_3}\, \delta_{k k_2}\, \delta_{k_1 k_3} \tag{I.4}$$

Выражение для $\Delta\omega_k$ определено равенством (I.4) с точностью до численного коэффициента, точное значение которого в дальнейшем не существенно. Перейдем к переменным действие-фаза (I_k, φ_k) и перепишем полный гамильтониан системы взаимодействующих волн в виде /4/:

$$H = \sum_k \left(\omega_k I_k + \Delta\omega_k(I)\, I_k\right) +$$
$$+ \beta \sum_{k_1+k_2+k_3=0} \left(\frac{I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3}}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}}\right)^{1/2} \Big\{ V_{k_1 k_2 k_3}\, e^{i(\varphi_{k_1}+\varphi_{k_2}+\varphi_{k_3})} +$$
$$+ 3 V_{k_1, k_2, -k_3}\, e^{i(\varphi_{k_1}+\varphi_{k_2}-\varphi_{k_3})} + \text{K.C.} \Big\} \equiv$$
$$\equiv H_0 + V_{int} \; ; \tag{I.5}$$
$$H_0 = \sum_k \omega_k I_k$$

Здесь $\Delta\omega_k(I) = \Delta\omega_k(I_1, I_2, \dots)$ и не зависит от фаз; действие (имеющее смысл числа "квазичастиц") и фаза определены соотношениями:

$$u_k = \sqrt{\frac{I_k}{\omega_k}}\, e^{i\varphi_k} + \sqrt{\frac{I_{-k}}{\omega_{-k}}}\, e^{-i\varphi_{-k}}$$
$$\varphi_k = \omega_k t + \varphi_{k,(0)} \tag{I.6}$$
$$\omega_{-k} = \omega_k \; ; \quad V_{k_1, k_2, k_3} = V^*_{-k_1, -k_2, -k_3}$$

буквы К.С. означают члены, комплексно сопряженные предыдущим.

Введем функцию плотности $f(I, \varphi, t)$ в фазовом пространстве, удовлетворяющую уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \omega_k \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} = \sum_k \left(\frac{\partial V_{int}}{\partial \varphi_k}\frac{\partial f}{\partial I_k} - \frac{\partial V_{int}}{\partial I_k}\frac{\partial f}{\partial \varphi_k} \right) \tag{I.7}$$

и не содержащую никакой дополнительной информации, отличной от решений уравнений движения

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k + O(\beta^2)$$
$$\dot{I}_k = O(\beta)$$

Если перейти к представлению взаимодействия, то второй член в (I.7) исчезает, а в правой части следует всюду заменить φ_k на $\varphi_k - \omega_k t$. Поскольку f есть периодическая функция фаз φ_k, то можно записать

$$f(I,\varphi,t) = \sum_n \left\{ f^{(n)}(I,t)\, e^{i(n,\varphi)} + \text{K.C.} \right\}$$
$$(n,\varphi) \equiv \sum_k n_k \varphi_k \; ; \quad f^{(n)} = \left(f^{(-n)}\right)^* \tag{I.8}$$

или в представлении взаимодействия

$$f(I,\varphi,t) = \sum_n \left\{ f^{(n)}(I,t)\, e^{i(n,\varphi-\omega t)} + \text{K.C.} \right\} \tag{I.9}$$

Пренебрежем временно нелинейной поправкой к частоте, тогда подстановка (I.5), (I.8) в (I.7) и переход к представлению взаимодействия дает:

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} = -i\beta \left\{ Q_{n,n+1} f^{(n+1)} e^{-i[\omega]t} + Q_{n,n-1} f^{(n-1)} e^{i[\omega]t} \right\} \tag{I.10}$$

где

$$Q_{n,n\pm 1} = 3\sum_{k_1,k_2,k_3}\Big\{V_{k_1,k_2,-k_3}\Big(\frac{n_{k_1}}{2I_{k_1}}+\frac{n_{k_2}}{2I_{k_2}}-\frac{n_{k_3}}{2I_{k_3}}\pm\frac{\partial}{\partial I_{k_1}}\pm$$

$$\pm\frac{\partial}{\partial I_{k_2}}\mp\frac{\partial}{\partial I_{k_3}}\Big)\sqrt{\frac{I_{k_1}I_{k_2}I_{k_3}}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}}}\;\delta_{[k],0} + \text{K.C.}\Big\} \tag{I.II}$$

$$[\omega] \equiv \omega_{k_1}+\omega_{k_2}-\omega_{k_3}; \quad [k]\equiv k_1+k_2-k_3$$

Кроме того, в выражении для Q отобраны только резонансные члены, для которых выполняются распадные условия (I.3) и которые дают основной вклад в $\partial f/\partial t$.

Проведенный до сих пор вывод уравнения (I.I0) таков же, как и при получении основного кинетического уравнения для волн /5/. Существенное отличие в дальнейшем будет связано с двумя местами: I) отказ от гипотезы хаотических фаз при выборе начальных условий; 2) учет нелинейной поправки к частоте $\Delta\omega_k$.

Положим при $t = 0$

$$f(I,\varphi,0) = \sum_n\Big\{f^{(n)}(I,0)\,e^{i(n,\varphi)} + \text{K.C.}\Big\} \tag{I.I2}$$

Обычно ПХФ эквивалентно начальному условию $f(I,\varphi,0) = f(I)$, т.е. все $f^{(n)} = 0$, за исключением $n = 0$.

Совершая в (I.I0) преобразование Лапласа, получаем:

$$p f_p^{(n)} - f^{(n)}(I,0) = -i\beta\Big\{Q_{n,n-1}f^{(n-1)}_{p-i[\omega]} + Q_{n,n+1}f^{(n+1)}_{p+i[\omega]}\Big\} \tag{I.I3}$$

Из (I.I3) следует уравнение для $f_p^{(0)}$:

$$p f_p^{(0)} - f^{(0)}(I,0) = -i\beta\Big\{Q_{0,-1}f^{(-1)}_{p-i[\omega]} + Q_{0,1}f^{(1)}_{p+i[\omega]}\Big\} \tag{I.I4}$$

Проведем итерацию (I.I4) до членов $\sim\beta^2$ включительно:

$$p f_p^{(0)} - f^{(0)}(I,0) = -i\beta\Big\{Q_{0,-1}\frac{f^{(-1)}(I,0)}{p-i[\omega]} + Q_{0,1}\frac{f^{(1)}(I,0)}{p+i[\omega]}\Big\} -$$

$$-\beta^2 Q_{0,-1}Q_{0,1}\frac{f^{(0)}(I,0)}{p^2+[\omega]^2} \tag{I.I5}$$

Переходя к асимптотике $t\to\infty$, т.е. $p\to 0$ и возвращаясь к t – представлению, находим окончательно:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} = -i\beta\Big\{Q_{0,-1}e^{-i[\omega]t}f^{(-1)}(I,0) + Q_{0,1}e^{i[\omega]t}f^{(1)}(I,0)\Big\} +$$

$$+6\pi\beta^2\sum_{k_1,k_2,k_3}\frac{|V_{k_1,k_2,-k_3}|^2}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}}\,\delta([\omega])\,\delta_{[k],0}\Big[\frac{\partial}{\partial I}\Big]I_{k_1}I_{k_2}I_{k_3}\Big[\frac{\partial}{\partial I}\Big]f^{(0)} \tag{I.I6}$$

$$\Big[\frac{\partial}{\partial I}\Big] \equiv \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} + \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} - \frac{\partial}{\partial I_{k_3}}$$

Отличие уравнения (I.I6) от основного кинетического уравнения Пригожина-Браута, имеющего фоккер-планковский вид, заключается в наличии членов $\sim\beta$, сохраняющих фазовую память системы о начальных условиях. Заметим, что если даже $f^{(\pm 1)}(I,0) = 0$, то члены, содержащие фазовую память, появятся в более высоком порядке по β. Именно, они будут иметь порядок β^{n_0}, где n_0 соответствует наименьшему номеру отличной от нуля гармоники в разложении (I.I2).

Для дальнейшего введем функцию распределения $\Phi(I,t)$, получающуюся из $f^{(0)}(I,t)$ усреднением по начальным фазам $\varphi_{k(0)}$:

$$\Phi(I,t) = (2\pi)^{-N}\int d\varphi_{k_1,(0)}\cdots d\varphi_{k_N,(0)}\,f^{(0)}(I,t) \tag{I.I7}$$

где N – число степеней свободы, т.е. число возбужденных в плазме колебаний. При $t = 0$

$$\Phi(I,0) = f^{(0)}(I,0)$$

Уравнение для Φ может быть получено из (I.I6) путем интегрирования последнего по начальным фазам. Крайне важным является то, что в предположениях, сделанных при выводе (I.I6), уравнение для $\Phi(I,t)$ имеет точно такой же вид. Иными словами, усреднение по начальным фазам уравнения (I.I6) не меняет его и фазовая память системы сохраняется. Это связано с тем, что (I.I6) не содержит пока членов, зависящих от $\varphi_{k,(0)}$. Положение дела меняется, если учесть нелинейную поправку к частоте. Ниже будет показано, что это приводит к зависимости члена первого порядка по β от $\varphi_{k,(0)}$ и получено условие, при котором усреднение по $\varphi_{k,(0)}$ приводит к кинетическому уравнению вида Фоккера-Планка.

§ 2. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

При выполнении резонансных условий (I.3) для некоторых трех волн развивается когерентная так называемая распадная неустойчивость /6/, приводящая к росту амплитуд колебаний с частотами ω_2, ω_3. Наличие нелинейной поправки к частоте может привести к нарушению условий резонанса и прекращению неустойчивости. Возможна, однако, следующая ситуация: нарушение условия резонанса некоторого фиксированного колебания ω_1 с парой волн ω_2, ω_3 вследствие нелинейности частот приводит к возможности резонанса между ω_1 и другой парой волн ω_2', ω_3'. В случае, когда

$$\frac{d\omega_k}{dI_{k'}}\,\Delta I_{k'} \gg \Omega_k \tag{2.I}$$

гармоника с частотой ω_k быстро выходит из резонанса с любой парой волн из-за сильной нелинейности, но зато всегда попадает в резонанс с какой-либо другой парой волн. Левая часть в (2.I) представляет собой изменение частоты вследствие прохождения через резонанс, а правая часть - согласно (I.2) характерное расстояние между гармониками; ΔI_k - изменение числа квазичастиц (действия) при прохождении через резонанс. Условие типа (2.I) рассматривалось в работах /3,7-9/ как условие хаотизации фазы нелинейного колебания во внешнем периодическом поле и перехода от динамического описания системы к статистическому. Ниже мы займемся детальным изучением этого вопроса для уравнения (I.I6).

Обратимся временно к исходному уравнению (I.1), из которого следуют (с учетом (I.4)) уравнения движения:

$$\ddot{u}_k + (\omega_k + \Delta\omega_k)^2 u_k \approx F(t)$$

$$F(t) = -3\beta \sum_{k_1,k_2 \neq k} V_{k k_1 k_2} u_{k_1} u_{k_2} \delta_{k_1+k_2,k} \tag{2.2}$$

Правую часть (2.2) можно рассматривать как внешнюю силу, действующую на k-ую моду. Если воспользоваться для u_k нулевым приближением:

$$u_k = u_k^{(0)} \cos(\omega_k t + \varphi_{k,(0)}),$$

то

$$F(t) = -3\beta \sum_{k_1,k_2 \neq k} V_{k k_1 k_2} u_{k_1}^{(0)} u_{k_2}^{(0)} \cos(\omega_{k_1} t + \varphi_{k_1,(0)}) \cos(\omega_{k_2} t + \varphi_{k_2,(0)})\, \delta_{k_1+k_2,k} \tag{2.3}$$

Если считать теперь, что характерное расстояние между гармониками спектра Ω_k мало меняется на интервале возбужденного пакета волн, то нетрудно видеть, что (2.3) представляет собой разложение в ряд Фурье некоторой периодической функции с периодом $2\pi/\Omega_k$.

Сделаем теперь очень важное предположение о достаточно большой ширине частотного интервала возбужденных колебаний:

$$N\Omega_k \gg \omega_k \tag{2.4}$$

где N - число возбужденных колебаний, Ω_k и ω_k относятся к рассматриваемому интервалу частот, достаточно удаленных от правого края пакета. Тогда для таких частот ω_k сила $F(t)$ представляет последовательность очень узких временных импульсов (с шириной $\sim 1/N\Omega_k$), следующих периодически с частотой $\sim \Omega_k$. На каждом импульсе происходит изменение адиабатического инварианта колебания ("рассеяния") на величину δI_k. Для оценки δI_k заметим, что вследствие очень узкой (по сравнению с периодом колебания $2\pi/\omega_k$) ширины импульса $F(t)$ его можно заменить приближенно на δ - функцию. Тогда вместо (2.3) получим:

$$\ddot{u}_k + (\omega_k + \Delta\omega_k)^2 u_k \approx -F_0 \sum_n \delta(t - 2\pi n/\Omega_k)$$

$$F_0 \sim \frac{V_k I_k}{\omega_k \Omega_k}; \quad V_k = V_{k,k,2k} \tag{2.5}$$

Из (2.5) легко находим

$$\frac{\delta I_{k,(n)}}{I_{k,(n)}} \approx \frac{F_0}{\omega_k u_{k,(n)}^{(0)}} \sin 2\varphi_{k,(n)} = \beta \frac{V_k I_{k,(n)}}{\omega_k^2 \Omega_k u_{k,(n)}^{(0)}} \sin 2\varphi_{k,(n)} \tag{2.6}$$

где индекс n внизу относится к рассеянию на n-ом импульсе. Вообще, уравнение (2.5) может быть заменено следующей системой в конечных разностях:

$$I_{k,(n+1)} = I_{k,(n)} + \delta I_{k,(n)}$$

$$\varphi_{k,(n+1)} = \varphi_{k,(n)} + 2\pi\frac{\omega_k}{\Omega_k} + \frac{2\pi}{\Omega_k}\sum_{k'}\frac{\partial\Delta\omega_k}{\partial I_{k',(n)}}\,\delta I_{k',(n)}\sin 2\varphi_{k',(n)} = \tag{2.7}$$

$$= \varphi_{k,(n)} + 2\pi\frac{\omega_k}{\Omega_k} + \sum_{k'} K_{kk',(n)}\sin 2\varphi_{k',(n)}$$

$$K_{kk',(n)} = \frac{2\pi}{\Omega_k}\frac{\partial\Delta\omega_k}{\partial I_{k',(n)}}\,\delta I_{k',(n)} \tag{2.8}$$

При $K \gg 1$ фаза колебания сильно меняется в результате рассеяния и можно ожидать (это и будет показано ниже), что в этом случае происходит переход от динамического описания системы к статистическому.

Формулы (2.6), (2.8) можно переписать в более компактном виде, если воспользоваться выражением для инкремента ν_k когерентной распадной неустойчивости трех волн (см.например, /I/):

$$\frac{\delta I_{k,(n)}}{I_{k,(n)}} = \frac{\nu_k}{\omega_k}\sin 2\varphi_{k,(n)} \ll 1$$

$$\Delta\omega_k \approx \sum_{k'}\frac{\nu_{k'}^2}{\omega_{k'}} \tag{2.9}$$

$$K_{kk',(n)} \approx \frac{1}{\Omega_k}\frac{\nu_k\nu_{k'}^2}{\omega_k\omega_{k'}}$$

Если рассмотреть узкий пакет так, что $N\Omega_k \ll \omega_k$, то характерная ширина импульса $F(t)$ становится много больше периода колебания волны. Такая сила является адиабатической. Изменение δI в результате рассеяния экспоненциально мало:

$$\frac{\delta I_k}{I_k} \sim \exp\left\{-1\Big/\frac{N\Omega_k}{\omega_k}\right\}$$

и, следовательно, экспоненциально малым оказывается и K.

Результаты (2.3) могут быть получены и другим, более общим, путем. Решения уравнения (2.2) в интервале между двумя последовательными импульсами может быть представлено в виде решений, возникающих при использовании метода ВКБ /8/ за счет малости нелинейности. Пусть A_0, B_0 – комплексные амплитуды решений до рассеяния и A, B – соответственно после рассеяния. Общее преобразование, связывающее (A,B) с (A_0,B_0), имеет вид /8/:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$|a|^2 - |b|^2 = 1$$

где a, b – некоторые параметры, характеризующие рассеяние. Если положить $B = A^*$, $B_0 = A_0^*$, то

$$|B|^2 = |A|^2 = I, \quad |B_0|^2 = |A_0|^2 = I_0 \tag{2.11}$$

где I_0, I – соответственно действие до и после рассеяния. Из (2.10), (2.11) находим:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1 + 2\varepsilon\cos(2\varphi_0 + \psi) + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \tag{2.12}$$

где введены обозначения:

$$A_0 = |A_0|e^{i\varphi_0}; \quad \left|\frac{b}{a}\right| = \varepsilon; \quad \frac{b}{a} = \varepsilon e^{-i\psi}$$

При $\varepsilon \ll 1$ происходит малое изменение действия $\delta I = I - I_0$. В этом случае из (2.12) следует:

$$\frac{\delta I}{I} \approx 2\varepsilon\cos(2\varphi_0 + \psi)$$

Полученное выражение аналогично (2.6). В частности, для уравнения (2.5) $\varepsilon \sim \nu/\omega$, $\psi \simeq -\frac{\pi}{2}$, и мы приходим к формуле (2.9).

В заключение этого параграфа отметим, что величина ΔI_k, введенная в (2.I), характеризует изменение действия в результате прохождения отдельного резонанса и не совпадает с δI_k. Проведем оценку ΔI_k. В резонансе к основному колебанию добавляется вынужденное с амплитудой

$$\Delta u_{k'} \sim \beta V_k u_{k'}^2/\Delta$$

где Δ – отклонение частоты от резонансного значения. В данном случае расстройка частоты связана с ее нелинейной зависимостью от u_k, т.е.

$$\Delta \sim \frac{\partial \omega_k}{\partial I_{k'}} \Delta I_{k'}$$

Отсюда

$$\frac{\Delta I_{k'}}{I_{k'}} = \frac{\Delta u_{k'}}{u_{k'}} \sim \beta V_k u_{k'} \Big/ \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial I_{k'}} \Delta I_{k'} \right)$$

или

$$\Delta I_{k'} = \left(\beta V_k u_{k'} I_{k'} \Big/ \frac{\partial \omega_k}{\partial I_{k'}} \right)^{1/2} \tag{2.13}$$

Подстановка (2.13) в (2.1) дает

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial I_{k'}} \frac{\beta V_k u_{k'} I_{k'}}{\Omega_k^2} = \frac{\nu_{k'}^2 \nu_k}{\omega_{k'} \omega_k \Omega_k} = K_{kk'} \gg 1 \tag{2.14}$$

Таким образом, условие (2.1) означает согласно (2.7) очень быстрое изменение фазы колебания вследствие рассеяния.

Полученные выше результаты позволяют перейти к решению основного вопроса – выводу условия, при котором можно перейти от динамического описания к статистическому для системы (1.5)

§ 3. ВЫВОД УСЛОВИЙ ХАОТИЗАЦИИ ФАЗ ВОЛН

Обратимся к уравнению (1.16) и учтем теперь нелинейную поправку к частоте $\Delta\omega$. Как было показано в предыдущем параграфе, взаимодействие данного колебания со всеми остальными сводится к эффективному рассеянию фонона периодически во времени и изменению действия на величину δI за один акт рассеяния. Это означает, что величина $\Delta\omega(I)$ является функцией времени. Учтем это обстоятельство в множителях $\exp\{\pm i[\omega]t\}$, входящих в (1.16) в члены $\sim\beta$. Для этого заметим, что согласно (1.6)

$$(\omega + \Delta\omega)t = \varphi(t) - \varphi_{(0)} = \varphi_{(m)} - \varphi_{(0)} \tag{3.1}$$

где m – число актов рассеяния к моменту времени t: $m \approx t\Omega_k \gg 1$.

С помощью (2.7) имеем:

$$(\omega_k + \Delta\omega_k)t = \varphi_{k,(m-1)} + 2\pi \frac{\omega_k}{\Omega_k} + \sum_{k'} K_{kk'} \sin 2\varphi_{k',(m-1)} - \varphi_{k(0)} =$$

$$= \varphi_{k,(m-2)} + 4\pi \frac{\omega_k}{\Omega_k} + \sum_{k'} K_{kk'} \sin 2\varphi_{k',(m-2)} +$$

$$+ \sum_{k'} K_{kk'} \sin 2\left\{ \varphi_{k',(m-2)} + \sum_{k''} K_{k'k''} \sin 2\varphi_{k'',(m-2)} \right\} - \tag{3.2}$$

$$- \varphi_{k(0)} = \cdots$$

После окончания процесса итерации в (3.2) величина $(\omega_k + \Delta\omega_k)t$ будет выражена как функция t (номера m) и $\varphi_{k(0)}$.

Для функции Φ, как уже отмечалось в § 1, уравнение (1.16) принимает вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -i\beta \left\{ Q_{0,-1} \langle\!\langle e^{-i[\varphi(t)-\varphi_{(0)}]} \rangle\!\rangle f^{(-1)}(I,0) + \right.$$

$$\left. + Q_{0,1} \langle\!\langle e^{i[\varphi(t)-\varphi_{(0)}]} \rangle\!\rangle f^{(1)}(I,0) \right\} +$$

$$+ 6\pi\beta^2 \sum_{k_1,k_2,k_3} \frac{|V_{k_1,k_2,-k_3}|^2}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}} \delta[\omega]\, \delta_{[k],0} \left[\frac{\partial}{\partial I}\right] I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3} \left[\frac{\partial}{\partial I}\right] \Phi\,;$$

$$[\varphi(t) - \varphi_{(0)}] \equiv \varphi_{k_1}(t) - \varphi_{k_1,(0)} + \varphi_{k_2}(t) - \varphi_{k_2,(0)} - \varphi_{k_3}(t) + \varphi_{k_3,(0)} \tag{3.3}$$

где под знаком δ – функции можно сохранить только линейные частоты, что будет оправдано впоследствии. Кроме того, обозначено

$$\langle\!\langle \ldots \rangle\!\rangle \equiv (2\pi)^{-N} \int d\varphi_{1,(0)} \cdots d\varphi_{N,(0)}$$

Рассмотрим теперь два предельных случая. Пусть $K \ll 1$ почти на всем интервале рассматриваемых частот. Тогда

$$(\omega + \Delta\omega)t = \omega t + O(K)$$

$$\langle\!\langle e^{\pm i[\omega + \Delta\omega]t} \rangle\!\rangle = e^{\pm i[\omega]t} \left(1 + O(K)\right) \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что уравнение для Φ имеет точно такой же вид, что и уравнение (1.16) для $f^{(0)}$ и фазовая память в системе сохраняется.

Пусть теперь $K_{kk'} \gg 1$ почти для всех k, k'. В этом случае, оставляя в (3.2) наиболее быстро меняющиеся члены, имеем:

$$\varphi_k(t) - \varphi_{k,(0)} = (\omega_k + \Delta\omega_k)t \approx \omega_k t - \varphi_{k,(0)} + \\ + \sum_{k_1} K_{kk_1} \sin\Big\{\sum_{k_2} K_{k_1k_2} \sin\Big[\sum_{k_3} K_{k_2k_3} \cdots \\ \cdots \sin\Big(\sum_{k_m} K_{k_{m-1},k_m} \sin 2\varphi_{k_m,(0)}\Big)\Big]\Big\} \qquad (3.5$$

Учитывая, что $K_{kk'} \gg 1$, оценку нужного нам интеграла можно провести методом стационарной фазы. Это дает:

$$\langle\langle e^{\pm i[\omega+\Delta\omega]t} \rangle\rangle \sim e^{-t/\tau} \qquad (3.6)$$

$$\tau^{-1} = \tfrac{1}{2}\,\Omega N \ln K$$

где Ω и K некоторые средние по пакету величины Ω_k и $K_{kk'}$. Полученный результат решает задачу. За время порядка τ члены первого порядка по β в (3.3) исчезают, и уравнение для Φ принимает вид уравнения Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 6\pi\beta^2 \sum_{k_1,k_2,k_3} \frac{|V_{k_1,k_2,-k_3}|^2}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}} \delta[\omega]\cdot\delta_{[k],0} \times \\ \times \Big[\frac{\partial}{\partial I}\Big] I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3} \Big[\frac{\partial}{\partial I}\Big]\Phi \qquad (3.7)$$

Время τ, таким образом, можно рассматривать как время исчезновения фазовой корреляции в системе (I.I). Равновесным решением (3.7) является Φ, для которого /4/

$$\langle I_k/\omega_k \rangle = const \qquad (3.8)$$

где скобки $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение по Φ. Характерное время τ_0 установления стационарного состояния определяется из (3.7):

$$\tau_0 \sim \nu^2/\omega$$

Это время должно быть много больше времени, связанного с размытием $\delta([\omega])$ в (3.7) вследствие нелинейной поправки к частоте. Согласно (2.9) это дает:

$$\tau_0 \cdot \frac{\omega^2}{\nu^3} \sim \frac{\omega}{\nu} \gg 1$$

Последним неравенством оправдано пренебрежение нелинейными поправками к частоте в аргументе δ – функции, входящей в (3.3).

Из (3.7) сразу следует кинетическое уравнение для волн /I/. Действительно, умножая (3.7) на I_k и интегрируя по всему фазовому пространству функции Φ, находим:

$$\frac{\partial\langle I_k\rangle}{\partial t} = 18\pi\beta^2 \sum_{k_1k_2k_3} \frac{|V_{k_1,k_2,-k_3}|^2}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}} \delta(\omega_{k_1}+\omega_{k_2}-\omega_{k_3})(\delta_{k_1k}+\delta_{k_2k}- \\ -\delta_{k_3k})\delta_{k_1+k_2,k_3}\big(\langle I_{k_2}I_{k_3}\rangle + \langle I_{k_1}I_{k_3}\rangle - \langle I_{k_1}I_{k_2}\rangle\big) \qquad (3.9)$$

Учитывая свойства симметрии $V_{k_1,k_2,-k_3}$, (I.6) и делая, как обычно, предположение о расцеплении моментов

$$\langle I_{k_1}I_{k_2}\rangle = \langle I_{k_1}\rangle\langle I_{k_2}\rangle,$$

получаем:

$$\frac{\partial\langle I_k\rangle}{\partial t} = 18\pi\beta^2 \sum_{k_1,k_2} \frac{|V_{k,k_1,-k_2}|^2}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_k} \Big\{2\big[\langle I_{k_1}\rangle\langle I_{k_2}\rangle + \\ + \langle I_k\rangle\langle I_{k_2}\rangle - \langle I_k\rangle\langle I_{k_1}\rangle\big]\delta(\omega_k+\omega_{k_1}-\omega_{k_2})\delta_{k+k_1,k_2} - \\ - \big[\langle I_k\rangle\langle I_{k_1}\rangle + \langle I_k\rangle\langle I_{k_2}\rangle - \langle I_{k_1}\rangle\langle I_{k_2}\rangle\big]\delta(\omega_k-\omega_{k_1}-\omega_{k_2})\delta_{k,k_1+k_2}\Big\} \qquad (3.10)$$

§ 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

I. Как было показано в предыдущем параграфе, выполнение условия (2.I4) почти для всех k, k' приводит к хаотизации фаз волн за время порядка τ. Полученный результат имеет наглядную интерпретацию. Хорошо известно, что в статистической системе имеет место очень сильная неустойчивость траекторий движения относительно малых возмущений начальных условий. Это означает, что две фазовых точки, начав движение с близкими начальными условиями, могут разойтись через некоторое время сколь угодно далеко друг от друга. Рассмотрим для простоты изменение фазы отдельного колебания. Пусть $d\varphi_{k,(n)}$ есть расстояние между двумя значениями фазы на единичной окружности в момент времени, характеризуемый номером n. Тогда согласно (2.7)

$$\frac{d\varphi_{k,(n+1)}}{d\varphi_{k',(n)}} = K_{kk'} \cos 2\varphi_{k',(n)} \equiv T_n(k,k') \qquad (4.I)$$

При $K_{kk'} \gg 1$ преобразование (4.I) является преобразованием растяжения, исключая малую область $\varphi_{k'}$ размером $\sim K^{-1} \ll 1$. Ввиду большого числа степеней свободы статистический вес подобного рода областей в течение времени, соответствующего $m \gg 1$ шагов, очень мал. Поэтому, преобразование T_n, будучи примененным достаточно большое число раз при $K \gg 1$, и означает наличие неустойчивости, о которой говорилось выше. Условие $K \sim 1$ можно рассматривать как границу стохастичности.

2. Остановимся на следствиях из условия хаотизации фаз (2.I4). Перепишем его в виде:

$$K_{kk'} = \frac{\partial \Delta\omega_k}{\partial I_{k'}} I_{k'} \frac{\nu_k}{\omega_k} \cdot \frac{1}{\Omega_k} \gg 1 \qquad (4.2)$$

или, как это бывает для большинства реальных систем в плазме, $\Delta\omega$ зависит степенным образом от I, так что

$$K_{kk'} = \frac{\Delta\omega_{kk'}}{\Omega_k} \cdot \frac{\nu_k}{\omega_k} \gg 1 \;;\; \Delta\omega_k = \sum_{k'} \Delta\omega_{kk'} \qquad (4.3)$$

Кроме того, обычно $K_{kk'}$ есть положительная степень k, k'. Отсюда следует, что колебания с достаточно длинными волнами не хаотизируются Для уравнения (3.I0) существует граница k_0, ниже которой оно теряет смысл. Величина k_0 может быть получена из оценки:

$$K_{k_0 k_0} \sim 1 \qquad (4.4)$$

Действие нижней границы k_0 аналогично наличию отражающей стенки для квазичастиц /3/. Из (4.2) следует также, что в областях аномальной дисперсии, где

$$\Omega_k = \frac{\partial \omega_k}{\partial k} \Delta k \to \infty$$

может произойти срыв стохастичности.

Кроме того, для выполнения (4.2) нелинейность $\Delta\omega$ должна быть достаточно большой.

3. В рассматриваемой до сих пор модели условие резонансов

$$\sum_j n_j \omega_j = 0 \qquad (4.5)$$

имело вид:

$$\omega_{k_1} = \omega_{k_2} + \omega_{k_3} \;; \quad k_1 = k_2 + k_3 \qquad (4.6)$$

Выполнение (4.6) обеспечивается соответствующим видом закона дисперсии $\omega = \omega(k)$. Может оказаться, что для рассматриваемого спектра $\omega(k)$ процессы типа (4.6) запрещены, и резонансные условия удовлетворяются только для большего числа волн, чем три. Так, например, кинетическое уравнение в предположении хаотических фаз для четырехплазмонных взаимодействий было получено в /I0/. В произвольном случае критерий (4.3) может быть сохранен с соответствующей заменой величин $\Delta\omega_k$ и ν_k. Задача, рассмотренная в /3/, относится к спектру $\omega(k)$, для которого процесс (4.6) запрещен и возможны распады только в следующем порядке.

Выполнение условий (4.5) обеспечивает возможность появления "затравочной" (распадной) неустойчивости. Последняя приводит к существенному изменению адиабатического инварианта колебания.

Литература

I. А.А.Галеев, В.И.Карпман. Турбулентная теория слабонеравновесной разреженной плазмы. ЖЭТФ, 44, 592, (1963).

2. E.Fermi, J. Pasta, S. Ulam. Studies of nonlinear problems. Los Alamos Scientific Report. LA-1940, (1955)

3. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков. Статистические свойства нелинейной струны. ДАН СССР, 166, 57 (1966).

4. И.Пригожин. Неравновесная статистическая механика. Мир.Москва, 1964.

5. R. Brout, I. Prigogine. Statistical mechanics of irreversible processes. Physica, 22, 621(1956)

6. В.Н. Ораевский, Р.З.Сагдеев. Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы. ЖТФ, 32, 1291 (1962)

7. Б.В.Чириков. Резонансные процессы в магнитных ловушках. Атомная энергия, 6, 630 (1959).

8. Г.М.Заславский. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. ПМТФ (в печати).

9. M.N. Rosenbluth, R.Z. Sagdeev, J.B. Taylor, G.M. Zaslavski. On the destruction of magnetic surfaces due to the irregularities of magnetic field. Nuclear Fusion, 6, №4 (1966)

IO. В.Е.Захаров. О спектре слабой турбулентности в плазме без магнитного поля. ЖЭТФ, 51, № 2 (1966).