ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР.

препринт 34

В.В.Соколов, И.Б.Хриплович

Определение плотности фермионного тока в теориях с векторной связью

НОВОСИБИРСК 1966

А Н Н О Т А Ц И Я

Предлагается корректное определение плотности фермионного тока в теориях с неабелевой калибровочной группой. Это определение следует сохранить, по-видимому, и при нарушенной калибровочной инвариантности. С его помощью получены некоторые соотношения между спектральными функциями в модели слабых взаимодействий лептонов с промежуточным бозоном.

V.V.SOKOLOV, I.B.KHRIPLOVICH

FERMION CURRENT DENSITY DEFINITION IN THEORIES WITH VECTOR COUPLING

abstract

The correct definition of the fermion current density in theories invariant under a non-abelian gauge group is suggested. The same definition apparently must be preserved when the gauge invariance is broken. With its help some relations between spectral functions in the model of lepton weak interactions with an intermediate boson are obtained.

Применение алгебры токов позволило получить в последнее время ряд интересных результатов в физике элементарных частиц. Между тем, до настоящего времени не выяснена полностью непротиворечивость одновременных перестановочных соотношений в некоторых используемых полевых моделях. Даже в квантовой электродинамике избежать противоречия удается лишь с помощью нетривиального доопределения плотности сохраняющегося фермионного тока /I,2/. Считается, что в теориях с несохраняющимся током спинорных частиц возникают дополнительные осложнения /3,4/.

В предыдущей статье авторов /5/ было указано определение плотности тока в псевдоскалярной теории с псевдовекторной связью, устраняющее отмеченную Окубо /4/ трудность. В настоящей работе на основе теории Янга-Миллса /6/ развивается намеченный ранее путь преодоления противоречий, возникающих в моделях со связью векторного типа. В качестве примера рассматривается теория слабого взаимодействия с промежуточным бозоном.

В теории Янга-Миллса система взаимодействующих спинорного изоспинорного и векторного изовекторного полей описывается лагранжианом

$$L = -\frac{1}{4} f^{\alpha}_{\mu\nu} f^{\alpha}_{\mu\nu} + \bar{\psi}\left[\gamma_\mu (i\partial_\mu + g_0 \tau^\alpha b^\alpha_\mu) - m\right]\psi$$

$$f^{\alpha}_{\mu\nu} = \partial_\mu b^\alpha_\nu - \partial_\nu b^\alpha_\mu + 2g_0 \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} b^\beta_\mu b^\gamma_\nu \qquad (I)$$

инвариантным относительно изотопического калибровочного преобразования, зависящего от координат

$$\psi(x) \to S^{-1}(x)\psi(x)$$

$$\tau^\alpha b^\alpha_\mu(x) \to S^{-1}(x)\tau^\alpha b^\alpha_\mu(x) S(x) + \frac{i}{g_0} S^{-1}(x)\partial_\mu S(x) \qquad (2)$$

$$S(x) = exp\left[-i\tau^\alpha \lambda^\alpha(x)\right]$$

Фермионный ток $j^\alpha_\mu = \frac{g_0}{2}\left[\bar{\psi}, \gamma_\mu \tau^\alpha \psi\right]$ при преобразованиях (2) ведет себя, как вектор. Однако, как отметил Швингер /I/, билинейную комбинацию спинорных операторов следует понимать в смысле предельного перехода

$$\left[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \tau^\alpha \psi(x)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\bar{\psi}(x - \tfrac{\varepsilon}{2}), \gamma_\mu \tau^\alpha \psi(x + \tfrac{\varepsilon}{2})\right]; \ \varepsilon^2 < 0 \qquad (3)$$

величина, стоящая под знаком предела, не является уже вектором по отношению к (2), подобно тому как соответствующая величина в квантовой электродинамике оказывается не градиентно-инвариантной. В последней отмеченный недостаток устраняется введением дополнительных экспоненциальных множителей /I,2/. Покажем, что аналогичным приемом следует воспользоваться и в рассматриваемом случае.

Каждая компонента изовектора тока $j_\mu^\alpha(x)$ должна быть инвариантна относительно поворота на произвольный угол вокруг соответствующей изотопической оси α. Рассмотрим, например, вращение относительно третьей оси в изотопическом пространстве:

$$S(x) = exp[-i\tau^3\lambda(x)] \tag{4}$$

При этом компоненты поля b_μ^α изменяются по закону

$$b_\mu^3(x) \to b_\mu^3(x) + \frac{1}{g_0}\partial_\mu\lambda(x),$$
$$b_\mu^\pm(x) \to e^{\pm 2i\lambda(x)} b_\mu^\pm(x), \tag{5}$$

где

$$b_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_\mu^1 \mp i b_\mu^2);$$

в то время как

$$\bar\psi\gamma_\mu\tau^\alpha b_\mu^\alpha\psi \to \bar\psi\gamma_\mu\tau^\alpha b_\mu^\alpha\psi + \frac{1}{g_0}\bar\psi\gamma_\mu\tau^3\psi\partial_\mu\lambda \tag{6}$$

Преобразования (4), (5) и (6) совпадают с обычными градиентными преобразованиями в квантовой электродинамике, так что необходимая инвариантность j_μ^3 при вращениях (4) вновь достигается введением упомянутых выше экспоненциальных множителей. Учитывая равноправие всех трех осей изотопического пространства в теории Янга-Миллса, приходим к следующему определению плотности спинорного тока:

$$j_\mu^\alpha(x) = \frac{g_0}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\bar\psi(x-\tfrac{\varepsilon}{2}), \gamma_\mu\tau^\alpha exp\{ig_0\tau^\alpha\int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} d\xi_\nu\, b_\nu^\alpha(\xi)\}\psi(x+\tfrac{\varepsilon}{2})\right]; \quad \varepsilon^2 < 0. \tag{7}$$

(суммирование по α в экспоненте не производится).

Подчеркнем, что введение экспонент в определение фермионного тока оказалось необходимым, несмотря на то, что j_μ^α не сохраняется. Сохраняется лишь суммарный ток фермионов и бозонов.

Определение (7) остается в силе и при отличной от нуля затравочной массе b-поля, хотя теория уже не инвариантна относительно преобразований (2). Чтобы убедиться в этом, представим лагранжиан в виде

$$L = -\frac{1}{2}f_{\mu\nu}f_{\mu\nu} + \mu_0^2 b_\mu^+ b_\mu^- - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}^3 f_{\mu\nu}^3 + \frac{1}{2}\mu_0^2 b_\mu^3 b_\mu^3 +$$
$$+ \bar\psi[\gamma_\mu(i\partial_\mu + g_0\tau_+ b_\mu^+ + g_0\tau_- b_\mu^- + g_0\tau^3 b_\mu^3) - m]\psi \tag{8}$$

Он описывает в калибровке Прока ($\partial_\mu b_\mu^3 = 0$) нейтральный векторный мезон b_μ^3, взаимодействующий с сохраняющимся током

$$2ig_0\partial_\nu(b_\nu^- b_\mu^+ - b_\nu^+ b_\mu^-) + 2ig_0(b_\nu^- f_{\nu\mu}^+ - b_\nu^+ f_{\nu\mu}^-) + g_0\bar\psi\gamma_\mu\tau^3\psi \tag{9}$$

Добавлением к (8) члена $-\frac{1}{2}(\partial_\mu b_\mu^3)^2$ можно сделать лагранжиан инвариантным относительно преобразований (4), (5) с дополнительным условием /7 /

$$(\Box - \mu_0^2)\partial_\mu\lambda(x) = 0 \tag{10}$$

Отсюда вновь следует (7).

В силу результатов работы /8/, отсюда вытекает, между прочим, формула:

$$\frac{1}{\mu_0^2} = \int d\varkappa^2 \frac{\rho(\varkappa^2)}{\varkappa^2} \tag{11}$$

где $\rho(\varkappa^2)$ - спектральная функция b - поля /9/.

В приведенных выше рассуждениях мы существенным образом опирались на калибровочную инвариантность теории. Возникает вопрос, как следует определять фермионный ток в теориях, не обладающих такой симметрией. Можно полагать, что подобные теории получаются добавлением к градиентно-инвариантному лагранжиану членов, нарушающих исходную симметрию. (Пусть, например, в лагранжиане (I) опущены члены самодействия b -поля). Представляется естественным считать в таких случаях, что плотность тока j_μ^α "не знает" структуры тех слагаемых в лагранжиане, в которые она не входит. Поэтому использованный принцип доопределения j_μ^α является, по-видимому, общим для теорий со связью векторного или псевдовекторного типа, независимо от их градиентной инвариантности.

Покажем, например, что применение изложенных выше соображений позволяет непротиворечивым образом сформулировать модель слабого взаимодействия нейтрино и электрона с промежуточным векторным бозоном:

$$L = -\partial_\mu W_\nu^+ \partial_\mu W_\nu + \partial_\mu W_\nu \partial_\nu W_\mu + \mu_0^2 W_\mu^+ W_\mu +$$

$$+ \bar{\psi}_1 i\hat{\partial}\psi_1 + \bar{\psi}_2 (i\hat{\partial} - m)\psi_2 - g_0\left[\bar{\psi}_1 \gamma_\mu (1+\gamma_5)\psi_2 W_\mu^+ + \bar{\psi}_2 \gamma_\mu (1+\gamma_5)\psi_1 W_\mu\right] \qquad (12)$$

Соответствующее уравнение движения векторного поля имеет вид:

$$\partial_\mu \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu \partial_\mu W_\mu + \mu_0^2 W_\nu = g_0 \bar{\psi}_1 \gamma_\nu (1+\gamma_5)\psi_2, \qquad (13)$$

а канонические перестановочные соотношения таковы:

$$[W_m(\vec{x}), \pi_n(0)] = i\delta_{mn}\delta(\vec{x})$$

$$\{\psi_i(\vec{x}), \bar{\psi}_j(0)\} = \delta_{ij}\gamma_0\delta(\vec{x}) \qquad (14)$$

где $\pi_n = \partial_0 W_n - \partial_n W_0$. Временная компонента векторного поля не является независимой динамической переменной и с помощью уравнения (13) может быть представлена в следующем виде:

$$W_0 = \frac{1}{\mu_0^2}\left[g_0 \bar{\psi}_1 \gamma_0 (1+\gamma_5)\psi_2 - \partial_n \pi_n^+\right] \qquad (15)$$

Вакуумное среднее от коммутатора векторного поля в силу обычных требований ковариантности и спектральности представляется в форме

$$\langle [W_\mu(x), W_\nu^+(0)] \rangle = -i\int d\varkappa^2 \left[\rho_1(\varkappa^2) g_{\mu\nu} + \rho_2(\varkappa^2)\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\varkappa^2}\right]\Delta(x,\varkappa^2) \qquad (16)$$

Здесь $\Delta(x,\varkappa^2)$- скалярная перестановочная функция.

Требование положительной определенности метрики в пространстве состояний приводит к следующим неравенствам для спектральных функций:

$$0 \leq \rho_1(\varkappa^2) \leq \rho_2(\varkappa^2) \qquad (17)$$

С помощью (14) нетрудно получить правило сумм:

$$\int d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) = 1 \qquad (18)$$

Полагая в (16) $\mu = 0$, $\nu = n$, устремляя x_0 к нулю и учитывая (14) и (15), находим с другой стороны /3/:

$$\int d\varkappa^2 \frac{\rho_2(\varkappa^2)}{\varkappa^2} = \frac{1}{\mu_0^2} \qquad (19)$$

Для дальнейшего удобно ввести изотопический дублет $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix}$ и представить лептонный ток в виде

$$j_\nu = g_0 \bar{\psi}_1 \gamma_\nu (1+\gamma_5)\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} g_0 \bar{\psi}\gamma_\nu (1+\gamma_5)\tau_+\psi =$$

$$= \frac{1}{2} g_0 \bar{\psi}\gamma_\nu (1+\gamma_5)\tau^1\psi + \frac{i}{2} g_0 \bar{\psi}\gamma_\nu (1+\gamma_5)\tau^2\psi = \frac{1}{2} j_\nu^1 + \frac{i}{2} j_\nu^2 \qquad (20)$$

Согласно (7), полагаем:

$$j_\nu^{1,2}(x) = \frac{g_0}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\bar{\psi}\left(x-\frac{\epsilon}{2}\right), \gamma_\nu(1+\gamma_5)\tau^{1,2}\exp\left\{ig_0(1+\gamma_5)\tau^{1,2}\int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} d\xi_\mu W_\mu^{1,2}(\xi)\right\}\psi\left(x+\frac{\epsilon}{2}\right)\right]$$

$$W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu + W_\mu^+); \qquad W_\mu^2 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(W_\mu - W_\mu^+) \qquad (21)$$

Вычислим теперь вакуумное среднее от одновременного коммутатора пространственной компоненты уравнения (13) с π_m, пользуясь соотношениями (14), (16) и (21). После некоторых преобразований находим:

$$\delta_{mn}\int d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2)(\varkappa^2 - \mu_0^2) =$$

$$= i\frac{g_0^2}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon_m \langle \left[\bar{\psi}_1\left(x-\frac{\epsilon}{2}\right), \gamma_n(1+\gamma_5)\psi_1\left(x+\frac{\epsilon}{2}\right)\right] + \left[\bar{\psi}_2\left(x-\frac{\epsilon}{2}\right), \gamma_n(1+\gamma_5)\psi_2\left(x+\frac{\epsilon}{2}\right)\right] \qquad (22)$$

Для оценки правой части равенства (22) воспользуемся спектральными представлениями:

$$\langle[\psi_1(x),\bar{\psi}_1(0)]\rangle = \int d\varkappa^2 [w_1^{(1)}(\varkappa^2)\, i\hat{\partial} + w_2^{(1)}(\varkappa^2)\, i\gamma_5\hat{\partial}]\Delta_1(x,\varkappa^2)$$

$$\langle[\psi_2(x),\bar{\psi}_2(0)]\rangle = \int d\varkappa^2 [w_1^{(2)}(\varkappa^2)\, i\hat{\partial} + w_2^{(2)}(\varkappa^2)\, i\gamma_5\hat{\partial} + w_3^{(2)}(\varkappa^2) + w_4^{(2)}(\varkappa^2)\, i\gamma_5]\Delta_1(x,\varkappa^2) \tag{23}$$

В них учтено несохранение четности и отсутствие массы у нейтрино.

Подставляя (23) в (22), приходим к равенству:

$$\mu_0^2 = \int d\varkappa^2 \varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) -$$

$$-\frac{4}{3} g_0^2 \int d\varkappa^2 [w_1^{(1)}(\varkappa^2) + w_2^{(1)}(\varkappa^2) + w_1^{(2)}(\varkappa^2) + w_2^{(2)}(\varkappa^2)]\left(1 - \varkappa^2 \frac{d}{d\varkappa^2}\right)\Delta_1(0,\varkappa^2), \tag{24}$$

которое вполне аналогично полученному в работе /10/ для нейтрального векторного мезона, взаимодействующего с сохраняющимся током. В этой работе можно найти также более подробные промежуточные выкладки.

Заметим, что к (24) можно прийти, вычисляя вакуумное среднее от одновременного коммутатора уравнения (13) с эрмитовски сопряженным уравнением. В этом случае экспоненциальные множители в (21) оказываются несущественными. Совпадение полученных разными способами результатов указывает на непротиворечивость принятого способа определения плотности тока.

В то же время, непосредственное использование формального выражения $j_\mu = g_0 \bar{\psi}_1 \gamma_\mu (1+\gamma_5)\psi_2$ и перестановочных соотношений (14) привело бы к формуле:

$$\mu_0^2 = \int d\varkappa^2 \varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) \tag{25}$$

Соотношения (17), (18), (19) и (25) могут однако одновременно выполняться лишь в отсутствие взаимодействия. Действительно, в этом случае

$$1 = \int da\, a \rho_1(a) \int db \frac{\rho_2(b)}{b} \geq \int da\, db \frac{a}{b} \rho_1(a)\rho_1(b) =$$

$$= \frac{1}{2}\int da\, db\, \rho_1(a)\rho_1(b)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \geq \int da\, db\, \rho_1(a)\rho_1(b) = 1$$

и, следовательно,

$$\rho_1(a) = \rho_2(a)$$

$$\frac{1}{2}\int da\, db\, \rho_1(a)\rho_1(b)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) = \int da\, db\, \rho_1(a)\rho_1(b),$$

что возможно лишь при условии $\rho_1(\varkappa^2) = \rho_2(\varkappa^2) = \delta(\varkappa^2 - \mu_0^2)$.

Тем же способом можно убедиться в том, что второе слагаемое в правой части формулы (24) должно быть отрицательным.

Заметим также, что из формул (19) и (24) следует некоторое сокращение расходимостей в поляризационном операторе векторного бозона. В частности, в низшем порядке теории возмущений он должен расходиться не квадратично, а лишь логарифмически.

ЛИТЕРАТУРА

I. J.Schwinger. Phys.Rev.Lett.,3,296,1959.

2. K.Johnson. Nucl.Phys.,25,435,1961.

3. W.Thirring. Acta Phys.Austriaca,Suppl.1,138,1964.

4. S.Okubo. Preprint IAEA IC/66/10, Trieste, 1966; Nuovo Cim., in press.

5. В.В.Соколов, И.Б.Хриплович. ЖЭТФ, в печати.

6. C.N.Yang, R.L.Mills. Phys.Rev.,96,191,1954.

7. В.И.Огиевецкий, И.В.Полубаринов. ЖЭТФ, 4I, 247, I96I .

8. А.И.Вайнштейн, В.В.Соколов, И.Б.Хриплович, ЯФ, I, 908, I965.

9. G.Segre. Nucl.Phys.,74,673,1965.

IO. В.В.Соколов. ЯФ, 3, № 4, I966.